Physik 11. Klasse (math.-nat.)
Aufgaben zur Mechanik

Richard Reindl

1997-2007

Die aktuellste Version der Aufgaben findet man unter

http://www.stbit.de

8. Oktober 2013

1 Kinematik

1.1 Grundgrößen

1.1.1. Am 1.1.1990 um 0:00:00 Uhr wird eine Quartzuhr mit der Standardatomuhr synchronisiert (genau gleich gestellt). Am 24.3.1993 zur Standardzeit 12:00:00 Uhr zeigt die Quartzuhr die Zeit 12:00:17 Uhr an. Berechne die relative Ungenauigkeit der Quartzuhr!

1.2 Messfehler

1.2.1. Eine Kugel fällt achtmal eine immer gleiche Höhe von 7 m hinunter. Mit einer Stoppuhr werden die Fallzeiten 1,13 s, 1,24 s, 1,22 s, 1,17 s, 1,20 s, 1,15 s, 1,18 s und 1,26 s gemessen. Berechne den Mittelwert und den relativen Fehler der Fallzeit!

1.2.2. Ein Vielfachmessgerät hat bei Spannungsmessungen einen Fehler von 2 % und bei Strommessungen einen Fehler von 0,5 %. Mit dem Gerät wird an einem Widerstand R die Spannung $U = 10{,}00\,\mathrm{V}$ und durch den Widerstand der Strom $I = 0{,}200\,\mathrm{A}$ gemessen. Berechne R mit Angabe des absoluten und relativen Fehlers! Rechne zuerst den maximalen und den minimalen Wert aus, den R annehmen kann!
Welches Gesetz vermutet man für den relativen Fehler eines Quotienten von zwei ungenauen Zahlen?

1.2.3. **Dezimalen und geltende Ziffern**

Dezimalen sind Nachkommastellen, geltende Ziffern beginnt man mit der ersten Ziffer ungleich Null zu zählen:

Zahl	Dezimalen	geltende Ziffern
23,0234	4	6
0,0034	4	2
20	0	2
20,00	2	4
$2 \cdot 10^1$	0	1
$3{,}78 \cdot 10^{-7}$	9	3

(a) Begründe folgende Regeln:

> Eine Summe ungenauer Zahlen hat höchstens so viele sinnvolle Dezimalen wie der ungenaueste Summand!

> Ein Produkt (Quotient) ungenauer Zahlen hat höchstens so viele geltende Ziffern wie der ungenaueste Faktor!

(b) $a = 2{,}304$, $b = 0{,}00456$, $c = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$, $d = 1{,}004 \cdot 10^8$, $e = 5 \cdot 10^{-8}$
Die in folgenden Termen auftretenden numerischen Werte sind exakt, a, b, c, d und e sind gerundete Zahlen.

i. Schreibe die Ergebnisse sinnvoll gerundet:

$$2\,a + 3\,b; \quad a^2 + b^2; \quad (b + c) \cdot d; \quad a \cdot d; \quad \sqrt{d} + \frac{a - b}{c}; \quad d \cdot c^3; \quad d \cdot e^2$$

ii. Runde einmal schon die Zwischenergebnisse und einmal nur das Endergebnis:

$$\frac{a}{b} + 100 \cdot b; \qquad \frac{c^2}{e^2}$$

Welche Regel folgt daraus?

1.3 Die geradlinige gleichförmige Bewegung

1.3.1. Untersuche die folgenden Bewegungen auf Gleichförmigkeit:

a)

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	1	1,5	3	4
$\frac{x}{\mathrm{m}}$	-30	-18	-12	8	20

b)

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	1	1,5	3	4
$\frac{x}{\mathrm{m}}$	-30	-18	-12	6	18

1.3.2. (a) Rechne $v = 1\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{h}}$ um auf $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{d}}$!

(b) Rechne die Lichtgeschwindigkeit um auf $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und $\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{ns}}$!

(c) Auf dem Planeten Dideldum gilt für Längen die Beziehung 1 Trara = 250 Trari und für Zeiten 1 Truru = 50 Triri.

Rechne $v_1 = 75\,\frac{\mathrm{Trara}}{\mathrm{Triri}}$ auf $\frac{\mathrm{Trari}}{\mathrm{Truru}}$ und $v_2 = 75\,\frac{\mathrm{Trara}}{\mathrm{Truru}}$ auf $\frac{\mathrm{Trari}}{\mathrm{Triri}}$ um!

1.3.3. Ein Auto fährt mit konstanter Geschwindigkeit v auf der Autobahn. Eine Stoppuhr am Lenkrad zeigt bei km 65 die Zeit 00:11:28 und bei km 82,5 die Zeit 00:19:48 an.

(a) Berechne die Geschwindigkeit des Autos in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$!

(b) Bei welchem Kilometer wurde die Stoppuhr gestartet?

(c) Wie lange war das Auto vom Beginn der Autobahn bis zum Starten der Stoppuhr unterwegs?

1.3.4. Bei km 30 auf der Autobahn München-Stuttgart findet ein Raubüberfall statt. Der Täter flüchtet mit seinem klapprigen Auto mit der Geschwindigkeit $v_1 = 80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in Richtung Stuttgart. Zwanzig Minuten später nimmt ein Polizeiauto vom Autobahnbeginn aus mit $v_2 = 150\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ die Verfolgung auf.

(a) Zeichne die Weltlinien beider Autos in *ein* Diagramm!
Verwende die Einheiten $10\,\mathrm{min} \,\widehat{=}\, 1\,\mathrm{cm}$ und $20\,\mathrm{km} \,\widehat{=}\, 1\,\mathrm{cm}$!

(b) Wann und wo holt die Polizei den Täter ein? Grafische und rechnerische Lösung!

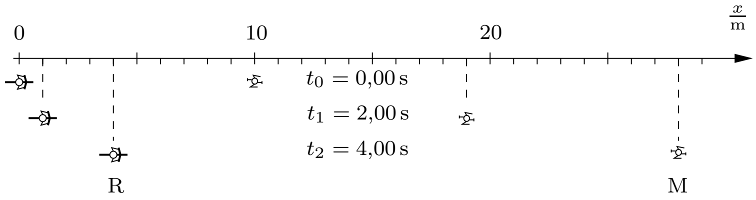
1.3.5. Zwei Raumstationen S_1 und S_2 sind 5000 km voneinander entfernt. Zur Zeit $t_0 = 0$ startet eine Rakete R_1 mit einem Geschwindigkeitsbetrag von $|v_1| = 500\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ von S_1 aus in Richtung nach S_2. Eine Stunde später startet eine weitere Rakete R_2 mit $|v_2| = 2000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ von S_2 nach S_1. Wann und wo begegnen sich die beiden Raumschiffe?
Rechnung und tx-Diagramm $(1\,\mathrm{h} \,\widehat{=}\, 2\,\mathrm{cm}, 1000\,\mathrm{km} \,\widehat{=}\, 1\,\mathrm{cm})$!

1.3.6. Kurze Ultraschallimpulse werden in einem zeitlichen Abstand von $\Delta T = 0{,}75\,\mathrm{s}$ von hinten auf ein durch Garmisch fahrendes Auto gerichtet, dort reflektiert und am Ort des Senders in einem zeitlichen Abstand von $\Delta t = 0{,}85\,\mathrm{s}$ wieder registriert. Berechne die Geschwindigkeit v des Autos! (Es herrscht Windstille und eine Temperatur von 20 °C; die Schallgeschwindigkeit bei 20 °C beträgt $c_s = 340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.)
Zeichne als Überlegungsfigur ein übersichtliches tx-Diagramm!

1.3.7. In Bagdad wird dem Kalifen um 1:00 Uhr nachts (t_1) ein Pferd gestohlen. Der Dieb ergreift sofort die Flucht und legt dabei pro Stunde die Strecke 11 km 200 m zurück. Um 7:00 Uhr morgens (t_2) wird der Diebstahl entdeckt und der Kalif selbst reitet dem Dieb auf der Stelle mit seinem besten Pferd nach. Der Kalif legt dabei in einer Stunde einen Weg von 14 km 400 m zurück.

Wann (T) und in welcher Entfernung von Bagdad (X) wird der Dieb gestellt? Rechne zunächst in allgemeinen Größen und setze erst in die fertigen Ergebnisse die angegebenen Zahlenwerte ein.

1.3.8. Die Luftaufnahme einer Überwachungskamera zeigt einen Radfahrer (R) und einen Marathonläufer (M) zu drei verschiedenen Zeiten. Der Radfahrer startet zur Zeit $t_0 = 0$ mit der konstanten Beschleunigung a.



(a) Ermittle a und die Geschwindigkeit v_M des Läufers aus den Daten des Überwachungsfotos.

(b) Stelle die Funktionsgleichungen für die Geschwindigkeiten ($v_\mathrm{M}(t)$, $v_\mathrm{R}(t)$) und die Orte ($x_\mathrm{M}(t)$, $x_\mathrm{R}(t)$) der beiden Sportler auf.

(c) Wann (t_3) und wo (x_3) holt der Radfahrer den Läufer ein? Welche Geschwindigkeit hat der Radfahrer zu diesem Zeitpunkt?

(d) Genau zur Zeit t_3 beginnt der Radfahrer einen Bremsvorgang und erteilt sich und dem Fahrrad die Beschleunigung $a' = -1{,}25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Wann ($t_4$) kommt der Radler zum Stillstand? Zeichne das tv-Diagramm des Radlers und berechne $x_\mathrm{R}(t_4)$ ($t = 10\,\mathrm{s} \mathrel{\widehat{=}} 5\,\mathrm{cm}$, $v = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \mathrel{\widehat{=}} 5\,\mathrm{cm}$).

(e) Stelle die Funktionsgleichung für den Ort $x_\mathrm{R}(t)$ des Radlers zwischen t_3 und t_4 auf und zeichne die Grafen der Funktionen $x_\mathrm{M}(t)$ und $x_\mathrm{R}(t)$ im Intervall $[0\,;\,30\,\mathrm{s}]$ in ein Diagramm ($t = 10\,\mathrm{s} \mathrel{\widehat{=}} 5\,\mathrm{cm}$, $x = 10\,\mathrm{m} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$). Wann ($t_5$) holt der Läufer den ruhenden Radler ein?

1.3.9. Die Autos ① und ② fahren mit den konstanten Geschwindigkeiten v_1 und v_2 ($v_1 > v_2$) in die gleiche Richtung auf der Landstraße. Auto ① befindet sich zunächst hinter Auto ② und setzt zum Überholen an.

(a) Berechne die Länge L des gesamten Überholweges von Fahrzeug ①, ausgedrückt durch die Geschwindigkeiten v_1 und v_2, die Fahrzeuglängen s_1 und s_2 sowie durch den Sicherheitsabstand a, der beim Ausscheren wie beim Einscheren eingehalten werden muss.

(b) Für den Sicherheitsabstand gilt die Faustformel a = *halber Tachostand*, d.h. der Zahlenwert von a in Metern ist gleich dem halben Zahlenwert von v_1 in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Der Sicherheitsabstand ist also proportional zur Geschwindigkeit, d.h. $a = \alpha \cdot v_1$. Berechne α in einer möglichst einfachen Einheit.

(c) Setze $a = \alpha \cdot v_1$ in den Ausdruck für L ein. Im Folgenden sei $s_1 = s_2 = 5\,\mathrm{m}$ und $v_2 = 100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Zeichne den Grafen der Funktion $L(v_1)$. Berechne dazu L für $v_1 \in \left\{105\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}, 110\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}, 120\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}, 140\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}, 160\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}, 200\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}, 300\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right\}$.

(d) Jetzt sei $v_1 = \text{konst.} = 100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Zeichne $L(v_2)$ in das gleiche Diagramm wie in Teilaufgabe (c). Berechne dazu L für $v_2 \in \left\{10\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}, 50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}, 70\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}, 80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}, 90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}, 95\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right\}$.

1.3.10. Familie Mittelmaß fährt mit ihrem Wohnmobil mit der konstanten Geschwindigkeit $v_1 = 70\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in den sonnigen Süden, die Startzeit sei $t_0 = 0$. Das Wohnmobil wird von Sohn Willi auf dem Motorrad begleitet. Zur Zeit $t_1 = 1\,\mathrm{h}$ bemerkt Frau Mittelmaß, dass sie ihre neue Designer-Sonnenbrille vergessen hat. Willi rast sofort mit der konstanten Geschwindigkeit $v_2 = 105\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ zurück zur Wohnung, holt ohne Zeitverzögerung die Brille und verfolgt das unbeirrt weiterfahrende Wohnmobil wiederum mit der Geschwindigkeit v_2, das er dann zur Zeit t_3 am Ort x_3 einholt.
Drücke t_3 und x_3 durch t_1, v_1 und v_2 aus und setze dann die Zahlenwerte ein!
Zeichne das tx-Diagramm aller Bewegungen ($1\,\mathrm{h} \mathrel{\widehat{=}} 2\,\mathrm{cm}$, $100\,\mathrm{km} \mathrel{\widehat{=}} 2\,\mathrm{cm}$)!

1.3.11. Herr Gsundsama läuft frühmorgens mit der konstanten Geschwindigkeit v von seinem Gartentor ($x = 0$) zum Büro. Zur Zeit $t_1 = 10\,\mathrm{s}$ startet sein Hund Fiffi ebenfalls am Tor, läuft zu seinem Herrchen, kehrt sofort um, erreicht zur Zeit $t_2 = 50\,\mathrm{s}$ das Tor, läuft wieder zu seinem Herrchen, kehrt wieder um und und bleibt zur Zeit $t_3 = 150\,\mathrm{s}$ erschöpft am Tor stehen. Während des gesamten Laufs betrug Fiffi's Geschwindigkeitsbetrag $7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

(a) Zeichne die Weltlinien von Hund und Herrchen in ein tx-Diagramm mit den Einheiten $50\,\mathrm{m} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$ und $100\,\mathrm{s} \mathrel{\widehat{=}} 5\,\mathrm{cm}$. Berechne v in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$! Schreibe Herrn Gsundsama's $x(t)$ in einer möglichst einfachen Form hin!

(b) Nach einer kurzen Rast startet Fiffi um $t_4 = 200\,\mathrm{s}$ einen erneuten Lauf zum Herrchen und zurück. Wie schnell muss er laufen (in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$), damit er zur Zeit $t_5 = 500\,\mathrm{s}$ wieder am Tor ankommt?

1.3.12. Der böse Blofield startet zur Zeit $t_1 = 60\,\mathrm{s}$ am Ort $x = 0$ mit einer Phantom und einer Atombombe an Bord in Richtung Buckingham-Palast, der sich am Ort $x_{20} = 100\,\mathrm{km}$ befindet. Blofields Geschwindigkeit ist $v_1 = 300\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. James Bond, der alles schon im Voraus weiß, startete bereits zur Zeit Null am Buckinham-Palast und fliegt Blofield mit seinem Minisuperjet entgegen. Bond legt dabei in der Minute $30\,\mathrm{km}$ zurück. Bond hat Abwehraketen an Bord, die in einer Sekunde $1200\,\mathrm{m}$ über Grund zurücklegen und genau $\Delta t = 36\,\mathrm{s}$ nach dem Abschuss detonieren.

(a) Zeichne in ein tx-Diagramm die Weltlinien von Blofield und Bond ein ($20\,\mathrm{s} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$ und $20\,\mathrm{km} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$).

(b) Stelle die Gleichungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der Weltlinien von Blofield und Bond auf. Zu welcher Zeit t_T und an welchem Ort x_T treffen die Beiden aufeinander?

(c) Zu welcher Zeit T muss Bond seine Rakete gegen Blofield abfeuern, damit sie genau beim Zusammentreffen mit Blofield explodiert? Zeichne die Weltlinie der richtig abgefeuerten Rakete in das schon vorhandene Diagramm ein.
Hilfe: Drücke zunächst den Startort x_{30} und die Aufprallzeit T_0 der Rakete durch T aus!

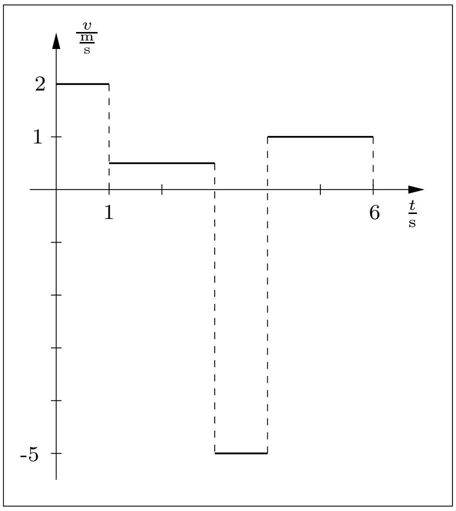
1.4 Der Weg im tv-Diagramm

1.4.1. Nebenstehend ist das tv-Diagramm einer Bewegung mit $x(0) = 0$ gezeichnet.

Berechne $x(1\,\mathrm{s})$, $x(3\,\mathrm{s})$, $x(4\,\mathrm{s})$ sowie $x(6\,\mathrm{s})$.

Zeichne das tx-Diagramm der Bewegung!

Für welches t mit $2\,\mathrm{s} < t < 6\,\mathrm{s}$ ist $x(t) = 0$?



1.4.2. Die Geschwindigkeit einer Bewegung genügt der Gleichung $v(t) = v_0 \cdot \sin(\omega t)$ mit $v_0 = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $\omega = \frac{\pi}{4\,\mathrm{s}}$.

(a) Zeichne das tv-Diagramm der Bewegung.

(b) Zerlege das t-Intervall $[0\,\mathrm{s}\,,\,4\,\mathrm{s}]$ in 8 Teilintervalle und berechne $\Delta x = x(4\,\mathrm{s}) - x(0\,\mathrm{s})$ nach der Mittelpunktsregel (Mid-Point-Rule).

(c) Verwende Zwischenergebnisse von Teilaufgabe (b) und zeichne das tx-Diagramm der Bewegung unter der Voraussetzung $x(0) = 0$.

1.4.3. Für die Bewegung eines Rennwagens ist die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit gegeben:

$$v(t) = \begin{cases} -\frac{3}{2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3} \cdot t^2 + 12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq 4\,\mathrm{s} \\ 24\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} & \text{für} \quad 4\,\mathrm{s} < t < 10\,\mathrm{s} \\ 104\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t & \text{für} \quad 10\,\mathrm{s} \leqq t \leqq 13\,\mathrm{s} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Erstelle eine Wertetabelle für $v(t)$ zu den Zeiten 0 s, 1 s, 2 s, 3 s, 4 s, 10 s, 11 s, 12 s und 13 s und zeichne dann den Grafen von v ($1\,\mathrm{s} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$, $10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \mathrel{\widehat{=}} 2\,\mathrm{cm}$).

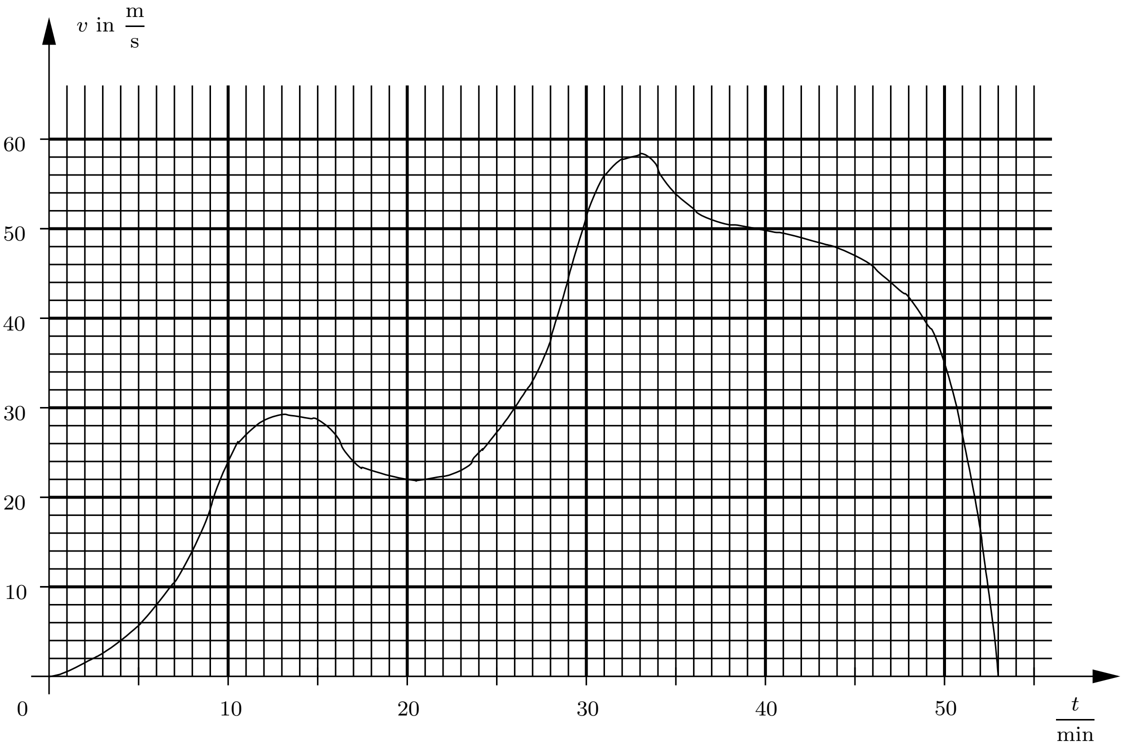
(b) Nach welcher Regel erhält man aus einem tv-Diagramm den zurückgelegten Weg?

(c) Der Weg zur Zeit Null ist $x(0) = 0$. Berechne mit der „Mid-Point-Rule“ einen Näherungswert für $x_1 = x(4\,\mathrm{s})$. Verwende das Zeitintervall $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$. Der exakte Wert ist $x_1 = 64\,\mathrm{m}$; berechne den relativen Fehler unseres Näherungswertes.

(d) Im Zeitintervall $[4\,\mathrm{s}\,, 10\,\mathrm{s}]$ liegt eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit vor. Stelle die Gleichung für $x(t)$ in diesem Intervall auf (verwende das exakte x_1)! Zu welcher Zeit t_2 ist das Auto am Ort $x_2 = 148\,\mathrm{m}$?

(e) Mit Δx bezeichnen wir jetzt den Weg, der im Zeitintervall $[10\,\mathrm{s}\,, t]$ zurückgelegt wird, wobei t zwischen 10 s und 13 s liegt. Verwende die Regel aus (b) und das in (a) gezeichnete Diagramm (geeignet ergänzen) zur Berechnung von Δx. Vereinfache das Ergebnis soweit wie möglich.

1.4.4. **Fahrtenschreiber**



Die Abbildung zeigt das Ergebnis eines Fahrtenschreibers zwischen zwei Tankstops eines PKW's. Beim zweiten Halt wird der anfänglich volle Tank mit 12,3 Litern Benzin wieder ganz aufgefüllt. Gesucht ist der möglichst genaue Benzinverbrauch des Autos auf 100 km.

(a) Wähle für die Berechnung der Fahrstrecke in den ersten 50 min $\Delta t_1 = 10\,\mathrm{min}$ und für den Rest $\Delta t_2 = 3\,\mathrm{min}$.

(b) Rechne jetzt durchgehend mit $\Delta t = 1\,\text{min}$. Um wieviel Prozent weicht das ungenauere Ergebnis vom genaueren Ergebnis ab?

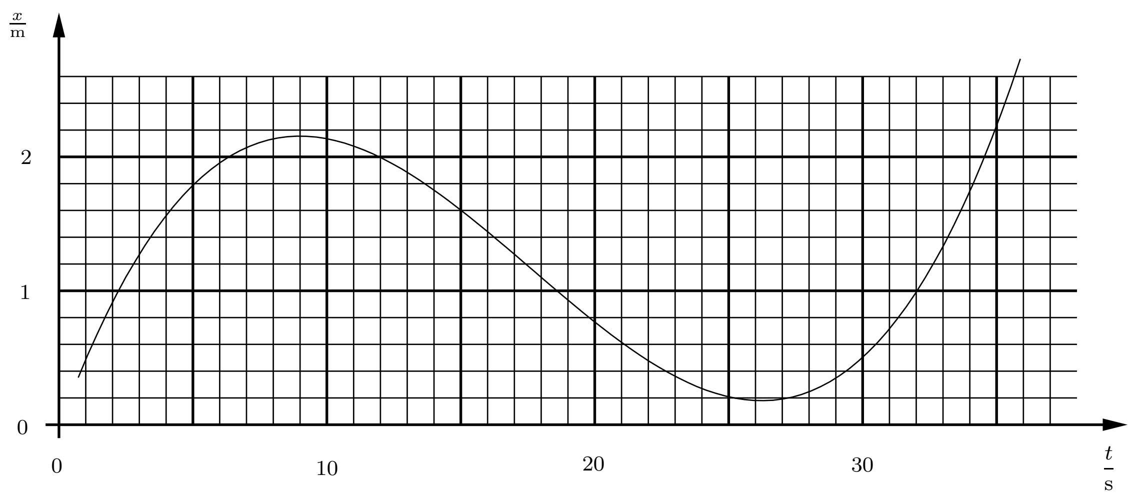
1.4.5. Ein Auto startet zur Zeit Null und seine Geschwindigkeit ändert sich nach dem Gesetz:

$$v(t) = 0{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^3} \cdot t^2$$

Berechne mit Hilfe der Midpoint-Rule einen Näherungswert x_n für den Weg, den das Auto in der Zeit von Null bis 4,8 s zurücklegt. Teile dazu das Zeitintervall in vier gleich große Teilintervalle. Wie groß ist der relative Fehler des berechneten Näherungswertes, wenn das exakte Ergebnis $x_e = 18{,}432\,\text{m}$ lautet?

1.5 Momentangeschwindigkeit

1.5.1. Die Abbildung zeigt das tx-Diagramm der Bewegung einer Ameise. Ermittle so genau wie möglich die Geschwindigkeiten der Ameise zu den Zeiten 15 s und 32 s. Zu welchen Zeiten ist die Geschwindigkeit null, wann ist sie am kleinsten bzw. am größten?



1.5.2. Eine Bewegung genügt der Gleichung $x(t) = A \cdot \sin(\omega t)$ mit $A = 2\,\text{m}$ und $\omega = \frac{\pi}{6\,\text{s}}$.

(a) Berechne näherungsweise mit dem Taschenrechner die Geschwindigkeiten $v(1\,\text{s})$ und $v(8\,\text{s})$.

(b) Berechne die mittleren Geschwindigkeiten in folgenden Intervallen:

$$[0\,\text{s}; 6\,\text{s}], \quad [0\,\text{s}; 2\,\text{s}], \quad [1{,}9\,\text{s}; 2{,}1\,\text{s}], \quad [1{,}99\,\text{s}; 2{,}01\,\text{s}]$$

1.6 Die Beschleunigung

1.6.1. Die Geschwindigkeit einer Bewegung genügt der Gleichung $v(t) = A \cdot 2^{\alpha t}$ mit $A = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $\alpha = \frac{1}{4\,\text{s}}$. Berechne die Beschleunigungen $a(0)$ und $a(4\,\text{s})$ näherungsweise mit dem Taschenrechner.

1.6.2. Ein Körper bewegt sich nach dem Gesetz $x(t) = bt^3$ mit $b = \frac{1}{12}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^3}$.

(a) Berechne $v(t)$ und $a(t)$.

(b) Zeichne die Grafen von x, v und a in ein Diagramm mit passend gewählten Einheiten im Intervall $[0; 4\,\text{s}]$.

1.7 Die Bewegung mit konstanter Beschleunigung

1.7.1. Ein Projektil wird in einem $s = 50\,\mathrm{cm}$ langen Gewehrlauf auf $v = 400\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beschleunigt. Berechne die Beschleunigung a und die Zeitdauer t des Beschleunigungsvorgangs.

1.7.2. Ein Auto beschleunigt in $t = 10{,}8\,\mathrm{s}$ von $v_0 = 0$ auf $v = 100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Berechne die Beschleunigung a und die Beschleunigungsstrecke s.

1.7.3. Ein Zug beschleunigt mit $a = 0{,}10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ aus dem Stand auf $v = 72\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Wie lange dauert der Beschleunigungsvorgang und wie weit fährt der Zug dabei?

1.7.4. Eine Rakete beginnt aus der Ruhe heraus eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung a und legt in den ersten acht Sekunden die Strecke $x = 768\,\mathrm{m}$ zurück. Welche Geschwindigkeit v hat die Rakete eine Minute nach dem Start?

1.7.5. Ein Körper K, der eine beliebige Bewegung ausführt (weder die Geschwindigkeit noch die Beschleunigung müssen konstant sein), sei zur Zeit t am Ort $x(t)$. Die Definition der **mittleren Geschwindigkeit** $\overline{v}_{12}$ im Zeitintervall $[t_1\,;\,t_2]$ lautet

$$\overline{v}_{12} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

(a) Beweise:

> Für die Bewegung mit **konstanter** Beschleunigung ist die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t_1\,;\,t_2]$ gleich dem Mittelwert der Geschwindigkeiten $v(t_1)$ und $v(t_2)$.

Schreibe diesen Satz auch als Formel hin und veranschauliche ihn in einem tv-Diagramm!

(b) Beweise:

> Bei der Bewegung mit konstanter Beschleunigung ist die mittlere Geschwindigkeit in einem Zeitintervall $[t_1, t_2]$ gleich der Momentangeschwindigkeit im Mittelpunkt des Intervalls!

1.7.6. Ein PKW fährt mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auf der Autobahn dahin. Auf der Standspur wartet ein Porsche, bis der PKW 500 m Vorsprung hat. Dann startet der Sportwagen mit der konstanten Beschleunigung $a = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, die er 20 s lang beibehält. Danach fährt der Porsche mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Wann, wo und mit welcher Geschwindigkeit holt der Sportwagen den PKW ein?

1.7.7. Ein Auto fährt mit $v_0 = 100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ dahin. Plötzlich taucht 125 m vor dem Wagen ein Reh auf. Nach einer Schrecksekunde bremst der Fahrer und erteilt somit seinem Auto die Beschleunigung $a = -4{,}00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Gibt es einen Rehbraten oder nicht?
Zeichne das tx-Diagramm.

1.7.8. Bei der Führerscheinprüfung lernt man die Faustformel

$$\boxed{\text{Bremsweg in Metern} \;=\; \frac{\text{Tachoanzeige} \cdot \text{Tachoanzeige}}{100}}$$

Von welcher Bremsverzögerung wird dabei ausgegangen?

1.7.9. Für eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung a gilt $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$, $v_1 = v(t_1)$ und $v_2 = v(t_2)$. Beweise:

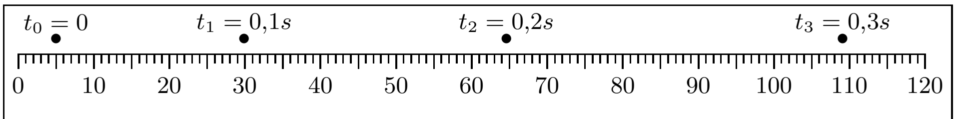
$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$$

Leite mit dieser Gleichung die Formel für den Bremsweg eines Autos her.

1.7.10. Ein PKW fährt von einem Feldweg auf eine Landstraße. Dort beschleunigt er praktisch aus dem Stand mit $a = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Gleichzeitig kommt von hinten ein Bus mit $v_2 = 108\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wie weit müssen zu diesem Zeitpunkt die beiden Fahrzeuge mindestens voneinander entfernt sein, damit der Bus nicht abbremsen muss? txDiagramm!

1.7.11. Auf einem Spielzeugauto sind zwei Silvesterraketen befestigt. Die erste Rakete zündet zur Zeit $t_0 = 0$ und erteilt dem zunächst ruhenden Auto drei Sekunden lang die Beschleunigung $a_1 = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Zur Zeit $t_1 = 3\,\text{s}$ zündet die zweite Rakete und das Auto bewegt sich von jetzt an mit der Beschleunigung $a_2 = -6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Für welches t_2 gilt $x(t_2) = x(0)$? Berechne und zeichne $x(t)$ im Intervall $[0; t_2]$!

1.7.12. Ein **Stroboskop** ist ein Gerät, das in konstanten Zeitabständen Δt Lichtblitze sehr kurzer Zeitdauer aussendet. Eine frei fallende Kugel wird im Dunkeln von einem Stroboskop beleuchtet und mit einer langen Belichtungsdauer fotografiert. Auf dem Film sieht man die Lage der Kugel zu den Zeiten des Aussendens der Lichtblitze.



Stroboskopaufnahme mit $\Delta t = 0{,}1\,s$; Längeneinheit: 1 cm

Wir nehmen an, dass die Kugel eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung a ausführt. Berechne die Bewegungsdaten der Kugel (x_0, v_0 und a) aus den drei rechten Positionen im Stroboskopbild. Weise nach, dass die ganz linke Position zu der gemachten Annahme einer gleichförmig beschleunigten Bewegung passt!

1.7.13. Zwei Autos fahren mit den konstanten Geschwindigkeiten $v_0 = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ im Abstand $b = 250\,\text{m}$ hintereinander her. Ab der Zeit t_1 beschleunigt der hintere Fahrer seinen Wagen mit $a = 0{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und bremst ihn ab der Zeit t_2 mit der Beschleunigung $-a$ solange ab, bis er zur Zeit t_3 wieder die Geschwindigkeit v_0 erreicht und den Abstand zum Vordermann auf $c = 50\,\text{m}$ verringert hat. Berechne die Zeitdauer und die maximale Geschwindigkeit des Manövers!
Zeichne ein tx-Diagramm mit $x_{\text{Hintermann}}(0) = 0$ und $t_1 = 10\,\text{s}$!

1.7.14. Zwei Autos der gleichen Länge s fahren mit der konstanten Geschwindigkeit u und dem Sicherheitsabstand $A = \alpha \cdot u$ (siehe Aufgabe 1.3.9) hintereinander her. Das hintere Auto schert auf die linke Fahrbahnseite aus, beginnt mit der konstanten Beschleunigung a einen Überholvorgang und wechselt nach erreichen des Sicherheitsabstandes A wieder auf die rechte Spur.

a) Berechne allgemein die Überholzeit t^* und den Weg L, den das Überholfahrzeug auf der linken Straßenseite zurücklegt!

b) Ab jetzt sei $s = 5\,\text{m}$ und $u = 108\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Berechne L für

$$a \in \left\{ 0{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2},\ 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2},\ 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2},\ 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2},\ 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right\}$$

und zeichne den Grafen von $L(a)$! Welche Beschleunigung ist für einen Sportwagen realistisch?

c) Berechne $L_{\min} = \lim\limits_{a\to\infty} L(a)$! Für welches a ist $L = 2 \cdot L_{\min}$?

1.7.15. Für einen Thriller wird folgender Stunt geplant: Ein Ferrari und ein Mercedes rasen auf einer langen, schmalen Brücke aufeinander zu. Die Fahrer bremsen ihre Wagen so ab, dass sie mit quietschenden Reifen und sich berührenden Stoßstangen zum Stillstand kommen. Da das Beschaffen von neuen Stuntmen und neuen Autos zu teuer ist, wird vor der ersten Probe ein Physiker um Rat gefragt, dessen Part jetzt du übernehmen musst:

Zur Zeit $t_0 = 0$ befindet sich der Mercedes bei $x_{10} = 0$ mit $v_{10} = 144\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, der Ferrari dagegen bei $x_{20} = 1000\,\text{m}$ mit $v_{20} = -216\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Der Mercedes-Fahrer beginnt den Bremsvorgang zur Zeit t_1, der Ferrari-Fahrer zur Zeit t_2; die Beschleunigungen während der Bremsvorgänge sind $a_1 = -4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und $a_2 = +5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Berechne t_1 und t_2 sowie die Zeit T des Treffpunkts der beiden Autos!
Zeichne $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sowie $v_1(t)$ und $v_2(t)$ in je ein Diagramm !

Tip: Mit Hilfe von "*Stillstand zur Zeit T*" drückt man t_1 und t_2 durch T aus und setzt in "*Stillstand am gleichen Ort*" ein!

1.8 Der freie Fall

1.8.1. Wie lange braucht ein Stein für den Fall von einem 60 m hohen Turm? Mit welcher Geschwindigkeit prallt er auf den Boden?

1.8.2. Ein Auto stürzt von einer Brücke in einen Fluss und hat beim Aufprall die Geschwindigkeit $20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wie hoch ist die Brücke?

1.8.3. Eine Kanonenkugel wird mit $v_0 = 200\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ senkrecht nach oben geschossen. Berechne die maximale Höhe h, ihre Aufprallgeschwindigkeit v_a auf den Boden und die gesamte Flugdauer t_a. Zeichne ein tx- und ein tv-Diagramm der gesamten Bewegung.

1.8.4. Von einem Ballon, der in der Höhe $h = 2000\,\text{m}$ über dem Boden schwebt, wird ein Sandsack abgeworfen. Gleichzeitig wird vom Boden aus eine Leuchtkugel mit $v_0 = 100\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ senkrecht nach oben geschossen. Wann und wo begegnen sich Leuchtkugel und Sandsack? Wann und wo erreicht die Leuchtkugel ihren höchsten Punkt? Zeichne $x(t)$ für beide Bewegungen in **ein** Diagramm!

1.8.5. Eine Sylvesterrakete wird senkrecht nach oben geschossen; dabei wird ihr $t_0 = 3{,}00\,\text{s}$ lang die Beschleunigung $a = 17{,}44\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ erteilt. Berechne die maximale Höhe h und die gesamte Flugdauer. Zeichne ein tv- und ein tx-Diagramm des Fluges.

1.8.6. Ein Stein fällt mit der Anfangsgeschwindigkeit Null vom Rand eines Brunnens in die Tiefe. Nach $T = 3{,}5\,\text{s}$ hört man am Brunnenrand das Aufklatschen des Steins auf der Wasseroberfläche. Berechne die Tiefe h des Brunnens!
(Schallgeschwindigkeit: $c_s = 327\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$)

1.8.7. Auf dem Planeten Solaria gilt für die Fallbeschleunigung $g = 16{,}00\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und die Schallgeschwindigkeit auf Solaria ist $c = 320\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Auf dem Gipfel einer $h = 3150\,\text{m}$ hohen Felswand steht eine Superkanone, die zur Zeit Null eine Kugel mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben schießt. Gleichzeitig mit dem Abschuss der Kugel explodiert am Fuß der Felswand eine Granate. Der Knall der Explosion erreicht die Kugel zur Zeit t_1 genau im höchsten Punkt ihrer Flugbahn.

(a) Drücke t_1 durch v_0 und g aus und berechne dann die Abschussgeschwindigkeit v_0, die maximal erreichte Höhe H und die gesamte Flugdauer t_2 der Kugel vom Abschuss bis zum Aufprall am Fuß der Felswand! Achtung: Es gibt zwei Lösungen!

(b) Zeichne die beiden möglichen Weltlinien der Kugel und des Schallsignals in ein tx-Diagramm ein (verwende die Einheiten $10\,\text{s} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{cm}$, $1\,\text{km} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{cm}$).

1.8.8. Die Enterprise erkundet den noch unerforschten Planeten Aurora. An Bord befindet sich ein Ultraschallgerät (USG), das einen kurzen Schallimpuls aussendet und die Zeitdauer bis zur Rückkehr des irgendwo reflektierten Signals misst. Mit diesem Gerät wurde schon die Schallgeschwindigkeit auf Aurora zu $c = 324{,}00\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ bestimmt.

(a) Das USG sendet mehrere Signale zur Planetenoberfläche und empfängt alle Reflexionen genau $\Delta t = 4{,}24692\,\text{s}$ nach dem jeweiligen Aussenden. Welche Informationen erhält man daraus über die Flughöhe h und die Vertikalgeschwindigkeit v_0 der Enterprise?

(b) Um die Fallbeschleunigung g auf Aurora zu messen, wird der Antrieb der Enterprise zur Zeit Null ausgeschaltet und sie beginnt einen freien Fall. Ebenfalls zur Zeit Null sendet das USG einen Impuls zur Planetenoberfläche, der zur Zeit $t_1 = 4{,}0000\,\mathrm{s}$ wieder empfangen wird. Schreibe die Gleichungen für die Ortskoordinaten $x_E(t)$ der Enterprise und $x_R(t)$ des **reflektierten** Schallimpulses hin und berechne damit g. Die Rechnung ist unbedingt zuerst in allgemeinen Größen auszuführen und die Zahlenwerte sind erst in das Endergebnis einzusetzen! Berechne noch $x_1 = x_E(t_1)$ und $v_1 = v_E(t_1)$.

(c) Zur Kontrolle wird zur Zeit t_1 noch ein weiteres Schallsignal zur Planetenoberfläche geschickt und zur Zeit t_2 wieder registriert. Berechne t_2.

1.8.9. Von der Spitze S eines Eiszapfens an einer Dachrinne lösen sich in konstanten Zeitabständen Wassertropfen. Ein arbeitsloser Physiker, vor dessen Studierstube das Wasser heruntertropft, ermittelt Folgendes:

- In 8,00 s lösen sich genau 32 Tropfen.
- Wenn ein Tropfen auf den Boden ($x = 0$) trifft, befindet sich der nächste Tropfen $x_1 = 2{,}81\,\mathrm{m}$ über dem Boden.

Stelle den Sachverhalt anhand einer übersichtlichen Skizze und eines tv-Diagramms dar (in beiden Zeichnungen müssen die relevanten Größen erkennbar und beschriftet sein). Berechne zuerst die Geschwindigkeit v_1 eines Tropfens in der Höhe x_1 über dem Boden und dann die Höhe h der Eiszapfenspitze S über dem Boden.

1.9 Galilei-Transformation

1.9.1. Ein Fluss (System S') fließt mit der Strömungsgeschwindigkeit $\overline{v}$ relativ zum Ufer (System S). Zur Zeit $t_0 = 0$ befinden sich die Ursprünge beider Systeme am gleichen Ort. Ebenfalls zur Zeit $t_0 = 0$ startet am Ort $x_0 = 0$ ein Paddelbootfahrer stromaufwärts. Am Ort $x_1 = -1\,\mathrm{km}$ verliert er seinen Hut, der mit dem Wasser stromabwärts treibt. Zehn Minuten später (am Ort x_2) fällt ihm ein, dass er Geld im Hut versteckt hat. Er kehrt sofort um und fischt den Hut genau an seinem Startpunkt $x_0 = 0$ wieder aus dem Wasser. Während der ganzen Fahrt bewegt sich der Paddler mit einer Geschwindigkeit vom konstanten Betrag v relativ zum Wasser.

Zeichne ein $tx-$ und ein tx'-Diagramm des ganzen Geschehens und berechne dann die Strömungsgeschwindigkeit $\overline{v}$!

1.9.2. Ein Zug beginnt zur Zeit $t_0 = 0$ aus der Ruhe heraus eine Bewegung mit der konstanten Beschleunigung $a = 0{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Ab der Zeit $t_1 = 200\,\mathrm{s}$ fährt der Zug mit der konstanten Geschwindigkeit v_1. Das Bezugssystem S ist fest mit dem Bahndamm verbunden, der Zug ruht im System S'; zur Zeit t_0 befinden sich die Ursprünge der beiden Systeme am gleichen Ort. Der Ursprung von S' ist das Zugende, die Länge des Zuges ist $L = 244{,}8\,\mathrm{m}$. Zur Zeit $t_2 = 300\,\mathrm{s}$ wird genau in der Mitte des Zuges ein Pistolenschuss abgefeuert, der den Zuganfang A zur Zeit t_A und das Zugende E zur Zeit t_E erreicht. Der Schall breitet sich relativ zur ruhenden Luft mit der Geschwindigkeit $c_\mathrm{s} = 340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ aus.

(a) Berechne t_A und t_E unter der Annahme, dass sich der Schall innerhalb der Waggons ausbreitet, in denen kein Luftzug herrscht!

(b) Wir nehmen jetzt an, dass die Pistole beim Abfeuern des Schusses aus dem Fenster gehalten wird und sich der Schall außerhalb des Zuges ausbreitet. Berechne wiederum t_A und t_E unter der Annahme völliger Windstille im Bahndammsystem!

(c) Zur Zeit $t_3 = 100\,\mathrm{s}$ wird mit der Beschleunigung $a_1 = -30{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ (gemessen im Bahndammsystem S) am Zuganfang eine Spielzeugrakete in Richtung Zugende abgefeuert. Wann erreicht die Rakete das Zugende? Rechnung in beiden Systemen!

1.10 2-dimensionale Bewegung

1.10.1. (a) Beweise allgemein: $\lambda\,\vec{a} \parallel \vec{a}$ und $|\lambda\,\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ Berechne: $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ und $|5\vec{a}|$!

Berechne und zeichne: $-\vec{a}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$, $\vec{b} + (-\vec{a})$, $2\vec{a} - \vec{b}$!

1.10.2. Zeichne die Bahnkurven folgender Bewegungen:

(a) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t \cdot \sin(\frac{t}{\mathrm{s}}) \\ 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t \cdot \cos(\frac{t}{\mathrm{s}}) \end{pmatrix}$ Berechne $\vec{v}(7\,\mathrm{s})$ und $\vec{a}(7\,\mathrm{s})$ näherungsweise mit dem Taschenrechner!

(b) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1\,\mathrm{m} \cdot \sin(\frac{2}{\mathrm{s}} \cdot t) \\ 1\,\mathrm{m} \cdot \cos(\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t) \end{pmatrix}$ Berechne $\vec{v}(2{,}4\,\mathrm{s})$ und $\vec{a}(2{,}4\,\mathrm{s})$ näherungsweise mit dem Taschenrechner!

1.10.3. Das Rad eines Einrades (r = Radius des Rades = Pedallänge = $10\,\mathrm{cm}$, Nabe des Pedals $20\,\mathrm{cm}$ über dem Boden) dreht sich einmal in einer Sekunde. Zeichne die Bahnkurve eines Punktes P des Rades, der zur Zeit Null bei $x = 0$ gerade den Boden berührt! Zeichne die Bahnkurve der Fußspitze des Fahrers (zur Zeit Null tiefster Punkt bei $x = 0$), wenn sich das Pedal doppelt (halb) so schnell dreht wie das Rad! Galileitransformation! Berechne jeweils das größte und das kleinste v_x!

1.10.4. Eine mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ fliegende Sportmaschine überfliegt um 1:00 Uhr ein Funkfeuer bei $\mathrm{F}_1(100\,\mathrm{km}|-200\,\mathrm{km})$ und um 3:00 Uhr eines bei $\mathrm{F}_2(-300\,\mathrm{km}|100\,\mathrm{km})$. Berechne $\vec{v}$, $v = |\vec{v}|$ und die Position des Flugzeugs um 4:00 Uhr! Zeichnung!

2 Dynamik

2.1 Der Trägheitssatz

2.1.1. Beschreibe mindestens drei physikalische Effekte, die mit dem Trägheitssatz erklärt werden können!

2.2 Masse und Impuls

2.2.1. Eine unbemannte Raumsonde explodiert und zerbricht in zwei Teile. Durch fotografische Registrierung werden die Geschwindigkeiten der Bruchstücke zu $|\vec{v}_1| = 700\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $|\vec{v}_2| = 200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ festgestellt. Ein Bruchstück wird eingefangen und seine Masse zu $m_2 = 210\,\mathrm{kg}$ bestimmt. Berechne m_1!

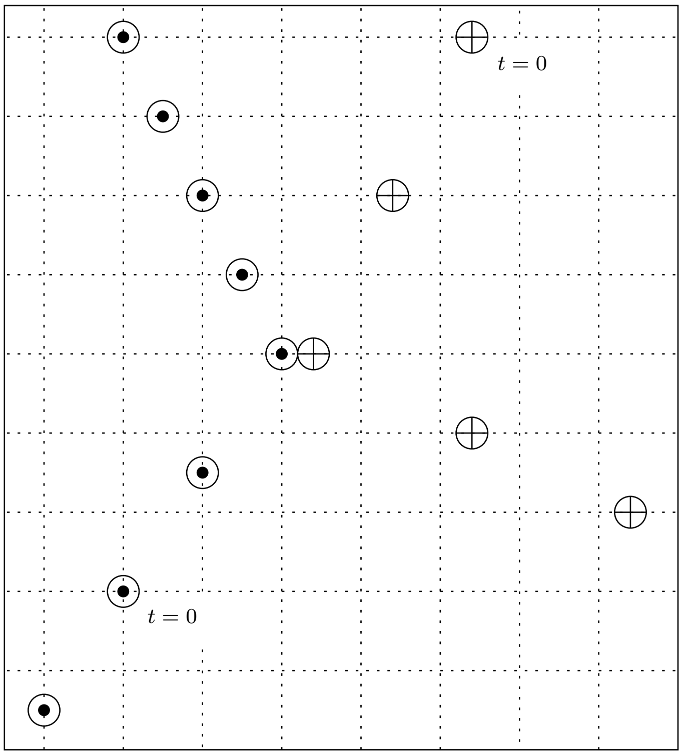
2.2.2. Ein Kahn mit aufmontierter Kanone feuert eine Kugel der Masse $m_2 = 10{,}0\,\mathrm{kg}$ ab; dabei erhält der Kahn eine Geschwindigkeit vom Betrag $v_1 = 3{,}00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Die Gesamtmasse von Kahn, Kanone und Kugel beträgt $m_1 = 500\,\mathrm{kg}$. Wie schnell ist die Kugel?

2.2.3. Ein interplanetarisches Raumschiff bewegt sich antriebslos im Weltall. Genau in der Mitte ihrer mit Atemluft gefüllten Kabine schwebt eine nur mit einem Badeanzug bekleidete Astronautin. Die Relativgeschwindigkeit der Astronautin zum Raumschiff ist exakt Null, die Wände der Kabine sind außer Reichweite.
Wie kann sich die Astronautin aus ihrer misslichen Lage befreien (unsittliche Lösungen ausgeschlossen!)?

2.2.4. Ein kugelförmiger Eisenmeteorit mit dem Durchmesser $d = 1{,}00\,\mathrm{km}$ prallt mit der Geschwindigkeit $10\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ auf die Erde und bleibt tief im Boden stecken. Welche Geschwindigkeitsänderung erfährt die Erde?

2.2.5. Eine Gewehrkugel der Masse $m = 5{,}00\,\mathrm{g}$ wird in einen ruhenden Holzwürfel der Masse $M = 2{,}00\,\mathrm{kg}$ geschossen und bleibt in ihm stecken. Danach hat der Verbundkörper Holzwürfel-Kugel die Geschwindigkeit $u = 1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Welche Geschwindigkeit v hatte die Kugel?

2.2.6. Nebenstehende Stroboskopaufnahme zeigt den Stoß zweier Puks auf einem Luftkissentisch. Weise die Gültigkeit des Impulssatzes nach und berechne das Massenverhältnis der beiden Puks!



2.2.7. Die drei Eishockey-Spieler Anton ($m_{\mathrm{A}} = 100\,\mathrm{kg}$), Bertram ($m_{\mathrm{B}} = 80{,}0\,\mathrm{kg}$) und Charly ($m_{\mathrm{C}} = 75{,}0\,\mathrm{kg}$) prallen zusammen und bleiben als Dreimann-Knäuel mit der Relativgeschwindigkeit Null relativ zum Eis liegen. Anton kam mit einer Geschwindigkeit vom Betrag $v_{\mathrm{A}} = 2{,}50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ genau aus Norden und Bertram mit $v_{\mathrm{B}} = 4{,}42\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ genau aus Süd-Westen. Aus welcher Richtung und mit welcher Geschwindigkeit stürzte sich Charly auf die beiden anderen Spieler?

2.2.8. Ein Bub steht auf einem kleinen Wagen (Gesamtmasse Bub-Wagen $= m = 40{,}0\,\mathrm{kg}$) und hält einen Medizinball ($M = 10{,}0\,\mathrm{kg}$) in der Hand. Der Wagen hat im Erdsystem S die Geschwindigkeit $v = +2{,}00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, das momentane Ruhsystem des Wagens wird mit S' bezeichnet ($v_{\mathrm{S'S}} = v$). Der Bub schleudert nun den Ball nach hinten vom Wagen und erteilt ihm dadurch die Geschwindigkeit U relativ zu S, die Geschwindigkeit des Wagens nach dem Schleudern sei V (ebenfalls in S). Das neue Ruhsystem des Wagens ist S".

Berechne V für die drei Fälle

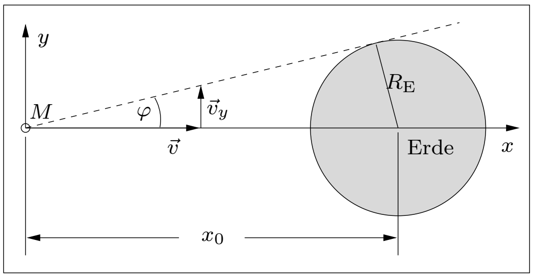
(a) $U = -w$ (Geschwindigkeit des Balles in S)

(b) $U' = -w$ (Geschwindigkeit des Balles in S')

(c) $U'' = -w$ (Geschwindigkeit des Balles in S")

mit $w = 3{,}00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$!

2.2.9. Ein Meteorit der Masse $M = 130 \cdot 10^9$ kg rast mit der Geschwindigkeit $v = 3000\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ genau auf den Mittelpunkt der Erde zu (Erdradius: $R_\text{E} = 6400$ km). Mutige Astronauten haben auf dem Meteoriten eine Atombombe installiert. Die Bombe wird gezündet, wenn der Meteorit noch die Entfernung $x_0 = 16640$ km zum Erdmittelpunkt hat. Bei der Explosion wird ein Meteoritenstück S der Masse $m = 2{,}0 \cdot 10^9$ kg abgesprengt. Im System des Meteoriten wird S senkrecht zur Bewegungsrichtung abgestoßen, d.h. S und der Restmeteorit R haben in x-Richtung immer noch die Geschwindigkeit v, die Geschwindigkeit von S in y-Richtung bezeichnen wir mit $-u$.

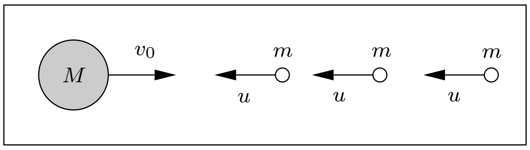


Bei allen Rechnungen darf die Erdanziehung vernachlässigt werden!

(a) Wie groß muss die y-Komponente v_y der Geschwindigkeit von R nach der Sprengung mindestens sein, damit der Meteorit an der Erde vorbeifliegt? Erstelle eine Zeichnung mit 1000 km $\widehat{=}$ 1 cm und zeichne $\vec{v}$ mit der Länge 6 cm ein. Wenn die Berechnung von v_y nicht gelingt, kann als Näherung der Wert aus der Zeichnung verwendet werden.

(b) Wie groß muss also u mindestens sein, um eine Katastrophe zu verhindern?

2.2.10. Ein Meteorit der Masse $M = 3{,}3 \cdot 10^9$ kg rast mit der Geschwindigkeit $v_0 = 2{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ genau auf die Erde zu. Dem Meteoriten werden in Raketen umfunktionierte Felsbrocken der Masse $m = 2{,}1 \cdot 10^7$ kg entgegengeschossen.



Alle Felsbrocken treffen mit einer Geschwindigkeit vom Betrag $u = 5{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ auf den Himmelskörper und bohren sich tief in sein Inneres.

(a) Schreibe den Impulssatz in Worten und als Formel hin. Erläutere dabei auch den Begriff „abgeschlossenes System“.

(b) Berechne die Geschwindigkeit v_n des Meteoriten, nachdem er von n Felsbrocken getroffen wurde. Wie groß ist speziell v_{16}?

(c) Wie viele Felsbrocken müssen mindestens auf dem Meteoriten einschlagen, um eine Katastrophe zu verhindern?

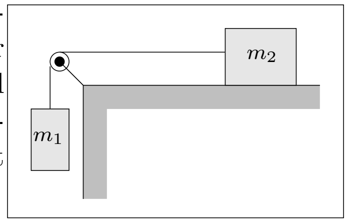
2.3 Die Kraft

2.3.1. Wie groß ist die Antriebskraft einer Lokomotive, die dem Zug mit der Gesamtmasse $m = 700$ t die Beschleunigung $a = 0{,}200\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ erteilt?

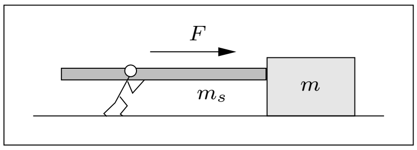
2.3.2. Auf einen Golf-GTI der Masse $m = 900$ kg wirkt die Antriebskraft $F = 1530$ N. In welcher Zeit beschleunigt das Auto von Null auf $100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

2.3.3. Ein Auto fährt mit $v_0 = 108\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gegen eine Wand. Welcher Kraft müssen die Sicherheitsgurte des Fahrers der Masse $m = 70{,}0$ kg standhalten, wenn der Wagen auf einer Strecke von $\Delta x = 1{,}5$ m (Knautschzone) zum stehen kommt und eine konstante Beschleunigung mit dem Betrag a angenommen wird?

2.3.4. Berechne die Beschleunigung der Masse m_2 sowie die Fadenspannung F_S unter Vernachlässigung der Masse und der Reibung der Rolle sowie der Fadenmasse! Die Reibungszahl zwischen dem Klotz mit der Masse m_2 und seiner Unterlage sei μ. Für welches m_1 bewegt sich die Anordnung mit konstanter Geschwindigkeit?

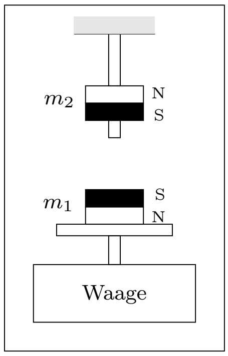


2.3.5. Ein Eisklotz der Masse m wird mithilfe einer Stange der Masse m_s angeschoben und erfährt dabei die Beschleunigung a. Auf die Stange wird die Kraft F ausgeübt. Welche Kraft F' wird von der Stange auf den Eisklotz übertragen?



2.3.6. Wie verhalten sich die Bremswege bei sonst gleichen Bedingungen auf dem Mond und auf der Erde? ($g_{\text{Mond}} \approx \frac{1}{6} \cdot g_{\text{Erde}}$)

2.3.7. Ein Magnet der Masse m_1 liegt auf einer Waage. Der Magnet mit der Masse m_2 wird vom unteren Magneten in der Schwebe gehalten. Eine Führungsstange, die durch ein Loch in der Mitte des oberen Magneten geht, hindert ihn am seitlichen Abgleiten. Welche Gewichtskraft G zeigt die Waage an? Gib eine genaue Begründung deiner Antwort!



2.3.8. Ein Lastwagengespann aus Zugmaschine (Masse m_1, Gleitreibungszahl μ_1) und Anhänger (m_2, μ_2) legt eine Vollbremsung hin. Berechne die Bremsverzögerung a, den Bremsweg s und die Kraft F_K, mit der die Anhängerkupplung beansprucht wird. Wie lauten die Ergebnisse für den Spezialfall $\mu_1 = \mu_2 = \mu$?

2.3.9. Für die Reibungskraft zwischen Luft und einem Körper (*Luftwiderstand*) gilt folgender Zusammenhang: $R = C \cdot v^2$. C hängt von der Form des Körpers ab. Für einen Fallschirmspringer ($m = 80\,\text{kg}$) ist $C = 0{,}20\,\frac{\text{kg}}{\text{m}}$ bei geschlossenem und $C = 16\,\frac{\text{kg}}{\text{m}}$ bei geöffnetem Schirm. Welche konstante Endgeschwindigkeit erreicht der Springer bei geschlossenem (geöffnetem) Schirm?

2.3.10. **Haft-und Gleitreibung**:

Ein Körper K ruht auf einer Unterlage. Die Kraft F auf K wird langsam von Null aus erhöht. K bleibt in Ruhe, bis F den Wert

$$\boxed{R_H = \mu_{\text{H}} \cdot N},$$

die **maximale Haftkraft**,

Tabelle einiger Haft-und Reibungszahlen:

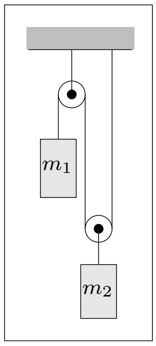
	μ_{H}	μ
Stahl auf Stahl	0,15	0,06
Autoreifen auf trockenem Asphalt	0,8	0,5
Autoreifen auf nassem Asphalt	0,5	0,3
Autoreifen auf Eis	0,1	0,05

erreicht. Die **Haftzahl** μ_{H} ist i.a. größer als die Gleitreibungszahl μ. Wenn ein Rad auf der Unterlage rollt (kein Durchdrehen oder Blockieren), dann haftet eine Teilfläche des Rades immer an der Unterlage.

(a) Welche maximale Beschleunigung kann ein Auto auf trockenem Asphalt erreichen, wenn nur ein Rad (zwei Räder, alle vier Räder) zum Antrieb verwendet werden (jedes Rad sei gleich belastet)?

(b) Berechne das Verhältnis der Bremswege eines Autos auf nassem Asphalt bei blockierten Rädern und bei maximaler Bremskraft mit gerade noch nicht blockierten Rädern („Stotterbremsung“ bzw. ABS (Anti-Blockier-System)!).

2.3.11. Berechne die Beschleunigung a_1 der Masse m_1 in nebenstehend gezeichneter Anordnung zunächst allgemein und dann speziell für $m_1 = m_2$! Für welches Massenverhältnis ist die Anordnung im Gleichgewicht? Die Reibung der Rollen sowie die Massen der Rollen und des Fadens sind vernachlässigbar! Die x-Achse zeige nach unten!



2.3.12. Ein Eisstock der Masse 5,0 kg gleitet mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ 50 m weit. Wie groß ist die Reibungszahl zwischen Eis und Eisstock?

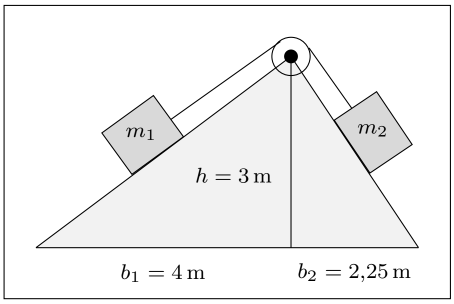
2.4 Die schiefe Ebene

2.4.1. Eine Lok fährt mit konstanter Geschwindigkeit eine langsam immer steiler werdende Teststrecke hinauf (Reibungszahlen siehe Aufgabe 2.3.10!). Bei welchem Neigungswinkel drehen die Räder durch? Welche Beschleunigung erfährt die Lok in diesem Moment? Aus Schreck führt der Lokführer eine Vollbremsung aus (Räder blockiert). Warum rutscht die Lok sofort nach dem Stillstand zurück? Bei welchem Neigungswinkel ist die Beschleunigung der Lok Null?

2.4.2. Welche maximale Steigung kann ein Zug ($m_{\mathrm{ges}} = 3 \cdot m_{\mathrm{Lok}}$) mit der Beschleunigung $a = 0{,}3 \cdot a_{\mathrm{max}}$ hinauffahren (Rollreibung vernachlässigen!)? a_{max} ist die maximale Beschleunigung bei waagrechten Schienen! (Reibungszahlen siehe Aufgabe 2.3.10!)

2.4.3. Galilei verwendete zur Bestimmung der Fallbeschleunigung eine schiefe Ebene, da er keine sehr kurzen Zeiten messen konnte. Ein glatt poliertes Holzbrett der Länge s wird an einer Seite um die Höhe h angehoben. Ein Holzwürfel gleitet mit der Anfangsgeschwindigkeit Null in der Zeit t das ganze Brett hinunter. Berechne eine Formel für g, die s, h, t und μ enthält!

2.4.4. In nebenstehend gezeichneter Anordnung ist $m_1 = 1{,}1\,\mathrm{kg}$ und $\mu = 0{,}5$. Berechne m_2 so, dass sich beide Massen nach einem kurzen Anstoß mit konstanter Geschwindigkeit nach links (nach rechts) bewegen! Es darf von einer reibungsfreien und masselosen Rolle sowie von einem masselosen Seil ausgegangen werden!



Berechne die Kraft $\vec{F}_{\mathrm{R}}$, mit der die Rolle bei der Bewegung nach links auf ihr Lager drückt! Wie lauten alle berechneten Ergebnisse für $\mu = 0$?

2.4.5. (a) Welche konstante Endgeschwindigkeit erreicht ein Hochgeschwindigkeits-Schifahrer der Masse $m = 80\,\mathrm{kg}$ auf einem langen Hang mit dem Neigungswinkel $\varphi = 30°$, wenn die Gleitreibungszahl $\mu = 0{,}10$ ist und die Konstante C aus Aufgabe 2.3.9 im „Eistil“ den Wert $0{,}11\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$ annimmt?

(b) 1997 erreichte Harry Egger auf einem schweizer Gletscher die Endgeschwindigkeit $241\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Berechne das Gefälle des Gletscherhangs in Prozent und seinen Neigungswinkel (m, μ und C wie in Teilaufgabe (a)). Auf dem gleichen Hang wurde übrigens mit einem **Mountainbike** die Geschwindigkeit $207\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ erreicht!!

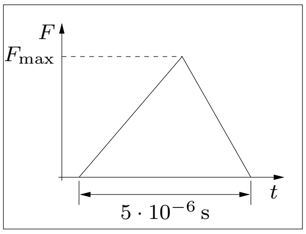
2.4.6. Ein Auto fährt mit $v_0 = 36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ den Zirler Berg (16% Gefälle) hinunter, als plötzlich die Bremse versagt. Wie schnell ist das Auto 500 m nach dem Ausfall der Bremse, wenn die Rollreibungszahl $\mu_\mathrm{R} = 0{,}04$ beträgt?

2.4.7. Ein Schlitten gleitet einen Hang der Höhe $h = 20\,\mathrm{m}$ und der „horizontalen Länge“ $b = 60\,\mathrm{m}$ (Steigung $= \frac{h}{b}$) hinunter. Welche Strecke s legt er in der an den Hang anschließenden Ebene zurück, wenn während der ganzen Fahrt die Reibungszahl $\mu = 0{,}2$ bestimmend ist?

2.5 Der Kraftstoß

2.5.1. Die Triebwerke einer Rakete der Masse $m = 1{,}00 \cdot 10^4\,\mathrm{kg}$ bewirken die Antriebskraft $F = 12\,000\,\mathrm{N}$. Wie lange müssen die Triebwerke laufen, um die Rakete von $200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf $300\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ zu beschleunigen?

2.5.2. Eine elektronische Apparatur bewirkt auf ein Elektron ($m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$) der Geschwindigkeit $v = 1000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ die Kraft des nebenstehend gezeichneten Diagramms. Wie groß ist F_max, wenn die Geschwindigkeit des Elektrons nach dem Einwirken der Kraft $10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beträgt?



2.5.3. Eine Stahlkugel ($m = 50\,\mathrm{g}$) fällt aus 1,0 m Höhe auf eine Stahlplatte und wird mit 90% der Auftreffgeschwindigkeit wieder nach oben geschleudert. Die Berührdauer zwischen Kugel und Platte wird elektronisch zu $\Delta t = 6{,}0 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}$ bestimmt.

(a) Welche maximale Kraft wirkt mindestens auf die Kugel?

(b) Welche maximale Kraft wirkt auf die Kugel, wenn $F(t)$ linear ansteigt und linear wieder abfällt?

2.5.4. Mit einem Golfschläger, dessen Kopf die Masse $M = 1{,}0\,\mathrm{kg}$ hat, wird ein Golfball der Masse $m = 50\,\mathrm{g}$ geschlagen. Die Berührdauer zwischen Ball und Schläger beträgt $\Delta t = 0{,}8\,\mathrm{ms}$, die Geschwindigkeit des Balles nach dem Schlag ist $v = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

(a) Welche mittlere Kraft wirkt zwischen Ball und Schläger?

(b) Welche Geschwindigkeitsänderung erfährt der Schlägerkopf?

(c) Gleich nach dem Schlag trifft der Ball den Oberschenkel eines unvorsichtigen Zuschauers (v immer noch $30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$) und wird auf $v' = 0$ abgebremst. Die mittlere Kraft zwischen Ball und Schenkel beträgt 37,5 N. Warum ist das kein Widerspruch zum Ergebnis von Teilaufgabe (a)?

2.6 Wurfbewegungen

2.6.1. (a) Berechne allgemein die Wurfweite x_w bei einem waagrechten Wurf ($\varphi = 0$) mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und der Abwurfhöhe h!

(b) Mit welcher Geschwindigkeit muss ein Stein von einem 40 m hohen Turm waagrecht geworfen werden, damit er 100 m vom Turm entfernt auftrifft!

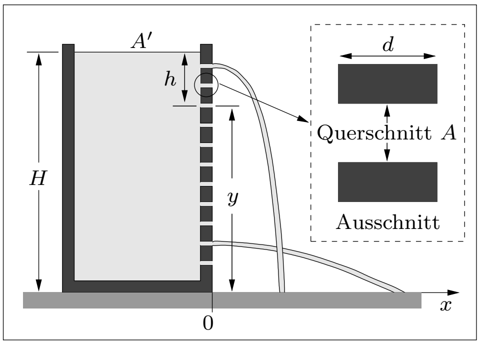
2.6.2. Kugel ① wird zur Zeit $t = 0$ vom Punkt $\mathrm{P}_1\,(0|h)$ mit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ geworfen. Kugel ② lässt man ebenfalls zur Zeit $t = 0$ vom Punkt $\mathrm{P}_2\,(x_2|h)$ aus mit der Anfangsgeschwindigkeit Null frei fallen. Für welches v_1 trifft Kugel ① im Flug auf Kugel ② ?

2.6.3. Eine Kanonenkugel wird auf Bodenhöhe unter dem Winkel φ gegen den Boden mit der Geschwindigkeit v_0 abgefeuert. Für welchen Winkel φ erreicht die Kugel die größte Höhe bzw. die größte Weite (kein Luftwiderstand)?

2.6.4. Ein Fußball wird mit $v_0 = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ unter einem 30°-Winkel gegen die Horizontale abgeschlagen. Wie hoch und wie weit fliegt er unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes? Mit welcher Geschwindigkeit (Betrag und Richtung) kommt der Ball wieder am Boden auf?

2.6.5. Ein Kugelstoßer stößt die Kugel mit $v_0 = 11{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in einer Höhe von $h = 2\,\mathrm{m}$ ab. Berechne die Stoßweite w in Abhängigkeit vom Stoßwinkel φ und zeichne $w(\varphi)$. Ermittle durch Probieren den Winkel für die größte Weite. Rechne mit $g = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

2.6.6. Ein mit Wasser gefülltes Gefäß hat in einer Reihe untereinander lauter feine Löcher. Auf die Masse m des Wassers in einem Loch wirkt die Kraft des hydrostatischen Drucks $p(h)$, die „Beschleunigungsstrecke“ ist die Länge d des Lochs. Berechne den Aufprallort x des herausspritzenden Wassers auf der x-Achse als Funktion der Lochhöhe y! Für welches y ist x maximal? Ab jetzt sei $H = 100\,\mathrm{cm}$.



Berechne x für $y \in \{0; 10\,\mathrm{cm}; .....; 100\,\mathrm{cm}\}$ und zeichne $x(y)$! Zeichne die Flugbahnen des Wassers für $y = 30\,\mathrm{cm}$, $y = 50\,\mathrm{cm}$ und $y = 70\,\mathrm{cm}$!

2.7 Kreisbewegung

2.7.1. Das Pferd P eines Kinderkarussells, das sich im Uhrzeigersinn dreht, befindet sich zur Zeit $t_0 = 0$ am Ort $(\,0\,|\,4\,\mathrm{m}\,)$, der Drehpunkt des Karussells ist der Koordinatenursprung. Die Bahngeschwindigkeit des Pferdes ist konstant $v = 2{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
Berechne die Frequenz f, die Winkelgeschwindigkeit ω und den Ortsvektor von P zur Zeit $t_1 = 8\,\mathrm{s}$.

2.7.2. Mit welcher Geschwindigkeit v kann ein Auto unbeschadet eine Kurve mit $r = 200\,\mathrm{m}$ durchfahren, wenn die Haftzahl $\mu_\mathrm{H} = 0{,}8$ (trocken) bzw. $\mu_\mathrm{H} = 0{,}1$ (eisig) ist?

2.7.3. Astronauten werden getestet, wie sie auf die zehnfache Erdbeschleunigung reagieren. Dazu wird die Raumkapsel auf einer horizontalen Kreisbahn mit dem Radius $r = 8\,\mathrm{m}$ bewegt. Wie oft muss die Raumkapsel die Kreisbahn in einer Minute durchlaufen?

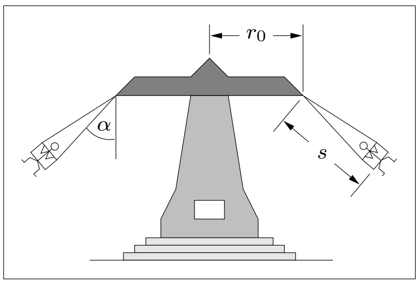
2.7.4. Ein Radfahrer durchfährt eine Kurve ($r = 20\,\mathrm{m}$) mit $v = 36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Wie stark muss er sich in die Kurve legen (Neigungswinkel zur Vertikalen)? Für welche Haftzahlen ist seine Kurvenfahrt ohne Unfall möglich?

2.7.5. Die Kurve einer Bobbahn ($r = 10\,\mathrm{m}$) ist gegen die Horizontale um den Winkel $\beta = 84°$ geneigt. Mit welcher Geschwindigkeit v darf die Kurve durchfahren werden, damit sogar bei der Haftzahl $\mu_\mathrm{H} = 0$ kein Unfall passiert?

2.7.6. Der Fotografie eines Karussells entnimmt man folgende Daten:

$$r_0 = 3{,}00\,\mathrm{m}\ ;\ s = 4{,}00\,\mathrm{m}\ ;\ \alpha = 30{,}0°$$

Welche Zeit T benötigt das Karussell für einen vollen Umlauf? Mit welcher Kraft F wird die Sesselaufhängung bei der Gesamtmasse $m = 80{,}0\,\mathrm{kg}$ von Sessel und Insasse belastet?



2.7.7. Ein Massenpunkt bewegt sich auf einem Kreis mit Radius $r = 1{,}00\,\mathrm{m}$ nach dem Gesetz

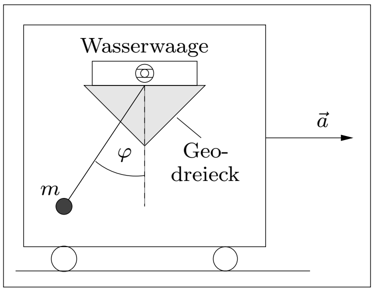
$$\vec{r}(t) = r\begin{pmatrix}\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \varphi(t) = \frac{\alpha}{2}\,t^2 \quad \text{und} \quad \alpha = \pi\,\frac{1}{\mathrm{s}^2} \quad .$$

Berechne numerisch $\vec{v}(1\,\mathrm{s})$ und $\vec{a}(1\,\mathrm{s})$ sowie die Beträge $v(1\,\mathrm{s})$ und $a(1\,\mathrm{s})$!

2.8 Trägheitskräfte

2.8.1. Vermischte Flüssigkeiten trennen sich nach längerer Zeit infolge der Gewichtskraft, wobei sich der Stoff mit der größeren Dichte am Gefäßboden absetzt (**Sedimentation**). Die Trenngeschwindigkeit hängt stark von der Kraft ab, die auf die Moleküle wirkt. Zur Sedimentation verwendet man daher Zentrifugen, in denen durch die Zentrifugalkraft eine große Gewichtskraft simuliert wird. Das Wievielfache der Gewichtskraft wirkt auf ein Teilchen in einer „Ultrazentrifuge“ in der Entfernung 10 cm vom Drehpunkt, wenn ihre Umlauffrequenz 1000 Hz beträgt?

2.8.2. In einem anfahrenden Auto misst ein findiger Schüler die Beschleunigung mit seinem selbstgebastelten Messgerät. Das Gerät besteht aus einer Kugel der Masse m, die an einem Faden im „Nullpunkt“ eines Geodreiecks aufgehängt ist und einer kleinen Wasserwaage. Nachdem die lange Kante des Geodreiecks „in der Waage“ ist, wird der Winkel φ des Fadens gegen die Vertikale gemessen.



Drücke a durch φ aus! Berechne a speziell für $\varphi = 11{,}0° \pm 0{,}5°$! Wie groß ist φ beim Bremsen mit $|a| = 4{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$?

2.8.3. (a) Um wieviel Prozent weicht die am Äquator gemessene Fallbeschleunigung $g = 9{,}781\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ von der reinen (nur auf die Gravitation zurückzuführenden) Erdbeschleunigung g_0 ab? Bei welcher Tageslänge T_0 würde ein relativ zur Erdoberfläche ruhend losgelassener Stein gerade nicht mehr auf den Boden fallen? Wie würde er sich bewegen?

(b) Um wieviel Prozent weicht die in Garmisch (47,5° nördliche Breite) gemessene Fallbeschleunigung g von der reinen (nur auf die Gravitation zurückzuführenden) Erdbeschleunigung $g_0 = 9{,}821\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ab? Welchen Winkel φ schließen $\vec{g}$ und $\vec{g}_0$ ein? Bei welcher Tageslänge T_0 würde ein ruhend losgelassener Stein gerade nicht mehr auf den Boden fallen? Wie würde er sich bewegen?

2.8.4. Im Kaufhaus hat Frau Leicht eine neue Personenwaage erworben, die beim Ausprobieren ihre Masse zu 80 kg anzeigt. Im Aufzug, der sie vom 3. Stock ins Erdgeschoß befördert, wird das neue Stück ein weiteres mal getestet. Nach dem Schließen der Türen zeigt die Waage zunächst 2 s lang 68 kg, dann 2,25 s lang 80 kg und schließlich bis zum Stillstand des Aufzugs noch 1,5 s lang 96 kg an. Berechne die Stockwerkshöhe mit $g = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$!

2.8.5. Die Gesamtkraft, die auf eine Flüssigkeit wirkt, steht immer senkrecht auf der Flüssigkeitsoberfläche.

(a) Ein Auto beschleunigt auf einer horizontalen Straße mit $a = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Der Beifahrer hält ein halb gefülltes Bierglas in der Hand. Welche Form zeigt die Oberfläche des Bieres?

(b) Ein zylinderförmiges, halb gefülltes Wasserglas rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Zylinderachse. Welche Form zeigt die Wasseroberfläche?

2.8.6. Ein Steilwandfahrer fährt mit seinem Motorrad an der senkrechten Innenwand eines Zylinders mit 12 m Durchmesser, die Haftzahl zwischen Bahn und Reifen beträgt 0,5. Mit welcher Bahngeschwindigkeit muss der Fahrer im Kreis rasen, um nicht abzurutschen? Um welchen Winkel φ ist er gegen die Horizontale geneigt?

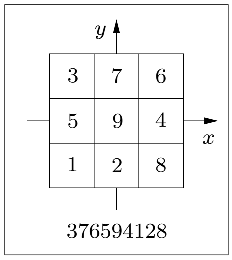
2.8.7. **Künstliche Schwerkraft**:

In **A.C. Clarke**'s Roman „Rendezvous mit 31/439“ wird ein riesiges, zylinderförmiges Raumschiff (Radius: $r = 3\,\text{km}$) beschrieben, das sich in $T = 3\,\text{min}$ einmal um die Zylinderachse dreht. Mit Welcher Kraft F wird ein Mensch von innen an die Zylinderwand gedrückt? In welcher Zeit T_0 müsste sich das Raumschiff einmal drehen, damit sich Menschen wie auf der Erde fühlen würden?

2.9 Der Schwerpunkt

2.9.1. Ein Atomkern der Masse m bewegt sich längs der x-Achse eines Koordinatensystems mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Am Ort $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ km zerfällt der Kern in zwei Teile mit den Massen m_1 und m_2. Eine Sekunde nach dem Zerfall wird m_1 am Ort $\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ km und m_2 am Ort $\vec{x_2} = \begin{pmatrix} 5\,\text{km} \\ y_2 \end{pmatrix}$ registriert. Berechne die Massen m_1 und m_2 als Vielfache von m, die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der Bruchstücke sowie die Schwerpunktskoordinaten zur Zeit der Registrierung!

2.9.2. Neun quadratische Plättchen der Kantenlänge 1 cm und mit den Massen $m_n = n\,\text{g}$ ($m_1 = 1\,\text{g}$, $m_2 = 2\,\text{g}$,... , $m_9 = 9\,\text{g}$) werden zu einem Quadrat der Kantenlänge 3 cm angeordnet.



(a) Mit der Abkürzung 376594128 wird die Anordnung in nebenstehender Abbildung bezeichnet. Berechne die Schwerpunktskoordinaten der Anordnung!

(b) Wie viele verschiedene Anordnungen gibt es? Suche eine Anordnung, für die der Schwerpunkt im Mittelpunkt des großen Quadrates liegt! (Es gibt 760 solcher Anordnungen.)

3 Der Energiesatz

3.1 Arbeit und Leistung

3.1.1. Ein Automotor kann mit einem Liter Benzin die Arbeit 9,0 MJ verrichten.

(a) Wie viele Liter Benzin verbraucht das Auto der Masse $m = 1400\,\text{kg}$ und der Rollreibungszahl $\mu_\text{R} = 0{,}050$ auf 100 km, wenn der Luftwiderstand zunächst vernachlässigt wird?

(b) Der Luftwiderstand unseres Autos ist eine Funktion der Geschwindigkeit:

$$F_\text{L} = 0{,}40\,\frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot v^2$$

Berechne für $v_1 = 54\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_2 = 108\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $v_3 = 216\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ den Verbrauch auf 100 km.

(c) Wie hoch kann unser Automotor mit $50\,\text{cm}^3$ Benzin eine Last von 3 t heben?

(d) Beweise: Wirkt auf einen Körper die Kraft F und bewegt er sich mit der Geschwindigkeit v, dann wird an ihm die Leistung $P = Fv$ umgesetzt.

(e) Berechne die vom Motor erbrachte Leistung P für v_1, v_2 und v_3 und noch für $v_4 = 36\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_5 = 72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_6 = 144\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $v_7 = 180\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Zeichne den Grafen von $P(v)$ und ermittle daraus die Geschwindigkeit v_8, die das Auto bei einer Leistung von 100 kW fährt ($P(v_8) = 100\,\text{kW}$). Verbessere den grafisch gefundenen Wert durch Probieren mit dem Taschenrechner.

3.1.2. Das Fettgewebe des menschlichen Körpers hat den Energieinhalt $39\,\frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$. Wenn man also ohne Nahrungsaufnahme die Arbeit 39 MJ verrichtet, nimmt man 1 kg ab. Ein ruhender

Mensch verbraucht pro kg Körpermasse ungefähr 100 kJ täglich zur Aufrechterhaltung seiner Lebensfunktionen, der *Grundumsatz* ist also $100\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg d}}$.

(a) Wie lange kann ein Mensch der Masse 80 kg, der das 1,5-fache des Grundumsatzes verbraucht, bei einer Fettreserve von 15 kg fasten?

(b) Der Wirkungsgrad des menschlichen Körpers beträgt ungefähr 25 %, d.h. 25 % der durch Fettverbrennung gewonnenen Energie werden in mechanische Arbeit umgewandelt. Beim Bergsteigen werden ungefähr 65 % der vom Körper erbrachten mechanischen Arbeit in Hubarbeit umgesetzt. Wieviel Fett verbrennt ein Bergsteiger der Masse 75 kg, bei der Überwindung von 1000 m Höhe?

(c) Wie oft muss eine Frau der Masse 70 kg zusätzlich zu einem 8-tägigen Fasten (1,2-facher Grundumsatz) noch von Garmisch (700 m) aus auf die Zugspitze (2962 m) steigen, um 3 kg abzunehmen?

3.1.3. Eine 100 g-Tafel Schokolade liefert beim Verdauen die Energie 2,50 MJ (597 kcal), aber nur 25 % davon werden vom Körper in mechanische Arbeit umgesetzt.

(a) Welchen Höhenunterschied kann ein Bergsteiger der Masse $m = 80\,\text{kg}$ mit der Energie einer Tafel Schokolade überwinden, wenn 35 % der mechanischen Arbeit für die Reibung verloren gehen?

(b) 120 g Pommes Frites haben den Nährwert 420 kcal. Wie viel MJ sind dies? Wie hoch muss eine Bergsteigerin der Masse 55 kg steigen, um diese Energie abzuarbeiten?

3.1.4. Welche Arbeit muss verrichtet werden, um n Würfel der Kantenlänge a und der Masse m, die alle auf dem Boden liegen, senkrecht übereinander zu stellen? In welcher Höhe h über dem Boden befindet sich der Gesamtschwerpunkt aller Würfel vor bzw. nach dem Aufstellen? Welche Arbeit muss verrichtet werden, um die Gesamtmasse $n \cdot m$ um h zu heben?

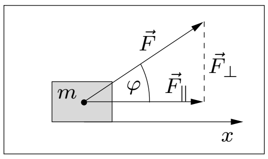
3.1.5. Ein Auto der Masse m fährt mit der konstanten Geschwindigkeit v eine Straße mit dem Neigungswinkel φ hinauf, die Rollreibungszahl sei μ und der Luftwiderstand $C \cdot v^2$.

(a) Welche Leistung P muss der Motor aufbringen? Berechne P konkret für das Auto aus Aufgabe 3.1.1 mit $v = 108\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

- auf ebener Straße
- auf einer Straße mit der Steigung 16 % (Zirler Berg)
- auf einer Straße mit dem Neigungswinkel 30°

(b) Berechne P auf ebener Straße noch für $v = 36\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v = 72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v = 144\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v = 180\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $v = 216\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$! Zeichne den Grafen von $P(v)$ und ermittle daraus die Geschwindigkeit für $P = 100\,\text{kW}$! Verbessere den grafisch gefundenen Wert durch Probieren mit dem Taschenrechner!

3.1.6. Eine Kraft $\vec{F}$ wirkt, wie aus der Abb. ersichtlich, auf den Schwerpunkt eines Körpers der Masse $m = 50\,\text{kg}$, die Gleitreibungszahl sei $\mu = 0{,}1$.



(a) Wie groß muss $F = |\vec{F}|$ gewählt werden, damit sich der Körper bei $\varphi = 30°$ gleichförmig bewegt?

(b) $W(\varphi)$ sei die aufgewendete Arbeit, wenn der Körper bei konstanter Geschwindigkeit um die Strecke Δx gezogen wird. Zeichne den Grafen der Funktion

$$\alpha(\varphi) = \frac{W(\varphi)}{W(0)} \quad !$$

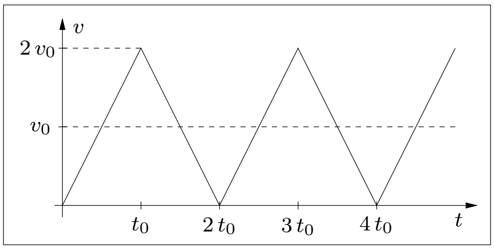
Ist es von der aufzuwendenden Arbeit her günstiger, einen Schlitten an einer langen oder an einer kurzen Schnur zu ziehen?

3.1.7. An eine Feder wird ein Körper der Masse m gehängt, mit der Hand unterstützt und sehr langsam (d.h. praktisch ohne Beschleunigung) gesenkt, bis der Körper in Ruhe und ohne Unterstützung an der Feder hängt. Um welche Strecke h dehnt sich die Feder? Welche Hubarbeit W_{H} und welche Spannarbeit W_{S} wird dabei verrichtet? Wie hängen W_{H} und W_{S} zusammen? Überprüfe, ob der Energiesatz erfüllt ist.

3.1.8. Ein Auto beschleunigt mit einer Benzinmenge vom Volumen V von null auf die Geschwindigkeit v. Wieviel Benzin verbraucht das Auto für die Beschleunigung von v auf $2v$ (Reibung vernachlässigen)?

3.1.9. (a) Ein Auto der Masse m, der Rollreibungszahl μ und dem Luftwiderstand $F_L = C\,v^2$ beschleunigt mit konstantem a von Null auf die Geschwindigkeit v_0. Drücke die gesamte Reibungskraft $F_{\mathrm{R}} = \mu\, m\, g + C\, v^2$ durch die vom Start weg zurückgelegte Strecke x aus, zeichne ein x-F_{R}-Diagramm und berechne dann die gesamte Arbeit W, die während des Beschleunigungsvorgangs vom Motor aufgebracht werden muss!

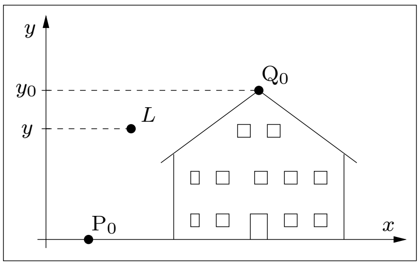
(b) Das Auto aus Aufgabe 3.1.1 beschleunigt mit $a = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ von Null auf $2\,v_0 = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ $(15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})$ und legt dabei die Strecke x_0 zurück. Danach bremst das Auto mit $a' = -a$ bis auf $v = 0$ ab, beschleunigt wieder, bremst wieder u.s.w. Weise nach, dass während des Bremsvorgangs kein Benzin verbraucht wird und berechne dann den Benzinverbrauch V_1 für das Zurücklegen der Strecke $2\,x_0$!



(c) Wieviel Benzin V_2 verbraucht das Auto, wenn es die Strecke $2\,x_0$ mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ zurücklegt? Zeige, dass es die Strecke in der gleichen Zeit bewältigt wie in Teilaufgabe (b)! Rechne V_1 und V_2 auf eine Gesamtstrecke von 100 km um!

3.2 Die potentielle Energie

3.2.1. Ein Luftballon der Masse $m = 5{,}0\,\mathrm{g}$ steigt senkrecht in die Höhe und wird von einem Physiker am Boden $(\mathrm{P}_0(2\,\mathrm{m}|0))$ sowie von einem Physiker auf dem Dach eines Hauses $(\mathrm{Q}_0(10\,\mathrm{m}|10\,\mathrm{m}))$ beobachtet. Berechne die potentiellen Energien des Ballons an den Orten $\mathrm{L}_1(3\,\mathrm{m}|4\,\mathrm{m})$ und $\mathrm{L}_2(8\,\mathrm{m}|20\,\mathrm{m})$ sowie deren Differenz, einmal im System des „Bodenphysikers“ (Bezugspunkt der potentiellen Energie bei P_0) und einmal im System des „Dachphysikers“ (Bezugspunkt der potentiellen Energie bei Q_0).



3.2.2. Auf einen Körper K wirkt die von $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ abhängige Kraft (Kraftfeld)

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ -2\,\mathrm{N} \end{pmatrix} & \text{für} \quad x \leqq 0 \\[2ex] \begin{pmatrix} 0 \\ -5\,\mathrm{N} \end{pmatrix} & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

Gegeben sind die Punkte $\mathrm{P}(-2\,\mathrm{m}|0)$, $\mathrm{Q}(-2\,\mathrm{m}|4\,\mathrm{m})$, $\mathrm{R}(3\,\mathrm{m}|4\,\mathrm{m})$ und $\mathrm{S}(3\,\mathrm{m}|0)$.

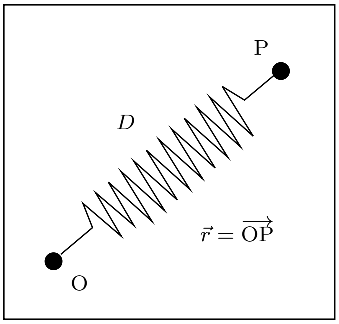
(a) Welche Kraft $\vec{F}^*$ muss auf K einwirken, um ihn im Feld $\vec{F}$ mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen? Welche Arbeit W_1 bzw. W_2 wird von $\vec{F}^*$ an K verrichtet, wenn K geradlinig von P über Q nach R (W_1) bzw. geradlinig direkt von P nach R (W_2) transportiert wird? Ist das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ?

(b) K wird jetzt geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit von P über Q, R und S wieder nach P bewegt. Auf dem Weg von P nach Q wird K von einem Elektromotor mit dem Wirkungsgrad 80 % gezogen, der seinen Strom von einem Akku bezieht. Von R nach S treibt K einen Dynamo mit dem Wirkungsgrad 70 % an, der den Akku wieder auflädt. Wie ändert sich die gespeicherte elektrische Energie des Akkus bei einem vollen Umlauf von K? Wie nennt man eine Maschine, die so etwas vollbringen kann? Was folgt daraus für die Realisierbarkeit unseres Kraftfeldes?

(c) Unser Kraftfeld könnte folgendermaßen realisiert werden: Für $x < 0$ hängt sich ein „Gravitationsteufelchen“ der Masse m_1 an den Körper K der Masse 100 g, für $x > 0$ eines der Masse m_2. Berechne m_1 und m_2 für den Fall, dass die y-Achse an der Erdoberfläche senkrecht nach oben zeigt ($g = 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$)! Unter welchem Licht erscheint jetzt die Energiebilanz aus Teilaufgabe (b)?

3.3 Die Zentralkraft

3.3.1. Eine Feder mit der Federkonstanten $D = 0{,}4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}}$ ist mit einem Ende im Ursprung O eines Koordinatensystems fest eingespannt. Das andere Ende P der Feder befindet sich am Ort $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$. Die von der Feder auf P ausgeübte Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ ist offensichtlich eine Zentralkraft, da die Dehnung der Feder nur von $r = |\vec{r}|$ abhängt. Die Feder ist bei $r = r_0 = 4\,\mathrm{cm}$ entspannt, d.h. $F(r_0) = 0$.



(a) Berechne $F(r)$ und zeichne die Kraftvektoren an den Orten $\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ mit

$$r \in \{1\,\mathrm{cm}, 2\,\mathrm{cm}, 3\,\mathrm{cm}, 5\,\mathrm{cm}, 6\,\mathrm{cm}, 7\,\mathrm{cm}, 8\,\mathrm{cm}, 9\,\mathrm{cm}\}$$

$$\text{und } \varphi \in \{0°, 22{,}5°, 45°, 67{,}5°, 90°\} \quad !$$

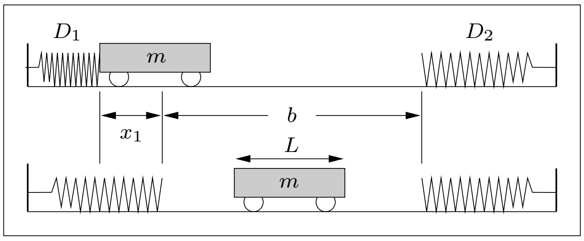
Ein Kraftvektor mit dem Betrag 1 N habe dabei die Länge 0,5 cm.

(b) $W_\mathrm{p}(r)$ sei die potentielle Energie des Punktes P im Kraftfeld der Feder mit dem Bezugspunkt $\mathrm{B}(r_0|0)$, $F^*(r)$ die Kraft, die zum gleichförmigen Bewegen von P aufgebracht werden muss. Zeichne ein r-F^*- und ein r-W_p-Diagramm! Welche Arbeit muss aufgebracht werden, um P von $\mathrm{R}(-3\,\mathrm{cm}|-2\,\mathrm{cm})$ nach $\mathrm{S}(4\,\mathrm{cm}|5\,\mathrm{cm})$ zu bewegen?

3.4 Der Energiesatz

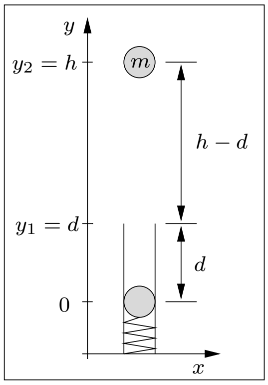
3.4.1. Eine Feder ($D = 1000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$) ist um $d = 10{,}0\,\mathrm{cm}$ zusammengedrückt. Beim Auseinanderschnellen wird ein Wagen der Masse m auf waagrechter Unterlage von Null auf die Geschwindigkeit $v = 10{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beschleunigt.
Berechne m einmal für eine reibungsfreie Bewegung und einmal für $\mu = 0{,}500$.

3.4.2. $D_1 = 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $D_2 = 2{,}5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Der Wagen mit der Masse $m = 100\,\mathrm{g}$ wird anfangs so gegen die linke Feder gepreßt, dass sie um $x_1 = 5\,\mathrm{cm}$ zusammengedrückt wird. Nach dem Loslassen des ruhenden Wagens wird er gegen die rechte Feder geschnellt und drückt sie um die Strecke



x_2 zusammen. Der Abstand der Enden der entspannten Federn ist $b = 12\,\mathrm{cm}$, der Wagen hat die Länge $L = 6\,\mathrm{cm}$. Berechne x_2 einmal für eine reibungsfreie Bewegung und einmal für $\mu = 0{,}06$!

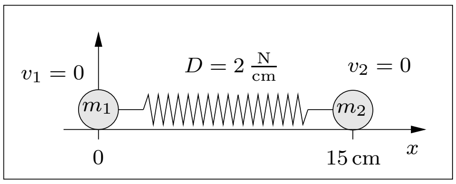
3.4.3. Die Feder einer Spielzeugkanone ($D = 5{,}4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$) ist gerade dann entspannt, wenn die Kugel der Masse $m = 10\,\mathrm{g}$ die Mündung ($y_1 = d = 20\,\mathrm{cm}$) erreicht.



Welche maximale Höhe $y_2 = h$ erreicht die Kugel, wenn sie bei $y_0 = 0$ mit $v_0 = 0$ startet?
Zeichne in **ein** yW-Diagramm die Grafen aller auftretenden Energieformen!
Berechne die Geschwindigkeit der Kugel in Abhängigkeit von y und zeichne das yv-Diagramm. Wo ist die Geschwindigkeit maximal und wie groß ist v_{max}?

3.4.4. Bei einem Geschwindigkeitstest (1978) fuhr der Tiroler Fredy Gasser auf der Marmolata einen $s = 475\,\mathrm{m}$ langen und $40°$ geneigten Hang mit $240\,\mathrm{cm}$ langen Spezialskiern hinunter; die Gleitreibungszahl betrug $\mu = 0{,}1$. Welche Geschwindigkeit erreichte er am Ende der Strecke, wenn 36,5% der umgesetzten potentiellen Energie von der Luftreibung verbraucht wurden?

3.4.5. Die Abbildung zeigt die Anfangslage zweier reibungsfrei beweglicher Kugeln mit den Massen $m_1 = 20\,\mathrm{g}$ und $m_2 = 30\,\mathrm{g}$. Zu diesem Zeitpunkt beträgt die Spannkraft der Feder $F = 10\,\mathrm{N}$.

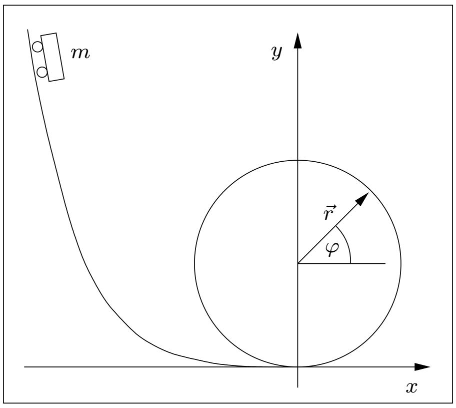


(a) Berechne die Lage von Kugel 2 und die Geschwindigkeiten beider Kugeln zu dem Zeitpunkt, zu dem sich Kugel 1 bei $x_1 = 2\,\mathrm{cm}$ befindet!

(b) Berechne die maximale kinetische Energie des Systems, die maximalen Geschwindigkeiten der Kugeln und die Lage der Kugeln zu diesem Zeitpunkt!

(c) Berechne die Lage der Kugeln zum Zeitpunkt iherer größten Annäherung!

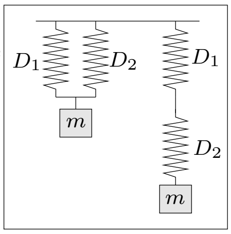
3.4.6. (a) In welcher Höhe $y = h$ muss der Wagen starten, damit er den Looping mit Radius r ohne Absturz durchfahren kann (die Bewegung sei reibungsfrei)? Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass sich der Schwerpunkt des Wagens auf Bahnhöhe befindet!



(b) In welcher Höhe $y = h_1$ fällt der Wagen aus der Bahn, wenn er in der Höhe $h = 2\,r$ startet?

Hinweis: Berechne die Komponente der Gesamtkraft auf den Wagen in Richtung des Vektors $\vec{r}$ im Wagensystem!

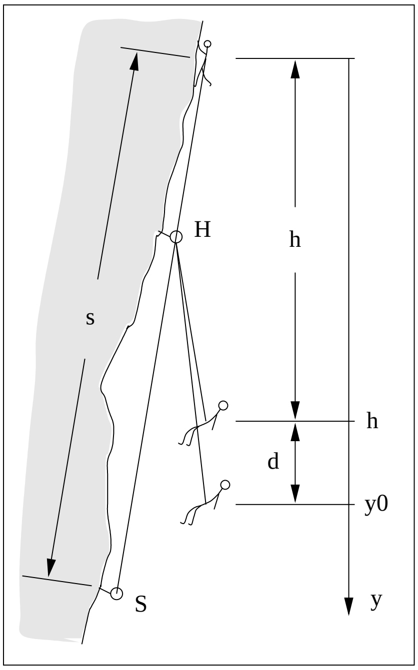
3.4.7. (a) Zwei Federn mit den Federkonstanten D_1 und D_2 werden einmal parallel und einmal hintereinander gehängt. Berechne die Federkonstante des Systems der beiden Federn für beide Fälle!



(b) Welche Härte D' haben n gleiche, hintereinandergeschaltete Federn der Härte D?

(c) Eine Feder der Länge a hat die Härte D_a. Welche Härte D_b hat eine Feder der Länge b?

3.4.8. (a) Ein Meter eines Kletterseils hat die Federkonstante $D_0 = 24000\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$. Welches D hat ein Seil der Länge s, ausgedrückt durch $\delta = D_0 \cdot 1\,\text{Meter}$?



(b) Ein Kletterer der Masse m stürzt in das Seil der Länge s, seine freie Sturzhöhe ist h. Das Verhältnis $S_F = \frac{h}{s}$ heißt **Sturzfaktor**. In welchem Intervall liegt der Sturzfaktor? Berechne die maximale Dehnung d des Seils, die maximale Kraft F_{max}, die das Seil auf den Kletterer ausübt sowie die maximale Belastung F_U des Umlenkhakens, alles ausgedrückt durch den Sturzfaktor! Von welcher Größe hängt F_{max} erstaunlicherweise nicht ab?

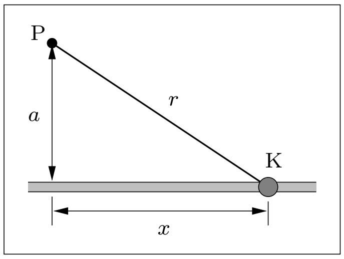
(c) Für die weiteren Rechnungen ist $m = 80\,\text{kg}$ und $g = 10\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}$! Berechne den Sturzfaktor und F_{max} als Vielfaches der Gewichtskraft $G = m\,\text{g}$ für $s = 40\,\text{m}$ und $h = 10\,\text{m}$, $s = 40\,\text{m}$ und $h = 80\,\text{m}$ sowie $s = 5\,\text{m}$ und $h = 10\,\text{m}$!

Warum ist die Gefahr für das Ausbrechen der Zwischensicherung (Umlenkhaken) bei einer größeren Sturzhöhe und gleichbleibendem Sturzfaktor größer?

(d) Beim Begehen von Klettersteigen sichert man sich mit einem Karabiner und einem kurzen Seilstück ($s \approx 2\,\text{m}$), indem man den Karabiner in die fest verankerten Drahtseile einklinkt und mitlaufen läßt. Warum kann es hier zu viel höheren Sturzfaktoren als beim Klettern in einer Seilschaft kommen? Durch welche technische Vorrichtung könnte man die auftretenden hohen Kräfte verringern?

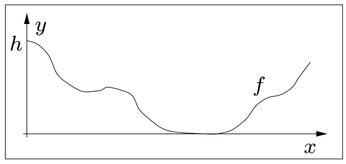
(e) Für welches $y = y_1$ ist die kinetische Energie T des Kletterers maximal? Berechne y_1, T_{max} und v_{max} für $s = 40\,\text{m}$ und $h = 80\,\text{m}$! Zeichne ein y-W-Diagramm aller beteiligten Energieformen!

3.4.9. Eine Kugel K der Masse $m = 40\,\mathrm{g}$ hängt an einem elastischen Band ($D = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}}$), das im Punkt P ($a = 5\,\mathrm{cm}$) befestigt ist (siehe Abb.). Die Kugel wird durch eine Führungsschiene auf der x-Achse gehalten, das Band ist entspannt für $r = a$. Die potentielle Energie $W_\mathrm{p}(x)$ der Kugel sei Null für $x = 0$.



Drücke $W_\mathrm{p}(x)$ zuerst durch r und a und dann durch x und a aus!
Die Kugel wird bei $x = 12\,\mathrm{cm}$ mit $v_0 = 0$ losgelassen. Berechne die Geschwindigkeit der Kugel bei $x = 0$!

3.4.10. Ein Körper gleitet **langsam** über ein beliebig geformtes Gelände, das durch die Funktion f beschrieben wird. Beweise, dass die Reibungsarbeit in guter Näherung nur von der waagrecht zurückgelegten Strecke Δx abhängt! Warum gilt dieser Satz nicht mehr für große Geschwindigkeiten?



Wie weit kommt ein Körper für $f(x) = 0{,}1\,\frac{1}{\mathrm{m}} \cdot x^2$, Start bei $x_0 = -10\,\mathrm{m}$ und $\mu = 0{,}2$? Welche Geschwindigkeit hat der Körper im tiefsten Punkt?

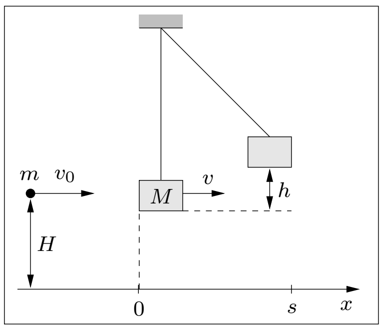
3.5 Stoßprozesse

3.5.1. (a) Ein Kleinlaster der Masse $m_2 = 4000\,\mathrm{kg}$ fährt mit $v_2 = 72\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auf der Landstraße dahin. Ein PKW der Masse $m_1 = 1000\,\mathrm{kg}$ und der Geschwindigkeit $v_1 = 108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ stößt frontal mit dem Laster zusammen, die beiden Autos verkeilen sich und bewegen sich mit der gleichen Geschwindigkeit u weiter. Berechne u und die gesamte an den Autos verrichtete Verformungsarbeit W_i!

(b) Löse Teilaufgabe (a) für einen Auffahrunfall statt des Frontalzusammenstoßes!

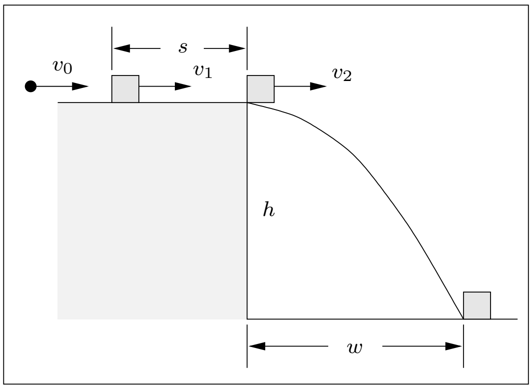
3.5.2. In Kernreaktoren müssen Neutronen der Masse m möglichst schnell abgebremst werden. Wir betrachten den zentralen und vollkommen elastischen Stoß eines Neutrons der kinetischen Energie W auf einen ruhenden Atomkern der Masse $A \cdot m$. A ist ziemlich genau ganzzahlig und liegt zwischen 1 (Wasserstoff) und 238 (Uran). Nach dem Stoß hat das Neutron die kinetische Energie $W' = W - \Delta W$. Berechne das Verhältnis $\eta = \frac{\Delta W}{W}$ in Abhängigkeit von A! Zeichne $\eta(A)$! Welches Material ist als **Moderator** (Neutronenbremse) am günstigsten?

3.5.3. Eine Gewehrkugel der Masse $m = 13{,}08\,\mathrm{g}$ trifft mit der Geschwindigkeit v_0 parallel zur x-Achse in der Höhe $H = 19{,}62\,\mathrm{cm}$ auf einen Pendelkörper der Masse $M = 6{,}000\,\mathrm{kg}$. Der Pendelkörper hebt sich nach dem Stoß um $h = 2{,}180\,\mathrm{cm}$, die etwas deformierte Kugel, die den Pendelkörper durchschlagen hat, landet auf der x-Achse bei $s = 10{,}00\,\mathrm{m}$. Berechne v_0 und die beim Stoß erzeugte innere Energie W_i!



3.5.4. Ein Stahlblock der Masse $m_1 = 3\,m$ trifft mit der Geschwindigkeit u zentral und vollkommen elastisch auf eine ruhende Billardkugel der Masse $m_2 = m$. Berechne die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der beiden Körper nach dem Stoß. Verwende keine fertigen Formeln, sondern beginne mit den Erhaltungssätzen und löse das so entstehende Gleichungssystem!

3.5.5. Eine Pistolenkugel der Masse $m = 10{,}9\,\mathrm{g}$ trifft mit der Geschwindigkeit v_0 auf einen ruhenden Holzquader der Masse $M = 499{,}1\,\mathrm{g}$ und bleibt in ihm stecken. Der Verbundkörper schlittert zuerst $s = 90\,\mathrm{cm}$ weit über den Tisch (Reibungszahl: $\mu = 0{,}200$) und landet dann $w = 2{,}40\,\mathrm{m}$ vom $h = 72{,}0\,\mathrm{cm}$ hohen Tisch entfernt auf dem Boden. Berechne in dieser Reihenfolge v_2, v_1 und v_0!



3.5.6. Eine Billardkugel der Masse m stößt zentral mit der Geschwindigkeit v_1 auf eine ruhende Kugel gleicher Masse. Berechne die Geschwindigkeiten u_1 und u_2 der beiden Kugeln nach dem Stoß, wenn die gesamte kinetische Energie W' nach dem Stoß

(a) 100 %, (b) 80 % oder (c) 50 %

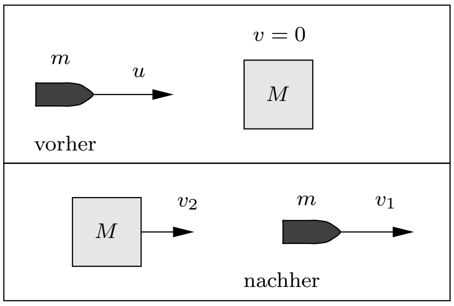
der gesamten kinetischen Energie W vor dem Stoß beträgt.

3.5.7. **Der Mond fällt auf die Erde**

Durch den Zusammenstoß mit einem Himmelskörper ist der Mond auf die Geschwindigkeit Null relativ zur Erde abgebremst worden und beginnt einen freien Fall auf die Erde. Beim Zusammenprall mit den Geschwindigkeiten $v_{\mathrm{Mond}} = 9810\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $v_{\mathrm{Erde}} = 0$ vereinigen sich Erde und Mond zu einem Körper; berechne dessen Geschwindigkeit u nach dem Stoß! Welche Energie Q wird beim Zusammenprall in innere Energie verwandelt? Um welche Temperaturdifferenz ΔT erwärmt sich der neue Planet beim Stoß (spezifische Wärmekapazität: $c = 700\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$)? Wir nehmen an, dass Erde und Mond vor dem Stoß die gleiche Temperatur hatten.

Erdmasse: $M_{\mathrm{E}} = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$; Mondmasse: $M_{\mathrm{M}} = 7{,}35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$

3.5.8. Eine Gewehrkugel der Masse m trifft mit der Geschwindigkeit u auf einen Styroporwürfel der Masse $M = 3\,m$ und durchschlägt ihn. Dabei werden $\frac{2}{3}$ der ursprünglichen kinetischen Energie der Kugel in innere Energie verwandelt. Schreibe die Erhaltungssätze für diesen Stoßprozess hin und berechne die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 nach dem Stoß.



4 Schwingungen und Wellen

4.1 Die harmonische Schwingung

4.1.1. Eine etwas kitschige Uhr hat folgenden Zeitgeber: An einer Feder hängt eine Schaukel, auf der eine Puppe sitzt (zusammen 20 g). Wie groß muss die Federkonstante sein, damit die Schaukel in einer Sekunde einmal auf- und abschwingt?

4.1.2. Eine Kugel der Masse $m = 12{,}00\,\mathrm{kg}$ schwingt an einer Feder mit der Härte $D = 18{,}95\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Die Auslenkung zur Zeit $t = 0{,}000\,\mathrm{s}$ beträgt $x_0 = 1{,}902\,\mathrm{cm}$, die Geschwindigkeit zur selben Zeit ist $v(0) = v_0 = 0{,}7766\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$. Berechne die Kreisfrequenz ω, die Schwingungsdauer T, die Frequenz f, die Amplitude A und die Phase φ in

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi).$$

Zeichne $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ in ein Diagramm.

Einheiten: $1\,\text{cm} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{s}$; $1\,\text{cm} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{cm}$ bzw. $1\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ bzw. $1\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$.

4.1.3. In einen Bus der Masse $M = 8000\,\text{kg}$ steigen $n = 20$ Personen der durchschnittlichen Masse $m = 70\,\text{kg}$ ein; dabei senkt sich der Bus um $\Delta x = 15\,\text{cm}$. Mit welcher Frequenz f schwingt der volle Bus?

4.1.4. Eine Kugel der Masse $m = 400\,\text{g}$ schwingt an einer Feder mit der Frequenz $f = 0{,}50\,\text{Hz}$ und der Amplitude $A = 10\,\text{cm}$. Mit welcher Amplitude A' schwingt dieses Federpendel, wenn die Energie $\Delta W = 0{,}01\,\text{J}$ durch Reibung verlorengegangen ist?

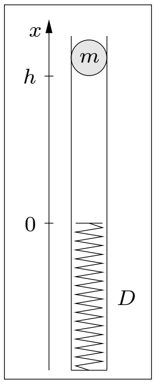
4.1.5. Wie ändert sich die Frequenz einer harmonischen Schwingung, wenn ohne Änderung der Gesamtenergie die Amplitude verdoppelt und die Masse vervierfacht wird?

4.1.6. Eine Schwingung mit Reibung, eine sogenannte **gedämpfte Schwingung**, wird durch die Gleichung

$$x(t) = A_0 \cdot 10^{-\alpha t} \cdot \sin \omega t$$

beschrieben. Zeichne zunächst $h_1(t) = A_0 \cdot 10^{-\alpha t}$ und $h_2(t) = -A_0 \cdot 10^{-\alpha t}$ (die **Einhüllenden**) und dann $x(t)$ für $A_0 = 5\,\text{cm}$, $\alpha = 0{,}2\,\frac{1}{\text{s}}$ und $\omega = 2\,\pi\,\frac{1}{\text{s}}$ im t-Intervall $[0\,;\,9\,\text{s}]$.

4.1.7. Eine Kugel der Masse $m = 40{,}0\,\text{g}$, die reibungsfrei in einer Röhre gleitet, fällt aus der Höhe $h = 5{,}25\,\text{cm}$ auf eine Feder der Härte $D = 19{,}62\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$. x sei die Koordinate des unteren Randes der Kugel.



(a) Berechne ω, T, A und den Nullpunkt x_0 der einsetzenden harmonischen Schwingung.

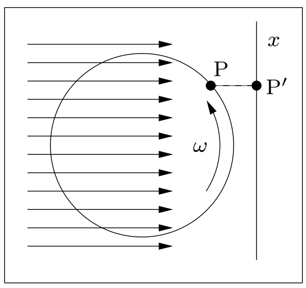
(b) Wähle den Zeitnullpunkt so, dass er dem *tiefsten* Punkt der Bewegung entspricht; dadurch wird der Graf von $x(t)$ achsensymmetrisch. Berechne t_1 und t_2 mit $x(t_1) = 0$ und $x(t_2) = h$. Schreibe $x(t)$ für eine volle Periode der Bewegung hin. Beachte, dass nicht die ganze Bewegung eine harmonische Schwingung ist! Wie lange dauert eine volle
Periode der Bewegung? Zeichne den Grafen von $x(t)$ ($t = 0{,}1\,\text{s} \mathrel{\widehat{=}} 2\,\text{cm}$, $x = 1\,\text{cm} \mathrel{\widehat{=}} 0{,}5\,\text{cm}$).

(c) Zeige, dass der Graf von $x(t)$ eine glatte Kurve ist (kein Knick). Zeichne auch die Grafen von $v(t)$ und $a(t)$.

4.2 Beispiele harmonischer Schwingungen

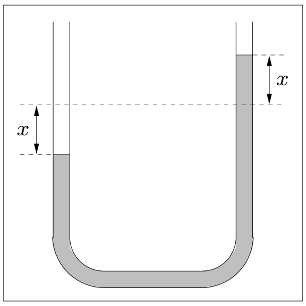
4.2.1. Ein Sandsack der Masse $m_1 = 10\,\text{kg}$ hängt an einer $l = 2\,\text{m}$ langen Schnur. Eine Kugel der Masse $m_2 = 10\,\text{g}$ wird mit der Geschwindigkeit $u = 500\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ in den Sandsack geschossen. Berechne alle Größen der einsetzenden Schwingung $\psi(t) = A \cdot \sin(\omega\,t + \varphi)$, wenn die Kugel den Sandsack zur Zeit $t = 0$ trifft!

4.2.2. Diese Aufgabe erklärt, warum ω **Kreisfrequenz** genannt wird:



Ein Punkt P, der eine gleichförmige Kreisbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit ω und dem Radius r ausführt, wird mit parallelem Licht auf einen Schirm projiziert. Zeige, dass das Bild P′ von P eine harmonische Schwingung ausführt.

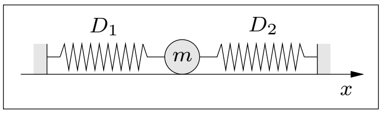
4.2.3. Die Flüssigkeit der Dichte ρ kann sich in dem U-Rohr reibungsfrei bewegen, das Rohr hat den konstanten Querschnitt A, die Gesamtlänge der Flüssigkeit sei s; damit ist $m = \rho\, A\, s$ die Masse der Flüssigkeit.



Beweise, dass die Flüssigkeit, einmal aus ihrer Gleichgewichtslage ausgelenkt, harmonisch schwingt!

Berechne die Richtgröße D und die Frequenz f der Schwingung!

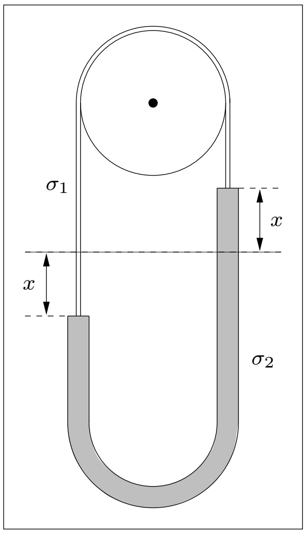
4.2.4. (a) Mit welcher Frequenz schwingt die Kugel der Masse m in x-Richtung?



(b) In der Abbildung seien die beiden Federn gerade entspannt und es gelte $D_1 = D_2$. Die Kugel wird jetzt **senkrecht** zur x-Achse ausgelenkt und losgelassen. Untersuche, ob die Kugel eine harmonische Schwingung ausführt!

4.2.5. Die beiden Schnüre in nebenstehender Abb. sind **total flexibel**, d.h. sie biegen sich ohne Energieverlust und weiter bewegen sie sich reibungsfrei. Jede der beiden Schnüre hat die Länge l und die **Massenbelegung** σ ist definiert durch

$$\sigma = \frac{\text{Masse}}{\text{Länge}}\ .$$

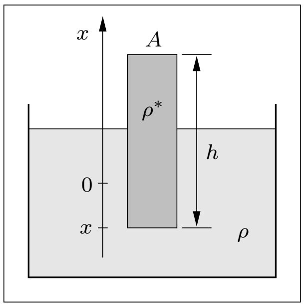


Mit welcher Frequenz f schwingt das System für $\sigma_1 < \sigma_2$?

Wie vereinfacht sich die Formel für f, wenn $\sigma_1 \ll \sigma_2$ ist?

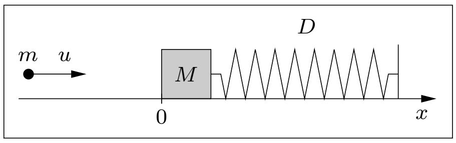
Welche Bewegung führt das System für $\sigma_1 > \sigma_2$ bzw. $\sigma_1 = \sigma_2$ aus?

4.2.6. Ein Zylinder der Dichte ρ^*, der Querschnittsfläche A und der Höhe h taucht, wie aus nebenstehender Abb. ersichtlich, in eine Flüssigkeit der Dichte $\rho > \rho^*$ ein. Durch eine nicht gezeichnete Führungseinrichtung steht die Achse des Zylinders immer senkrecht zur Flüssigkeitsoberfläche. Eine Koordinatenachse wird so gewählt, dass der untere Rand des Zylinders in seiner Ruhelage gerade $x = 0$ entspricht. Die Flüssigkeitsmenge sei so groß, dass sich deren Oberfläche bei einer vertikalen Bewegung des Zylinders weder hebt noch senkt.



Bei welcher Koordinate x_0 befindet sich die Oberfläche der Flüssigkeit in der Gleichgewichtslage? Untersuche, ob der Zylinder bei einer vertikalen Auslenkung aus seiner Ruhelage eine harmonische Schwingung ausführt und berechne gegebenenfalls deren Frequenz f! Konkrete Rechnung für Wasser und einen Holzzylinder mit $\rho^* = 0{,}8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $A = 5\,\text{cm}^2$ und $h = 20\,\text{cm}$!

4.2.7. Eine Pistolenkugel der Masse $m = 10{,}0\,\mathrm{g}$ trifft zur Zeit Null mit der Geschwindigkeit $u = 200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ bei $x = 0$ auf einen ruhenden Holzblock der Masse $M = 1990\,\mathrm{g}$ und bleibt in ihm stecken.



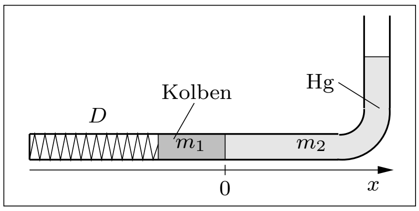
Der Holzblock ist fest mit der Feder ($D = 200\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$) verbunden, als „Ort des Blocks“ wird sein linker Rand betrachtet.

(a) Berechne die Geschwindigkeit v_0 des Verbundkörpers Holz-Kugel unmittelbar nach dem Aufschlag der Kugel.

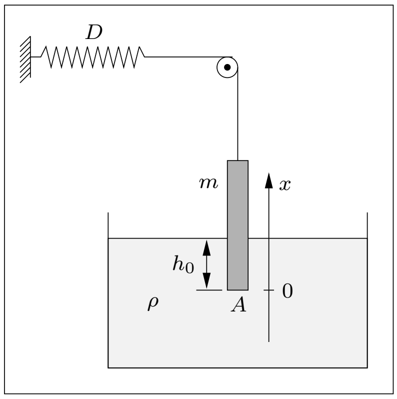
(b) Wann und wo kommt der Verbundkörper nach dem Aufprall der Kugel das erste Mal zur Ruhe?

(c) Wo befindet sich der Verbundkörper zur Zeit $t = 1{,}00\,\mathrm{s}$?

4.2.8. Die Anordnung in nebenstehender Abbildung ist im Gleichgewicht. Die Querschnittsfläche des Rohres ist $A = 2{,}00\,\mathrm{cm}^2$, die Federkonstante ist $D = 3{,}67\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$, der Kolben hat die Masse $m_1 = 65{,}0\,\mathrm{g}$, die Flüssigkeit (Hg) hat die Dichte $\rho = 13{,}55\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ und die Masse $m_2 = 3{,}00\,\mathrm{kg}$. Weise nach (Skizze!!), dass der Kolben unter Abwesenheit von Reibung eine harmonische Schwingung ausführt, wenn er aus der Ruhelage ausgelenkt wird. Berechne die Dauer und die Frequenz dieser Schwingung!



4.2.9. Ein Zylinder der Masse $m = 50{,}0\,\mathrm{g}$ und mit der Querschnittsfläche $A = 3{,}00\,\mathrm{cm}^2$ hängt über eine reibungsfreie Rolle an einer Feder der Härte $D = 3{,}27\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Der Zylinder taucht in eine Flüssigkeit der Dichte $\rho = 1{,}25\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ ein (siehe Abb.). Das System ist im Gleichgewicht, wenn der untere Rand des Zylinders bei $x = 0$ ist. Im Gleichgewichtszustand taucht der Zylinder um die Strecke h_0 in die Flüssigkeit ein und die Feder ist um $d_0 = 6{,}00\,\mathrm{cm}$ gedehnt.

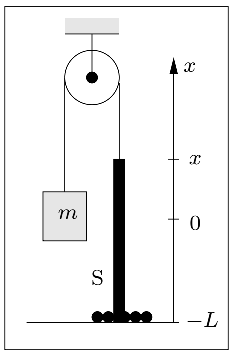


(a) Berechne h_0.

(b) Analysiere mit Hilfe einer genau beschrifteten Skizze alle Kräfte, die auf den Zylinder wirken, wenn er um die Strecke x ($0 < x < d_0$) aus der Ruhelage ausgelenkt ist und beweise, dass der Zylinder eine harmonische Schwingung ausführt.

(c) Berechne die Schwingungsdauer T dieser Schwingung.

4.2.10. Ein Seil S ist mit einer masselosen Schnur über eine reibungsfreie Rolle mit der Masse M verbunden. Die Masse eines Seilstücks der Länge x sei $m_S(x) = \sigma \cdot x$. Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass für $x = 0$ (x markiert das obere Seilende) das System im Gleichgewicht ist, L ist der Abstand des Nullpunktes zum Boden.



(a) Berechne L und die beschleunigende Kraft $F(x)$ des Systems! Warum führt das System keine harmonische Schwingung aus? Berechne die Schwingungsfrequenz für kleine Auslenkungen ($\sigma \cdot x \ll M$)!

(b) Auch bei reibungsfreier Rolle ist die Schwingung gedämpft. Berechne zum Verständnis dieses Effektes die Arbeit A, um das Seil mit konstantem v von $x = 0$ bis $x = L$ zu heben! Welcher Teil von A wird in innere Energie Q verwandelt?

4.3 Die erzwungene Schwingung

4.3.1. Auf einem schnurgeraden Straßenstück zwischen Murnau und Kochel ereignete sich ein merkwürdiger Unfall. Nach Aussage des verunglückten Motorradfahrers gebärdete sich seine Maschine plötzlich ganz wild, sie sprang auf und ab und schließlich landeten Motorrad und Fahrer im Straßengraben. Bei der Rekonstruktion des Unfalls ergaben sich folgende Daten:

Masse des Motorrads mit Fahrer	:	$m = 280\,\mathrm{kg}$
Gesamte Richtgröße der Stoßdämpfer	:	$D = 3500\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

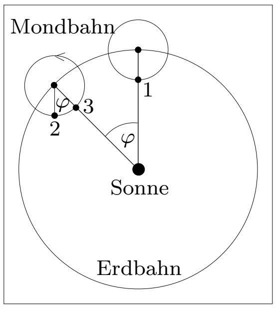
An der Unfallstelle wurden mehrere Bodenwellen quer zur Fahrbahn entdeckt, die durch Zufall den gleichen Abstand $a = 53\,\mathrm{m}$ voneinander hatten. Bei der Gerichtsverhandlung sagte ein Sachverständiger aus, dass die zulässige Höchstgeschwindigkeit von $80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ überschritten wurde. Wie schnell war der Motorradfahrer?

5 Gravitation

5.1 Das Gravitationsgesetz

5.1.1. Der **siderische** Monat T_{sid} ist die Zeit für einen vollen Umlauf des Mondes, von einem Inertialsystem aus gesehen. In nebenstehender Abb. ist der siderische Monat die Zeit zwischen den Positionen 1 und 2 des Mondes. Der **synodische** Monat T_{syn} ist die Zeitspanne zwischen zwei Neumonden, also die Zeit zwischen den Positionen 1 und 3 des Mondes.

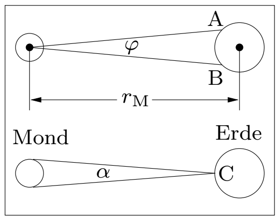
Berechne T_{syn} aus $T_{\mathrm{sid}} = 27{,}32\,\mathrm{d}$ und $1\,\mathrm{a} = 365{,}25\,\mathrm{d}$!



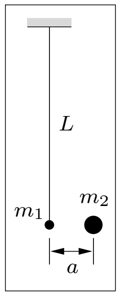
5.1.2. (a) Bregenz und Garmisch liegen auf derselben geografischen Breite von $\varphi = 47{,}5°$, die Entfernung der beiden Orte beträgt $b = 102\,\mathrm{km}$. In Bregenz steht die Sonne um $\Delta t = 5\mathrm{min}\,25{,}5\mathrm{s}$ später im höchsten Punkt als in Garmisch. Berechne aus diesen Daten und dem Ortsfaktor $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ den Erdradius R_{E}, die Erdmasse M_{E} und die Dichte ρ der Erde!

(b) Berechne die Sonnenmasse M_{S} unter der Annahme, dass die Erdbahn ein Kreis mit $r_{\mathrm{E}} = 150\,000\,000\,\mathrm{km}$ ist!

(c) Von zwei Punkten A und B ($\overline{\mathrm{AB}} = 10000\,\mathrm{km}$) der Erde aus wird der Mond angepeilt, wobei A, Mond und B ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Der Winkel A – Mond – B wird dabei zu $\varphi = 1{,}506°$ bestimmt. Berechne die Entfernung r_{M} des Mondes von der Erde! Die Scheibe des Mondes erscheint von der Erde aus unter dem Winkel $\alpha = 0{,}5275°$, die Fallbeschleunigung an der Mondoberfläche wurde von Astronauten zu $g_{\mathrm{M}} = 1{,}62\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ bestimmt. Berechne die Mondmasse M_{M}!

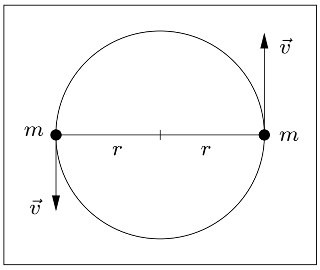


5.1.3. Eine Bleikugel der Masse $m_1 = 10\,\mathrm{kg}$ hängt an einer Schnur der Länge $L = 10\,\mathrm{m}$. Um welchen Winkel φ bzw. um welche waagrechte Strecke x wird die Kugel ausgelenkt, wenn eine zweite Kugel der Masse $m_2 = 100\,\mathrm{kg}$ im Abstand $a = 25\,\mathrm{cm}$ neben der ersten Kugel angebracht wird?



5.1.4. **Doppelstern aus Neutronensternen:**

Zwei Neutronensterne mit der gleichen Masse m umkreisen ihren gemeinsamen Schwerpunkt (siehe Abb.), der Radius der Kreisbahn ist r.



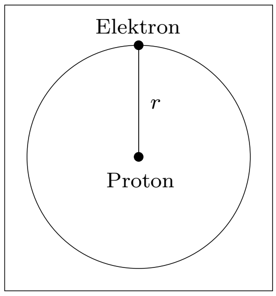
Es gilt $m = 5{,}00 \cdot 10^{29}\,\mathrm{kg}$ und $r = 139\,\mathrm{km}$.

(a) Berechne die Umlaufdauer T und die Umlaufgeschwindigkeit v!

(b) Die Dichte der Neutronensterne ist $\rho = 1{,}19 \cdot 10^{14}\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$. Berechne den Radius R und den Ortsfaktor g an der Oberfläche eines der Sterne!

5.1.5. Welchen Abstand a von der Erdoberfläche muss eine Raumstation haben, die über einem festen Punkt am Äquator zu ruhen scheint (geostationäre Bahn)? Welche Geschwindigkeit v hat die Station von einem Inertialsystem aus betrachtet? Welche Anziehungskraft F wirkt von der Erde auf einen Astronauten der Masse m in der Raumstation? Warum fühlt sich der Astronaut trotzdem schwerelos?

5.1.6. In dieser Aufgabe wollen wir untersuchen, ob ein Atom von der Gravitation zusammengehalten werden kann. Wir betrachten ein H-Atom mit einem Proton der Masse $m_\mathrm{p} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, das von einem Elektron der Masse $m_\mathrm{e} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ umkreist wird.



(a) Warum kann man näherungsweise annehmen, dass das Proton in Ruhe bleibt?

(b) Aus der Quantenmechanik (Grundlagen der Atomphysik) folgt für die Bahngeschwindigkeit v des Elektrons die Beziehung

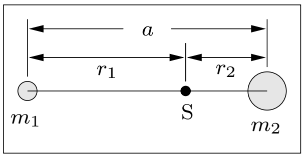
$$m_\mathrm{e} \cdot v \cdot r = \frac{h}{2\,\pi} \quad \text{mit} \quad h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$$

Berechne den Radius r der Elektronenbahn und die kinetische Energie des Elektrons!

(c) Der tatsächliche Radius des H-Atoms ist $r_\mathrm{H} = 5{,}29 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$. Um welchen Faktor α ist die elektrische Kraft, die das Elektron in Wirklichkeit auf seine Bahn zwingt, größer als die Gravitationskraft?

5.1.7. Die Formel für die Zentripetalkraft gilt nur in einem Inertialsystem. Nach dem Schwerpunktsatz ruht der Schwerpunkt S eines abgeschlossenen Systems in einem geeignet gewählten Inertialsystem. Betrachtet man die Bewegung eines Planeten um die Sonne (oder eines Mondes um einen Planeten), dann führt der Planet keine Kreisbahn um die Sonne aus, sondern Planet und Sonne kreisen um den gemeinsamen Schwerpunkt.

(a) Zwei Massen m_1 und m_2 umkreisen in der Zeit T ihren gemeinsamen Schwerpunkt S. Verwende die Bezeichnungen der nebenstehenden Abbildung und beweise das **3. Keplersche Gesetz**:



$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\,\pi^2}\cdot(m_1+m_2)} \tag{1}$$

(b) Berechne die Mondmasse M_{M} aus dem 3. Keplerschen Gesetz unter Verwendung von $M_{\mathrm{Erde}} = 5{,}977\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ und $a = 384800\,\mathrm{km}$!

(c) Das 3. Keplersche Gesetz wir oft in folgender Form angegeben:

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der Bahnradien!	(2)

Leite (2) aus (1) her!

5.1.8. Der Planet Nemesis hat den Radius $R = 5000\,\mathrm{km}$ und an seiner Oberfläche herrscht die gleiche Gravitationsfeldstärke wie an der Erdoberfläche.

(a) Berechne die Masse M von Nemesis! [Zur Kontrolle: $M = 3{,}68\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$]

(b) Ein Satellit soll Nemesis in genau zehn Stunden umkreisen. In welcher Höhe h über der Planetenoberfläche muss die Umlaufbahn des Satelliten verlaufen? Mit welcher Geschwindigkeit v_1 muss der Satellit umlaufen?

5.2 Das Gravitationsfeld

5.2.1. An welchem Punkt ist die Stärke des von Erde und Mond erzeugten Gravitationsfeldes Null?

5.2.2. Die Erde, der Mond und ein Raumschiff bilden ein gleichseitiges Dreieck. Welchen Betrag g hat die von Erde und Mond am Ort des Raumschiffes erzeugte Feldstärke? Zeigt diese Feldstärke in die Richtung des Schwerpunktes Erde-Mond? Skizziere die Feldlinien des von Erde und Mond erzeugten Gravitationsfeldes!

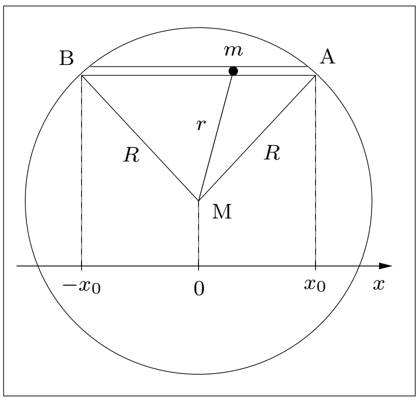
5.3 Der Gauß'sche Satz

5.3.1. Um wieviel Prozent ist die Gravitationsfeldstärke auf der Zugspitze kleiner als in Garmisch?

5.3.2. Eine homogene Kugel (Dichte überall gleich) mit Radius R hat die Masse M. Berechne das von der Kugel erzeugte Gravitationsfeld $g(r)$!

Zeichne $g(r)$ im Intervall $[0; 4\,R]$ für $R = 5000\,\mathrm{km}$ und $M = 3{,}747\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$!

5.3.3. Durch einen Planeten mit Radius R und der konstanten Dichte ρ wird ein gerader Kanal gebohrt, der zwei Städte A und B miteinander verbindet. Durch den **Sehnenkanal** fällt reibungsfrei eine Transportkapsel der Masse m mit der Anfangsgeschwindigkeit Null am Ort A.

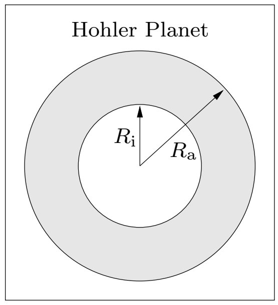


(a) Berechne unter Verwendung von Aufgabe 5.3.2 den Betrag $F_{\mathrm{G}}(x)$ der Kraft auf die Kapsel!

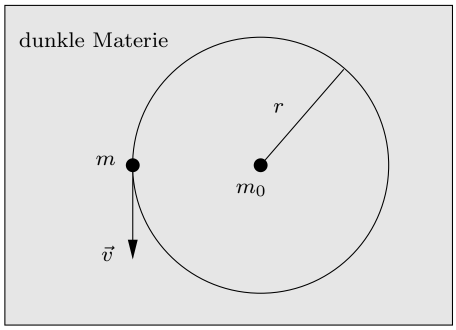
(b) Berechne die Komponente $F(x)$ der Kraft $F_G(x)$, die parallel zur x-Achse zeigt! Welche Bewegung führt die Kapsel demnach aus?
(c) Berechne die Fallzeit τ von A nach B zunächst allgemein und dann speziell für die Erde, und zwar einmal für München-New-York und einmal für München-Sydney!

5.3.4. Eine homogene Kugelschale mit den Radien R_i und R_a (hohler Planet) hat die Masse M. Berechne das von der Kugelschale erzeugte Gravitationsfeld $g(r)$!

Zeichne $g(r)$ im Intervall $[0; 2\,R_a]$ für $R_i = 5000\,\text{km}$, $R_a = 10000\,\text{km}$ und $M = 1{,}499 \cdot 10^{25}\,\text{kg}$!



5.3.5. Ein Planet der Masse m kreist um einen Stern der Masse m_0. Das ganze System befindet sich in einem Meer aus *dunkler Materie* der konstanten Dichte ρ. Die dunkle Materie, aus der ca. 90 % der gesamten Materie des Universums besteht, steht mit der normalen Materie nicht in Wechselwirkung, d.h. der Planet bewegt sich reibungsfrei.



(a) Wie lautet der Gauß'sche Satz für eine radialsymmetrische Massenverteilung?
(b) Schreibe die Geschwindigkeit v des Planeten als Funktion vom Bahnadius r.
(c) Skizziere den Verlauf der Funktion $v(r)$. Für welches $r = r_0$ ist v minimal?

5.3.6. **Masse der Galaxis**

In dieser Aufgabe nehmen wir an, dass die Masse unserer Galaxis radialsymmetrisch verteilt ist.

(a) Wie berechnet man den Betrag der Gravitationsfeldstärke einer radialsymmetrischen Massenverteilung (Formel und kurze Erläuterung)!
(b) Ein Kugelsternhaufen umrundet das Zentrum unserer Galaxis mit der Geschwindigkeit $v_2 = 200\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ auf einem Kreis mit Radius $r_2 = 2{,}00 \cdot 10^{21}\,\text{m}$. Welche Masse M_2 muss demnach unsere Galaxis mindestens haben? Die sichtbare Masse unserer Galaxis ist $M_G \approx 3 \cdot 10^{41}\,\text{kg}$. Wieviel Prozent der gesamten galaktischen Masse liegen mindestens in Form von sogenannter *dunkler Materie* vor?

5.4 Das Gravitationspotential

5.4.1. Welche Geschwindigkeit v muss ein Satellit haben, der die Erde in einer Höhe von 200 km über Grund umkreist? Mit welcher Geschwindigkeit v_0 muss der Satellit von der Erdoberfläche abgeschossen werden, damit er ohne weiteren Antrieb (außer zu Richtungskorrekturen) die Umlaufbahn mit der richtigen Geschwindigkeit v erreicht (Luftwiderstand vernachlässigen!)? Warum werden Satelliten immer in Richtung Osten abgeschossen?

5.4.2. Zeichne die Grafen der Gravitationsfeldstärke $g(r)$ und des Potentials $\varphi(r)$ für das Feld einer Punktmasse $M = 1.499 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$ im r-Intervall $]0\,;\,50\,000\,\text{km}]$!

5.4.3. (a) Ist $F(r)$ die Kraft auf eine Masse m in einem radialsymmetrischen Gravitationsfeld $g(r)$, dann gilt für die potentielle Energie W der Masse m nach (4.4.3)

$$W'(r) = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r} = -F(r) \qquad (1)$$

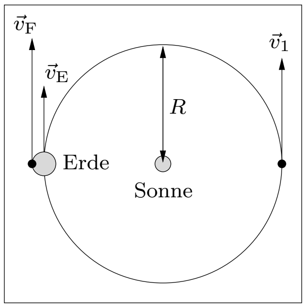
Leite aus (1) eine Beziehung zwischen $g(r)$ und dem Potential $\varphi(r)$ her!

(b) In Aufgabe 5.3.2 haben wir für die Feldstärke einer homogenen Kugel vom Radius R und der Masse M folgende Beziehung hergeleitet (hier mit dem für Zentralkräfte üblichen Vorzeichen):

$$g(r) = \begin{cases} -\dfrac{G\,M}{R^3} \cdot r & \text{für} \quad 0 \leqq r \leqq R \\[2ex] -\dfrac{G\,M}{r^2} & \text{für} \quad r > R \end{cases} \qquad (2)$$

Berechne mit (2) und der in Teilaufgabe (a) gefundenen Beziehung das Potential $\varphi(r)$ der homogenen Kugel! Achte auf die Stetigkeit von φ im ganzen Intervall $[0\,;\,\infty]$! Zeichne $\varphi(r)$ mit $R \mathrel{\widehat{=}} 4\,\text{cm}$ und $|\varphi(R)| \mathrel{\widehat{=}} 4\,\text{cm}$!

5.4.4. (a) Welche Geschwindigkeit v_1 muss eine Raumkapsel an einem Punkt der Erdbahn haben, um aus dem Anziehungsbereich der Sonne zu gelangen, wenn man die Erdanziehung zunächst nicht berücksichtigt (Punkt auf der Erdbahn, aber weit von der Erde entfernt)? $R = 1{,}5 \cdot 10^{11}\,\text{m}$



(b) Wie groß ist die Fluchtgeschwindigkeit v_{FS} aus dem Sonnensystem von einem Punkt der Erdoberfläche aus, betrachtet im Inertialsystem der Sonne?

(c) Wie groß ist die Fluchtgeschwindigkeit v_F aus dem Sonnensystem von einem Punkt der Erdoberfläche aus, betrachtet im Erdsystem, wenn $\vec{v}_F$ in Richtung von $\vec{v}_E$ (Geschwindigkeit der Erde), senkrecht zu $\vec{v}_E$ bzw. entgegengesetzt zu $\vec{v}_E$ zeigt?

5.4.5. (a) Ein Neutronenstern hat die Dichte $\rho = 1{,}81 \cdot 10^{17}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Welchen Radius R hat ein Neutronenstern mit der Masse unserer Sonne ($M = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$) und welche Gravitationsfeldstärke g herrscht an seiner Oberfläche?

(b) Welchen Radius R_0 dürfte ein Neutronenstern nur haben, damit an seiner Oberfläche die gleiche Feldstärke herrschen würde wie an der Erdoberfläche?

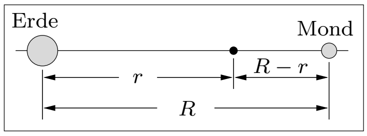
(c) Ein Mensch der Größe 180 cm fällt mit den Füßen voraus auf einen Neutronenstern mit der Masse unserer Sonne. $\Delta g(r)$ sei der Unterschied der Feldstärken an den Füßen und am Kopf, wenn sich die Füße in der Entfernung r vom Mittelpunkt des Sterns befinden. Berechne den exakten Ausdruck für $\Delta g(r)$ sowie eine Näherung mit $h \ll r$! Berechne den prozentualen Fehler der Näherung für $r = 100\,\text{km}$! Für welches r ist $\Delta g(r) = 100 \cdot g_{\text{Erde}}$?

5.4.6. (a) Ein Körper der Masse m fällt aus der Höhe h über der Erdoberfläche mit der Anfangsgeschwindigkeit Null herab. Berechne die Aufprallgeschwindigkeit bei Vernachlässigung der Luftreibung einmal exakt ($v(h)$) und einmal mit der Näherung eines konstanten Gravitationsfeldes ($v_n(h)$)! Berechne $v(1\,\text{km})$, $v(100\,\text{km})$ und $v(10000\,\text{km})$ und den jeweiligen prozentualen Fehler der Näherung!

(b) Berechne $h(v)$ einmal exakt und einmal mit der obigen Näherung! Berechne $h(100\,\frac{\text{m}}{\text{s}})$, $h(1000\,\frac{\text{m}}{\text{s}})$ und $h(10000\,\frac{\text{m}}{\text{s}})$ sowie den jeweiligen prozentualen Fehler der Näherung!

(c) Ab welcher Höhe h ist der Betrag des relativen Fehlers der Näherung $v_n(h)$ größer als ein Prozent?

5.4.7. (a) Berechne das Potential $\varphi(r)$ **zwischen** Erde und Mond! Für welches r_0 ist das Potential zwischen Erde und Mond maximal? Überlege dir zunächst, welchen Wert die Feldstärke an diesem Ort haben muss!



Berechne $\varphi(r)$ an der Erdoberfläche, an der Mondoberfläche, bei r_0 und an ein paar weiteren geeigneten Stellen und zeichne dann den Grafen von $\varphi(r)$ ($1\,\text{cm} \mathrel{\widehat{=}} 2 \cdot 10^7\,\text{m}$; $2\,\text{cm} \mathrel{\widehat{=}} 10^7\,\frac{\text{J}}{\text{kg}}$)!

(b) Mit welcher Minimalgeschwindigkeit v_0 muss eine Rakete von der Erde aus in Richtung Mond geschossen werden, um diesen zu erreichen? Mit welcher Geschwindigkeit v_{M} trifft die Rakete dann auf dem Mond auf?

5.4.8. Jeder weiß, dass der Mond für die Entstehung der Gezeiten auf der Erde verantwortlich ist: „Der Mond zieht das Meerwasser auf seine Seite; auf der Mondseite herrscht also Flut, auf der dem Mond abgewandten Seite Ebbe.“ Leider stimmt diese einfache Erklärung der Gezeiten nicht, da es gleichzeitig *zwei* Flutberge gibt, nämlich einen auf der Mondseite und einen auf der dem Mond abgewandten Seite! Die Erklärung dieses Phänomens liegt darin, dass sich Erde und Mond in einem siderischen Monat einmal um ihren gemeinsamen Schwerpunkt drehen. Berechne die Gesamtkraft $\vec{F}$, die zusätzlich zur Erdanziehung auf ein Wassermolekül an der Erdoberfläche wirkt, und zwar einmal auf der dem Mond zugewandten und einmal auf der dem Mond abgewandten Erdseite!

5.4.9. **Zusammenprall zweier Sterne:**

Zwei Sterne mit den Massen $m_1 = 2{,}80 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$ und $m_2 = 4{,}20 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$ haben die Radien $r_1 = 7{,}90 \cdot 10^8\,\text{m}$ und $r_2 = 8{,}78 \cdot 10^8\,\text{m}$. Ein verspielter Gott setzt die beiden Sterne **ruhend** in den Weltraum, wobei $R = 1{,}3344 \cdot 10^{10}\,\text{m}$ die Entfernung der Mittelpunkte der beiden Sterne ist. Die Sterne bewegen sich aufgrund der Gravitation aufeinander zu und haben zum Zeitpunkt des Berührens der beiden Sternoberflächen die Geschwindigkeiten v_1 und v_2.

(a) Leite mit Hilfe des Impulssatzes eine Beziehung zwischen v_1 und v_2 her und berechne dann v_1 und v_2 aus dem Energiesatz!

(b) Die beiden Sterne vereinigen sich beim Zusammenprall zu einem neuen Stern. Welche Geschwindigkeit V hat der neue Stern? Welche Energie W_i wird beim Zusammenprall in innere Energie verwandelt?

5.4.10. **Schwarze Löcher:**

(a) Die **Fluchtgeschwindigkeit** v_F eines Himmelskörpers ist die Geschwindigkeit, die ein Körper an seiner Oberfläche haben muss, um gerade noch ins Unendliche entweichen zu können. Berechne v_F eines Planeten der Masse M und mit Radius R, ausgehend vom Energiesatz! Drücke v_F auch durch die Gravitationsfeldstärke g an der Oberfläche und R aus! Zwei Planeten mit verschiedenen Radien, aber dem gleichen g an der Oberfläche, haben verschieden Fluchtgeschwindigkeiten; welche ist größer?

(b) Der Schwarzschildradius R_S eines Himmelskörpers der Masse M ist derjenige Radius, für den seine Fluchtgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist. Berechne R_S zuerst allgemein und dann für die Erde ($M_{\text{Erde}} = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$)!

(c) Himmelskörper, deren Radius R kleiner als R_S ist, stürzen unaufhaltsam in sich zusammen und bilden dann ein sogenanntes **schwarzes Loch**. Ein schwarzes Loch ist also eine praktisch punktförmige Masse. Der Raumfahrer Han Solo hat ein schwarzes Loch der Masse $M = 1{,}47 \cdot 10^{17}\,\text{kg}$ entdeckt. Er baut um das Loch eine kugelförmige Stahlhülle, an deren Oberfläche die gleiche Gravitationsfeldstärke herrscht wie an der

Erdoberfläche (die Masse der Hülle darf vernachläßigt werden). Welchen Radius R hat diese Hülle?

(d) Han Solo bringt einen stark leuchtenden Satelliten in eine kreisförmige Bahn um seinen künstlichen Planeten. Welchen Radius r_0 hat diese Bahn, wenn die Umlaufszeit des Satelliten genau 24 h beträgt? Mit welcher Geschwindigkeit v_0 muss der Satellit von der Oberfläche der Stahlhülle abgeschossen werden, damit er seine Umlaufbahn gerade mit der richtigen Umlaufgeschwindigkeit v_U erreicht?

(e) Bei einem Unfall durchschlägt das schwarze Loch die Stahlhülle und hinterläßt in ihr ein zylinderförmiges Loch mit dem Radius $r = 0{,}30\,\mathrm{mm}$. Mit welcher Kraft ist ein Eisenatom des Stahls ($m_{Fe} = 9{,}3 \cdot 10^{-26}\mathrm{kg}$) an die übrigen Atome gebunden?