

GK Physik 13

Astronomie

Richard Reindl

1998-2002

Die aktuellste Version des Skriptes findet man unter

<http://www.stbit.de>

Das Werk steht unter einer Creative Commons

- Namensnennung
- Nicht-kommerziell
- Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Unported Lizenz

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.de>



14. Oktober 2014

1 Grundlagen der Astronomie

1.1 Geschichtliches

In diesem Kapitel wird nur ein ganz kurzer Überblick über die Geschichte der Astronomie gegeben. Näheres ist der Zeittafel im Anhang und den folgenden Kapiteln zu entnehmen.

Seit es den Menschen gibt, beobachtet er den täglichen und jährlichen Lauf von Sonne, Mond und Sternen. Die Denkmäler alter Kulturen (Stonehenge, Carnac, Pyramiden in Ägypten, Mittel- und Südamerika) weisen auf erstaunliche astronomische Kenntnisse hin, die besonders die Zeitrechnung und die Voraussage von Sonnen- und Mondfinsternissen betrafen. Für den damaligen Menschen waren die Gestirne direkt mit den Göttern verknüpft. In der Konstellation der Fixsterne, die während eines Lebensalters ihre gegenseitige Lage kaum verändern, wurden Bilder gesucht, die ihren Gottheiten entsprachen. Eine besondere Stellung nahmen die Planeten ein, die ihre Lage relativ zu den Fixsternen ständig verändern.

Seit THALES VON MILET (624-546 v.Chr.) versucht der Mensch, die Natur rational durch mechanische Modelle zu beschreiben, die Naturbeschreibung wurde entmystifiziert. Thales war somit der erste richtige Physiker, obwohl er die Erde noch für eine Scheibe hielt. PYTHAGORAS (589-497 v.Chr.) wusste schon dass die Erde eine Kugel ist.

Argumente für die kugelförmige Gestalt der Erde:

- Bei näherkommenden Schiffen sieht man zuerst die Mastspitze.
- Der Schattenwurf ändert sich mit der geografischen Breite.
- Der Erdschatten bei einer Mondfinsternis ist immer kreisförmig

Bei den alten Griechen stand die Erde im Mittelpunkt des Universums, die Himmelskörper bewegten sich auf Kreisbahnen um die Erde (*geozentrisches Weltbild*). EUDOXUS AUS KNIDOS (410-356 v.Chr.) hatte zwar ein *heliocentrisches* Weltbild entworfen (die Planeten kreisen um die Sonne), doch es fand keinen Anklang bei seinen Zeitgenossen. Das ausgereifteste geozentrische Modell, das auch die Schleifenbewegungen der Planeten erklärte, wurde von PTOLEMÄUS (90-168 n.Chr.) entwickelt (siehe Aufgaben und Zeittafel im Anhang).

Die Lehren der alten Griechen wurden von den Arabern übernommen und gelangten durch diese nach Mitteleuropa. Erst 1543 wurde das geozentrische Weltbild von NIKOLAUS KOPERNIKUS (1473-1543) abgeschafft und durch eine heliocentrische Weltauffassung ersetzt. Jetzt beginnt eine rasante Entwicklung in der Physik und Astronomie (siehe Zeittafel). Die Erfindung des Fernrohres (Galilei, 1609) ermöglicht die Entdeckung von Details im Planetensystem (Monde von Jupiter und Saturn, Ringe des Saturns, Phasen der Venus, Milchstraße besteht aus einzelnen Sternen usw.), KEPLER (1571-1630) findet heraus, dass sich die Planeten auf Ellipsen um die Sonne bewegen und NEWTON (1643-1727) kann diese Bewegungen durch die von ihm geschaffene Mechanik erklären.

Verfeinerte Rechenmethoden erlauben die Berechnung von Planetenbahnen unter dem Gravitationseinfluss der anderen Planeten und führen zur Entdeckung weiterer Planeten (siehe Tab. 1.1.1).

Neue Beobachtungsmethoden (Spiegelteleskope, Spektralanalyse, Fotografie, Radio-, Infrarot-, Röntgen- und Gammateleskope) und neue physikalische Erkenntnisse (Relativitätstheorie, Quantenmechanik, Elementarteilchenphysik) führen im 19. und 20. Jahrhundert zum heutigen Bild des Universums mit Milliarden von Galaxien, Trilliarden von Sternen, interstellarer und „dunkler“ Materie und so exotischen Objekten wie Pulsaren, Quasaren und schwarzen Löchern.

| Planet | Entdecker | Entdeckungszeit |
|------------------------|-----------|-----------------|
| Merkur | | Altertum |
| Venus | | Altertum |
| Mars | | Altertum |
| Planetoiden (Ceres) | Piazzi | 1801 |
| Jupiter | | Altertum |
| Saturn | | Altertum |
| Uranus | Herschel | 1781 |
| Neptun | Galle | 1846 |
| Pluto | Tombaugh | 1930 |

Tab.1.1.1 Entdeckung der Planeten

1.2 Das heutige astronomische Weltbild

Es folgt ein kurzer Überblick über den Aufbau des Universums:

- **Unser Planetensystem**

Neun Planeten (von innen nach außen: Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun, Pluto) und die Planetoiden (Kleinplaneten) zwischen Mars und Jupiter bewegen sich auf annähernd elliptischen Bahnen um die Sonne (die Bahnen wären exakte Ellipsen, wenn sich immer nur **ein** Körper um die Sonne bewegen würde). Der Durchmesser des Sonnensystems (Plutobahn) ist $1,2 \cdot 10^{13} \text{ m} \approx 80 \text{ AE}$ (siehe Tab. 1.2.1). Die Masse unserer Sonne ist $M_{\odot} = 1,98892 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, die Planeten zusammen haben nur ungefähr ein Tausendstel der Sonnenmasse.

- **Unsere Galaxis**

Die Fixsterne sind Sonnen, die aus eigener Kraft leuchten. Der erdnächste Stern ist Proxima Centauri mit einer Entfernung von $\approx 4,2 \text{ LJ}$. Unsere Sonne gehört zu einem riesigen, diskusförmigen Haufen von ca. 10^{11} Sternen, unserer *Galaxis* (Milchstraßensystem, Gesamtmasse $\approx 1,8 \cdot 10^{11} M_{\odot}$). Der Durchmesser der Galaxis beträgt $\approx 10^5 \text{ LJ}$, wir sind $\approx 26\,000 \text{ LJ}$ vom Zentrum der Milchstraße entfernt. Die in einer Spiralstruktur angeordneten Sonnen rotieren um das Zentrum der Galaxis, unser Sonnensystem mit $\approx 220 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Neben den Sternen ist die Galaxis von *interstellarer Materie* (einzelne Atome und Moleküle, Staub) erfüllt, aus der sich neue Sterne bilden. Aus den Zahlenwerten der Rotationsgeschwindigkeiten der Sterne um den galaktischen Kern folgt, dass es neben der sichtbaren Materie noch eine Form von „dunkler Materie“ in der Galaxis geben muss, deren Natur noch nicht eindeutig geklärt ist. Innerhalb der Galaxis gibt es Zusammenballungen von Sternen, die sogenannten Sternhaufen. Kugelsternhaufen bestehen aus 50 000 bis 50 000 000 Sternen, ihre Durchmesser liegen im Mittel bei 30 pc. Die Kugelhaufen sind nicht nur auf die Scheibe der Galaxis konzentriert, sondern sie bilden eine Art Halo um unsere Galaxis.

- **Große Strukturen**

Neben unserer Galaxis gibt es noch Milliarden anderer Galaxien, die die Tendenz zeigen sich zu Haufen und diese wiederum zu Superhaufen zusammenzuklumpen. Die Haufen und Superhaufen bilden eine netzartige Struktur im Universum. Direkte Nachbarn unserer Galaxis sind einige kleinere Galaxien (z.B. die große und kleine Magellansche Wolke mit $2,0 \cdot 10^{10} M_{\odot}$ und $1,4 \cdot 10^{10} M_{\odot}$) und die Andromedagalaxie mit einer ähnlichen Größe wie unsere Milchstraße in 2 000 000 LJ Entfernung.

• **Das Universum**

Nach der heute gängigen Auffassung ist das Universum vor $\approx 13,7$ Milliarden Jahren aus einer punktförmigen Region (Anfangssingularität) entstanden (*Urknall*). Seitdem dehnt sich das Universum aus und hat heute einen Durchmesser von ≈ 15 Milliarden Lichtjahren. Die Vorstellung eines *endlich* großen Weltalls *ohne* Grenzen ist mit der dreidimensionalen euklidischen Geometrie nicht möglich. Nach der allgemeinen Relativitätstheorie Albert Einsteins gibt es aber in eine vierte Dimension gekrümmte dreidimensionale Räume, die in sich geschlossen sind. Als Beispiel betrachte man die zweidimensionale Oberfläche einer Kugel, die in die dritte Dimension gekrümmt ist.

| | |
|--|---|
| $1 \text{ AE} = 1 \text{ au} = 1,49597870 \cdot 10^{11} \text{ m}$ | <i>Astronomische Einheit</i> (astronomical unit), mittlere Entfernung Erde-Sonne |
| $1 \text{ LJ} = 1 \text{ ly} = c \cdot 1 a_{\text{sid}} = 9,4608952 \cdot 10^{15} \text{ m}$ | <i>Lichtjahr</i> (light year), $a_{\text{sid}} = 31558149,53 \text{ s}$ (siderisches Jahr) ist die Zeit für einen vollen Umlauf der Erde relativ zu den Fixsternen. |
| $1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ AE}}{\tan 1''} = 3,085677581 \cdot 10^{16} \text{ m}$ | <i>Parsec</i> , Entfernung, aus der 1 AE unter dem Winkel $1''$ erscheint. |

Tab.1.2.1 Längenmaße in der Astronomie

1.3 Die Erde als Bezugssystem für Beobachtungen

1.3.1 Koordinaten auf der Erde – Kugelkoordinaten

Eine Ebene durch den Mittelpunkt M einer Kugel mit Radius R schneidet die Kugeloberfläche in einem *Großkreis* mit dem Umfang $U = 2R\pi$. Wir wählen einen beliebigen Punkt N (Nordpol) auf der Kugeloberfläche. Der andere Schnittpunkt der Geraden NM mit der Oberfläche ist dann der Südpol S. Die Großkreise durch N und S nennen wir *Meridiane*. Als Äquatorebene bezeichnen wir die Ebene senkrecht auf der Achse SN durch M, die Äquatorebene schneidet die Oberfläche in einem Großkreis, dem *Äquator*. Auf dem Äquator wählen wir einen Punkt A, den Meridian durch A nennen wir *Nullmeridian* (Greenwich). Der Meridian durch einen beliebigen Punkt P auf der Kugeloberfläche schneidet den Äquator in Q und Q'. Q ist derjenige Schnittpunkt mit der kleineren Bogenlänge ($\widehat{PQ} < \widehat{PQ'}$).

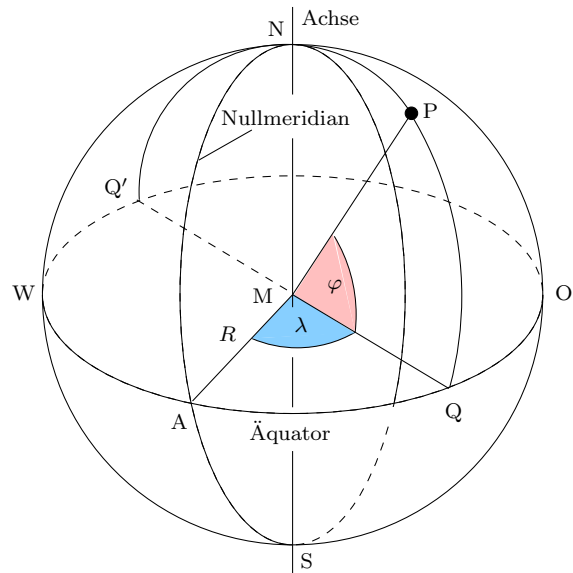


Abb.1.3.1 Kugelkoordinaten

P ist jetzt durch zwei Winkel eindeutig bestimmt, die *Länge* $\lambda = \angle AMQ$ und die *Breite* $\varphi = \angle QMP$ mit

$$-180^\circ < \lambda \leq 180^\circ \quad \text{und} \quad -90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ \tag{1.3.1}$$

In der Geografie wird λ in westlicher Richtung positiv gezählt, φ ist auf der Nordhalbkugel positiv. Der Punkt P in Abb. 1.3.1 hat also ein negatives λ und ein positives φ .

Die Meridiane heißen auch *Längenkreise*, alle Orte auf der Kugeloberfläche mit gleicher Breite φ bilden einen *Breitenkreis*. Unter den Breitenkreisen ist der Äquator der einzige Großkreis, die anderen sind *Kleinkreise*.

Die kürzeste Weg zwischen zwei Punkten P und Q der Kugeloberfläche, der auf der Kugeloberfläche verläuft, ist der Großkreisbogen \widehat{PQ} . Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten mit gleicher Breite verläuft also *nicht* auf dem Breitenkreis! Abb. 1.3.2 entnimmt man, dass der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten gleicher Breite auf der Nordhalbkugel in nördliche Gefilde abweicht (Flugrouten über Grönland!).

Die Länge des Großkreisbogens \widehat{PQ} mit dem Mittelpunktswinkel μ ist

$$\boxed{\widehat{PQ} = R \cdot \mu} \quad (1.3.2)$$

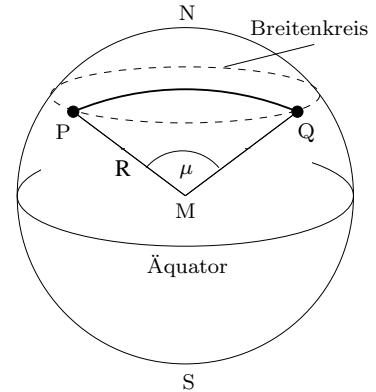


Abb.1.3.2 Kürzeste Entfernung

Abb. 1.3.3 entnimmt man die Umrechnungsformeln von Kugelkoordinaten ($\lambda|\varphi$) in kartesische Koordinaten:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= R \cos \varphi \cos \lambda \\ y &= R \cos \varphi \sin \lambda \\ z &= R \sin \varphi \end{aligned}} \quad (1.3.3)$$

Die y -Achse in Abb.1.3.3 zeigt in der Geografie in die andere Richtung!

Den Mittelpunktswinkel $\mu = \sphericalangle PMQ$ von zwei beliebigen Punkten P($\lambda_1|\varphi_1$) und Q($\lambda_2|\varphi_2$) auf der Kugeloberfläche kann man mit Hilfe des Skalarproduktes berechnen. Aus der Definition des Skalarproduktes folgt

$$\begin{aligned} \vec{MP} \cdot \vec{MQ} &= |\vec{MP}| \cdot |\vec{MQ}| \cdot \cos \mu = R^2 \cos \mu = \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Aus (1.3.3) erhält man die kartesischen Koordinaten der beiden Vektoren:

$$\vec{MP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 \\ R \cos \varphi_1 \sin \lambda_1 \\ R \sin \varphi_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{MQ} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 \\ R \cos \varphi_2 \sin \lambda_2 \\ R \sin \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (1.3.5)$$

Aus (1.3.4) und (1.3.5) folgt dann

$$\cos \mu = \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 + \cos \varphi_1 \sin \lambda_1 \cos \varphi_2 \sin \lambda_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \quad (1.3.6)$$

Anwenden des Additionstheorems $\cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 = \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$ liefert

$$\boxed{\cos \mu = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2} \quad (1.3.7)$$

Mit (1.3.7) und (1.3.2) kann bei bekannten Längen und Breiten von zwei Punkten auf der Kugel die Länge des sie verbindenden Großkreisbogens berechnet werden.

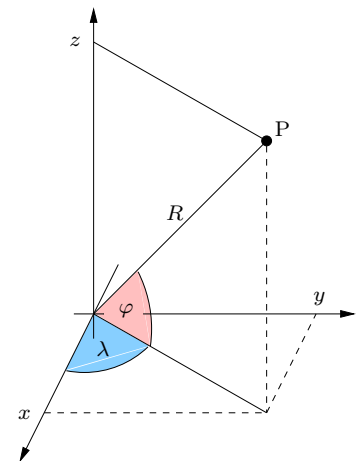
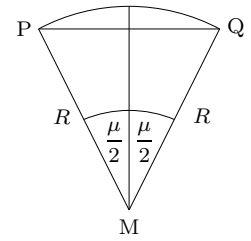


Abb.1.3.3 Umrechnung

Wird ein Erdnaher Himmelskörper (Mond, innerer Planet, Komet) von zwei Teleskopen an den Orten P und Q aus angepeilt, dann werden etwas unterschiedliche Winkel zu diesem Körper gemessen. Bei Kenntnis der geradlinigen Entfernung der beiden Punkte P und Q kann dann die Entfernung des Himmelskörpers berechnet werden. Diese geradlinige Entfernung ist nach Abb. 1.3.4



$$\overline{PQ} = 2 \cdot R \sin \frac{\mu}{2}$$

(1.3.8)

Abb.1.3.4

1.3.2 Koordinaten für Sterne

Das Horizontsystem

Wir denken uns eine sehr große Kugel mit dem Beobachter im Mittelpunkt M, die *Himmelskugel*. Die Tangentialebene an die Erde im Beobachtungsstandort schneidet die Himmelskugel im *Horizont*. Das Lot auf die Erde im Beobachtungsstandort schneidet die Himmelskugel im *Zenit* (höchster Punkt am Himmel) und im *Nadir*. Der Punkt auf dem Horizont, der genau im Süden des Beobachters liegt, ist der *Südpunkt* S. Genauso definiert man den West-, Nord- und Ostpunkt W, N und O. Der Großkreis auf der Himmelskugel durch Zenit, Südpunkt und Nadir ist der *Himmelsmeridian*. Die Koordinaten eines Sternes P findet man wie auf der Erdoberfläche, nur die Namen sind anders: *Azimut* A (statt Länge λ) und *Höhe* h (statt Breite φ).

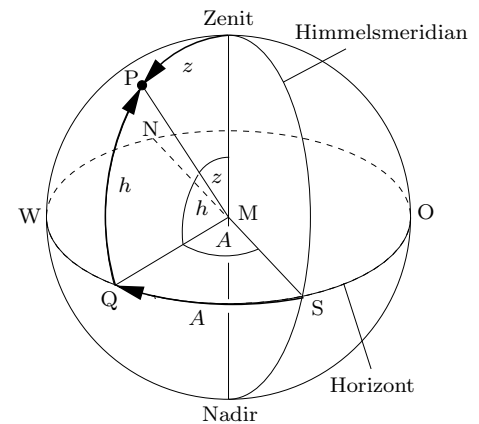


Abb.1.3.5 Horizontsystem

Die Pfeile in Abb. 1.3.5 geben die positiven Werte von Azimut und Höhe an. $z = 90^\circ - h$ nennt man die *Zenitdistanz*. Die Koordinaten im Horizontsystem beschreiben anschaulich und unmittelbar die Richtung, in der man einen Stern vom Beobachtungsstandort aus findet. Der große Nachteil des Horizontsystems ist aber, dass die Koordinaten eines Himmelskörpers vom Standort und von der Zeit abhängen. Daher hat man weitere Systeme eingeführt.

Das feste Äquatorsystem

Da der Radius der Himmelskugel praktisch gegen Unendlich strebt, kann statt des Beobachterstandpunktes auch der Erdmittelpunkt als Mittelpunkt der Himmelskugel betrachtet werden. Beim festen Äquatorsystem wählt man die Äquatorebene der Erde als Basisebene. Der Schnitt der Äquatorebene mit der Himmelskugel ist der *Himmelsäquator*, kurz Äquator genannt. Der Schnittpunkt des Himmelsmeridians mit dem Äquator ist der äquatoriale Südpunkt S_1 . Die Schnittpunkte der Erdachse mit der Himmelskugel sind die Himmelpole. Von S_1 aus zählt man in westlicher Richtung den *Stundenwinkel* t, die *Deklination* δ ist der Winkelabstand zum Äquator. Der Stundenwinkel wird nicht in Grad, sondern als Zeitmaß angegeben.

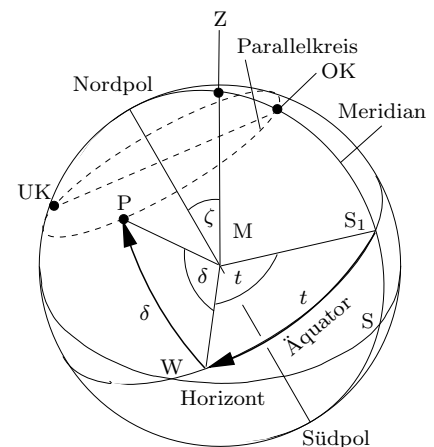


Abb.1.3.6 Festes Äquatorsystem

Dabei entsprechen 24 h dem vollen Winkel 360° :

$$24 \text{ h} \hat{=} 360^\circ \quad , \quad 1 \text{ h} \hat{=} 15^\circ \quad , \quad 1 \text{ min} \hat{=} 15' \quad , \quad 1 \text{ s} \hat{=} 15'' \quad (1.3.9)$$

Im festen Äquatorsystem hat ein Stern immer die gleiche Deklination δ , er bewegt sich im Laufe eines Tages auf einem *Parallelkreis* zum Äquator. Wenn der Stern genau im Süden steht ($t = 0$), dann erreicht er, von der Nordhalbkugel der Erde aus gesehen, seinen *oberen Kulminationspunkt* OK (h maximal), steht er genau im Norden ($t = 12 \text{ h}$), dann erreicht er seinen *unteren Kulminationspunkt* UK (h minimal).

Für den Winkel $\zeta = \angle \text{Zenit-M-Nordpol}$ gilt $\zeta = 90^\circ - \varphi$, wobei φ die geografische Breite des Beobachtungsstandortes ist.

Die Ekliptik

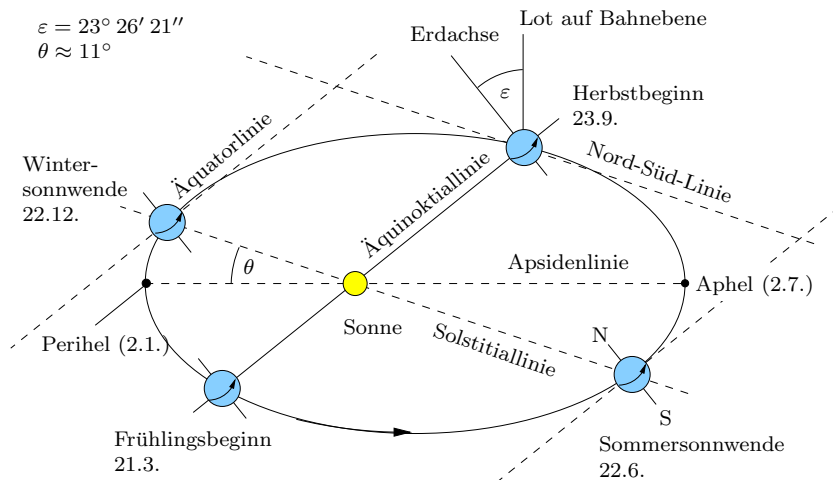


Abb.1.3.7 Erdbahnbahn (Schrägbild)

Die Erde bewegt sich auf einer Ellipsenbahn um die Sonne. Die Erdachse behält dabei im Raum immer die gleiche Stellung bei (bis auf kleine Schwankungen, die wir später behandeln). Der Winkel zwischen der Erdachse und dem Lot auf die Bahnebene ist $\varepsilon = 23,5^\circ$. Der Schnitt der Äquatorebene mit der Bahnebene ist die *Äquatorlinie*, die Ebene durch die Erdachse und das Lot auf die Bahnebene im Erdmittelpunkt schneidet die Bahnebene in der *Nord-Süd-Linie*. Zweimal im Jahr, nämlich zur Zeit der Sommer- bzw. Wintersonnwende, geht die Nord-Süd-Linie durch den Sonnenmittelpunkt. In diesem Fall nennt man die Nord-Süd-Linie die *Solstitiallinie*. Auch zweimal im Jahr (Frühlings- und Herbstanfang, Tagundnachtgleiche) liegt der Sonnenmittelpunkt auf der Äquatorlinie, die man in diesem Fall *Äquinoktiallinie* nennt. Zur Zeit der Tagundnachtgleichen läuft die scheinbare Sonnenbahn, von einem Ort auf dem Erdäquator aus gesehen, durch den Zenit. Wegen der unveränderlichen Erdachse sehen wir die Fixsterne, abgesehen von der täglichen Rotation, immer an der gleichen Stelle der Himmelskugel. Wegen des Umlaufs der Erde um die Sonne sehen wir von der Erde aus die Sonne aber immer an einer anderen Stelle der Himmelskugel (siehe Abb.1.3.8). Die Menge aller Orte auf der Himmelskugel, an denen die Sonne gesehen werden kann, nennt man die *Ekliptik*.

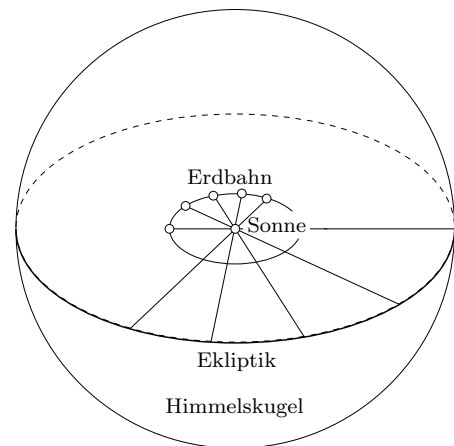


Abb.1.3.8 Entstehung der Ekliptik

Die Ekliptik ist ein Großkreis auf der Himmelskugel, nämlich die Schnittmenge von Himmelskugel und Erdbahnebene. Ekliptik und Himmelsäquator sind, bis auf kleine Schwankungen, relativ zu den Fixsternen in Ruhe. Die Schnittpunkte von Ekliptik und Himmelsäquator sind der *Frühlingspunkt* Υ (auch Widderpunkt genannt, weil er im Sternbild des Widders liegt) und der Herbstpunkt. Zur Zeit des Frühlingsanfangs steht die Sonne genau im Frühlingspunkt, zur Zeit des Herbstbeginns genau im Herbstpunkt. Steht die Sonne im höchsten Punkt der Ekliptik (Nordhalbkugel), dann ist Sommeranfang, steht sie in ihren tiefsten Punkt, ist Winteranfang. In einem Jahr wandert die Sonne einmal durch die Ekliptik.

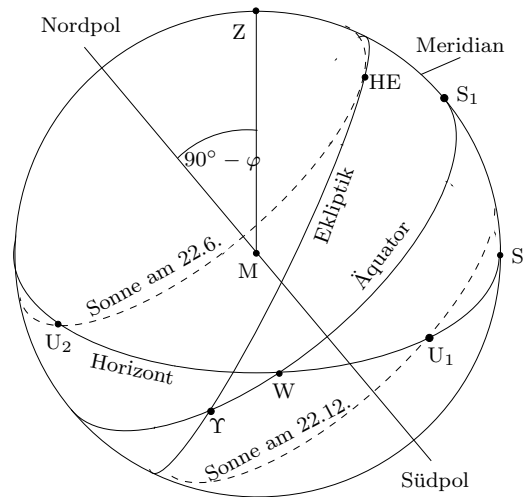


Abb.1.3.9 Ekliptik

Betrachtet man Abb.1.3.9 als festes Äquatorsystem, dann rotiert die Ekliptik einmal in einem *Sterntag* (Zeit zwischen zwei Durchgängen eines Sterns durch den Meridian) um den Mittelpunkt M der Himmelskugel, der Frühlingspunkt durchläuft dabei einmal den Äquator. Abb.1.3.9 ist eine Momentaufnahme zu dem Zeitpunkt eines Tages, zu dem der höchste Punkt HE der Ekliptik etwas westlich des Südpunktes steht (z.B. Sommeranfang, etwas nach Mittag). Wenn HE auf dem Meridian liegt (einmal am Tag, z.B. Sommeranfang mittags), dann fällt der Frühlingspunkt Υ mit dem Westpunkt W auf dem Horizont zusammen.

In Abb.1.3.9 sind auch die scheinbaren Sonnenbahnen zur Winter- und Sommersonnwende mit den Sonnenuntergangspunkten U_1 und U_2 eingezeichnet. Zur Zeit der Tagundnachtgleichen verläuft die scheinbare Sonnenbahn auf dem Himmelsäquator, die Sonne geht dann genau im Osten auf und im Westen unter.

Der Winkel zwischen der Ebene der Ekliptik und der Äquatorebene ist gleich dem Winkel zwischen Erdachse und dem Lot auf die Bahnebene, also $\varepsilon = 23,5^\circ$.

Das bewegliche Äquatorsystem

Im festen Äquatorsystem beschreiben die Fixsterne Parallelkreise zum Äquator. Um die Lage der Sterne eindeutig festlegen zu können, wählt man ein Koordinatensystem, in dem die Fixsterne ruhen. Da der Frühlingspunkt Υ relativ zu den Sternen ruht, wird er als Bezugspunkt des *beweglichen Äquatorsystems* gewählt (beweglich deshalb, weil es sich relativ zum Beobachter auf der Erde bewegt). Der *Stundenkreis* eines Sterns P ist der Großkreis durch den Stern und den Himmelsnord- und Südpol, den Schnittpunkt des Stundenkreises mit dem Äquator nennen wir Q. Als Koordinaten im beweglichen Äquatorsystem wählt man die schon bekannte Deklination δ und den Winkel α vom Frühlingspunkt Υ bis zu Q. Die *Rektaszension* α wird von Υ aus in

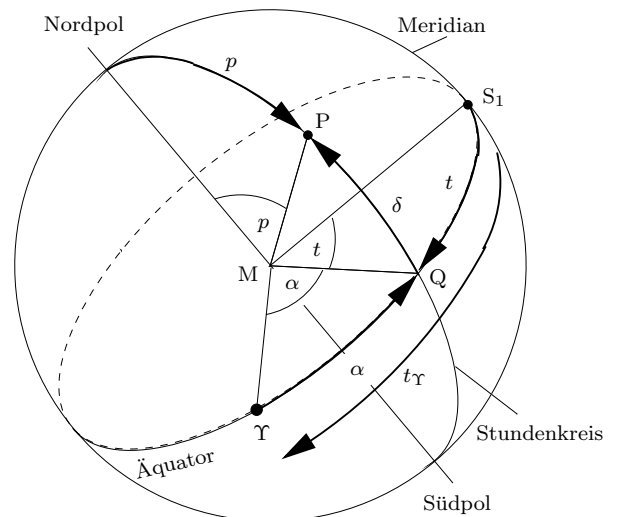


Abb.1.3.10 Bewegliches Äquatorsystem

östliche Richtung positiv gezählt. Wie der Stundenwinkel t wird auch α im Zeitmaß zwischen 0 und 24 h angegeben. Die *Poldistanz* p ist der Winkel zwischen Stern und Nordpol auf dem Stundenkreis, d.h. $p = 90^\circ - \delta$.

Die *Sternzeit* am Beobachtungsort ist definiert als der Stundenwinkel t_Υ des Frühlingspunktes.

Am Beobachtungsort ist es also 0:00:00 Sternzeit, wenn sich der Frühlingspunkt genau im Süden befindet. Zwischen dem Stundenwinkel t und der Rektaszension α eines Sterns gilt die Beziehung (siehe Abb.1.3.10)

$$t_{\Upsilon} = t + \alpha \quad (1.3.10)$$

In jeder Sternwarte gibt es Uhren, die die Sternzeit anzeigen. Sucht man einen Stern, dessen Rektaszension und Deklination man einem Sternverzeichnis entnimmt, dann erhält man mit (1.3.10) den Stundenwinkel t . Den Stundenwinkel und die Deklination kann man am Fernrohr einstellen und man hat den Stern gefunden. Ein Motor ändert den Stundenwinkel des Teleskops so, dass man den Stern dauerhaft beobachten kann.

| Name | „waagrechte“ Koordinate | „senkrechte“ Koordinate |
|---------------------|--|-------------------------|
| Erde | Länge λ (von Greenwich nach west) | Breite φ |
| Horizont | Azimut A (von S nach west) | Höhe h |
| Äquator (fest) | Stundenwinkel t (von S_1 nach west) | Deklination δ |
| Äquator (beweglich) | Rektaszension α (von Υ nach ost) | Deklination δ |

Tab.1.3.1 Überblick Koordinatensysteme

1.4 Instrumente zur Beobachtung

1.4.1 Die Linsengleichung

Linsen sind so geschliffen, dass im Idealfall Folgendes gilt:

- Strahlen parallel zur optischen Achse gehen durch den *Brennpunkt* F.
- Strahlen durch den Mittelpunkt der Linse werden nicht gebrochen.
- Alle Strahlen, die von einem Punkt P ausgehend durch die Linse treten, vereinigen sich im Bildpunkt P'.

Ein rechts von P' bzw. der Hauptebene stehender Beobachter sieht das von P ausgehende Licht so, wie wenn es von P' ausgehen würde.

Mit den Strahlensätzen folgt aus Abb.1.4.1 und Abb.1.4.2:

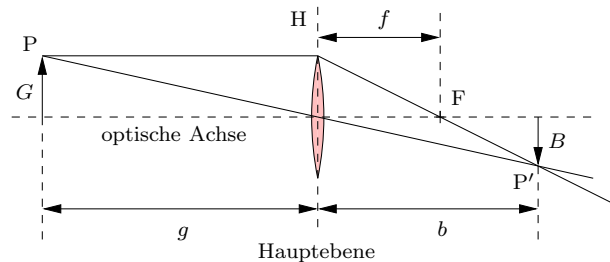


Abb.1.4.1 Sammellinse

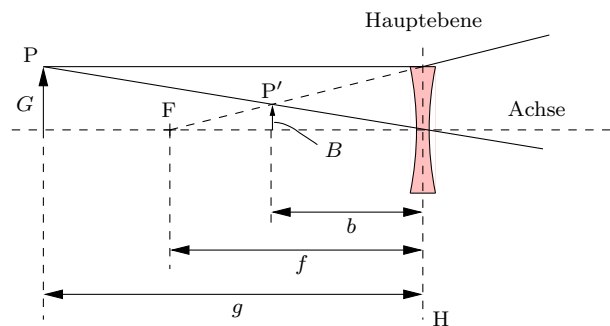


Abb.1.4.2 Zerstreuungslinse

$$\frac{-B}{G} = \frac{b}{g} \quad \text{und} \quad \frac{-B}{G} = \frac{b-f}{f} \quad (1.4.1)$$

Gleichsetzen der rechten Seiten von (1.4.1) und Umformen liefert die *Linsengleichung*

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (1.4.2)$$

Für $g \rightarrow \infty$ folgt $b = f$, d.h. die Bilder sehr weit entfernter Gegenstände liegen in der Brennebene (Ebene senkrecht auf der Achse durch F). Für $g = f$ (nur bei der Sammellinse) gilt $b \rightarrow \infty$, d.h. die von P ausgehenden Strahlen verlassen die Linse als paralleles Lichtbündel.

| | |
|---------------------|---|
| F | Brennpunkt |
| P | Originalpunkt |
| P' | Bildpunkt |
| M | Mittelpunkt der Linse |
| H | Hauptebene (Ebene senkrecht auf der Achse durch M) |
| $f = \overline{MF}$ | Brennweite (negativ, wenn F links von der Hauptebene) |
| g | Gegenstandsweite (positiv, wenn P links von der Hauptebene) |
| b | Bildweite (negativ, wenn P' links von der Hauptebene) |
| G | Gegenstandsgröße (positiv, wenn P oberhalb der Achse) |
| B | Bildgröße (negativ, wenn P' unterhalb der Achse) |

Tab.1.4.1 Definitionen der Größen

Beim *Hohlspiegel* (Konkavspiegel) liegt eine ähnliche Situation vor wie bei der Sammellinse. b und f sind links vom Spiegel positiv. Für einen „flachen“ Spiegel gilt angenähert auch die Linsengleichung (1.4.2). Eine exakte Abbildung erreicht man mit einem Parabolspiegel (siehe Aufgaben). Ist R der Krümmungsradius des Parabolspiegels im Scheitel S (Radius einer Kugel, die in einer kleinen Umgebung von S näherungsweise gleich dem Rotationsparaboloid ist), dann gilt

$$\boxed{f = \frac{R}{2}} \quad (1.4.3)$$

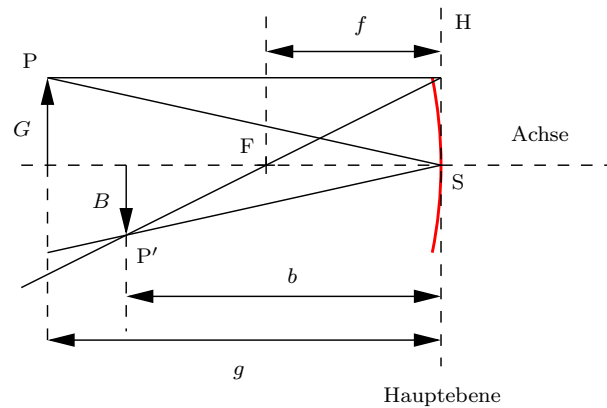


Abb.1.4.3 Hohlspiegel

1.4.2 Fernrohre

Das Kepler'sche Fernrohr besteht aus zwei Sammellinsen mit den Brennweiten f_1 und f_2 . Wir betrachten das Parallelbündel eines fernen Punktes, das unter dem Winkel α gegen die optische Achse einfällt. Das von der ersten Linse erzeugte Zwischenbild liegt dann in der Brennebene dieser Linse. Die zweite Linse (*Okular*) wird in der Entfernung f_2 vom Zwischenbild angeordnet, d.h. die vom Zwischenbild ausgehenden Strahlen verlassen das Okular als Parallelbündel, das dann vom Auge entspannt beobachtet werden kann. Der Austrittswinkel des Parallelbündels sei β . Wie groß ein Objekt dem Betrachter erscheint, hängt vom Tangens des Blickwinkels ab. In Abb.1.4.6 erkennt man, dass der doppelten Größe auch der doppelte

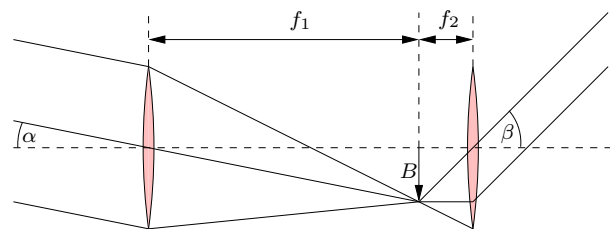


Abb.1.4.4 Kepler'sches Fernrohr

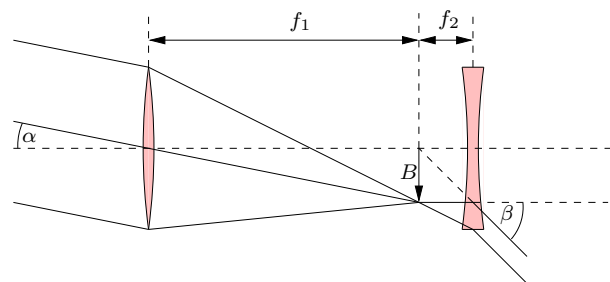


Abb.1.4.5 Galileisches Fernrohr

Tangens des Blickwinkels entspricht:

$$\tan \alpha_2 = 2 \tan \alpha_1 \quad (1.4.4)$$

Als *Vergrößerung* des Fernrohrs definiert man deshalb

$$v = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} \quad (1.4.5)$$

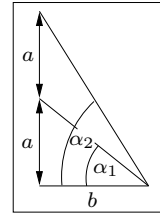


Abb.1.4.6

Abb.1.4.4 und Abb.1.4.5 entnimmt man

$$\tan \alpha = \frac{B}{f_1} \quad \text{und} \quad \tan \beta = \frac{B}{f_2} \quad (1.4.6)$$

Aus (1.4.5) und (1.4.6) folgt dann für die Vergrößerung

$$v = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{f_1}{f_2} \quad (1.4.7)$$

Das eben gewonnene Ergebnis (1.4.7) gilt auch für *Spiegelteleskope*. Bei diesem Fernrohrtyp wird als *Objektiv* keine Sammellinse, sondern ein Hohlspiegel verwendet. Da der Brechungsindex eines Materials wellenlängenabhängig ist, hat eine Linse für verschiedenfarbiges Licht verschiedene Brennweiten. Eine Linse kann also von einem weißen Lichtpunkt kein punktförmiges Bild erzeugen (*chromatische Aberration*). Dieses Manko kann durch die Verwendung von Linsensystemen statt einer einzigen Linse teilweise ausgeglichen werden, die Verwendung eines Spiegels ist aber einfacher.

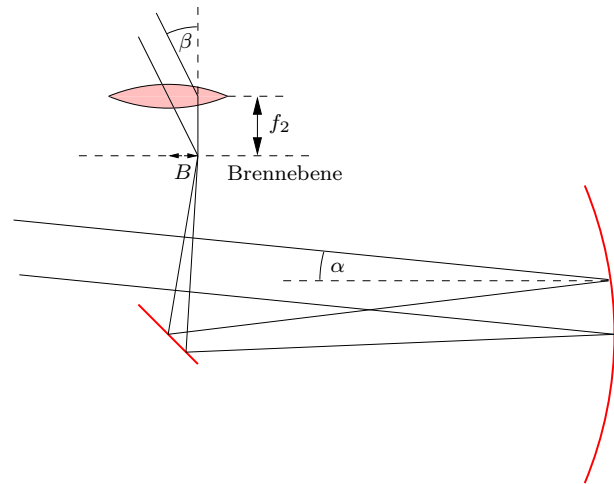


Abb.1.4.7 Newtonsches Spiegelteleskop

Die *Auflösung* δ eines Fernrohrs ist definiert als der minimale Winkelabstand zweier weit entfernter punktförmiger Lichtquellen, die gerade noch getrennt beobachtet werden können. Eine Einschränkung der Auflösung ist durch die Beugung des einfallenden Lichtes an der Eintrittsöffnung des Fernrohres gegeben. Die Beugungsscheibchen der beiden Lichtpunkte können noch getrennt werden, wenn das erste Minimum des einen Scheibchens auf das Hauptmaximum des anderen fällt. Nach der Theorie der Beugung an kreisförmigen Öffnungen gilt daher mit dem Objektivdurchmesser D und der Wellenlänge λ des einfallenden Lichts

$$\sin \delta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (1.4.8)$$

Wegen $\sin \delta \approx \delta$ für $\delta \ll 1$ folgt

$$\delta \approx 1,22 \frac{\lambda}{D} = 4190' \cdot \frac{\lambda}{D} \quad (1.4.9)$$

Die Auflösung des menschlichen Auges, bedingt durch die Beugung an der Pupillenöffnung und den Abstand der Rezeptoren auf der Netzhaut, ist

$$\delta_{\text{Auge}} \approx 1' \quad (1.4.10)$$

1.4.3 Teleskope für nicht sichtbare Wellenlängen

Radioteleskope

Die Erdatmosphäre ist nur für zwei Wellenlängenbereiche der elektromagnetischen Strahlung durchsichtig, für das *optische Fenster* ($300 \text{ nm} \lesssim \lambda \lesssim 800 \text{ nm}$, nahes UV bis nahes IR) und das *Radiofenster* ($1 \text{ mm} \lesssim \lambda \lesssim 30 \text{ m}$).

Die Antennen der Radioteleskope sind riesige Parabolspiegel. Der größte bewegliche Spiegel (Efelsberg bei Bonn) hat den Durchmesser $D = 100 \text{ m}$, das größte Radioteleskop der Erde ist fest in eine Senke eingebaut (Arecibo, Puerto Rico) und hat den Spiegeldurchmesser $D = 300 \text{ m}$.

Die Winkelauflösung der Radioteleskope ist wegen der großen Wellenlänge ziemlich schlecht. Mit $D = 100 \text{ m}$ und $\lambda = 21 \text{ cm}$ folgt aus (1.4.9) $\delta \approx 9'$. Die Winkelauflösung kann um Größenordnungen verbessert werden, wenn zwei Teleskope in großer Entfernung a voneinander das gleiche Objekt anvisieren. Die Empfangsdaten werden gespeichert, mit genauen Zeitmarken versehen (Atomuhren!) und von einem Computer zur Interferenz gebracht. Mit diesem VLBI genannten Verfahren (very long baseline interferometry) wird eine Winkelauflösung von $\delta \approx \frac{\lambda}{a}$ erreicht (siehe Aufgaben). Die beiden Teleskope im Abstand a haben also eine Winkelauflösung wie ein Teleskop mit dem Durchmesser a .

Weltraumteleskope

Um den Himmel in Wellenlängenbereichen zu untersuchen, die nicht zum optischen oder zum Radiofenster gehören, müssen die entsprechenden Teleskope auf Umlaufbahnen außerhalb der Erdatmosphäre gebracht werden. Aber auch optische Teleskope profitieren von einer Position im Weltraum, da die Atmosphäre leichte Winkelschwankungen der einfallenden Strahlen hervorruft. Sogar ein Radioteleskop ist auf eine stark elliptische Umlaufbahn gebracht worden, um eine möglichst große Basis für VLBI zu erhalten.

| Name | Wellenlängen | Start |
|------------------------------|------------------------|----------------|
| Compton-Observatorium | Gammastrahlung | 1991 |
| Einstein-Observatorium | Röntgenstrahlung | 1978 |
| ROSAT (Deutschland) | Röntgenstrahlung | 1990 |
| Hubble-Space-Telescope (HST) | sichtbar | 1990 |
| IRAS | Infrarot | 1983 |
| COBE | Mikrowellenhintergrund | 1989 |
| HALCA (Japan) | Radioteleskop für VLBI | 1997 |
| WMAP | Mikrowellenhintergrund | 2001 |
| Kepler | sichtbar, IR | 2009 |
| Planck | Mikrowellen | 2009 |
| Herschel | IR | 2009 |
| James Webb | IR | 2018 (geplant) |

Tab.1.4.2 Einige Weltraumobservatorien

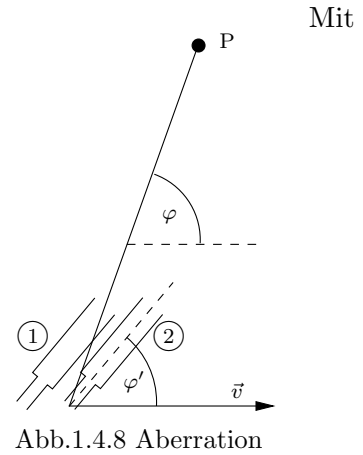
1.4.4 Reduktion der Beobachtungsdaten

Bei der Messung der Koordinaten von Himmelskörpern treten systematische Fehler auf, die aber herausgerechnet werden können (Reduktion der Beobachtungsdaten). Einige dieser Fehler sind die Brechung an der Erdatmosphäre, der veränderliche Ort der Erde wegen der Bewegung um die Sonne (*Parallaxe*) und die Richtungsänderung der Lichtgeschwindigkeit wegen der Erdbewegung (*Aberration*).

Aberration

S sei das Inertialsystem, in dem die Sonne ruht, ein Beobachter auf der Erde ruht in S' , die Relativgeschwindigkeit von S' zu S sei \vec{v} . Ein Fernrohr F ist auf einen Stern P gerichtet. Ein vom Stern kommendes Photon tritt zur Zeit t_1 in das Objektiv von F ein (Stellung ① von F) und verlässt das Fernrohr zur Zeit t_2 (Stellung ② von F). \vec{c} sei die Geschwindigkeit des Photons in S, \vec{c}' die in S' . Der Winkel zwischen \vec{c} und \vec{v} ist φ , der zwischen \vec{c}' und \vec{v} ist φ' . Mit Hilfe der speziellen Relativitätstheorie erhält man (siehe Aufgaben) die *Aberrationsformel*

$$\tan \varphi' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \cdot \sin \varphi}{\beta + \cos \varphi} \quad (1.4.11)$$

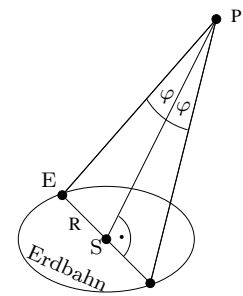


$\Delta\varphi = \varphi - \varphi' \ll 1$ und $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$ folgt (siehe Aufgaben)

$$\Delta\varphi \approx \beta \sin \varphi \quad (1.4.12)$$

Parallaxe

Die Positionen von Sternen, die nicht zu weit von der Sonne entfernt sind (bis ca. 100 LJ), scheinen sich im Laufe eines Jahres leicht zu verändern. Dieser Effekt, der auf die Bewegung der Erde um die Sonne zurückzuführen ist, wird *trigonometrische Parallaxe* genannt. Zweimal im Jahr erscheint die Strecke Erde-Sonne vom Stern P aus gesehen unter einem maximalen Winkel φ . Wegen der großen Entfernung der Sterne ($\overline{SP} \gg R$) gilt in sehr guter Näherung, dass dieser maximale Winkel genau dann erreicht wird, wenn SP senkrecht auf dem Radiusvektor der Erde steht. Aus Abb.1.4.9 folgt dann



$$\sin \varphi = \frac{R}{\overline{EP}} \quad \text{oder} \quad \overline{EP} = \frac{R}{\sin \varphi} \quad (1.4.13)$$

1.5 Gravitation

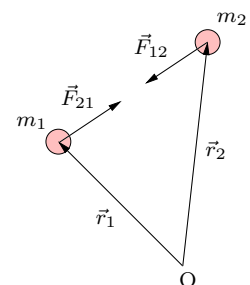
1.5.1 Das Gravitationsgesetz

Die Kraft, die von einer Punktasse m_2 am Ort \vec{r}_2 auf eine Punktasse m_1 am Ort \vec{r}_1 ausgeübt wird, ist

$$\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^3} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\vec{F}_{12} \quad (1.5.1)$$

mit der *Gravitationskonstanten*

$$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \quad (1.5.2)$$



Für Beträge lautet das Gravitationsgesetz

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.5.3)$$

1.5.2 Das Gravitationsfeld

Im Ursprung O eines Koordinatensystems sitzt die Masse M , am Ort \vec{r} befinde sich eine Testmasse m . Die Gravitationskraft von M auf m ist

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (1.5.4)$$

mit dem Betrag

$$F(\vec{r}) = F(r) = \frac{GMm}{r^2} \quad (1.5.5)$$

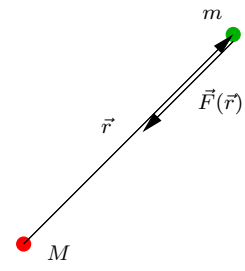


Abb.1.5.2

Der Quotient $\vec{g}(\vec{r})$ aus $\vec{F}(\vec{r})$ und m ist eine von m unabhängige Größe und heißt *Gravitationsfeldstärke* der Masse M am Ort \vec{r} :

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m} = -\frac{GM}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (1.5.6)$$

$$g(r) = |\vec{g}(\vec{r})| = \frac{GM}{r^2} \quad (1.5.7)$$

Wegen *Newton 2* ist $\vec{g}(\vec{r})$ nichts anderes als die Beschleunigung, die eine Masse m aufgrund der Schwerkraft am Ort \vec{r} erhält:

$$\boxed{\text{Gravitationsfeldstärke} = \text{Schwerebeschleunigung}} \quad (1.5.8)$$

Da $\vec{g}(\vec{r})$ nicht von m abhängt, gilt ganz allgemein der Satz:

$$\boxed{\text{Am gleichen Ort fallen alle Körper gleich schnell!}} \quad (1.5.9)$$

Die Masse M erzeugt das *Gravitationsfeld* mit der Stärke $\vec{g}(\vec{r})$. Der Begriff „Gravitationsfeld“ ist etwas schwammig definiert und bedeutet soviel wie die Eigenschaft des Raumes, an einem bestimmten Ort \vec{r} auf einen beliebigen Körper die Beschleunigung $\vec{g}(\vec{r})$ auszuüben. Oft wird der Begriff „Gravitationsfeld“ auch abkürzend für „Gravitationsfeldstärke“ verwendet.

Aus der Definition (1.5.6) der Gravitationsfeldstärke folgt für die Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ auf eine Masse m

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = m \cdot \vec{g}(\vec{r})} \quad (1.5.10)$$

Die Gravitationsfeldstärke ist also nichts anderes als unser altbekannter Ortsfaktor.

Die *Feldlinien* des Gravitationsfeldes geben an jedem Ort die Richtung des Feldes an, d.h. $\vec{g}(\vec{r})$ ist in jedem Raumpunkt tangential zu einer Feldlinie. Die Feldlinien des Feldes einer Punktmasse M im Punkt P sind alle Geraden durch P .

Die Kraft $\vec{F}(\vec{r})$, die von den Massen M_1, \dots, M_n an den Orten $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ auf eine Masse m am Ort \vec{r} ausgeübt wird, ist

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{GM_i m}{r^3} \cdot \vec{r}_i \right) \quad (1.5.11)$$

Damit gilt für die Feldstärke am Ort \vec{r}

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{GM_i}{r^3} \cdot \vec{r}_i \right) = \sum_{i=1}^n \vec{g}_i(\vec{r}) \quad (1.5.12)$$

$$\boxed{\text{Gravitationsfeldstärken addieren sich vektoriell!}} \quad (1.5.13)$$

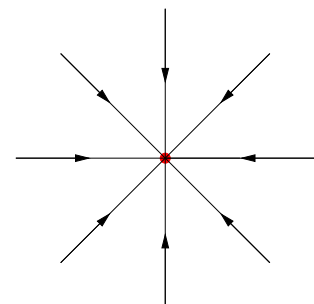


Abb.1.5.3 Radialsymmetrisches Feld einer Punktmasse

1.5.3 Der Gauß'sche Satz

Für eine radialsymmetrisch verteilte Masse ist auch das von ihr erzeugte Gravitationsfeld radialsymmetrisch (Zentralfeld), d.h. $\vec{g}(\vec{r})$ zeigt an jedem Ort \vec{r} zum Zentrum Z der Masse und der Betrag g von \vec{g} ist nur von $r = |\vec{r}|$, nicht aber von der Richtung abhängig. Wenn $M(r)$ die gesamte Masse innerhalb einer Kugel mit Radius r um Z bezeichnet, dann gilt für das von der radialsymmetrischen Massenverteilung erzeugte Gravitationsfeld

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} \quad (1.5.14)$$

(Gauß'scher Satz für radialsymmetrische Felder)

Aus (1.5.14) folgt:

Befindet man sich *außerhalb* einer radialsymmetrischen Massenverteilung (z.B. außerhalb eines Planeten oder eines Sterns), dann herrscht dort das gleiche Gravitationsfeld, das von einer Punktmasse gleicher Größe im Zentrum der Massenverteilung erzeugt würde!

1.5.4 Das Gravitationspotential

Im Ursprung eines Koordinatensystems ruht die Masse M . Die Kraft auf eine Masse m am Ort \vec{r} ist dann eine Zentralkraft (negativ, wenn nach innen gerichtet):

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2} \quad (1.5.15)$$

mit $r = |\vec{r}|$. Mit $W(r)$ bezeichnen wir die potentielle Energie der Masse m in der Entfernung r vom Ursprung. Um m mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen, muss die Gesamtkraft auf m verschwinden, d.h. von außen muss auf m die Kraft $\vec{F}^* = -\vec{F}$ wirken. Die Arbeit, um m von \vec{r} nach $\vec{r} + d\vec{s}$ zu verschieben, ist gleich der Änderung der potentiellen Energie:

$$dW = -\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = -F(r) \cdot \underbrace{ds \cos \varphi}_{dr} \quad (1.5.16)$$

Die Änderung der potentiellen Energie hängt nur von der radialen Wegänderung dr ab, nicht jedoch von der Richtung von $d\vec{s}$. Für einen Weg, der auf einer Kugelfläche um Z verläuft, ist $dr = 0$ und somit ist die potentielle Energie auf Kugelschalen um Z konstant, die Kugelschalen sind *Äquipotentialflächen*. Die Masse m wird von einem Punkt auf einer Kugelschale mit Radius r_1 zu einem Punkt auf einer Kugelschale mit Radius r_2 verschoben. Die Änderung der potentiellen Energie bei dieser Verschiebung ist

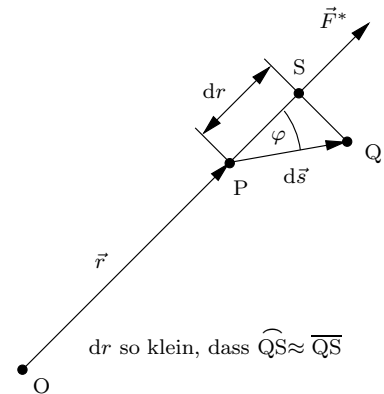


Abb.1.5.4 Zentralkraft

$$\Delta W = - \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2} dr = \left[-\frac{GMm}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (1.5.17)$$

$$\Delta W = GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (1.5.18)$$

Wegen r im Nenner kann $r = 0$ nicht als Bezugspunkt für die potentielle Energie verwendet werden. Wir wählen daher einen unendlich fernen Punkt als Bezugspunkt, d.h. $W(r)$ ist die

Überföhrungsarbeit von einem unendlich fernen Punkt ($r_1 \rightarrow \infty$) nach $r_2 = r$. Mit (1.5.17) folgt dann:

$$W(r) = \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \left(GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \right) = -\frac{GMm}{r} \quad (1.5.19)$$

Das **Potential** $\varphi(r)$ des Gravitationsfeldes ist die potentielle Energie einer Masse m geteilt durch m :

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{W(r)}{m}} \quad \text{oder} \quad \boxed{W(r) = \varphi(r) \cdot m} \quad (1.5.20)$$

Aus (1.5.19) folgt

$$\boxed{\varphi(r) = -\frac{GM}{r}} \quad (\text{Potential einer Punktmasse } M) \quad (1.5.21)$$

An den Orten $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ befinden sich die felderzeugenden Massen m_1, m_2, \dots, m_n . Da die Gesamtkraft auf eine Testmasse m am Ort \vec{r} gleich der Summe der Einzelkräfte \vec{F}_i ist, ist die potentielle Energie im Gesamtfeld auch gleich der Summe der potentiellen Energien in den Einzelfeldern. Nach Division durch m erhält man dann für das Gesamtpotential der n Massen

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{Gm_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) = -G \cdot \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}} \quad (1.5.22)$$

wobei $|\vec{r} - \vec{r}_i|$ die Entfernung zwischen den Massen m und m_i ist.

Der Energiesatz für eine Masse m in einem beliebigen Gravitationspotential $\varphi(\vec{r})$ lautet

$$W_{\text{pot}}(\vec{r}) + W_{\text{kin}}(\vec{r}) = W_{\text{pot}}(\vec{r}') + W_{\text{kin}}(\vec{r}') \quad (1.5.23)$$

bzw.

$$m \cdot \varphi(\vec{r}) + \frac{m}{2} v(\vec{r})^2 = m \cdot \varphi(\vec{r}') + \frac{m}{2} v(\vec{r}')^2 \quad (1.5.24)$$

oder nach Division durch m

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) + \frac{1}{2} v(\vec{r})^2 = \varphi(\vec{r}') + \frac{1}{2} v(\vec{r}')^2} \quad (1.5.25)$$

Die Geschwindigkeit v_{Flucht} , die man einem Körper an der Oberfläche eines Planeten (Masse M , Radius R) mindestens erteilen muss, damit er den Planeten vollständig verlassen kann, heißt *Fluchtgeschwindigkeit*. „Vollständig verlassen“ bedeutet, dass der Körper im Unendlichen noch mit einer Geschwindigkeit $v_\infty \geq 0$ ankommt. Damit muss auch die kinetische Energie des Körpers im Unendlichen noch größer oder gleich Null sein:

$$\text{Energiesatz:} \quad W_{\text{kin}}(R) + W_{\text{pot}}(R) = W_{\text{kin}}(\infty) + \underbrace{W_{\text{pot}}(\infty)}_0 \quad (1.5.26)$$

$$W_{\text{kin}}(\infty) = W_{\text{kin}}(R) + W_{\text{pot}}(R) \geq 0 \quad (1.5.27)$$

Verlast der Körper den Planeten an seiner Oberfläche mit der Geschwindigkeit v_0 , dann folgt aus (1.5.27)) als Bedingung für das Verlassen des Planeten

$$W_{\text{kin}}(\infty) = \frac{m}{2} v_0^2 - \frac{GMm}{R} \geq 0 \quad (1.5.28)$$

oder

$$\boxed{v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}} =: v_{\text{Flucht}}} \quad (1.5.29)$$

Für die Erde ist die Fluchtgeschwindigkeit

$$v_{\text{Flucht}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6,378 \cdot 10^6 \text{ m}}} = \underline{\underline{11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}}} \quad (1.5.30)$$

1.6 Umlaufbahnen

Ein grundlegendes Problem der Himmelsmechanik ist die Berechnung der Bahnen von zwei Körpern, die über die Gravitation in Wechselwirkung miteinander stehen (*Zweikörperproblem*). Beispiele für das Zweikörperproblem sind Doppelsterne und die Systeme Sonne-Erde, Erde-Mond und Erde-Satellit.

1.6.1 Kreisförmige Bahnen

Wir beschreiben die Bewegung der beiden Körper mit den Massen m_1 und m_2 in einem System, in dem der Schwerpunkt S der beiden Körper ruht. Zunächst nehmen wir an, dass die Umlaufbahnen der beiden Körper um den Schwerpunkt S Kreise mit den Radien r_1 und r_2 sind. Der grundlegende Ansatz für kreisförmige Umlaufbahnen ist

$$\boxed{\text{Zentripetalkraft} = \text{Gravitationskraft}} \quad (1.6.1)$$

Beachte, dass der Radius der Kreisbahnen nicht gleich der Entfernung der beiden Massen ist!

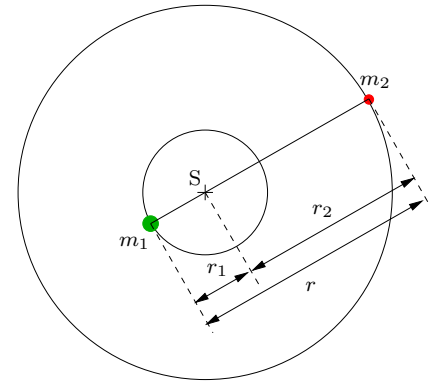


Abb.1.6.1 Umlaufbahn

Aus

$$m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2 \quad \text{und} \quad r = r_1 + r_2 \quad (1.6.2)$$

folgt

$$r_1 = \frac{m_2 r}{m_1 + m_2} \quad \text{und} \quad r_2 = \frac{m_1 r}{m_1 + m_2} \quad (1.6.3)$$

Aus (1.6.1) folgt dann

$$\frac{m_2 v_2^2}{r_2} = \frac{GM_1 m_2}{r^2} \quad (1.6.4)$$

Mit

$$v_2 = \frac{2r_2 \pi}{T} \quad (1.6.5)$$

folgt (T ist die Umlaufdauer)

$$\frac{4\pi^2 r_2}{T^2} = \frac{GM_1}{r^2} \quad (1.6.6)$$

Einsetzen von (1.6.3) in (1.6.6) ergibt das **3. Kepler'sche Gesetz**:

$$\boxed{\frac{r^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}} \quad (1.6.7)$$

Für $m_1 \gg m_2$ gilt $m_1 + m_2 \approx m_1$ und $r_2 \approx r$.

1.6.2 Ellipsen als Bahnkurven

Auf die Masse m_2 wirkt die Kraft

$$\vec{F} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{GM_1 m_2}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (1.6.8)$$

Mit (1.6.3) folgt

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (1.6.9)$$

Die kinetische Gesamtenergie der beiden Massen ist

$$W_{\text{kin}} = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 \quad (1.6.10)$$

Die Geschwindigkeiten verhalten sich wie die Radien, d.h.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2} \stackrel{(1.6.2)}{=} \frac{m_2}{m_1} \quad (1.6.11)$$

Für die Geschwindigkeit v der Masse m_2 im System der Masse m_1 gilt

$$\frac{v}{v_1} = \frac{r}{r_1} \quad \text{und} \quad \frac{v}{v_2} = \frac{r}{r_2} \quad (1.6.12)$$

Aus (1.6.10), (1.6.3) und (1.6.12) folgt

$$W_{\text{kin}} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v^2 \quad (1.6.13)$$

Mit der Gesamtmasse

$$M = m_1 + m_2 \quad (1.6.14)$$

und der **reduzierten Masse**

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (1.6.15)$$

gilt dann

$$W_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2, \quad (1.6.16)$$

$$M \cdot m = m_1 \cdot m_2 \quad (1.6.17)$$

und

$$v_1 = \frac{m_2}{M} v \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{m_1}{M} v \quad (1.6.18)$$

Damit ist die potentielle Energie der beiden Massen

$$W_{\text{pot}} = -\frac{GM_1 m_2}{r} = -\frac{GMm}{r} \quad (1.6.19)$$

Der Drehimpuls \vec{L} einer Masse m am Ort \vec{r} mit der Geschwindigkeit \vec{v} ist definiert durch

$$\boxed{\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}} \quad (1.6.20)$$

Der Gesamtdrehimpuls der beiden Massen im Schwerpunktsystem ist

$$\begin{aligned} \vec{L} &= m_1 \cdot \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 \times \vec{v}_2 = \\ &= m_1 \cdot \frac{m_2}{M} \vec{r} \times \left(\frac{m_2}{M} \vec{v} \right) + m_2 \cdot \frac{m_1}{M} \vec{r} \times \left(\frac{m_1}{M} \vec{v} \right) = \\ &= m \cdot \vec{r} \times \vec{v} \end{aligned} \quad (1.6.21)$$

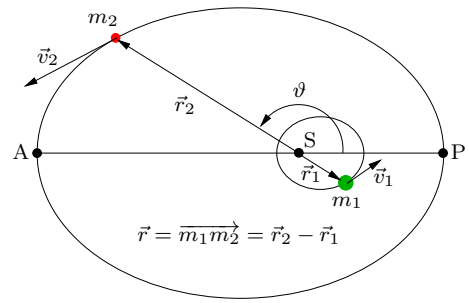


Abb.1.6.2 Im Schwerpunktsystem

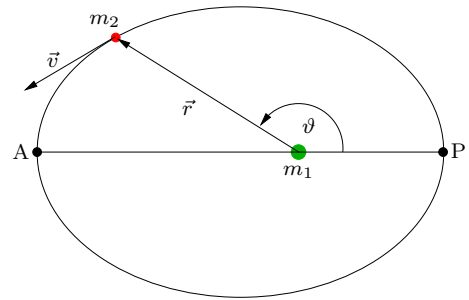


Abb.1.6.3 Im System von m_1

Der Gesamtdrehimpuls eines abgeschlossenen Systems ist wie der Impuls und die Energie eine Erhaltungsgröße, d.h. es gilt $\vec{L} = \text{konst.}$

Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen:

| Im Schwerpunktsystem | Im System von m_1 | |
|---|--|----------|
| $\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{GM_1}{r^3} \cdot \vec{r}$ | $\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3} \cdot \vec{r}$ | (1.6.22) |
| $W = -\frac{GM_1 m_2}{r} + \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2$ | $W = -\frac{GMm}{r} + \frac{m}{2} v^2$ | (1.6.23) |
| $\vec{L} = m_1 \cdot \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 \times \vec{v}_2$ | $\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$ | (1.6.24) |

Der Tabelle entnimmt man, dass folgende Aufgabenstellungen gleichwertig sind:

- Die beiden Massen m_1 und m_2 umrunden den gemeinsamen Schwerpunkt.
- Die Masse $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ umrundet die festgehaltene Masse $M = m_1 + m_2$.

Man rechnet natürlich im System von m_1 , da dort die Gleichungen einfacher sind. Anschließend kann man die Lösung wieder ins Schwerpunktsystem umrechnen. Ist $m_1 \gg m_2$, dann ist man oft nur an der Lösung im System des schweren Zentralkörpers interessiert. So gibt man die Bahn eines Planeten meistens im System der Sonne an, die Bahnen der beiden etwa gleich schweren Komponenten eines Doppelsterns dagegen im Schwerpunktsystem.

Die Lösung $\vec{r}(t)$ der Bewegungsgleichung (1.6.22) ist nicht in geschlossener Form angebar, aber man kann die Gleichung $r(\vartheta)$ der Bahnkurve berechnen. Das Ergebnis lautet:

$$r(\vartheta) = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} \tag{1.6.25}$$

(1.6.25) (**1. Kepler'sches Gesetz**) ist für nicht zu große Energiewerte (siehe später) die Gleichung einer Ellipse. Den Punkt P ($\vartheta = 0$) nennt man bei Umlaufbahnen um die Sonne den *Perihel* (sonnennächster Punkt), A ($\vartheta = 180^\circ$) den *Aphel* (sonnenfernster Punkt). Der Ort der Masse M ist ein *Brennpunkt* der Ellipse. $r_0 = r(0)$ ist die Entfernung des Perihels von der Zentralmasse M , v_0 sei die Geschwindigkeit von m im Perihel. a und b in Abb.1.6.4 nennt man die große und die kleine *Halbachse* der Ellipse.

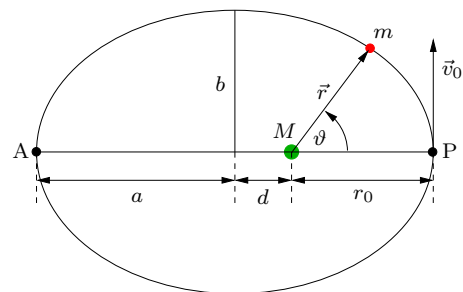


Abb.1.6.4 Ellipse

Da der Drehimpuls eine Konstante ist, kann sein Betrag durch die Daten im Perihel ausgedrückt werden:

$$L = m r_0 v_0 \tag{1.6.26}$$

Die drei folgenden Formeln werden ohne Herleitung angegeben. Für die Konstante p in (1.6.25) gilt

$$p = \frac{L^2}{GMm^2} = \frac{r_0^2 v_0^2}{GM} \tag{1.6.27}$$

Die Konstante e in (1.6.25) heißt *numerische Exzentrizität* und es ist

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \tag{1.6.28}$$

Die Entfernung d des Brennpunktes vom Mittelpunkt der Ellipse nennt man die *lineare Exzentrizität*:

$$d = e \cdot a \tag{1.6.29}$$

Aus (1.6.25) und Abb.1.6.4 erhält man

$$r_0 = a - ea = a(1 - e) \quad \text{und} \quad r_0 = r(0) = \frac{p}{1 + e} \quad (1.6.30)$$

und es folgt

$$\boxed{p = a(1 - e^2) = r_0(1 + e)} \quad (1.6.31)$$

Aus (1.6.29) und dem Kosinussatz folgt (siehe Abb.1.6.5, Herleitung z.B. mit MAPLE)

$$\boxed{r_1 + r_2 = 2a} \quad (1.6.32)$$

d.h.

Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte Q, deren Entfernungssumme zu zwei festen Punkten F_1 und F_2 (den beiden Brennpunkten) konstant ist. (1.6.33)

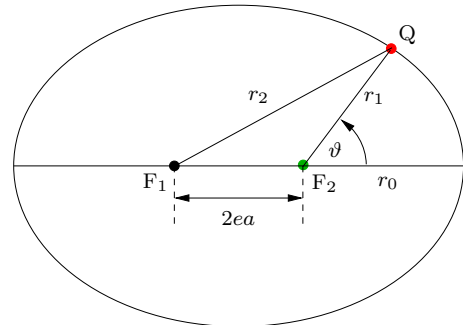


Abb.1.6.5 Ellipse

Aus (1.6.32) und Abb.1.6.6 folgt $r = a$ und somit für die kleine Halbachse

$$\boxed{b = a\sqrt{1 - e^2}} \quad (1.6.34)$$

Für $e = 0$ gilt

$$\boxed{r(\vartheta) = p = a = b} \quad (1.6.35)$$

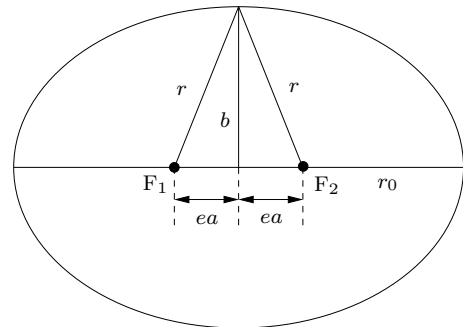


Abb.1.6.6 Berechnung von b

und die Ellipse entartet zum Kreis.

Die Fläche dA , die vom Vektor $\vec{r}(t)$ in der kleinen Zeit dt überstrichen wird, ist

$$dA = \frac{1}{2}r(t) \cdot h = \frac{1}{2}r(t)r(t + dt) \sin d\vartheta \quad (1.6.36)$$

Wegen $r(t + dt) \approx r(t)$ und $\sin d\vartheta \approx d\vartheta$ ist

$$dA = \frac{1}{2}r(t)^2 d\vartheta \quad (1.6.37)$$

Andererseits gilt

$$h = v dt \cdot \sin \beta \quad (1.6.38)$$

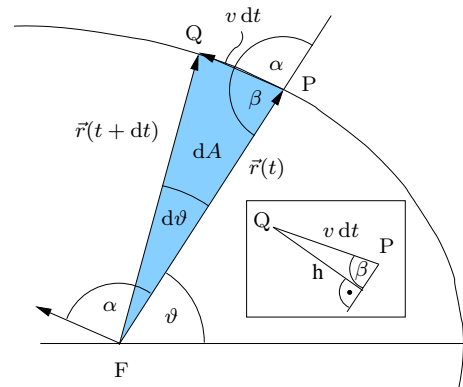


Abb.1.6.7 Flächenelement

und wegen

$$\sin \beta = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad (1.6.39)$$

folgt

$$dA = \frac{1}{2}r(t)v dt \cdot \sin \alpha \quad (1.6.40)$$

Aus (1.6.20) folgt für den konstanten Betrag des Drehimpulses

$$L = |\vec{L}| = mvr \sin \alpha \quad (1.6.41)$$

Aus (1.6.40) erhält man mit (1.6.41)

$$dA = \frac{1}{2} \frac{L}{m} dt \quad (1.6.42)$$

Wegen der Konstanz des Drehimpulses gilt also der *Flächensatz* oder das **2. Kepler'sche Gesetz**:

Der Vektor $\vec{r}(t)$ überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

(1.6.43)

Die gesamte Fläche der Ellipse ist nach (1.6.37) und (1.6.25)

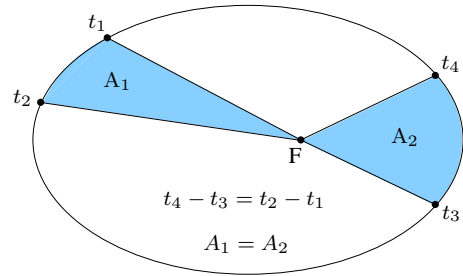


Abb.1.6.8 Flächensatz

$$A = \frac{p^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} = a b \pi \quad (1.6.44)$$

Die Auswertung des Integrals in (1.6.44) gelingt z.B. mit MAPLE. Aus (1.6.42) folgt

$$A = \frac{LT}{2m} = a b \pi$$

(1.6.45)

mit der Umlaufdauer T . Mit (1.6.26) folgt

$$T = \frac{2ab\pi}{r_0 v_0}$$

(1.6.46)

Aus (1.6.46) folgt mit (1.6.31), (1.6.34) und (1.6.27)

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

(1.6.47)

d.h. das 3. Kepler'sche Gesetz gilt auch für elliptische Umlaufbahnen.

Wir haben schon bemerkt, dass $r(t)$ und damit auch $\vartheta(t)$ nicht in geschlossener Form dargestellt werden kann, allerdings kann man $t(\vartheta)$ in Form eines Integrals darstellen. Start zur Zeit $t = 0$ bei $\vartheta = 0$ vorausgesetzt, gilt wegen des Flächensatzes

$$\frac{A(t)}{A(T)} = \frac{t}{T} \quad (1.6.48)$$

Wie in (1.6.44) folgt dann nach kleinen Umformungen

$$t(\vartheta) = \frac{T}{A(T)} \cdot A(t) = \frac{T(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \cdot \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2}$$

(1.6.49)

Im Perihel (r_0, v_0) und im Aphel (r_1, v_1) ist der Winkel α zwischen \vec{r} und \vec{v} gleich 90° . Aus der Drehimpulserhaltung und (1.6.41) folgt dann

$$r_0 v_0 = r_1 v_1 \quad (1.6.50)$$

Damit ist die Gesamtenergie des Systems der beiden Massen M und m

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{m}{2}v_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{m}{2} \frac{r_0^2}{r_1^2}v_0^2 - \frac{GMm}{r_1} = \\
 &= \frac{r_0^2}{r_1^2} \cdot \underbrace{\left(W + \frac{GMm}{r_0} \right)}_{\frac{m}{2}v_0^2} - \frac{GMm}{r_1} = \\
 &= \frac{r_0^2}{r_1^2} \cdot W + \frac{GMmr_0}{r_1^2} - \frac{GMm}{r_1}
 \end{aligned} \tag{1.6.51}$$

$$\begin{aligned}
 W \left(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) &= \frac{GMm(r_0 - r_1)}{r_1^2} \\
 W(r_1 - r_0) \underbrace{(r_1 + r_0)}_{2a} &= GMm(r_0 - r_1)
 \end{aligned} \tag{1.6.52}$$

Aus (1.6.52) und (1.6.30) folgt dann

$$\boxed{W = -\frac{GMm}{2a} = -\frac{GMm(1-e)}{2r_0}} \tag{1.6.53}$$

Aus dem Energiesatz

$$W = \frac{m}{2}v^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a} \tag{1.6.54}$$

erhält man mit (1.6.53)

$$\boxed{v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \tag{1.6.55}$$

Mit (1.6.55) kann man bei Kenntnis der großen Halbachse a die Geschwindigkeit des umlaufenden Körpers in jedem Bahnpunkt berechnen. Für $\vartheta = 0$ folgt aus (1.6.55) und (1.6.30)

$$v_0^2 = GM \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} \right) = GM \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1-e}{r_0} \right) = \frac{GM(1+e)}{r_0} \tag{1.6.56}$$

und damit

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM(1+e)}{r_0}}} \tag{1.6.57}$$

Aus (1.6.53) folgt sehr schnell die Geschwindigkeit v_K für eine Kreisbahn ($r = r_0 = a$):

$$\boxed{v_K = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}} \tag{1.6.58}$$

Ebenfalls erhält man aus (1.6.53) mit $a \rightarrow \infty$ die Fluchtgeschwindigkeit v_F :

$$\boxed{v_F = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} = \sqrt{2} \cdot v_K} \tag{1.6.59}$$

Für $v_0 = v_F$ ist die Bahnkurve eine Parabel, für $v_0 > v_F$ eine Hyperbel.

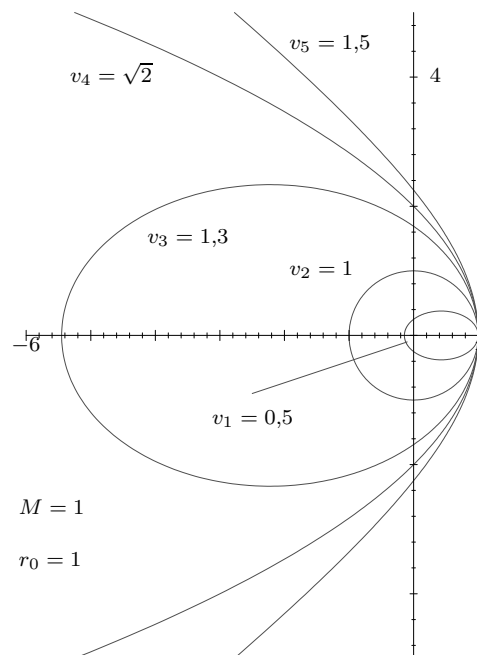


Abb.1.6.9 Umlaufbahnen

Es gilt folgende Bahnklassifizierung (siehe Abb.1.6.9, die Masse M befindet sich im Koordinatenursprung):

| | | | |
|--------------|-------------------|-----------------------------------|--------------------------------|
| $e = -1$ | $v_0 = 0$ | $W = -\frac{GMm}{r_0}$ | Gerade |
| $-1 < e < 0$ | $0 < v_0 < v_K$ | $-\frac{m\alpha^2}{2L^2} < W < 0$ | Ellipse (v_1 in Abb.1.6.9) |
| $e = 0$ | $v_0 = v_K$ | $W = -\frac{m\alpha^2}{2L^2}$ | Kreis (v_2 in Abb.1.6.9) |
| $0 < e < 1$ | $v_K < v_0 < v_F$ | $-\frac{m\alpha^2}{2L^2} < W < 0$ | Ellipse (v_3 in Abb.1.6.9) |
| $e = 1$ | $v_0 = v_F$ | $W = 0$ | Parabel (v_4 in Abb.1.6.9) |
| $e > 1$ | $v_0 > v_F$ | $W > 0$ | Hyperbel (v_5 in Abb.1.6.9) |

Tab.1.6.1 Bahnklassifizierung

Zusammenfassung der Keplergesetze:

| | Fassung von Kepler | exakte Fassung |
|----------|--|---|
| Kepler 1 | Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. | $r(\vartheta) = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}$ |
| Kepler 2 | Der Vektor $\vec{r}(t)$ überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. | $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = \text{konst.}$ |
| Kepler 3 | Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen. | $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$ |

Tab.1.6.2 Die Kepler'schen Gesetze

1.7 Astronomische Zeitrechnung

1.7.1 Das Jahr

Ein **siderisches** Jahr a_{sid} ist die Zeitspanne zwischen zwei Durchgängen der Sonne durch den gleichen Punkt des Fixsternhimmels. a_{sid} ist somit die Umlaufdauer der Erde um die Sonne (Perihel bis Perihel), betrachtet in einem nichtrotierenden, relativ zur Sonne ruhenden Bezugssystem. Dieses Bezugssystem ist wegen der großen Masse der Sonne und wegen der langen Umlaufdauer der Sonne um das galaktische Zentrum annähernd ein Inertialsystem. a_{sid} ist also maßgeblich für Berechnungen der Art „Zentripetalkraft = Gravitationskraft“. Wegen der Störungen der anderen Planeten weicht die exakte Zeitspanne zwischen zwei Periheldurchgängen (das anomalistische Jahr) etwas von a_{sid} ab.

$$a_{\text{sid}} = 365,256\,360\,42 \text{ d} = 31\,558\,149,53 \text{ s} \tag{1.7.1}$$

Ein **tropisches** Jahr a_{trop} ist die Zeitspanne zwischen zwei Durchgängen der Sonne durch den Frühlingspunkt. Wegen der Präzession der Erdachse verschiebt sich der Frühlingspunkt langsam (ca. $50,3''$ pro Jahr) entgegen der Erdbewegung, d.h. das tropische Jahr ist etwas kürzer als das siderische Jahr:

$$a_{\text{trop}} = 365,242\,198\,79 \text{ d} = 31\,556\,925,98 \text{ s} \tag{1.7.2}$$

Die Jahreszeiten und der Kalender sind an das tropische Jahr gekoppelt. Aus praktischen Gründen (ganze Anzahl von Tagen) verwendet man im täglichen Leben das **bürgerliche Jahr**

$$1 \text{ a} = a_{\text{bürg}} = 365,2425 \text{ d} = \left(365 + \frac{1}{4} - \frac{3}{400} \right) \text{ d} \quad (1.7.3)$$

Aus dieser Definition folgt, dass alle vier Jahre ein Schalttag eingefügt wird (Jahreszahl durch vier teilbar), außer in Hunderterjahren, deren Jahreszahl **nicht** durch 400 teilbar ist (Papst Gregor XIII).

1.7.2 Sterntag und Sonnentag

Ein **Sterntag** ist die Zeit zwischen zwei Meridiandurchgängen des gleichen Sterns, ein **Sonnentag** (genauer ein „wahrer Sonnentag“) ist die Zeit zwischen zwei unteren Kulminationen der Sonne. Wegen der ellipsenförmigen Umlaufbahn der Erde um die Sonne mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten und der Schiefe der Erdachse sind Sonnentage unterschiedlich lang. In Abb.1.7.1 ist die Zeit zwischen ① und ② ein Sterntag, die Zeiten zwischen ① und ③ bzw. zwischen ④ und ⑤ sind Sonnentage. Man entnimmt der Abbildung, dass die Sterntage kürzer sind als die Sonnen-

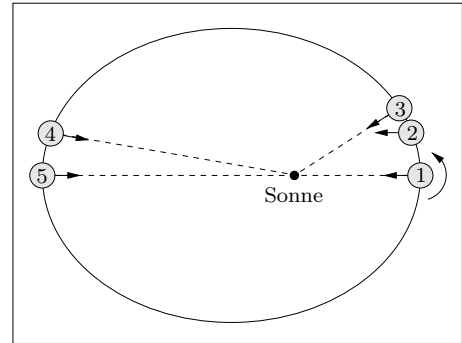


Abb.1.7.1 Sterntag und Sonnentag

tage. Die Ungleichheit der Sonnentage macht sie als Zeitmaß unbrauchbar. Man hat daher den **mittleren Sonnentag** als Mittelwert aller wahren Sonnentage definiert, den wir einfach als „Tag“ bezeichnen. Die Sekunde wurde so definiert, dass 86400 s genau einen mittleren Sonnentag ergeben. Die **wahre Sonnenzeit** ist der Stundenwinkel des Sonnenmittelpunktes plus 12 h, das ist die Zeit, die von einer Sonnenuhr angezeigt wird.

Die **mittlere Sonnenzeit** ist einfach unsere linear ablaufende Zeit mit dem mittleren Sonnentag als Einheit. Die Differenz zwischen wahrer und mittlerer Sonnenzeit nennt man **Zeitgleichung**:

$$\text{Zeitgleichung} = \text{wahre Zeit} - \text{mittlere Zeit} \quad (1.7.4)$$

Extremwerte der Zeitgleichung:

| | |
|--------|-----------|
| 12.02. | -14,4 min |
| 15.05. | +3,8 min |
| 27.07. | -6,3 min |
| 04.11. | +16,4 min |

Tab.1.7.1 Zeitgleichung

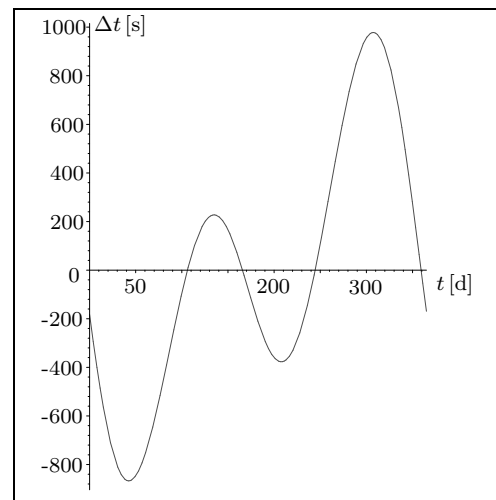


Abb.1.7.2 Zeitgleichung

Die Zahl der Sterntage eines tropischen Jahres ist genau um eins größer als die Zahl der Sonnentage. Ein Sterntag ist dann nach (1.7.1)

$$d_{\text{sid}} = \frac{365,256\,360\,42 \text{ d}}{366,256\,360\,42} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4,09 \text{ s} \quad (1.7.5)$$

Die **Weltzeit** (WZ) oder **Universal Time** (UT) ist die mittlere Sonnenzeit an einem Ort auf dem Nullmeridian. Die **Mitteleuropäische Zeit** (MEZ) ist die mittlere Sonnenzeit zwischen 7,5° und 22,5° östlicher Länge, also bei uns: MEZ = WZ + 1 h.

2 Das Sonnensystem

2.1 Aufbau des Sonnensystems

Besondere Lagen von Planeten relativ zur Erde:

- ① : Opposition
- ② : Konjunktion
- ③ : untere Konjunktion
- ④ : obere Konjunktion
- ⑤ : größte westliche Elongation
- ⑥ : größte östliche Elongation
- ⑦ : westliche Quadratur
- ⑧ : östliche Quadratur
- α : Elongationswinkel

Der Winkel φ zwischen Erde, Planet und Sonne heißt **Phasenwinkel**. Dieser Winkel gibt Aufschluss, welcher Bruchteil der von der Erde aus sichtbaren Planetenscheibe von der Sonne beleuchtet wird (siehe Aufgaben).

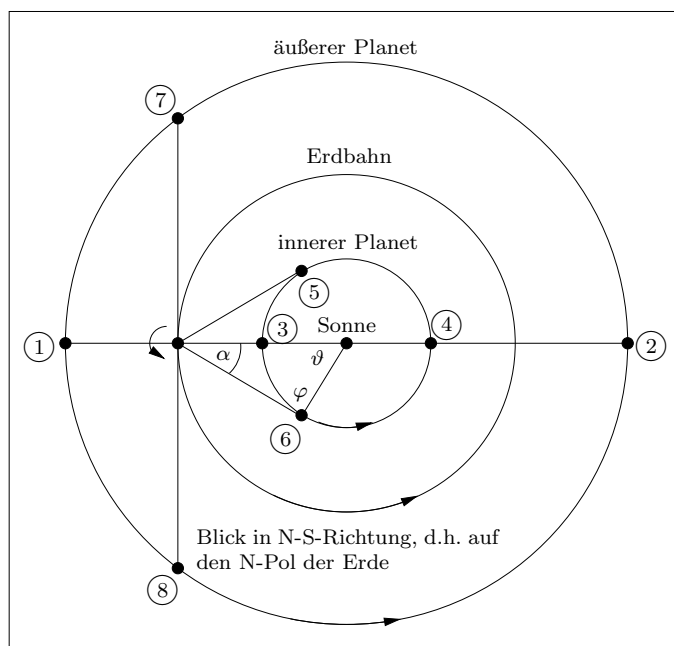


Abb.2.1.1 Lagen der Planeten relativ zur Erde

Die **synodische** Umlaufzeit T_{syn} eines Planeten ist die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden unteren Konjunktionen (für einen inneren Planeten) bzw. die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Oppositionen (für einen äußeren Planeten). Die synodische Umlaufzeit ist von der Erde aus direkt beobachtbar. Die **siderische** Umlaufzeit T_{sid} ist die Zeit für einen vollen Umlauf, betrachtet in einem Inertialsystem. Von der Sonne aus gesehen befindet sich der Planet nach T_{sid} wieder am gleichen Ort relativ zu den Fixsternen. T_{sid} ist maßgeblich für die Berechnung der Winkelgeschwindigkeit und der Zentripetalkraft!

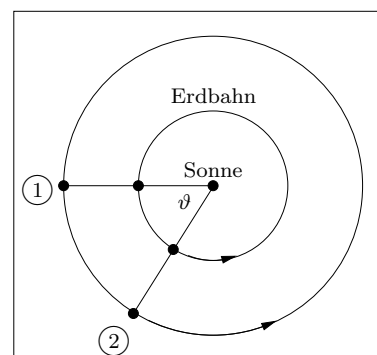


Abb.2.1.2 Äußerer Planet

Wir leiten eine Beziehung zwischen T_{syn} und T_{sid} für einen äußeren Planeten her. In Abb.2.1.2 legt der Planet in der Zeit T_{syn} den Winkel $\vartheta_P = \vartheta$ zurück, in der gleichen Zeit überstreicht die Erde den Winkel $\vartheta_E = 2\pi + \vartheta_P$. Mit den Winkelgeschwindigkeiten

$$\omega_P = \frac{2\pi}{T_{\text{sid}}} \quad \text{und} \quad \omega_E = \frac{2\pi}{T_{\text{sid,Erde}}} \quad (2.1.1)$$

folgt dann

$$\omega_E \cdot T_{\text{syn}} = \omega_P \cdot T_{\text{syn}} + 2\pi \quad (2.1.2)$$

$$\frac{2\pi}{T_{\text{sid,Erde}}} \cdot T_{\text{syn}} = \frac{2\pi}{T_{\text{sid}}} \cdot T_{\text{syn}} + 2\pi \quad (2.1.3)$$

2 Das Sonnensystem

$$\boxed{\frac{1}{T_{\text{sid}}} = \frac{1}{T_{\text{sid,Erde}}} - \frac{1}{T_{\text{syn}}}} \quad (2.1.4)$$

(äußerer Planet)

Genauso beweist man (Aufgabe!) für einen inneren Planeten

$$\boxed{\frac{1}{T_{\text{sid}}} = \frac{1}{T_{\text{sid,Erde}}} + \frac{1}{T_{\text{syn}}}} \quad (2.1.5)$$

(innerer Planet)

Da die siderischen Umlaufzeiten im dritten Kepler'schen Gesetz vorkommen, kann man mit ihrer Kenntnis die Verhältnisse der großen Halbachsen aller Planetenbahnen annähernd berechnen („annähernd“ wegen $M = M_{\text{Sonne}} + M_{\text{Planet}} \approx M_{\text{Sonne}}$). Um die absoluten Größen der Halbachsen zu erhalten, muss mindestens eine Halbachse mit einer anderen Methode gemessen werden. 1672 hat **Cassini** die Entfernung des Mars von der Erde trigonometrisch bestimmt (Winkel von zwei Orten auf der Erde aus gemessen) und damit aus dem bekannten Verhältnis der großen Halbachsen auch deren wahre Werte ermittelt. Eine weitere Methode ist die Messung der Entfernung Venus-Erde bei einem Durchgang der Venus vor der Sonnenscheibe (Venus in unterer Konjunktion, siehe Aufgaben). Man kann auch direkt den Winkel messen, den zwei Punkte der Erde mit dem Sonnenmittelpunkt einschließen (Parallaxe) und daraus die Entfernung Erde-Sonne berechnen. Alle diese Methoden sind relativ ungenau, da sehr kleine Winkel gemessen werden müssen. Heute schickt man Radarsignale zur Venus und zum Mars und misst die Zeit bis zur Rückkehr der reflektierten Signale. Wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und der sehr präzisen Zeitmessungen erhält man damit auch sehr genaue Entfernungen.

Die Masse der Sonne berechnet sich mit dem 3. Kepler'schen Gesetz aus Umlaufzeit und großer Halbachse eines Planeten. Entsprechend findet man die Planetenmassen aus den Bahndaten ihrer Monde oder von Raumsonden. Erschwerend kommt zu all diesen Berechnungen hinzu, dass die beiden betrachteten Himmelskörper nicht isoliert sind, sondern auch die Einflüsse aller anderen Körper des Sonnensystems mit berücksichtigt werden müssen. Dies führt auf komplizierte numerische Rechnungen, da eine analytische Lösung für mehr als zwei Körper unter gegenseitigem gravitativen Einfluss nicht existiert.

Bahnelemente eines Himmelskörpers (Planet, Asteroid, Komet) im Orbit um die Sonne (S):

Die **Knotenlinie** ist die Schnittgerade zwischen der Bahnebene und der Bahnebene der Erde (Ekliptik).

Au : Aufsteigender Knoten (Wechsel von der südlichen auf die nördliche Seite der Ekliptik)

Ab : Absteigender Knoten

Ω : Winkel vom Frühlingspunkt Υ zum aufsteigenden Knoten (in Bewegungsrichtung der Erde)

ω : Winkel vom aufsteigenden Knoten zum Perihel

i : **Inklination** ($0 \leq i \leq 180^\circ$) Winkel zwischen der Bahnebene und der Ekliptik.

$i > 90^\circ$, wenn der Planet gegenläufig zur Erde ist.

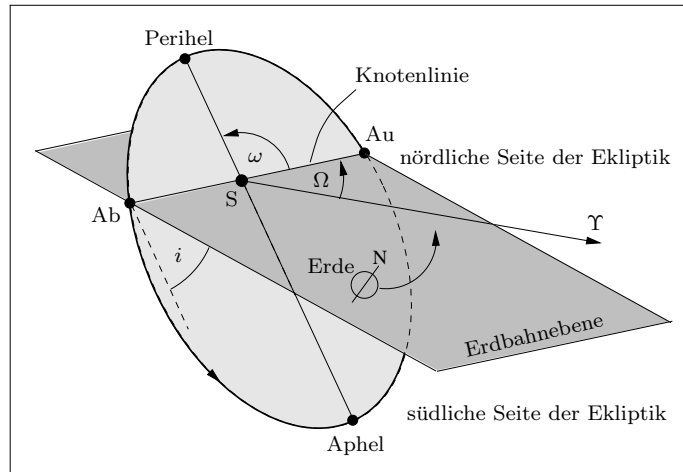


Abb.2.1.3 Bahnelemente

Durch i , Ω , ω , die große Halbachse a und die Exzentrizität e ist die Bahn des Himmelskörpers eindeutig bestimmt, wenn noch der Ort der Körpers zu einem Zeitpunkt bekannt ist; hierzu wird oft die Zeit τ des Periheldurchgangs angegeben. Es folgt eine Tabelle der Bahnelemente der Planeten unseres Sonnensystems. Da die Richtung der Erdachse und somit der Frühlingspunkt nicht konstant sind, ändern sich Ω und ω mit der Zeit:

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \Omega_1 \cdot t \quad , \quad \omega(t) = \omega_0 + \omega_1 \cdot t \quad (2.1.6)$$

t wird dabei in **Jahrhunderten** gemessen, $t = 0$ entspricht dem 1.1.2000 um 12:00 Weltzeit. Alle Winkel der Tabelle sind in Grad angegeben, a in AE. Für die Erde mit $i = 0$ gibt es keine Knoten und man definiert den Frühlingspunkt als aufsteigenden Knoten. Beachte, dass die Erde von der Sonne aus gesehen zum Zeitpunkt des Herbstbeginns im Frühlingspunkt steht! Bei der Erde ist also ω der Winkel zwischen dem Ort zum Herbstbeginn und dem Periheldurchgang.

| Planet | a | e | i | Ω_0 | Ω_1 | ω_0 | ω_1 |
|---------|---------|--------|---------|------------|------------|------------|------------|
| Merkur | 0,3871 | 0,2056 | 7,0050 | 48,331 | 1,186 | 29,125 | 0,370 |
| Venus | 0,7233 | 0,0068 | 3,3947 | 76,678 | 0,901 | 54,884 | 0,501 |
| Erde | 1,0000 | 0,0167 | 0,0000 | 0,000 | 0,000 | 102,937 | 1,720 |
| Mars | 1,5237 | 0,0934 | 1,8497 | 49,558 | 0,772 | 286,502 | 1,069 |
| Jupiter | 5,2026 | 0,0485 | 1,3033 | 100,464 | 1,021 | -86,133 | 0,592 |
| Saturn | 9,5549 | 0,0555 | 2,4889 | 113,665 | 0,877 | -20,608 | 1,087 |
| Uranus | 19,2184 | 0,0463 | 0,7732 | 74,006 | 0,521 | 98,999 | 0,965 |
| Neptun | 30,1104 | 0,0090 | 1,7700 | 131,784 | 1,102 | -83,660 | 0,324 |
| Pluto | 39,543? | 0,2490 | 17,140? | 110,307 | 1,0?? | 113,768 | 0,5?? |

Tab.2.1.1 Bahnelemente der Planeten

2.2 Eigenschaften der Planeten

Die kleinen Planeten Merkur, Venus, Erde, Mars und Pluto bestehen im Wesentlichen aus einem Eisenkern und einer festen Silikatkruste. Die schweren Planeten Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun sind sogenannte **Gasriesen**. Sie haben nur einen sehr kleinen festen Kern (fast kein Eisen) und sind sonst flüssig bzw. gasförmig. Die Dichte der Gasriesen ist wesentlich kleiner als die Dichte der festen Planeten. Die Radiusangabe bei den Gasriesen bezieht sich auf einen Bereich mit dem Druck 1 bar. Das Material der festen Planeten (schwere Elemente) stammt aus einer Supernova-Explosion, die Gasriesen bestehen hauptsächlich aus leichten Elementen, die kurz nach dem Urknall gebildet wurden, vor allem aus Wasserstoff und Helium.

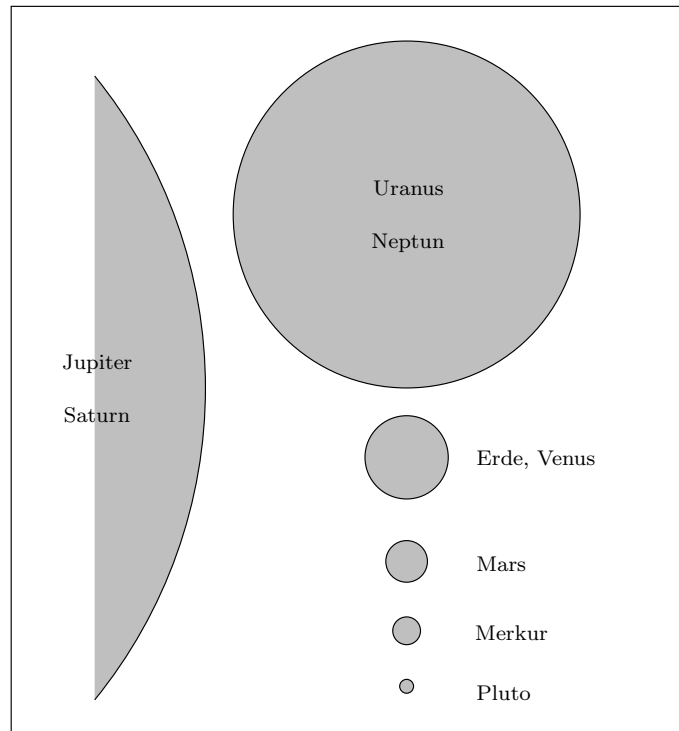


Abb.2.2.1 Größenverhältnisse der Planeten

| Planet | T_{sid} d | M kg | $R_{\text{Äquator}}$ km | $T_{\text{rot,sid}}$ h | ρ $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ | g $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ |
|---------|-----------------------|------------------------|----------------------------|---------------------------|--|--------------------------------------|
| Merkur | 87,968 | $3,302 \cdot 10^{23}$ | 2439 | 1407,6 | 5,427 | 3,70 |
| Venus | 224,695 | $4,869 \cdot 10^{24}$ | 6052 | 5832,5 | 5,204 | 8,87 |
| Erde | 365,256 | $5,975 \cdot 10^{24}$ | 6378 | 23,9345 | 5,520 | 9,78 |
| Mars | 686,980 | $6,419 \cdot 10^{23}$ | 3393 | 24,6229 | 3,933 | 3,69 |
| Jupiter | 4330,595 | $1,8986 \cdot 10^{27}$ | 71492 | 9,925 | 1,326 | 23,12 |
| Saturn | 10746,94 | $5,6846 \cdot 10^{26}$ | 60268 | 10,500 | 0,687 | 8,96 |
| Uranus | 30588,740 | $8,683 \cdot 10^{25}$ | 25559 | 17,24 | 1,318 | 8,69 |
| Neptun | 59799,9 | $1,0243 \cdot 10^{26}$ | 24766 | 16,11 | 1,638 | 11,00 |
| Pluto | 90591 | $1,25 \cdot 10^{22}$ | 1137 | 153,2928 | 2,050 | 0,66 |

Tab.2.2.1 Eigenschaften der Planeten

Die Stabilität der Planetenatmosphären hängt davon ab, ob die Geschwindigkeit der Moleküle in der oberen Atmosphäre größer oder kleiner der Fluchtgeschwindigkeit ist. Eine Atmosphäre ist umso stabiler, je schwerer der Planet, je kleiner die Temperatur und je größer die Masse der Atmosphärenmoleküle ist (siehe Aufgaben).

Die Planeten und ihre Monde im Einzelnen:

Genauere Erklärungen des Zustandekommens der Temperaturwerte folgen im Kapitel über die Sonne.

1. Merkur

Merkur hat eine sehr dünne Atmosphäre aus Wasserstoff und Helium, die wahrscheinlich

durch den **Sonnenwind** immer wieder aufgefrischt wird. Die Rotationsdauer von Merkur beträgt genau $\frac{2}{3}$ seiner Umlaufzeit, was wohl auf einen Resonanzeffekt in der komplizierten Gravitations- und Gezeitenwechselwirkung zwischen Sonne und Merkur zurückzuführen ist. Eine Seite Merkurs hat eine ziemlich zertrümmerte Oberfläche, was von einem Meteoriteneinschlag auf der **anderen** Seite des Planeten herrührt (Schockwelle durch den Planeten). Auf Merkur ist es ungemütlich: ca. 400°C bis 700°C auf der Tagseite und -160°C auf der Nachtseite.

2. Venus

Venus ist in eine dichte, wolkenreiche Atmosphäre mit hohen Anteilen von CO_2 und SO_3 gehüllt. Der Atmosphärendruck an der Venusoberfläche ist ca. 90-mal so groß wie der Luftdruck an der Erdoberfläche. Starker Treibhauseffekt (bis zu 480°C an der Oberfläche). Die Rotationsdauer der Venusatmosphäre beträgt ungefähr 6 d. Verglichen mit der Rotationsdauer des Planeten (243 d) ergeben sich erhebliche Windgeschwindigkeiten. Die Rotation der Venus ist **retrograd**, d.h. auf Venus geht die Sonne im Westen auf und im Osten unter.

3. Erde

Diesen Planeten kennen wir ja. Eine Beschreibung des Erdmondes erfolgt im nächsten Kapitel.

4. Mars

Die Rotationsachse des Marses hat gegen das Lot auf die Bahnebene eine ähnliche Neigung wie die Erde ($25^\circ 12''$), d.h. auf dem Mars gibt es auch Jahreszeiten. Wegen der sehr dünnen Atmosphäre ($p \approx 6 \text{ hPa}$) und fehlender Meere ist das Klima auf dem Mars nicht so ausgeglichen wie auf der Erde: -140°C im südlichen Polarwinter bis 20°C am Äquator im Sommer. Der Mars hat dünne Polarkappen aus Wassereis und Kohlendioxidschnee, die jahreszeitlich bedingt stark in ihrer Größe schwanken.

Mars wird von zwei sehr kleinen, unregelmäßig geformten Monden umrundet, **Phobos** und **Deimos**.

| | T_{sid} d | a km | e | M/M_{Planet} | R km |
|--------|-----------------------|-----------|--------|-----------------------|-------------------------------|
| Phobos | 0,31891 | 9378 | 0,015 | $1,5 \cdot 10^{-8}$ | $13,5 \times 10,8 \times 9,4$ |
| Deimos | 1,26244 | 23459 | 0,0005 | $3,0 \cdot 10^{-9}$ | $7,5 \times 6,1 \times 5,5$ |

Tab.2.2.2 Marsmonde

Die Raumsonde Mariner 4 flog 1965 in ca. 10000 km Entfernung am Mars vorbei und sendete 21 Aufnahmen zur Erde. Weitere Sonden (Mariner 6 und Mariner 7 im Jahr 1969 und Mariner 9 im Jahr 1971) lieferten tausende von hochauflösenden Aufnahmen der Marsoberfläche. Erste weiche Landung einer Sonde auf dem Mars 1976 (Viking 1 im Juli, kurz darauf Viking 2 im August).

5. Jupiter

An der Jupiteroberfläche ist eine bänderartige Wolkenstruktur parallel zum Äquator zu beobachten. Die einzelnen Bänder haben z.T. große Relativgeschwindigkeiten. Eine weitere Besonderheit auf Jupiter ist der **Große Rote Fleck**, ein gigantisches Wirbelsturmgebiet von der Größe der Erde, das schon mindestens seit der Erfindung des Fernrohres (1609) existiert.

Wegen der für seine Größe sehr hohen Rotationsgeschwindigkeit zeigt Jupiter eine deutlich

sichtbare **Abplattung**:

$$\text{Abplattung} = \frac{R_{\text{Äquator}} - R_{\text{Pol}}}{R_{\text{Äquator}}} = \frac{1}{16,4} \quad (2.2.1)$$

Jupiter hat 16 Monde, davon vier große. Die Massen der zwölf kleineren Monde sind um vier Größenordnungen kleiner als die der großen Trabanten.

| | T_{sid} d | a 1000 km | e | M/M_{Planet} | R km |
|----------|-----------------------|----------------|-------|-----------------------|-----------|
| Io | 1,769138 | 422 | 0,004 | $4,68 \cdot 10^{-5}$ | 1815 |
| Europa | 3,551181 | 671 | 0,009 | $2,52 \cdot 10^{-5}$ | 1569 |
| Ganymed | 7,154553 | 1070 | 0,002 | $7,80 \cdot 10^{-5}$ | 2631 |
| Callisto | 16,689018 | 1883 | 0,007 | $5,66 \cdot 10^{-5}$ | 2400 |

Tab.2.2.3 Die großen Jupitermonde

Die vier großen Monde des Jupiter hat schon Galilei (1610) entdeckt. Die meisten Daten über Jupiter und seine Monde erhielt man durch Raumsonden: Pioneer 10 (1973), Pioneer 11 (1974), Voyager 1 und 2 (1979) und durch die Sonde Galileo, die am 18.10.89 startete und Jupiter nach komplizierten Swing-By-Manövern am 7.12.95 erreichte.

Der innerste Mond Io ist starken Gezeitenkräften ausgesetzt, die sein Inneres erwärmen. Io ist deshalb der vulkanisch aktivste Himmelskörper im Sonnensystem. Die von den Vulkanen hochgeschleuderten, zum Teil ionisierten Atome treten mit dem starken Magnetfeld Jupiters in Wechselwirkung. Durch diesen gigantischen Dynamo wird ein geschlossener Stromkreis zwischen Io und Jupiter aufrecht erhalten.

Der wohl interessanteste Mond im Sonnensystem ist der von einer kilometerdicken Eiskruste überzogene Europa. Es wird vermutet, dass sich unter dem Eis ein Ozean befindet. In der Nähe von unterseeischen Vulkanen könnte es auf Europa Bedingungen für Lebensformen geben, die in den siebziger Jahren in der Tiefsee auf der Erde entdeckt wurden. Es handelt sich hierbei um Bakterien und Röhrenwürmer, die ihre Energie aus einer Chemosynthese und nicht aus der Photosynthese ziehen. Die NASA hat ihre Galileimission zur genaueren Erforschung Europas um zwei Jahre, d.h. bis 1999, verlängert.

6. Saturn

Saturn hat die größte Abplattung aller Planeten im Sonnensystem (1 : 10,4), zum Vergleich die Abplattung der Erde: 1 : 298.

Das hervorstechendste Merkmal Saturns ist sein beeindruckendes Ringsystem, das aus vielen kleinen Körpern der Größen von 0,001 m bis 10 m besteht. Das Ringsystem des Saturns hat bei einem Durch-

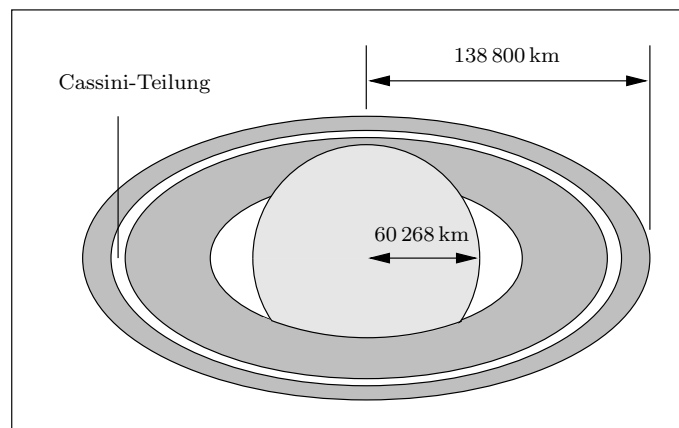


Abb.2.2.2 Saturn

messer von 277 600 km nur eine Dicke von ca. 1 km. Saturn hat 17 Monde. Die Eigenschaften der größeren Monde sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

2 Das Sonnensystem

| | T_{sid} d | a 1000 km | e | M/M_{Planet} | R km |
|-----------|-----------------------|----------------|----------|-----------------------|-----------------------------|
| Mimas | 0,942422 | 185,52 | 0,0202 | $8,0 \cdot 10^{-8}$ | 196 |
| Enceladus | 1,370218 | 238,02 | 0,00452 | $1,3 \cdot 10^{-7}$ | 250 |
| Thetys | 1,887802 | 294,66 | 0,00000 | $1,3 \cdot 10^{-6}$ | 530 |
| Dione | 2,736915 | 377,40 | 0,002230 | $1,85 \cdot 10^{-6}$ | 560 |
| Rhea | 4,517500 | 527,04 | 0,00100 | $4,4 \cdot 10^{-6}$ | 765 |
| Titan | 15,945421 | 1221,83 | 0,029192 | $2,38 \cdot 10^{-4}$ | 2575 |
| Hyperion | 21,276609 | 1481,1 | 0,104 | $3 \cdot 10^{-8}$ | $205 \times 130 \times 110$ |
| Iapetus | 79,330183 | 3561,3 | 0,02828 | $3,3 \cdot 10^{-6}$ | 730 |

Tab.2.2.4 Die großen Saturnmonde

7. Uranus

Uranus wurde 1781 von W. HERSCHEL entdeckt. Uranus ist kleiner als Jupiter, aber von ähnlichem Aufbau. Uranus hat 15 Monde.

| | T_{sid} d | a 1000 km | e | M/M_{Planet} | R km |
|---------|-----------------------|----------------|--------|-----------------------|-----------|
| Ariel | 2,520379 | 191,02 | 0,0034 | $1,8 \cdot 10^{-5}$ | 579 |
| Umbriel | 4,144177 | 266,30 | 0,0050 | $1,2 \cdot 10^{-5}$ | 586 |
| Titania | 8,705871 | 435,91 | 0,0022 | $6,8 \cdot 10^{-5}$ | 790 |
| Oberon | 13,463239 | 583,52 | 0,0008 | $6,9 \cdot 10^{-5}$ | 762 |
| Miranda | 1,413479 | 129,39 | 0,0027 | $0,2 \cdot 10^{-5}$ | 240 |

Tab.2.2.5 Die großen Uranusmonde

8. Neptun

LEVERRIER und ADAMS berechneten aus Bahnstörungen des Uranus die Bahn eines weiteren Planeten, der dann 1846 von GALLE entdeckt wurde. Neptun hat acht Monde.

| | T_{sid} d | a 1000 km | e | M/M_{Planet} | R km |
|--------|-----------------------|----------------|---------|-----------------------|-----------|
| Triton | 5,876854 | 354,77 | $< 0,1$ | $2,09 \cdot 10^{-4}$ | 1350 |
| Nereid | 360,2 | 5513 | 0,7483 | $2 \cdot 10^{-7}$ | 170 |

Tab.2.2.6 Die großen Neptunmonde

9. Pluto

Aufgrund von Störungen der Neptunbahn wurde ein weiterer Planet vorhergesagt, der dann 1930 von TOMBAUGH auf Fotoplatten entdeckt wurde (allerdings nicht am vorhergesagten Ort). Die Bahn von Pluto ist in vielerlei Hinsicht extrem: größte Halbachse, größte Umlaufdauer, größte Inklination und größte Exzentrizität. Die Plutobahn verläuft teilweise sogar innerhalb der Neptunbahn, wegen der großen Inklination gibt es aber keine Schnittpunkte der Bahnen. Pluto hat einen Begleiter, Charon, der das größte Verhältnis $\frac{\text{Mondmasse}}{\text{Planetenmasse}}$ im ganzen Sonnensystem hat.

| | T_{sid} d | a km | e | M/M_{Planet} | R km |
|--------|-----------------------|-----------|-----|-----------------------|-----------|
| Charon | 6,3872 | 19,13 | 0,0 | 0,15 | 593 |

Tab.2.2.7 Plutomond

2.3 Der Mond

Die Erde hat einen Begleiter, „den“ Mond. Zu den Bahndaten vergleiche Abb.2.1.3, wobei man sich am Ort der Sonne die Erde denken muss.

| a | e | i | T_{sid} | M | R |
|-----------|--------|------|------------------|-------------------------|---------|
| 384400 km | 0,0549 | 5°9' | 27,32166 d | $7,35 \cdot 10^{22}$ kg | 1738 km |

Tab.2.3.1 Eigenschaften des Erdmondes

Der erdnächste Punkt des Mondes ist das **Perigäum**, der erdfernste Punkt das **Apogäum**. Der Mond führt eine **gebundene** Rotation aus, d.h. $T_{\text{sid,rot}} = T_{\text{sid}}$. Daher zeigt der Mond einem Beobachter auf der Erde immer die gleiche Seite. Der Grund für die gebundene Rotation des Mondes ist wahrscheinlich die Gezeitenreibung in der Frühphase des Mondes, als er noch nicht vollständig erkaltet war. Bedingt durch Störungen der Mondbahn und durch den Standort des Beobachters auf der Erde können von der Erde aus ca. 59 % der Mondoberfläche gesehen werden (natürlich nicht zu einem Zeitpunkt).

Die Umlaufsinn des Mondes um die Erde ist der Gleiche wie der der Erde um die Sonne.

Der **siderische Monat** T_{sid} ist die Umlaufdauer des Mondes relativ zu den Fixsternen, der **synodische Monat** T_{syn} ist seine Umlaufdauer relativ zur Sonne. Der synodische Monat ist die Zeit zwischen zwei Vollmonden. Ähnlich wie für einen äußeren Planeten beweist man (siehe (2.1.4))

$$\frac{1}{T_{\text{syn,Mond}}} = \frac{1}{T_{\text{sid,Mond}}} - \frac{1}{T_{\text{sid,Erde}}} \quad (2.3.1)$$

Die reine Keplerellipse des Mondes um die Erde wird am stärksten durch den Einfluss der Sonne gestört. Dadurch ergibt sich eine Drehung der Knotenlinie entgegen der Mondbewegung mit der Periode 18,61 a und eine Drehung der Apsidenlinie (Perigäum-Apogäum) mit der Periode 8,847 a. Genauer gilt:

$$\Omega(t) = \Omega_0 - \frac{2\pi}{18,61 \text{ a}} \cdot t \quad (2.3.2)$$

$$\tilde{\omega}(t) = \Omega(t) + \omega(t) = \tilde{\omega}_0 + \frac{2\pi}{8,847 \text{ a}} \cdot t \quad (2.3.3)$$

$\tilde{\omega} = \Omega + \omega$ heißt **Länge des Perigäums**. Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen des Mondes durch den aufsteigenden Knoten heißt **drakonitischer Monat**.

| T_{sid} | T_{syn} | T_{drak} |
|------------------|------------------|-------------------|
| 27,32166 d | 29,53059 d | 27,21222 d |

Tab.2.3.2 Monate

Wenn Sonne, Mond und Erde (fast) auf einer Geraden liegen, gibt es eine Finsternis. Eine Mondfinsternis kann es nur bei Vollmond, eine Sonnenfinsternis nur bei Neumond geben. Außerdem muss der Mond bei einer Finsternis in der Erdbahnebene liegen, d.h. er muss im aufsteigenden oder absteigenden Knoten sein.

Der wahre Kernschatten der Erde ist kürzer als der in Abb.2.3.1 gezeichnete Kernschatten, da Sonnenlicht in der Erdatmosphäre gebrochen wird. Auch bei einer totalen Mondfinsternis fällt somit noch etwas Licht auf den Mond und der Mond wird nicht total unsichtbar. Ist der Mond nur teilweise im Kernschatten der Erde, spricht man von einer **partiellen** Mondfinsternis.

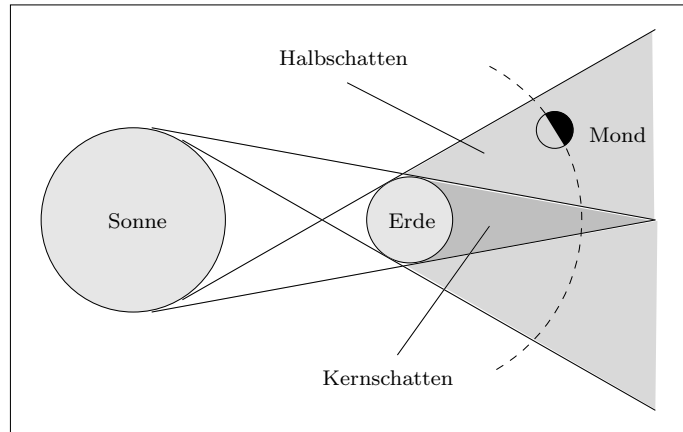


Abb.2.3.1 Mondfinsternis

Der Sichtbarkeitsbereich einer totalen Sonnenfinsternis ist nicht sehr groß und hängt von den momentanen Entfernungen Erde-Mond und Erde-Sonne ab. Ist die Erde zu weit vom Mond entfernt, dann ist der scheinbare Durchmesser (Winkeldurchmesser) des Mondes kleiner als der der Sonne und man beobachtet eine **ringförmige** Sonnenfinsternis (siehe Aufgaben).

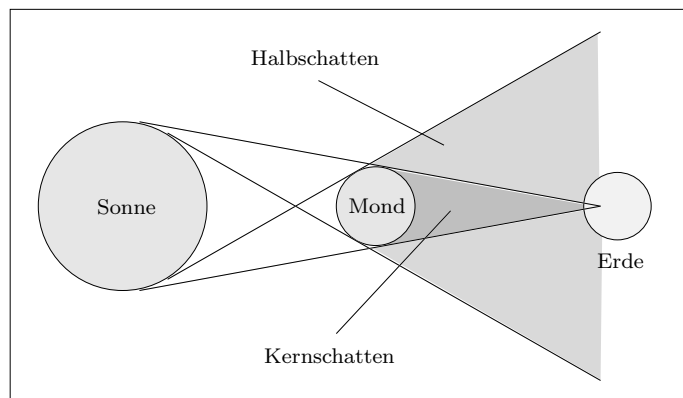


Abb.2.3.2 Sonnenfinsternis

In 1000 Jahren sind auf der Erde ungefähr 1500 Mond- und 2400 Sonnenfinsternisse (davon ca. 800 total) beobachtbar. Da die Sonnenfinsternisse nur von bestimmten Orten aus sichtbar sind, ist die Häufigkeit der Mondfinsternisse an einem Ort größer als die der Sonnenfinsternisse. Wegen

$$242 \cdot T_{\text{drak}} = 6585,36 \text{ d} \approx 223 \cdot T_{\text{syn}} = 6585,32 \text{ d} \quad (2.3.4)$$

wiederholen sich gleichartige Finsternisse alle $6585 \text{ d} = 18 \text{ a } 11 \text{ d}$ (**Saroszyklus**).

2.4 Allerlei Kleinzeug

2.4.1 Planetoiden

Zwischen Mars und Jupiter gibt es einige Millionen **Kleinplaneten**, auch **Planetoiden** oder **Asteroiden** genannt. Die Gesamtmasse der Asteroiden beträgt ungefähr 0,002 Erdmassen. Der erste Planetoid, **Ceres**, wurde in der Neujahrsnacht von 1800 auf 1801 von PIAZZI entdeckt. Es folgten die Entdeckungen von **Pallas** (OLBERS, 1802), **Juno** (HARDING, 1804) und **Vesta** (OLBERS, 1807). Die Asteroiden werden in der Reihenfolge ihrer Entdeckung durchnummeriert.

| Nr. | Name | T_{sid} d | a AE | e | i in ° | R km | M kg |
|-----|--------|-----------------------|-----------|--------|-------------|--------------------------|---------------------|
| 1 | Ceres | 1680 | 2,7669 | 0,0767 | 10,601 | 1003 | $1 \cdot 10^{21}$ |
| 2 | Pallas | 1685 | 2,7701 | 0,2348 | 34,813 | 608 | $2,5 \cdot 10^{20}$ |
| 3 | Juno | 1592 | 2,6697 | 0,2572 | 12,992 | 247 | $2 \cdot 10^{19}$ |
| 4 | Vesta | 1325 | 2,361 | 0,091 | 7,1 | 538 | $3 \cdot 10^{20}$ |
| 243 | Ida | 1770 | 2,862 | 0,044 | 2,1 | $58 \times 23 \times 12$ | $4 \cdot 10^{16}$ |
| 433 | Eros | 643 | 1,4583 | 0,2229 | 10,831 | $41 \times 15 \times 14$ | $5 \cdot 10^{15}$ |
| 951 | Gaspra | 1200 | 2,210 | 0,146 | 5,1 | $19 \times 12 \times 11$ | $1 \cdot 10^{16}$ |

Tab.2.4.1 Einige Asteroiden

Die Raumsonde **Galileo** flog auf ihrem Weg zum Jupiter nah an den Asteroiden Gaspra (29.10.1991) und Ida (28.08.1993) vorbei und lieferte hochauflösende Bilder dieser Planetoiden. Dabei entdeckte Galileo den ersten Mond eines Asteroiden: Ida hat einen Begleiter mit der ungefähren Größe $1,2 \text{ km} \times 1,4 \text{ km} \times 1,6 \text{ km}$, der **Daktyl** getauft wurde. Die Orbitdaten von Daktyl sind nicht leicht zu ermitteln, da fast alle Aufnahmen (bis auf eine) gemacht wurden, als sich Galileo in der Bahnebene von Daktyl befand.

Am 17.02.1996 startete die Raumsonde NEAR (**N**ear **E**arth **A**steroid **R**endezvous) zur Erforschung von Asteroiden, die der Erde ziemlich nahe kommen. Am 27.06.1997 flog NEAR nahe am Asteroiden **Mathilde** vorbei, am 20.12.1998 war geplant, NEAR in eine Umlaufbahn um Eros zu bringen. Wegen eines Triebwerksausfalls scheiterte aber dieses Unterfangen, es soll aber nachgeholt werden.

Eine besondere Gruppe von Planetoiden sind die **Trojaner**, die sich in der Nähe der Lagrangepunkte L_4 und L_5 des Jupiters aufhalten.

Die Bahnen von Asteroiden können durch Einflüsse von Planeten, vor allem durch Jupiter, stark verändert werden. So haben einige Körper sehr große Exzentrizitäten und kreuzen sogar die Bahn der Erde.

2.4.2 Kometen

Kometen bestehen aus Eis (Wassereis und gefrorene Gase), Staub und anderen festen Stoffen („schmutzige Schneebälle“). Die Durchmesser der Kometen liegen im Bereich von 1 km bis 100 km.

Die Bahnen der Kometen sind meist langgestreckte Ellipsen mit großen Halbachsen zwischen 2 AE und 50 000 AE.

In der Nähe der Sonne verdampft ein Teil des Kometenkerns und es bildet sich eine Gaswolke um den Kern, die **Koma**. Durch den **Sonnenwind** (geladene Teilchen, die von der Sonne abgestrahlt werden) werden Teile der Koma weggeblasen und es kommt zur Ausbildung des bekannten Schweifs, der i.a. von der Sonne weggerichtet ist. Der Schweif kann bis zu 300 Millionen km lang werden.

Die meisten Kometen haben ihren Ursprung in der **Oort'schen Wolke** oder **zirkumsolaren Kometenwolke**, einer kugelsymmetrischen Ansammlung von ca. 10^{11} Kometen in der Entfernung von 40 000 AE bis 100 000 AE zur Sonne. Durch den gelegentlichen Vorbeizug naher Sterne wurden die Bahnen einiger Kometen so verändert, dass sie tief in das Sonnensystem eindringen konnten.

Zur Tabelle der Bahnelemente vergleiche Abb.2.1.3. Mit P bezeichnen wir den Perihelabstand und mit A den Aphelabstand.

| Komet | T_{sid} a | P AE | A AE | e | i in ° | Ω in ° | ω in ° | Perihel- durchgang |
|---------------|-----------------------|-----------|-----------|---------|-------------|------------------|------------------|-----------------------|
| Tempel-Tuttle | 32,9 | 0,982 | 19,6 | 0,904 | 162,7 | 235,1 | 172,6 | 27.02.1998 |
| Halley | 76,0 | 0,587 | 35,3 | 0,967 | 162,2 | 58,9 | 111,9 | 09.02.1986 |
| Hale-Bopp | 2400 | 0,914 | 373 | 0,99511 | 89,43 | 282,47 | 130,59 | 01.04.1997 |

Tab.2.4.2 Bahnelemente einiger Kometen

2.4.3 Meteore und Meteorite

Meteore (Sternschnuppen) sind Leuchterscheinungen am Himmel, die durch **Meteorite** ausgelöst werden. Meteorite sind also alle Körper (von der Größe eines Staubteilchens bis zur Größe eines Berges), die in die Erdatmosphäre eindringen und, je nach Größe, die Erdoberfläche erreichen. Die enorme, durch Luftreibung hervorgerufene Erhitzung führt dann zu den Leuchterscheinungen. Kleinere Meteorite verdampfen vollständig und erreichen die Erdoberfläche nicht. Die Kometenbahnen in Sonnennähe sind Trassen unzähliger Meteorite (Überbleibsel des Kometenschweifs). Kreuzt die Erde eine Kometenbahn, kommt es zu regelrechten Meteorschauern (z.B. die **Leoniden** im November).

Die Einschläge größerer Meteorite richten gewaltige Verwüstungen an (siehe Aufgaben). Das Aussterben der Dinosaurier vor 65 Millionen Jahren wird auf den Einschlag eines ca. 10 km großen Asteroiden auf der Halbinsel Yucatan zurückgeführt. Der dabei entstandene Krater hat einen Durchmesser von ca. 180 km.

2.5 Nützliches aus der Theorie der Wärme und der Strahlung

2.5.1 Kinetische Gastheorie

Der Druck eines Gases auf die Gefäßwand entsteht durch die Impulsänderungen der Moleküle beim Abprallen an der Wand. Eine genaue Analyse dieses Vorgangs führt unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Moleküle verschiedene Geschwindigkeiten haben, auf folgende Beziehung für die **mittlere kinetische Energie** eines Moleküls:

$$\langle W_{\text{kin}} \rangle = \frac{3}{2} k T \quad (2.5.1)$$

Dabei ist T die Temperatur des Gases (natürlich in K) und k ist die **Boltzmann-Konstante**:

$$k = 1,380658 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (2.5.2)$$

Die Konstante der aus der Mittelstufe bekannten Gasgleichung

$$\frac{pV}{T} = \text{konst.} \quad (2.5.3)$$

ist $N \cdot k$, wobei N die Zahl der Moleküle des Gases ist. Damit schreibt sich die Gasgleichung

$$pV = N k T \quad (2.5.4)$$

2.5.2 Temperaturstrahlung

In diesem Kapitel steht das Wort „Strahlung“ für „elektromagnetische Strahlung“. Trifft die Strahlungsleistung P auf einen Körper (senkrechter Einfall!), dann wird

$$\begin{aligned} \varrho \cdot P & \text{ reflektiert} & (\varrho: \text{Reflexionsgrad}) \\ \alpha \cdot P & \text{ absorbiert} & (\alpha: \text{Absorptionsgrad}) \\ \tau \cdot P & \text{ geht durch} & (\tau: \text{Transmissionsgrad}) \end{aligned}$$

Wegen des Energiesatzes gilt

$$\varrho + \alpha + \tau = 1 \quad (2.5.5)$$

Ein Körper, der die ganze einfallende Strahlung absorbiert, ist vollkommen schwarz:

$$\boxed{\text{schwarzer Körper} \iff \alpha = 1, \varrho = \tau = 0} \quad (2.5.6)$$

Jeder Körper mit einer Temperatur $T > 0$ sendet Strahlung aus (Temperaturstrahlung). Es zeigt sich, dass bei gleicher Temperatur ein schwarzer Körper die meiste Strahlungsleistung abgibt. Ist P_s die von einem schwarzen Körper emittierte Leistung, dann emittiert ein beliebiger Körper

$$\boxed{P(T) = \varepsilon \cdot P_s(T)} \quad (2.5.7)$$

mit dem **Emissionsgrad** ε . Nach KIRCHHOFF ist der temperaturabhängige Emissionsgrad eines Körpers gleich seinem Absorptionsgrad:

$$\boxed{\varepsilon(T) = \alpha(T)} \quad (2.5.8)$$

Es gilt also

$$\boxed{\text{schwarzer Körper} \iff \alpha = \varepsilon = 1} \quad (2.5.9)$$

Das **Stefan-Boltzmann'sche Gesetz** besagt, dass die emittierte Leistung proportional zur strahlenden Fläche A_S und zu T^4 ist

$$\boxed{P(T) = \sigma \varepsilon A_S T^4} \quad (2.5.10)$$

Die Proportionalitätskonstante σ ist die **Stefan-Boltzmann-Konstante** oder **Strahlungskonstante**:

$$\boxed{\sigma = 5,67051 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}} \quad (2.5.11)$$

Die Strahlungsleistung pro strahlender Fläche ist die **spezifische Ausstrahlung** F :

$$\boxed{F(T) = \sigma \varepsilon T^4} \quad (2.5.12)$$

(2.5.10) gilt für die gesamte abgestrahlte Leistung. Die pro Wellenlängenintervall und Fläche abgestrahlte Leistung eines schwarzen Körpers (**spektrales Emissionsvermögen**) wurde 1900 von MAX PLANCK berechnet, der dabei gleich die Planckkonstante h mitentdeckte:

$$\boxed{K(\lambda, T) = \frac{dF}{d\lambda} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1}} \quad (2.5.13)$$

Die Integration von (2.5.13) über alle Wellenlängen (übersteigt unsere mathematischen Fähigkeiten) liefert (2.5.12) und gleich den Zahlenwert der Stefan-Boltzmann-Konstante:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} \quad (2.5.14)$$

Abb.2.5.1 zeigt den Verlauf des spektralen Emissionsvermögens $K(\lambda, T)$ für zwei verschiedene Temperaturen. Das Maximum dieser Kurven liegt bei dem temperaturabhängigen Wert

$$\lambda_{\max} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}}{T} \quad (2.5.15)$$

(2.5.15) ist das **Wien'sche Verschiebungsgesetz**. Mit Hilfe dieses Gesetzes können die Oberflächentemperaturen von Himmelskörpern bestimmt werden. Dazu wird das Licht des Himmelskörpers spektral zerlegt und es werden die Strahlungsleistungen von schmalen Wellenlängenbereichen gemessen. Die Messwerte werden gegen die Wellenlänge in einem Diagramm aufgetragen und aus dem Grafen (oder mit einem CAS) wird λ_{\max} ermittelt. Mit (2.5.15) erhält man dann T . Die Güte des so gefundenen Temperaturwertes hängt davon ab, wie nahe das Verhalten des Himmelskörpers an das eines schwarzen Strahlers herankommt.

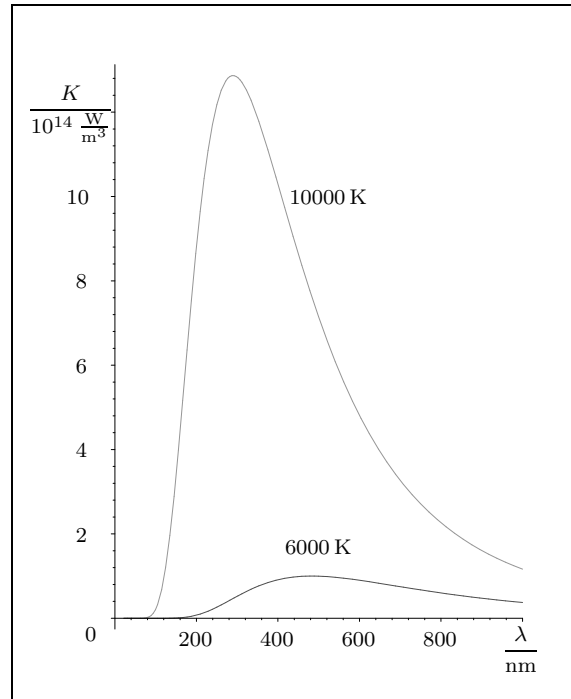


Abb.2.5.1 $K(\lambda, T)$

Die spezifische Ausstrahlung F ist die Strahlungsleistung pro strahlender Fläche A_S . Die Strahlungsleistung pro Empfängerfläche A_E ist die **Bestrahlungsstärke, Strahlungsflussdichte** oder **Intensität**:

$$E = \frac{dP}{dA_E} \quad (2.5.16)$$

Die Intensität der Sonnenstrahlung am Ort der Erde ($r = 1 \text{ AE}$), die sogenannte **Solarkonstante**, ist

$$S_{\odot} := 1367 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (2.5.17)$$

Da die Erdatmosphäre etwas Strahlung absorbiert, wird S_{\odot} zweckmäßigerweise mit Hilfe eines Satelliten gemessen. Die gesamte abgestrahlte Leistung eines Sterns wird auch seine **Leuchtkraft (Strahlungsfluss) L** genannt. L ist das $P(T)$ in (2.5.10). Aus dem Energiesatz folgt dann für die Intensität der Strahlung eines Sterns in der Entfernung r vom Sternmittelpunkt

$$E(r) = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (2.5.18)$$

Für die Leuchtkraft unserer Sonne folgt aus (2.5.17) und (2.5.18) mit $S_{\odot} = E(1 \text{ AE})$

$$L_{\odot} := S_{\odot} \cdot 4\pi (1 \text{ AE})^2 = 3,84 \cdot 10^{26} \text{ W} \quad (2.5.19)$$

Die spezifische Ausstrahlung der Sonne ist

$$F_{\odot} := \frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2} = 6,32 \cdot 10^7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (2.5.20)$$

Unter der Annahme, dass die Sonne ein schwarzer Strahler ist ($\varepsilon = 1$), folgt dann aus (2.5.12) für die Oberflächentemperatur der Sonne

$$T_{\odot} = \left(\frac{F_{\odot}}{\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} = 5,78 \cdot 10^3 \text{ K} \quad (2.5.21)$$

2 Das Sonnensystem

Wir versuchen jetzt, die Oberflächentemperatur eines Planeten auf Grund der Sonneneinstrahlung zu berechnen. Die **Albedo** A eines Planeten ist der Bruchteil der **gesamten** auftreffenden Strahlungsleistung, der reflektiert wird (die Albedo ist **nicht** der Reflexionsgrad, der für senkrechten Einfall definiert ist). Die vom Planeten (Radius R , Entfernung r zur Sonne) absorbierte Strahlungsleistung ist dann

$$P_A = (1 - A) \cdot R^2 \pi \cdot \frac{L_\odot}{4 \pi r^2} \quad (2.5.22)$$

Mit (2.5.10) ($\varepsilon = 1$) folgt dann

$$L_\odot = \sigma \cdot 4 \pi R_\odot^2 \cdot T_\odot^4 \quad (2.5.23)$$

und damit

$$P_A = (1 - A) \cdot R^2 \pi \cdot \frac{\sigma \cdot R_\odot^2 \cdot T_\odot^4}{r^2} \quad (2.5.24)$$

Im Gleichgewicht muss die vom Planeten emittierte Leistung P_E gleich P_A sein. Mit dem Emissionsgrad ε_P und der Temperatur T des Planeten folgt wiederum aus (2.5.10)

$$P_E = \sigma \varepsilon_P \cdot 4 R^2 \pi \cdot T^4 \quad (2.5.25)$$

Dabei haben wir die Temperatur auf dem ganzen Planeten als konstant vorausgesetzt! Gleichsetzen von (2.5.24) und (2.5.25) liefert dann für die Temperatur T der Planetenoberfläche

$$T = T_\odot \cdot \left(\frac{1 - A}{\varepsilon_P} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{R_\odot}{2r}} \quad (2.5.26)$$

Die Albedo für die Erde ist $A = 0,37$. Theoretisch kann aus diesem Wert ε_P berechnet werden, aber die Sache hat einen Haken: A ist der Wert für Strahlung mit einer spektralen Verteilung $K(\lambda, T_\odot)$ der Sonne, ε_P ist aber der Wert für die von der Erde abgegebene Strahlung mit dem Spektrum $K(\lambda, T)$ (ε ist von λ abhängig). Nehmen wir in erster Näherung die Erde als schwarzen Strahler an ($\varepsilon_P = 1$), dann ergibt sich $T = 248$ K. Die Erdatmosphäre lässt aber die langwellige Temperaturstrahlung der Erde nicht 100%-ig durch, d.h. $\varepsilon_P < 1$. Je mehr CO_2 in der Atmosphäre ist, umso kleiner ist ε_P (Treibhauseffekt). Mit dem Wert $\varepsilon_P = 0,6$ erhält man $T = 282$ K.

2.5.3 Kurzer Abriss der Quantenmechanik

Ein Teilchen mit dem Impuls p zeigt Interferenzerscheinungen wie eine Welle mit der Wellenlänge

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}} \quad (\text{de Broglie-Relation}) \quad (2.5.27)$$

$$\text{Planckkonstante: } h = 6,6260755 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (2.5.28)$$

Mit der Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ und der Definition $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ gilt

$$\boxed{p = \hbar \cdot k} \quad (2.5.29)$$

Für die beobachtbaren Größen in der QM kann man i.a. keine exakten Werte, sondern nur Wahrscheinlichkeiten messen und berechnen. Die Berechnung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens im Intervall $x \in [a, b]$ geschieht mit der i.a. komplexen Wellenfunktion $\psi(x, t)$:

$$P(a, b) = \int_a^b w(x, t) dx \quad \text{mit der **Wahrscheinlichkeitsdichte** } w(x, t) = |\psi(x, t)|^2 \quad (2.5.30)$$

Die Wellenfunktion eines freien Teilchens mit der kinetischen Energie W im konstanten Potential $V = 0$ ist die Überlagerung ebener Wellen (**Wellenpaket**):

$$\psi(x, t) = \int_0^{\infty} A(k) e^{kx - \omega(k)t} dk \quad (2.5.31)$$

Dabei gilt neben der de Broglie-Relation die **Planck-Relation**

$$\boxed{W = h \cdot f = \hbar \cdot \omega} \quad (2.5.32)$$

und die (nichtrelativistische) **Dispersionsrelation**

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad (2.5.33)$$

Für Materieteilchen (kein Licht) ist f bzw. ω keine messbare Größe, sondern eine reine Rechengröße zur Formulierung der Wellenfunktion.

Für geeignet definierte Breiten Δx und Δp der Ortsverteilung $|\psi|^2$ und der Impulsverteilung gilt die **Unschärferelation** (Heisenberg)

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p \approx h} \quad (2.5.34)$$

Analog gilt für ein System, das sich die Zeit Δt in einem gewissen Energiezustand befindet

$$\boxed{\Delta W \cdot \Delta t \approx h} \quad (2.5.35)$$

Für ein konkretes Problem (Potential gegeben) ermittelt man die Wellenfunktion als Lösung der Schrödingergleichung

$$i \hbar \dot{\psi}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \psi''(x, t) + V(x) \cdot \psi(x, t) \quad (2.5.36)$$

Für **stationäre** Zustände (die Wahrscheinlichkeitsdichte ist zeitlich konstant)

$$\psi(x, t) = \varphi(x) \cdot e^{-i\omega t} \quad \implies \quad |\psi|^2 = |\varphi|^2 \quad (2.5.37)$$

vereinfacht sich die Schrödingergleichung zu

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \varphi''(x) + V(x) \cdot \varphi(x) = W \cdot \varphi(x)} \quad (2.5.38)$$

Tunneleffekt: Nach der Quantenmechanik kann ein Teilchen ($W_{\text{ges}} = W_{\text{kin}} + W_{\text{pot}}$) mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit einen Potentialwall überwinden, der nach der klassischen Physik zu hoch wäre ($W_{\text{ges}} < V_{\text{max}}$).

Für ein **gebundenes** Teilchen (eingesperrtes Teilchen, Potentialtopf) ist die Wellenfunktion eine stehende Welle. Aus den Randbedingungen (Stetigkeit und Differenzierbarkeit) folgt, dass das eingesperrte Teilchen nur bestimmte Energiewerte annehmen kann (**diskretes Energiespektrum**). Beispiele für Systeme mit diskreten Energien sind das Teilchen im rechteckigen Potentialtopf, der harmonische Oszillator (quadratisches Potential) und die Atome. Die kleinste Energie eines gebundenen Teilchens ist immer größer als null, d.h. es gibt kein ruhendes, eingesperrtes Teilchen!

Für die Wechselwirkung elektromagnetischer Strahlung mit quantenmechanischen Systemen gilt:

| | |
|---|----------|
| Ein Atom (oder ein anderer quantenmechanischer Zustand) mit den Energieeigenwerten W_ν kann nur Licht absorbieren oder aussenden, dessen Frequenz gleich einer der Resonanzfrequenzen | (2.5.39) |
| $f_{mn} = \frac{1}{h} (W_m - W_n)$ | |
| ist. | |

| | |
|--|----------|
| Ein Atom (oder ein anderer quantenmechanischer Zustand) kann aus einem elektromagnetischen Wellenfeld der Frequenz f nur den Energiebetrag | (2.5.40) |
| $W = h f$ | |
| aufnehmen. | |

| | |
|---|----------|
| Bei der Wechselwirkung elektromagnetischer Strahlung mit Materie wird auch Impuls ausgetauscht. Dabei verhält sich die absorbierte oder emittierte Welle der Frequenz f wie ein Teilchen mit der Energie | (2.5.41) |
| $W = h f \quad \text{und dem Impuls} \quad p = \frac{h f}{c}.$ | |
| Solche Portionen des Wellenfeldes nennt man Lichtteilchen, Lichtquanten oder Photonen . | |

Photonen sind keine kleinen Teilchen, sondern Portionen des Wellenfeldes mit der Energie $W = h f$ und dem Impuls $p = \frac{h f}{c}$.

Die Energiestufen in einem Eielektronensystem (H-Atom, He⁺-Ion, ...) mit der Kernladungszahl Z sind

| | |
|---|----------|
| $W_n = -Z^2 \cdot C \cdot \frac{1}{n^2} \quad \text{mit} \quad C = \frac{m_e e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2} = 13,6 \text{ eV}$ | (2.5.42) |
|---|----------|

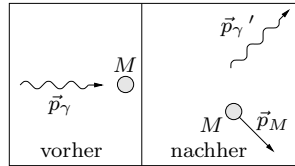
Die von einem Eielektronensystem ausgesandten Photonen haben die Wellenlängen λ_{mn} mit

| | |
|--|----------|
| $\frac{1}{\lambda_{mn}} = Z^2 \cdot R_\infty \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad \text{mit} \quad R_\infty = \frac{m_e e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^3 c} = 1,097 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{m}}$ | (2.5.43) |
|--|----------|

Das Unendlichzeichen in der **Rydbergkonstante** R_∞ steht für „unendliche Kernmasse“ (als ruhend angenommener Kern). Wegen $m_e \ll m_{\text{Kern}}$ ist R_∞ eine ausgezeichnete Näherung für den exakten Wert der Rydbergkonstante.

Die wichtigsten Wechselwirkungen elektromagnetischer Strahlung mit Materie

elastische Streuung:

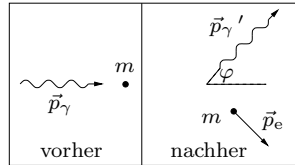


$$W_\gamma \ll M c^2 \implies W'_\gamma \approx W_\gamma$$

Das Atom nimmt Impuls, aber fast keine Energie auf!

„Comptoneffekt“ am ganzen Atom!
Klassisch erklärbar durch Mitschwingen der Elektronen (Atom als Dipol).

Comptoneffekt:

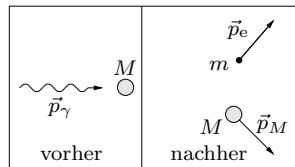


$$W'_\gamma < W_\gamma; W_e \approx W_\gamma - W'_\gamma$$

Das Elektron nimmt nicht nur Impuls, sondern auch eine beträchtliche Menge Energie auf!

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi)$$

Fotoeffekt:



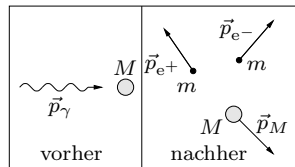
A ist die Austrittsarbeit (Ionisierungsenergie).

$$A < W_\gamma \ll M c^2 \implies W_e = W_\gamma - A$$

Das Atom nimmt Impuls, aber fast keine Energie auf!

Kein gestreutes γ -Quant!!

Paarerzeugung:



$$W_\gamma \ll M c^2 \implies W_{e^+} + W_{e^-} \approx W_\gamma$$

Das Atom nimmt Impuls, aber fast keine Energie auf!

$$W_\gamma > 2 \cdot m_e c^2!!$$

2.5.4 Atome als Sender und Empfänger von Strahlung

Wenn Atome mit elektromagnetischer Strahlung der Frequenz f und der Wellenlänge λ in Wechselwirkung treten, können nur die Energiebeträge

$$\Delta W = h f = \frac{h c}{\lambda} \quad (2.5.44)$$

ausgetauscht werden. Einen solchen wechselwirkungsfähigen Teil des Strahlungsfeldes nennt man ein **Photon** oder **Lichtquant**. Bei der Wechselwirkung von Materie mit Photonen wird auch Impuls ausgetauscht. Dabei verhält sich ein Photon wie ein Teilchen mit dem Impuls

$$p = \frac{h f}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (2.5.45)$$

Aus (2.5.44) folgt, dass ein Atom mit den Energiestufen W_n nur Licht mit den Wellenlängen

$$\lambda_{mn} = \frac{h c}{W_n - W_m} \quad (2.5.46)$$

aussenden kann. Das Spektrum eines zum Leuchten angeregten Gases aus einer Atomsorte besteht also nur aus einzelnen Linien (diskretes Spektrum, Linienspektrum) im Gegensatz zum

kontinuierlichen Spektrum eines schwarzen Strahlers. Das Linienspektrum ist gewissermaßen der „optische Fingerabdruck“ einer Atom- oder Molekülsorte.

Tritt weißes Licht (Gemisch aus allen Wellenlängen) durch ein Gas, dann absorbieren die Atome die Wellenlängen λ_{mn} und senden anschließend wieder ein Photon aus, allerdings in eine beliebige Richtung. Im durchgehenden Strahl sind dann die Wellenlängen λ_{mn} nur mit sehr geringer Intensität vertreten und erscheinen im Spektrum als dunkle Linien (**Absorptionslinien**). Die Absorptionslinien im Sonnenspektrum nennt man **Fraunhoferlinien**. Diese Linien geben Auskunft über die Atome in der äußersten Schicht der Sonne, die von den etwas tiefer erzeugten Photonen durchdrungen wird.

Die Energiestufen des Wasserstoffatoms sind

$$W_n = -\frac{m_e}{8} \cdot \left(\frac{e^2}{\epsilon_0 h}\right)^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{-13,60 \text{ eV}}{n^2} \quad (2.5.47)$$

Die Ionisierungsenergie des H-Atoms im Grundzustand ist

$$W_{\text{Ion}} = W_\infty - W_1 = 13,60 \text{ eV} \quad (2.5.48)$$

Beim Übergang von W_m nach W_n wird elektromagnetische Strahlung der Wellenlänge λ_{mn} ausgesandt. Es gilt

$$\frac{1}{\lambda_{mn}} = \frac{W_m - W_n}{hc} = R_\infty \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \quad (2.5.49)$$

mit der **Rydbergkonstanten**

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3 c} = 1,097 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{m}} \quad (2.5.50)$$

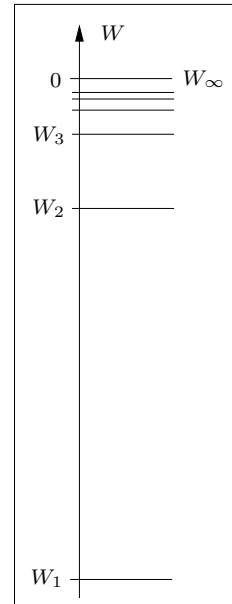


Abb.2.5.2 Energiespektrum

2.5.5 Scheinbare Helligkeiten

Die **scheinbare Helligkeit** eines Himmelskörpers hängt sicher von der Intensität E seiner Strahlung am Ort des Beobachters ab. Der Mensch empfindet aber eine Strahlung der doppelten Intensität nicht doppelt so hell. Vielmehr gilt hier ein logarithmischer Zusammenhang, den WEBER und FECHNER 1859 gefunden haben (**psychophysisches Grundgesetz**). Bezeichnet m (von magnitudo, lat. Größe) den physischen Reiz (Helligkeitsempfindung des Menschen), dann gilt

$$m = C \cdot \lg E + K \quad \text{mit } C, K = \text{konst.} \quad (2.5.51)$$

Mit $m_1 = C \cdot \lg E_1 + K$ und $m_2 = C \cdot \lg E_2 + K$ folgt

$$m_1 - m_2 = C \cdot \lg \frac{E_1}{E_2} \quad (2.5.52)$$

Schon im Altertum (HIPPARCH, 150 v.Chr.) wurden Sterne in sechs Größenklassen eingeteilt, wobei die hellsten Sterne „von 1. Größe“ und die gerade noch sichtbaren Sterne „von 6. Größe“ waren. Es gibt verschiedene Schreibweisen für „ein Stern ist von der Größe 1,5“:

$$m = 1,5 \quad , \quad m = 1,5 \text{ mag} \quad , \quad m = 1,5^{\text{m}} \quad \text{und} \quad m = 1^{\text{m}}5 \quad (2.5.53)$$

m ist eigentlich eine reine Zahl ohne Einheit, das mag oder ^m ist nur ein Hinweis, dass es sich um eine scheinbare Helligkeit handelt. Die Konstante C in (2.5.51) wird zu $C = -2,5^{\text{m}}$ festgelegt, was den Größenklassen des Altertums ziemlich nahe kommt. C ist negativ, weil einer größeren

2 Das Sonnensystem

Intensität eine kleinere Größenklasse (scheinbare Helligkeit) entspricht. Aus (2.5.52) wird jetzt

$$\boxed{m_1 - m_2 = -2,5^m \cdot \lg \frac{E_1}{E_2}} \quad (2.5.54)$$

Aus (2.5.54) folgt

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^{\frac{m_2 - m_1}{2,5^m}} \quad (2.5.55)$$

Einer Differenz von fünf Größenklassen ($m_2 - m_1 = 5^m$) entspricht also das Verhältnis 100 der Intensitäten. (2.5.54) legt nur fest, was Differenzen von Größenklassen bedeuten. Um den Nullpunkt der Größenklassenskala festzulegen, muss einem bestimmten Stern ein bestimmter Wert zugewiesen werden. Früher verwendete man den Polarstern, dem $m = 2,12^m$ zugeordnet wurde. Da der Polarstern aber leicht veränderlich ist, hat man eine Reihe von anderen Sternen als Referenzsterne gewählt. Es fehlt uns noch immer eine konkrete Umrechnung von Größenklassen in Intensitäten, d.h. der Wert der Konstante K in (2.5.51) ist noch unbekannt. Dieses Problem ist aber nicht so leicht zu lösen, da der physiologische Helligkeitseindruck nicht nur von der Intensität E , sondern auch noch von der spektralen Verteilung des beobachteten Lichtes abhängt. Für monochromatisches Licht der Wellenlänge $\lambda = 555 \text{ nm}$, das dem Auge besonders hell erscheint, gilt der Zusammenhang

$$E = 3,90 \cdot 10^{-9} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{-\frac{m}{2,5^m}} \quad (2.5.56)$$

Für „normales“ Sternenlicht mit einem kontinuierlichen Spektrum ist die Intensität größer als in (2.5.56). Für die spektrale Verteilung unserer Sonne gilt

$$E = 24,9 \cdot 10^{-9} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{-\frac{m}{2,5^m}} \quad (2.5.57)$$

Allgemein ist also

$$\boxed{E = E^* \cdot 10^{-\frac{m}{2,5^m}}} \quad (2.5.58)$$

oder

$$\boxed{m = -2,5^m \lg \frac{E}{E^*}} \quad (2.5.59)$$

mit einer vom Sternspektrum und daher von der Oberflächentemperatur des Sterns abhängigen Konstante E^* .

Als **absolute Helligkeit** M definiert man die scheinbare Helligkeit in der Entfernung $r_0 = 10 \text{ pc} = 32,615 \text{ LJ}$ vom Stern. Ist r die Entfernung des Sterns zum Beobachter, dann gilt

$$E(r_0) = \frac{r^2}{r_0^2} \cdot E(r) \quad (2.5.60)$$

und damit wegen (2.5.59)

$$\begin{aligned} M &= -2,5^m \lg \frac{E(r_0)}{E^*} = \\ &= -2,5^m \lg \frac{E(r) r^2}{E^* r_0^2} = \\ &= -2,5^m \left(\lg \frac{E(r)}{E^*} + \lg \frac{r^2}{r_0^2} \right) = \\ &= -2,5^m \lg \frac{E(r)}{E^*} - 2,5^m \cdot 2 \cdot \lg \frac{r}{r_0} = \\ &= m - 5^m \lg \frac{r}{r_0} \end{aligned} \quad (2.5.61)$$

2 Das Sonnensystem

Damit gilt

$$\boxed{m - M = 5^m \lg \frac{r}{r_0}} \quad (2.5.62)$$

$m - M$ nennt man **Entfernungsmodul**, da bei Kenntnis dieses Wertes die Entfernung r des Sterns berechnet werden kann. M kann manchmal über das Spektrum des Sterns bestimmt werden (siehe später). Aus (2.5.18) und (2.5.58) folgt für die Leuchtkraft eines Sterns

$$L = 4 \pi r_0^2 \cdot E^* \cdot 10^{-\frac{M}{2,5^m}} \quad (2.5.63)$$

und damit für die Leuchtkräfte zweier beliebiger Sterne

$$\boxed{\frac{L_1}{L_2} = 10^{\frac{M_2 - M_1}{2,5^m}}} \quad \text{oder} \quad \boxed{M_1 - M_2 = 2,5^m \cdot \lg \left(\frac{L_2}{L_1} \right)} \quad (2.5.64)$$

3 Sterne

3.1 Gravitationsenergie

Leuchtende Himmelskörper, die ihre Strahlungsenergie selbst erzeugen, nennt man **Sterne**. Der uns am nächsten liegende und damit am besten erforschte Stern ist unsere Sonne.

| M_{\odot} | R_{\odot} | L_{\odot} | $T_{\odot, \text{Oberfläche}}$ |
|-----------------------------------|-----------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| $1,9891 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ | $696\,000 \text{ km}$ | $3,84 \cdot 10^{26} \text{ W}$ | 5780 K |

Tab.3.1.1 Eigenschaften der Sonne

Die gewaltigen Energiemengen, die von der Sonne und den anderen Sternen abgestrahlt werden, können nicht durch chemische Reaktionen erzeugt werden (siehe Aufgaben).

Wenn ein Stein nach unten fällt, wird Gravitationsenergie frei, d.h. potentielle Energie im Gravitationsfeld verwandelt sich in kinetische Energie. Genauso wird Gravitationsenergie frei, wenn sich eine Wolke sehr dünnen Gases infolge der Gravitation zu einem Stern verdichtet. In erster Näherung betrachten wir Sterne als radialsymmetrische Gebilde, d.h. die Zustandsgrößen (Dichte ρ , Temperatur T , Druck p) des Sterns hängen nur von der Mittelpunktsentfernung r ab. Wenn eine Masse dm aus dem Unendlichen bis zur Oberfläche des sich bildenden Sterns fällt (momentaner Radius r), dann ändert sich die Energie des Gesamtsystems um

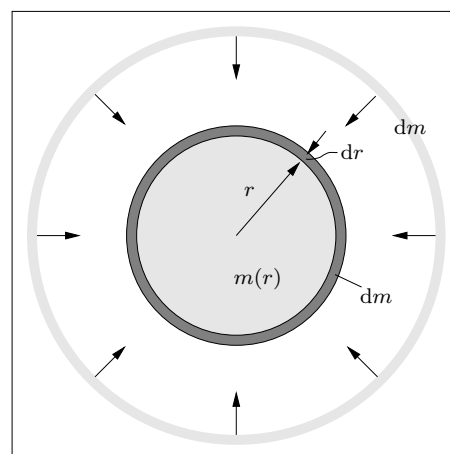


Abb.3.1.1 Gravitationsenergie

$$dW = -\gamma \frac{m(r) dm}{r} \quad (3.1.1)$$

Die Masse dm bildet auf dem Stern eine Schicht der Dicke dr , d.h. mit der Dichte $\rho(r)$ gilt

$$dm = 4\pi \rho(r) r^2 dr \quad (3.1.2)$$

$$m(r) = \int_0^r \rho(r') dV = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (3.1.3)$$

Damit erhält man für die Gravitationsenergie eines Sterns mit Radius R und Masse M

$$\begin{aligned} W_G &= -\gamma \int_0^R \frac{1}{r} \underbrace{4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'}_{m(r)} \underbrace{4\pi \rho(r) r^2 dr}_{dm} = \\ &= -16\pi^2 \gamma \int_0^R \rho(r) r \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' dr \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Unter der nicht sehr realistischen Annahme einer konstanten Dichte ρ des Sterns gilt

$$\int_0^r \rho r'^2 dr' = \frac{1}{3} \rho r^3 \quad (3.1.5)$$

und damit

$$W_G = -\frac{16}{3} \pi^2 \gamma \int_0^R \rho^2 r^4 dr = -\frac{16}{15} \pi^2 \gamma \rho^2 R^5 \quad (3.1.6)$$

Mit

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3} \quad (3.1.7)$$

folgt aus (3.1.6)

$$\boxed{W_G = -\frac{3}{5} \cdot \frac{\gamma M^2}{R}} \quad (3.1.8)$$

(für konstantes ρ)

Für eine andere Dichteverteilung $\rho(r)$ ändert sich in (3.1.8) lediglich der Zahlenfaktor. Für die Dichteverteilung der Sonne ist der Wert ungefähr dreimal größer. Damit erhält man für die Sonne

$$W_{G\odot} \approx -\frac{9}{5} \cdot \frac{\gamma M^2}{R} = -6,8 \cdot 10^{41} \text{ J} \quad (3.1.9)$$

Aus geologischen Untersuchungen weiß man, dass die Erde schon einige Milliarden Jahre von ungefähr der gleichen Sonnenenergie getroffen wird. Ein Satz der statistischen Physik, der sogenannte **Virialsatz**, besagt, dass nur die Hälfte der freiwerdenden Gravitationsenergie abgestrahlt werden kann, die andere Hälfte ist thermische Energie der Sonne. Die Zeit Δt , die die Sonne auf Grund der Gravitationsenergie mit konstanter Leuchtkraft strahlen könnte, ist

$$\Delta t = \frac{|W_{G\odot}|}{2 L_\odot} = \frac{6,8 \cdot 10^{41} \text{ J}}{2 \cdot 3,84 \cdot 10^{26} \text{ W}} = 8,9 \cdot 10^{14} \text{ s} = 2,8 \cdot 10^7 \text{ a} \quad (3.1.10)$$

Diese Zeit ist ungefähr um den Faktor Hundert kleiner als die tatsächliche bisherige Lebensdauer der Sonne, d.h. es muss eine andere, sehr ergiebige Energiequelle in der Sonne und den Sternen vorhanden sein.

3.2 Druck und Temperatur in Sternen

Eine dünne Schicht Sternmaterie der Dicke dr und der Fläche A (die Fläche stehe senkrecht auf einem Radiusvektor) hat die Masse $dm^* = \rho(r) A dr$. Durch die Gewichtskraft dF dieses Massestückes ändert sich der Druck auf der Strecke dr um

$$dp = -\frac{dF}{A} = -\frac{\gamma m(r) dm^*}{r^2 A} = -\frac{\gamma m(r) \rho(r) A dr}{r^2 A} = -\frac{\gamma m(r) \rho(r) dr}{r^2} \quad (3.2.1)$$

Das Minuszeichen deshalb, weil einer Verkleinerung von r ($dr < 0$) eine Vergrößerung des Drucks entspricht. Aus (3.1.10) folgt

$$\boxed{\frac{dp}{dr} = -\frac{\gamma m(r) \rho(r)}{r^2}} \quad (3.2.2)$$

Als Randbedingung für den Druck nehmen wir $p(R) = 0$, d.h. wir integrieren von R bis r :

$$p(r) = -\int_R^r \frac{\gamma m(r) \rho(r)}{r^2} dr = \gamma \int_r^R \frac{m(r) \rho(r)}{r^2} dr \quad (3.2.3)$$

3 Sterne

Für $\rho = \text{konst.}$ (homogene Kugel) folgt

$$p(r) = \gamma \int_r^R \frac{4\pi \rho^2 r}{3} dr = \frac{2\pi}{3} \gamma \rho^2 R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (3.2.4)$$

Mit (3.1.7) folgt

$$\boxed{p(r) = \frac{3\gamma M^2}{8\pi R^4} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)} \quad (3.2.5)$$

(für konstantes ρ)

Im Zentrum der Sonne erhält man mit dieser Näherung

$$p(0) = \frac{3\gamma M_{\odot}^2}{8\pi R_{\odot}^4} = 1,3 \cdot 10^{14} \text{ Pa} \quad (3.2.6)$$

Beim Druck versagt unser einfaches Modell, denn der tatsächliche Wert liegt bei $3 \cdot 10^{16}$ Pa.

Zur Berechnung der Temperatur gehen wir von der allgemeinen Gasgleichung aus (siehe (2.5.4)). Als Volumenelement wählen wir wieder eine Kugelschale der Dicke dr mit Radius r :

$$p(r) \cdot dV = kT(r) dN \quad (3.2.7)$$

Die Teilchenzahl dN erhält man aus der Masse dm der Kugelschale und der mittleren Teilchenmasse μ :

$$p(r) \cdot dV = kT(r) \frac{dm}{\mu} = kT(r) \frac{\rho(r) dV}{\mu} \quad (3.2.8)$$

Umstellen ergibt

$$\boxed{T(r) = \frac{\mu p(r)}{k \rho(r)}} \quad (3.2.9)$$

Mit (3.2.5) und (3.1.7) folgt für die Temperatur in einer Gaskugel mit konstanter Dichte

$$\boxed{T(r) = \frac{\gamma \mu M}{2kR} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)} \quad (3.2.10)$$

(Für konstantes ρ)

Ungefähr 75 % der Masse unserer Sonne sind Wasserstoff, der Rest Helium. Auf ein Heliumatom ($m_{\text{He}} \approx 4u$) kommen also 12 Wasserstoffatome ($m_{\text{H}} \approx 1u$). Da die Atome bei den hohen Temperaturen in der Sonne vollständig dissoziiert sind (Materie in dieser Form nennt man ein **Plasma**), kommen zu dem He-Kern und den 12 H-Kernen noch 14 freie Elektronen. Auf die Masse $16u$ treffen also 27 Teilchen, d.h. die mittlere Teilchenmasse ist $\mu = \frac{16}{27}u$. Für das Zentrum der Sonne erhält man dann in der Näherung eines Sterns konstanter Dichte aus (3.2.10)

$$T(r) = \frac{8u\gamma M_{\odot}}{27kR_{\odot}} = 6,8 \cdot 10^6 \text{ K} \quad (3.2.11)$$

Der tatsächliche Wert ist ungefähr $1,5 \cdot 10^7$ K.

Es sei noch kurz skizziert, wie man die „tatsächlichen“ Werte von Druck und Temperatur in den Sternen ermittelt. Zunächst fassen wir die drei schon bekannten Zustandsgleichungen zusammen, nämlich (3.1.2), (3.2.2) und (3.2.9):

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi \rho(r) r^2 \quad (3.2.12)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\gamma m(r)\rho(r)}{r^2} \quad (3.2.13)$$

$$T(r) = \frac{\mu p(r)}{k \rho(r)} \quad (3.2.14)$$

Weiter nehmen wir an, dass sich ein Stern im Gleichgewicht befindet, d.h. die vom Stern erzeugte Leistung P_{erz} wird vollständig abgestrahlt und ist somit gleich seiner Leuchtkraft. Allgemein bezeichnen wir mit $L(r)$ die Leistung, die durch eine Kugelfläche mit Radius r nach außen strömt. Mit $\varepsilon(r)$ bezeichnen wir die pro Masse erzeugte Leistung und erhalten als weitere Gleichung

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi \varrho(r) r^2 \cdot \varepsilon(r) \quad (3.2.15)$$

Für uns nicht so leicht zu verstehen ist die letzte Gleichung, die die den Strahlungstransport auf dem Weg durch den Stern beschreibt:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{64\pi} \cdot \frac{\kappa(r) \varrho(r) L(r)}{\sigma r^2 T^3} \quad (3.2.16)$$

Dabei ist σ die Stefan-Boltzmann-Konstante und κ der **Absorptionskoeffizient**. Die konkrete Physik des Sterns steckt in ε und κ , die komplizierte Funktionen von p , T und der chemischen Zusammensetzung des Sterns sind und über diese Größen wieder von r abhängen. In ε ist die ganze Energieerzeugung durch alle möglichen Kernfusionsprozesse enthalten, κ beschreibt die Wechselwirkungen der Photonen mit der Sternmaterie. Bei Kenntnis von ε und κ hat man mit (3.2.12)-(3.2.16) fünf Gleichungen für die fünf Funktionen $m(r)$, $\varrho(r)$, $p(r)$, $T(r)$ und $L(r)$. Mit geeigneten Randbedingungen (z.B. $m(R) = M$) findet man dann numerisch die Lösungen. Für sehr dichte Sterne treten quantenmechanische Effekte auf und die Zustandsgleichung (3.2.13) muss durch eine andere ersetzt werden („entartetes Elektronengas“).

3.3 Energieerzeugung in Sternen

3.3.1 Ein Ausflug in die Kernphysik

In der Atom- und Kernphysik verwendet man die **atomare Masseneinheit**

$$u = \frac{1}{12} \cdot \text{Masse des } {}^{12}_6\text{C-Atoms} = 1,66054021 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (3.3.1)$$

Eine genaue Bestimmung aller Atommassen mit einem Massenspektrometer ergibt:

- Die Masse m eines Atoms ist ungefähr ein ganzzahliges Vielfaches der atomaren Masseneinheit: $m \approx A \cdot u$
- Es gibt chemisch gleichartige Atome (gleiche Ordnungszahl bzw. Kernladung Z) mit verschiedenen Massen (**Isotope**).
- Es gibt chemisch verschiedene Atome mit gleichen Massen (**Isobare**).

Diese Versuchsergebnisse werden mit folgender Modellvorstellung erklärt:

Der Atomkern besteht aus **Protonen** (p oder p^+) und **Neutronen** (n).

Das Neutron wurde 1932 von **Chadwick** entdeckt (wegen der Unschärferelation gibt es keine Kernelektronen, d.h. der Kern besteht nicht aus Protonen und Elektronen). Protonen und Neutronen nennt man auch **Nukleonen** (Kernteilchen).

| Name | Beschreibung | Zeichen |
|--------------------------------------|--------------------|---------|
| Kernladungszahl, Ordnungszahl | Zahl der Protonen | Z |
| Neutronenzahl | Zahl der Neutronen | N |
| Massenzahl, Nukleonenzahl | Zahl der Nukleonen | A |

3 Sterne

| | Elektron | Positron | Proton | Antiproton | Neutron | Antineutron |
|---------|----------|----------|----------------|----------------------------|---------------|-------------|
| Zeichen | e^- | e^+ | p oder p^+ | \bar{p} oder \bar{p}^- | n | \bar{n} |
| Ladung | $-e$ | $+e$ | $+e$ | $-e$ | 0 | 0 |
| Masse | m_e | m_e | 1,007276470 u | m_p | 1,008664904 u | m_n |

$$\boxed{A = Z + N} \quad \boxed{N = A - Z} \quad (3.3.2)$$

Die Masse m eines Atoms oder Moleküls wird in der Form

$$\boxed{m = A_r \cdot u} \quad (3.3.3)$$

mit der **relativen Atommasse** A_r angegeben. Nach Definition hat das chemisch wichtigste Atom $^{12}_6\text{C}$ exakt die Masse $m = 12 u$, für die anderen Atome gilt

$$\boxed{A_r \approx A} \quad (3.3.4)$$

d.h. die relative Atommasse ist ungefähr gleich der ganzzahligen Massenzahl.

Die Ladung des Kerns ist $Q = Z \cdot e$.

Mit dem chemischen Symbol X gibt es folgende Schreibweisen für Atome mit der Ordnungszahl Z und der Nukleonenzahl A :

$$\boxed{{}^A_Z\text{X} = {}^A\text{X} = \text{X} A} \quad (3.3.5)$$

Beispiel: ${}^4_2\text{He} = {}^4\text{He} = \text{He} 4$ (α -Teilchen)

Die schweren Isotope des Wasserstoffs haben eigene Namen:

Deuterium: ${}^2_1\text{H}$ oder ${}^2_1\text{D}$

Tritium: ${}^3_1\text{H}$ oder ${}^3_1\text{T}$

Nach einem Vorschlag von **E. Segrè** stellt man die bekannten Kerne wie in Abb.3.3.1 in einer **Nuklidkarte** übersichtlich dar. Kerne mit gleicher Neutronenzahl N heißen **Isotone**.

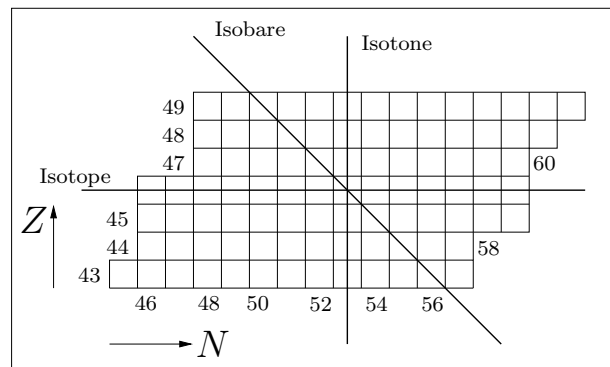


Abb.3.3.1 Nuklidkarte

Die Grundgleichung für Energiebetrachtungen in der Kernphysik ist die Masse-Energie-Äquivalenz

$$\boxed{W = m c^2} \quad (3.3.6)$$

Zwischen Nukleonen wirkt eine kurzreichweitige, anziehende und sehr starke Kraft (**starke Wechselwirkung**). In Entfernungen $r \lesssim 10^{-15}$ m ist diese Kraft größer als die elektrische Abstoßung der Protonen und ermöglicht so das Zusammenhalten der Kerne. Die negative potentielle Energie der Nukleonen im Atomkern bezüglich der starken Wechselwirkung nennt man die **Bindungsenergie** B_K der Kerne. Die Gesamtenergie eines Kerns mit Z Protonen und N Neutronen ist die Summe der Energien seiner Bausteine plus der negativen Bindungsenergie:

$$W_K = (Z m_p + N m_n) c^2 + B_K < (Z m_p + N m_n) c^2 \quad (3.3.7)$$

Die Gesamtmasse eines Kerns ist also kleiner als die Massensumme seiner Bausteine:

$$m_K = \frac{W_{\text{ges}}}{c^2} = Z m_p + N m_n + \frac{B_K}{c^2} < Z m_p + N m_n \quad (3.3.8)$$

3 Sterne

Die Gesamtenergie eines Atoms setzt sich aus den Energien des Kerns, der Elektronen und der negativen Bindungsenergie der Elektronen an den Kern zusammen:

$$W_A = (Z m_p + Z m_e + N m_n) c^2 + B_K + B_e \quad (3.3.9)$$

Die Atommasse ist damit

$$m_A = Z m_p + Z m_e + N m_n + \frac{B_K + B_e}{c^2} \quad (3.3.10)$$

Aus (3.3.8) und (3.3.10) folgt

$$m_K = m_A - Z m_e - \frac{B_e}{c^2} \quad (3.3.11)$$

Die Atommassen sind experimentell mit dem Massenspektrometer sehr genau bestimmbar. Da nackte Atomkerne höherer Ordnungszahlen nur bei sehr hohen Temperaturen existieren, gibt es keine Messwerte der Kernmassen schwerer Atome. Genauso schwierig wäre die Messung der totalen Elektronenbindungsenergien B_e , denn dazu müsste man die Elektronen eines Atoms der Reihe nach entfernen und jedesmal die dazu nötige Energie messen. Zur Bestimmung der Kernmassen muss man entweder B_e berechnen (bei höheren Ordnungszahlen ein äußerst schwieriges Unterfangen) und mittels (3.3.11) auf die Atommassen zurückgreifen oder man muss B_K berechnen (noch schwieriger, da die starke Kraft noch nicht so gut verstanden ist wie die elektrische) und (3.3.8) verwenden. Bei vielen Kernreaktionen liegen die Ausgangs- und Endprodukte als vollständige Atome vor, so dass man mit der Kenntnis der Atommassen auskommt. In Sternen allerdings sind die Atome vollständig ionisiert, d.h. es liegt ein Plasma aus nackten Kernen und Elektronen vor. Da B_e gegen B_K sehr klein ist, kann man B_e entweder ganz vernachlässigen oder eine Näherungsformel dafür verwenden (BERGMANN/SCHÄFER, Band IV, S. 1161):

$$B_e \approx -15,73 \text{ eV} \cdot Z^{\frac{7}{3}} \quad (3.3.12)$$

| Teilchen | Masse in kg | Masse in u | mc^2 in MeV |
|----------|------------------------------|---------------|---------------|
| Elektron | $9,109389754 \cdot 10^{-31}$ | 0,00054857990 | 0,51099906 |
| Proton | $1,6726231 \cdot 10^{-27}$ | 1,007276470 | 938,27231 |
| Neutron | $1,6749286 \cdot 10^{-27}$ | 1,008664904 | 939,56563 |
| 1 u | $1,66054021 \cdot 10^{-27}$ | 1 | 931,49432 |

Mit (3.3.11) und (3.3.12) berechnete Werte von relativen Kernmassen (Nuklidmassen) N_r :

| Atom | A | Z | A_r | N_r | Name |
|---------------------|-----|-----|-------------|-------------|----------------|
| ${}^1_1\text{H}$ | 1 | 1 | 1,00782503 | 1,00727647 | Wasserstoff |
| ${}^2_1\text{D}$ | 2 | 1 | 2,01410177 | 2,01355321 | Deuterium |
| ${}^3_1\text{T}$ | 3 | 1 | 3,01604926 | 3,01550070 | Tritium |
| ${}^3_2\text{He}$ | 3 | 2 | 3,01602930 | 3,01493223 | Helium 3 |
| ${}^4_2\text{He}$ | 4 | 2 | 4,00260325 | 4,00150617 | Helium 4 |
| ${}^6_3\text{Li}$ | 5 | 3 | 5,01253779 | 5,01089227 | Lithium 5 |
| ${}^6_3\text{Li}$ | 6 | 3 | 6,01512227 | 6,01347675 | Lithium 6 |
| ${}^{12}_6\text{C}$ | 12 | 6 | 12,00000000 | 11,99670963 | Kohlenstoff 12 |
| ${}^{13}_6\text{C}$ | 13 | 6 | 13,00335484 | 13,00006446 | Kohlenstoff 13 |
| ${}^{14}_7\text{N}$ | 14 | 7 | 14,00307400 | 13,99923553 | Stickstoff 14 |

Der Radius eines Atomkerns der Massenzahl A wird durch folgende Näherungsformel beschrieben:

$$\text{Ladungsdichte: } R \approx 1,1 \cdot 10^{-15} \text{ m} \cdot A^{\frac{1}{3}} \quad (3.3.13)$$

$$\text{Massendichte: } R \approx 1,3 \cdot 10^{-15} \text{ m} \cdot A^{\frac{1}{3}} \quad (3.3.14)$$

Dabei ist zu beachten, dass es keinen scharfen Rand eines Atomkerns gibt (siehe Abb.3.3.2).

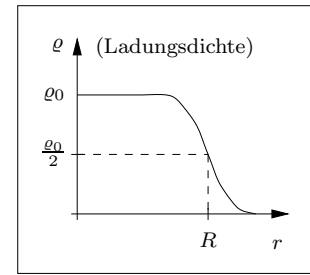
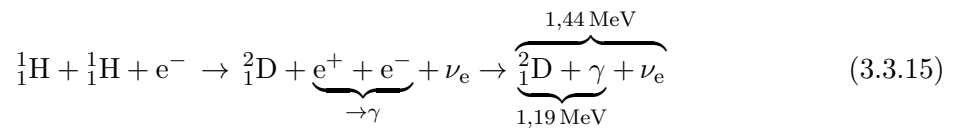


Abb.3.3.2 Kernradius

3.3.2 Kernfusion

Bei der **Fusion** (Verschmelzung) von zwei Protonen zu einem Deuteriumkern entsteht noch ein Positron (e^+) und ein Neutrino (ν_e , Ruhmasse ≈ 0). Das Positron zerstrahlt mit einem Elektron nach kurzer Zeit in Photonen (γ) (mindestens zwei wegen des Impulssatzes):



Bei dieser Reaktion wird die Energie

$$\Delta W = (2 m_p + m_e - m_{\text{K,D}}) c^2 = 1,44 \text{ MeV} \quad (3.3.16)$$

frei, wobei 0,25 MeV auf das Neutrino entfallen, die verbleibenden 1,19 MeV verteilen sich auf den Deuteriumkern (kinetische Energie) und auf die Photonen. Die Wechselwirkung der Neutrinos mit Materie ist so schwach, dass diese Teilchen fast ungehindert durch einen ganzen Stern fliegen. Die 0,25 MeV Neutrinoenergie trägt also nichts zur Leuchtkraft eines Sterns bei.

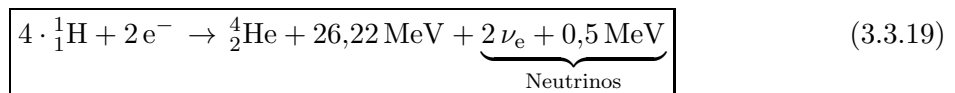
Ein entstandener Deuteriumkern kann jetzt weiter mit einem Proton verschmelzen:



Zwei ${}^3_2\text{He}$ -Kerne reagieren zu



Zweimal die Reaktionen (3.3.15) und (3.3.17) und einmal die Reaktion (3.3.18) ergeben zusammen (**pp-Kette**)



Die Verschmelzung von vier Protonen zu einem He4-Kern (**H-Brennen**) trägt also die Energie 26,22 MeV zur Leuchtkraft eines Sterns bei.

Damit die Fusion zweier Protonen einsetzen kann, müssen sie sich bis auf ca. $6 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ annähern. Die potentielle Energie zwischen zwei Protonen setzt sich aus dem Anteil der starken Kraft (YUKAWA) und dem der elektrischen Kraft (COULOMB) zusammen:

$$W_{\text{pot}} = -\frac{A}{r} e^{-\mu r} + \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r} \quad (3.3.20)$$

mit

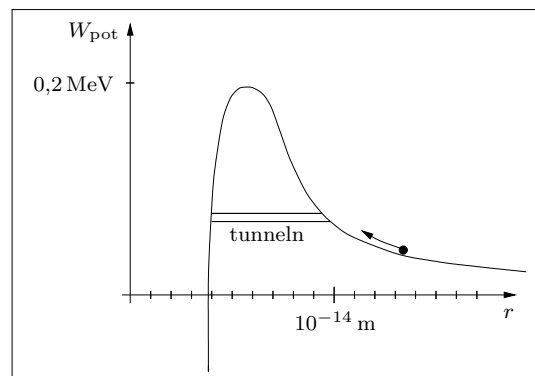


Abb.3.3.3 p-p-Fusion

3 Sterne

$$A = \frac{\hbar c}{4\pi} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{m_p c}{\hbar} \quad (3.3.21)$$

Das Maximum von $W_{\text{pot}}(r)$ liegt bei $r_0 = 5,84 \cdot 10^{-15}$ m und $W_{\text{pot}}(r_0) = 0,197$ MeV. Wenn die Protonen zentral und mit gleichen Geschwindigkeiten zusammenstoßen, muss jedes Proton die kinetische Energie $W_0 = 0,5 \cdot W_{\text{pot}}(r_0)$ besitzen. Wenn die mittlere Energie der Protonen gleich W_0 wäre, müsste die Temperatur wegen

$$\frac{3}{2} k T = W_0 \quad (3.3.22)$$

den sehr hohen Wert $T_0 = 7,6 \cdot 10^8$ K haben, die Temperatur im Zentrum der Sonne ist aber nur $T_Z = 1,5 \cdot 10^7$ K. Wenn die Temperatur den Wert T_0 hätte, würden allerdings alle Protonen in kürzester Zeit fusionieren und die Sonne würde explodieren (riesige Wasserstoffbombe!).

Nach der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung (siehe Aufgaben zu den Planetenatmosphären) ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Proton bei der Temperatur T_Z eine Energie $\geq W_0$ besitzt, nur $p(W_0) = 7,4 \cdot 10^{-131}$. Die Zahl der Protonen in der Sonne ist

$$N_p = \frac{0,75 \cdot M_\odot}{m_p} = 9,0 \cdot 10^{56}, \quad (3.3.23)$$

d.h. **kein** Proton in der Sonne ($p \cdot N_p = 6,7 \cdot 10^{-74}$!!) hat die nötige Energie, eine Fusion einzuleiten! Aber hier kommt die Quantenmechanik ins Spiel, genauer gesagt der Tunneleffekt. Die Protonen müssen nicht über den Gipfel des Potentialwalls, sondern sie können mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit $p_T(W)$ schon beim Erreichen der potentiellen Energie W durch den Wall hindurchtunneln (siehe Abb.3.3.3). Die Wahrscheinlichkeit $p(W)$, dass ein Proton bei der Temperatur T_Z eine Energie $\geq W$ besitzt, hängt sehr stark von W ab, wie folgende Wertetabelle zeigt:

| W | W_0 | $\frac{W_0}{2}$ | $\frac{W_0}{4}$ | $\frac{W_0}{8}$ | $\frac{W_0}{16}$ |
|--------|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|---------------------|
| $p(W)$ | $7,4 \cdot 10^{-131}$ | $2,7 \cdot 10^{-65}$ | $1,4 \cdot 10^{-32}$ | $2,6 \cdot 10^{-16}$ | $3,1 \cdot 10^{-8}$ |

Tab.3.3.1 Die Zahlenwerte erhält man durch Integration der Maxwellverteilung

Einer Verringerung von W auf ein Viertel entspricht eine Änderung der Wahrscheinlichkeit um hundert Zehnerpotenzen! Das ist die Arbeitsweise von Exponentialfunktionen. Die Tunnelwahrscheinlichkeit $p_T(W)$ hängt exponentiell von der Dicke der Potentialbarriere ab und ist nur für dünne Barrieren wesentlich von null verschieden. Die Gesamtwahrscheinlichkeit für eine Fusion hängt auch noch von der Zahl der Protonenstöße in der Zeiteinheit ab; diese Zahl wächst mit der Dichte. Alles in allem ergibt sich, dass im Zentrum der Sonne jede Sekunde ungefähr eines von $2,5 \cdot 10^{16}$ Protonen eine Fusion eingeht. Für die pp-Kette ist die pro Masse erzeugte Leistung (Energieerzeugungsrate, siehe (3.2.15)):

$$\varepsilon(r) \approx 2,2 \cdot 10^{-44} \frac{\text{m}^5}{\text{kg s}^3 \text{K}^5} \cdot \varrho(r) T(r)^5 \quad (3.3.24)$$

Allgemein gilt für Fusionsprozesse

$$\varepsilon(r) \approx \alpha \cdot \varrho(r) T(r)^\nu \quad (3.3.25)$$

Die Bindungsenergie pro Nukleon der verschiedenen Kerne hat bei Eisen ($A = 56$) ein Minimum (siehe Abb.3.3.4). Kernfusionen, deren Ergebnis ein Kern mit $A \leq 56$ ist, laufen **exotherm** ab, d.h. sie liefern Energie. Andererseits liefert die Spaltung schwerer Kerne, deren Bruchstücke Kerne mit $A \geq 56$ sind, auch Energie (Kernreaktoren, Atombombe).

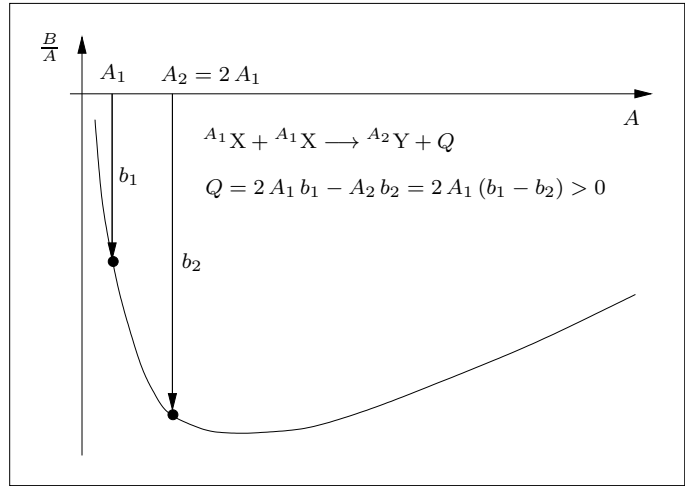
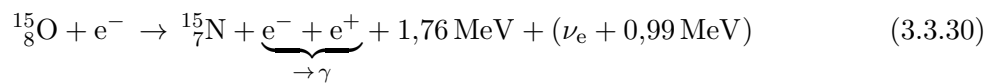
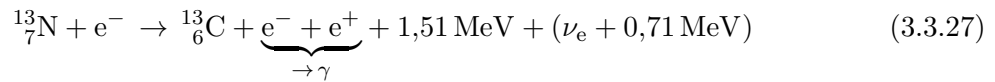
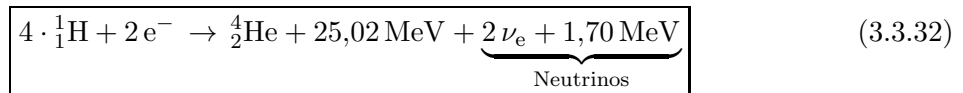


Abb.3.3.4 Bindungsenergie pro Nukleon

In Sternen mit höheren Temperaturen ($1,5 \cdot 10^7$ K bis $3 \cdot 10^7$ K) gibt es eine andere Reaktionsfolge des H-Brennens, den **CNO-Zyklus** (BETHE-WEIZSÄCKER):



Zusammenfassend lautet die Bilanz des CNO-Zyklus (${}^{12}\text{C}$ dient nur als Katalysator):



Der Exponent ν der Energieerzeugungsrate ε in (3.3.25) hat für den CNO-Zyklus, je nach Dichte und Temperaturbereich, Werte zwischen 12 und 18. Für höhere Temperaturen überwiegt also der CNO-Zyklus gegen die pp-Kette.

3.3.3 Ein einfaches Modell junger Sterne

„Junge“ Sterne (sie können durchaus einige Milliarden Jahre alt sein) erzeugen ihre Energie durch die Wasserstofffusion (pp-Kette). Diese Sterne werden durch die Gleichungen (3.2.12) bis (3.2.16) und (3.3.24) beschrieben (es fehlt noch eine Gleichung für κ). Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind nicht in geschlossener Form darstellbar, aber es gibt relativ einfache Näherungen. Die folgenden Grafen für die Sonne sind mit der Näherung

$$m(r) = M \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(32,768 \cdot \frac{r^3}{R^3} + 1 \right)^2} \right) \quad (3.3.33)$$

und MAPLE erstellt worden. Für die Gravitationsenergie ergibt sich mit diesem Modell der Wert

$$W_G = -6,9 \cdot 10^{41} \text{ J} = -1,8 \cdot \frac{\gamma M^2}{R} \quad (3.3.34)$$

3 Sterne

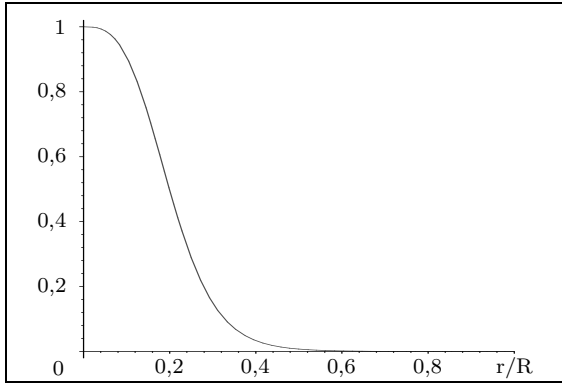


Abb.3.3.5 $\rho(r)/\rho(0)$, $\rho(0) = 9,2 \cdot 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

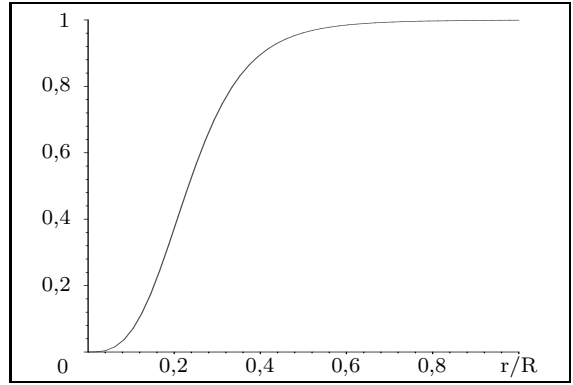


Abb.3.3.6 $m(r)/M$, $M = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

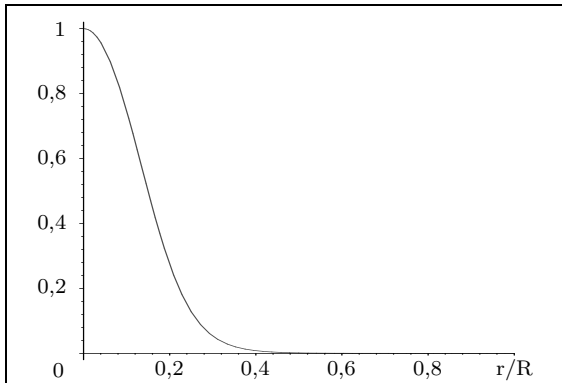


Abb.3.3.7 $p(r)/p(0)$, $p(0) = 2,2 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$

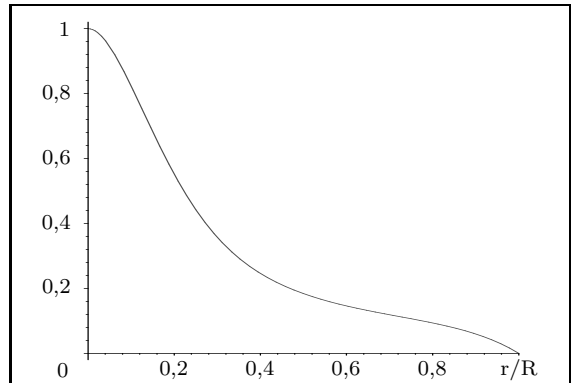


Abb.3.3.8 $T(r)/T(0)$, $T(0) = 1,6 \cdot 10^7 \text{ K}$

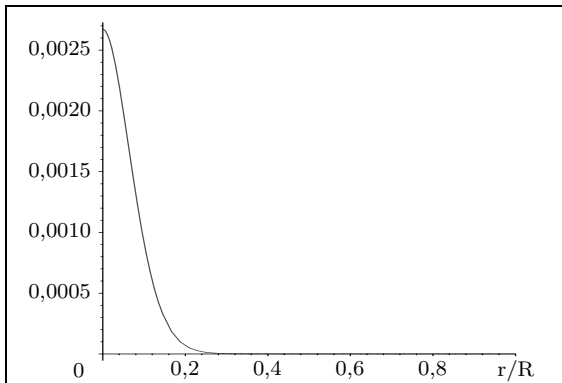


Abb.3.3.9 $\varepsilon(r)$ in W/kg

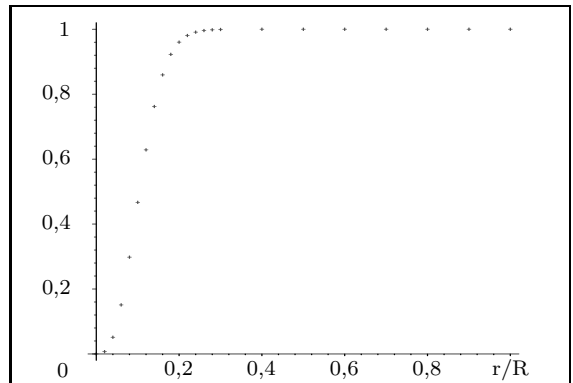


Abb.3.3.10 $L(r)/L(R)$, $L(R) = 3,84 \cdot 10^{26} \text{ W}$

Vergleicht man die Grafen mit folgender Tabelle, die mit einem genaueren Modell berechnet wurde, dann sieht man die Brauchbarkeit des einfachen Modells.

| | | | | | | | | | | | |
|---------------------------------|---|------|------|------|-------|-------|--------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| $\frac{r}{R}$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
| $\frac{\varrho(r)}{\varrho(0)}$ | 1 | 0,56 | 0,25 | 0,08 | 0,03 | 0,006 | 0,003 | $5 \cdot 10^{-4}$ | $1 \cdot 10^{-4}$ | $1 \cdot 10^{-5}$ | $2 \cdot 10^{-9}$ |
| $\frac{m(r)}{M}$ | 0 | 0,07 | 0,35 | 0,64 | 0,85 | 0,94 | 0,98 | 0,99 | 1 | 1 | 1 |
| $\frac{p(r)}{p(0)}$ | 1 | 0,7 | 0,2 | 0,03 | 0,007 | 0,001 | 0,0003 | $3 \cdot 10^{-5}$ | $7 \cdot 10^{-6}$ | $3 \cdot 10^{-7}$ | $3 \cdot 10^{-13}$ |
| $\frac{T(r)}{T(0)}$ | 1 | 0,84 | 0,61 | 0,43 | 0,31 | 0,22 | 0,14 | 0,08 | 0,05 | 0,02 | 0,0004 |
| $\frac{L(r)}{L(R)}$ | 0 | 0,3 | 0,9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tab.3.3.2 Im Inneren der Sonne: $M = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg, $R = 6,96 \cdot 10^8$ m, $\varrho(0) = 1,6 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
 $p(0) = 3 \cdot 10^{16}$ Pa, $T(0) = 15,5 \cdot 10^6$ K, $L(R) = 3,84 \cdot 10^{26}$ W

3.4 Grobe Beziehungen zwischen M , L , R und T

Wir suchen grobe Zusammenhänge zwischen der Masse M , der Leuchtkraft L und dem Radius R eines Sterns. Vereinfachend gehen wir von einem Stern mit konstanter Dichte ϱ aus:

$$M = \frac{4\pi\varrho}{3} R^3 \quad \text{d.h.} \quad \varrho \sim \frac{M}{R^3} \quad (3.4.1)$$

Die Temperatur des Sterns ist nach (3.2.10)

$$T(r) = \frac{\gamma\mu M}{2kR} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (3.4.2)$$

Für die Temperatur T_0 im Zentrum des Sterns folgt

$$T_0 = \frac{\gamma\mu M}{2kR} \quad \text{d.h.} \quad T_0 \sim \frac{M}{R} \quad (3.4.3)$$

Aus (3.2.16) folgt mit (3.4.2) und als konstant angenommenem κ

$$-\frac{\gamma\mu M r}{kR^3} = -\frac{3}{64\pi} \cdot \frac{\kappa\varrho L(r)}{\sigma r^2 T(r)^3} \quad (3.4.4)$$

Mit $L\left(\frac{R}{2}\right) \approx L(R) = L$ und $T\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{3}{4}T_0$ folgt aus (3.4.4), wenn man $r = \frac{R}{2}$ setzt:

$$-\frac{\gamma\mu M}{2kR^2} = -\frac{128\kappa k^3}{27\pi\sigma\gamma^3\mu^3} \cdot \frac{L\varrho R}{M^3} \quad (3.4.5)$$

und daraus

$$L = \text{konst.} \cdot \frac{M^4}{\varrho R^3} = \text{konst.} \cdot M^3 \quad (3.4.6)$$

Damit haben wir die **Masse-Leuchtkraft-Beziehung**

$$\boxed{L \sim M^3} \quad (3.4.7)$$

gefunden.

3 Sterne

Aus (3.2.15), (3.3.25) und (3.2.10) folgt für die Leuchtkraft L eines Sterns mit konstanter Dichte

$$\begin{aligned}
 L &= 4 \pi \varrho \int_0^R r^2 \varepsilon(r) dr = 4 \pi \alpha \varrho^2 \int_0^R r^2 T(r)^\nu dr = \\
 &= \text{konst.} \cdot \frac{\varrho^2 M^\nu}{R^\nu} \int_0^R r^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^\nu dr = \\
 &= \text{konst.} \cdot \frac{\varrho^2 M^\nu}{R^\nu} \int_0^R r^2 \left(1 + a_1 \frac{r^2}{R^2} + a_2 \frac{r^4}{R^4} + \dots + a_\nu \frac{r^{2\nu}}{R^{2\nu}}\right) dr = \\
 &= \text{konst.} \cdot \frac{\varrho^2 M^\nu}{R^\nu} \int_0^R \left(r^2 + a_1 \frac{r^4}{R^2} + a_2 \frac{r^6}{R^4} + \dots + a_\nu \frac{r^{2\nu+2}}{R^{2\nu}}\right) dr = \\
 &= \text{konst.} \cdot \frac{\varrho^2 M^\nu}{R^\nu} \left(\frac{R^3}{3} + \frac{a_1 R^3}{5} + \frac{a_2 R^3}{7} + \dots + \frac{a_\nu R^3}{2\nu+3}\right) = \\
 &= \text{konst.} \cdot \frac{\varrho^2 M^\nu}{R^{\nu-3}} = \text{konst.} \cdot \frac{M^{\nu+2}}{R^{\nu+3}}
 \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Mit (3.4.7) folgt daraus

$$M^3 \sim \frac{M^{\nu+2}}{R^{\nu+3}} \tag{3.4.9}$$

und damit die **Masse-Radius-Beziehung**

$$\boxed{R \sim M^{\frac{\nu-1}{\nu+3}}} \tag{3.4.10}$$

Beim H-Brennen liegt ν zwischen 5 und 18, d.h. der Exponent von M in (3.4.10) liegt zwischen 0,5 und 0,8.

Nach dem Stefan-Boltzmann'schen Gesetz gilt mit der effektiven Oberflächentemperatur T_{eff} des Sterns

$$L = 4 \pi \sigma R^2 T_{\text{eff}}^4 \tag{3.4.11}$$

Aus (3.4.7) und (3.4.10) folgt

$$L \sim R^2 T_{\text{eff}}^4 \sim M^{\frac{2\nu-2}{\nu+3}} T_{\text{eff}}^4 \sim L^{\frac{2\nu-2}{3\nu+9}} T_{\text{eff}}^4 \tag{3.4.12}$$

und damit

$$L^{1 - \frac{2\nu-2}{3\nu+9}} = L^{\frac{\nu+11}{3\nu+9}} \sim T_{\text{eff}}^4 \tag{3.4.13}$$

Für die Zahlenwerte \tilde{L} und \tilde{T}_{eff} gilt dann (Benennungen kann man schlecht logarithmieren)

$$\tilde{L}^{\frac{\nu+11}{3\nu+9}} = C \cdot \tilde{T}_{\text{eff}}^4 \implies \frac{\nu+11}{3\nu+9} \lg \tilde{L} = 4 \lg \tilde{T}_{\text{eff}} + \text{konst.} \tag{3.4.14}$$

oder

$$\lg \tilde{L} = \frac{12\nu+36}{\nu+11} \lg \tilde{T}_{\text{eff}} + \text{konst.} \tag{3.4.15}$$

Der Bruch in (3.4.15) liegt zwischen 6 und 8,7, da ν zwischen 5 und 18 liegt. Näherungsweise nehmen wir den Wert 8, d.h. für Sterne, in denen das H-Brennen dominiert, gilt näherungsweise

$$\boxed{\lg \tilde{L} \approx 8 \lg \tilde{T}_{\text{eff}} + \text{konst.}} \tag{3.4.16}$$

Die absolute visuelle Helligkeit M_V des Sterns ist nach (2.5.61)

$$M_V = -2,5^m \lg \frac{E(r_0)}{E^*} \tag{3.4.17}$$

Dabei ist

$$E(r_0) = \frac{L}{4\pi r_0^2} \quad (3.4.18)$$

die Intensität in der Entfernung $r_0 = 10 \text{ pc}$ vom Stern. Im Folgenden bezeichnet die Tilde ($\tilde{}$) wieder reine Zahlenwerte, d.h. $\tilde{L} = L/W$ und $\tilde{T}_{\text{eff}} = T_{\text{eff}}/K$:

$$M_V = -2,5^m \lg \frac{L}{4\pi r_0^2 E^*} = -2,5^m \lg \frac{\tilde{L}}{4\pi \tilde{r}_0^2 \tilde{E}^*} = -2,5^m \lg \tilde{L} - 2,5^m \lg(4\pi \tilde{E}^*) \quad (3.4.19)$$

Mit (3.4.16) folgt daraus

$$M_V \approx -20^m \lg \tilde{T}_{\text{eff}} + \text{konst.} \quad (3.4.20)$$

Aus der absoluten Helligkeit unserer Sonne ($M_V = 4,72^m$) und ihrer effektiven Temperatur ($T_{\text{eff}} = 5780 \text{ K}$) gewinnt man die Konstante in (3.4.20):

$$M_V \approx 80^m - 20^m \lg \tilde{T}_{\text{eff}} \quad (3.4.21)$$

(3.4.21) ist ein ungefährender Zusammenhang zwischen absoluter visueller Helligkeit und effektiver Oberflächentemperatur eines Sterns, in dem die Energie hauptsächlich durch H-Brennen erzeugt wird.

Für sonnennahe Sterne kann die Entfernung r trigonometrisch bestimmt werden und aus der scheinbaren Helligkeit erhält man dann mit (2.5.62) die absolute Helligkeit M_V . Aus dem Spektrum des Sterns gewinnt man mit dem Wien'schen Verschiebungsgesetz die effektive Temperatur T_{eff} . Trägt man alle Daten in ein $\log T_{\text{eff}} - M_V$ -Diagramm (HERTZSPRUNG-RUSSEL-Diagramm, HRD) ein, kann die Beziehung (3.4.21) überprüft werden.

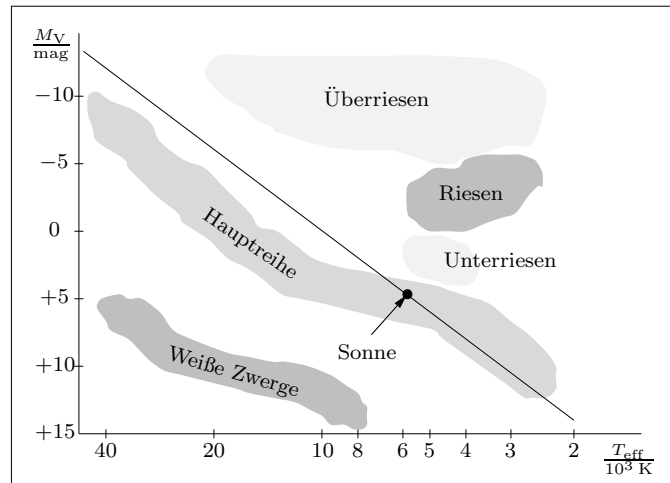


Abb.3.4.1 Hertzsprung-Russel-Diagramm

Die Gerade in Abb.3.4.1 zeigt den Verlauf der Näherung (3.4.21). Die Sterne mit hauptsächlichem H-Brennen bilden die **Hauptreihe** im HRD. Auf der Hauptreihe liegen die meisten Sterne, d.h. die meisten Sterne befinden sich im Stadium des H-Brennens.

3.5 Der sichtbare Bereich der Sterne

Außer über Neutrinos, die ihren Ursprung im Inneren (Fusionsbereich) eines Sterns haben, erhalten wir nur Informationen über die äußeren Bereiche der Sterne. Als **mittlere freie Weglänge** eines Photons bezeichnet man den Mittelwert des Weges, nach dem ein Photon mit einem Kern, einem Elektron oder einem Atom in Wechselwirkung tritt und damit absorbiert oder umgelenkt wird. Da die mittlere freie Weglänge im sehr dichten Inneren eines Sterns sehr klein ist, müssen sich die im Sternzentrum entstehenden Photonen mühsam ihren Weg nach außen bahnen.

Dabei wird der Weg des Photons so oft umgelenkt, dass es ca. eine Million Jahre braucht, um die äußeren Schichten des Sterns zu erreichen. Auf diesem Weg verliert das Photon zunächst Energie durch die Stöße mit den Kernen und den Elektronen des Plasmas in den inneren Schichten. Dadurch erhitzt sich das Plasma und bei Stößen der geladenen Teilchen untereinander entstehen wieder neue Photonen. Weiter außen, wenn die Temperatur des Sterns soweit gesunken ist, dass es wieder Atome gibt, werden die Photonen von den Atomen absorbiert und mit der gleichen oder einer anderen Wellenlänge wie-

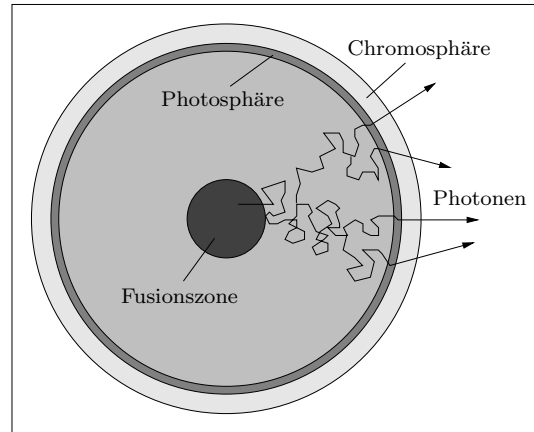


Abb.3.5.1 Schichten eines Sterns

der emittiert. Insgesamt entstehen während der langen Reise durch den Stern aus wenigen, sehr energiereichen Photonen (Gammaquanten) viele energiearme Photonen mit Wellenlängen im sichtbaren Bereich. Erst in der **Photosphäre**, einer relativ dünnen Schicht an der Sternoberfläche (≈ 200 km bei der Sonne), wird die mittlere freie Weglänge der Photonen so groß, dass einige davon (innen weniger, außen mehr) den Stern ohne weitere Wechselwirkung verlassen können.

Die Temperatur in der Photosphäre beträgt einige Tausend Kelvin. Das ist zu wenig für ein Plasma, aber die Atome mit kleiner Ionisierungsenergie (hauptsächlich Metallatome) sind ionisiert. Es gibt also genügend freie Elektronen in der Photosphäre, die eine beliebige Energie $W > 0$ haben können. Diese freien Elektronen können mit einem H-Atom ein H^- -Ion bilden. Das zweite Elektron im H^- -Ion hat nur die Bindungsenergie $-0,75$ eV. Wenn ein H-Atom also ein freies Elektron der Energie W einfängt, sendet es ein Photon der Frequenz

$$f = \frac{0,75 \text{ eV} + W}{h} > 1,8 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \quad (3.5.1)$$

und der Wellenlänge

$$\lambda = \frac{c}{f} < 1700 \text{ nm} \quad (3.5.2)$$

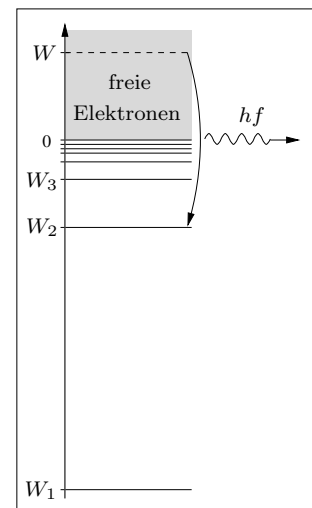


Abb.3.5.2 Kontinuierliches Spektrum

aus. Es entsteht also ein **kontinuierliches Emissionsspektrum** und kein Linienspektrum, wie es sonst bei Gasen üblich ist.

In der Photosphäre entstehen auch die **Fraunhoferlinien**: Trifft ein Photon der Energie hf auf ein Atom im Energiezustand W_n und ist $W_m = W_n + hf$ auch ein möglicher Energiezustand dieses Atoms, dann wird das Photon mit großer Wahrscheinlichkeit absorbiert und in eine beliebige Richtung wieder ausgesandt (**Resonanzstreuung**). Im geradlinig durchgehenden Licht fehlen also die Wellenlängen, die den vorhandenen Energiedifferenzen entsprechen, fast völlig und sie erscheinen als schwarze Linien im kontinuierlichen Spektrum (Absorptionslinien, Fraunhoferlinien).

Durch **Konvektion** (Aufwärtsströmen heißer Gase aus den Schichten unter der Photosphäre, Abwärtsströmen der um einige hundert Grad kälterer Gase) zeigt die Photosphäre eine körnige Struktur (**Granulation**). Die einzelnen Granulen haben einen Durchmesser von ca. 1000 km und eine mittlere Lebensdauer von ungefähr zehn Minuten.

An die Photosphäre schließen sich noch die **Chromosphäre** und die **Korona** an. Die Chromosphäre ist bei einer totalen Sonnenfinsternis kurz sichtbar, wenn der Mond gerade die Photosphäre bedeckt. Einige Sekunden später verschwindet auch die Chromosphäre hinter dem Mond. Aus der Sichtbarkeitsdauer folgt die Dicke der Chromosphäre, die bei der Sonne ungefähr 10 000 km beträgt. Das Spektrum der Chromosphäre ist ein reines Linienspektrum (Resonanzstreuung des Photosphärenlichts an den Atomen der Chromosphäre), das wegen der sehr geringen Dichte der Chromosphäre kaum zur Gesamtstrahlung der Sonne beiträgt. In der Chromosphäre steigt die Temperatur nach außen hin wieder an (bis zu 10^5 K) und erreicht in der Korona sogar 10^6 K. Die Energie dazu stammt aus Schallwellen, die durch die Konvektionsströme unter der Photosphäre erzeugt werden. Durch die hohe Temperatur gibt es in der Korona wieder viele freie und heiße (schnelle) Elektronen. Das Koronalicht ist hauptsächlich Streulicht der Photosphäre an den freien Elektronen und zeigt daher das gleiche Spektrum wie das Pho-

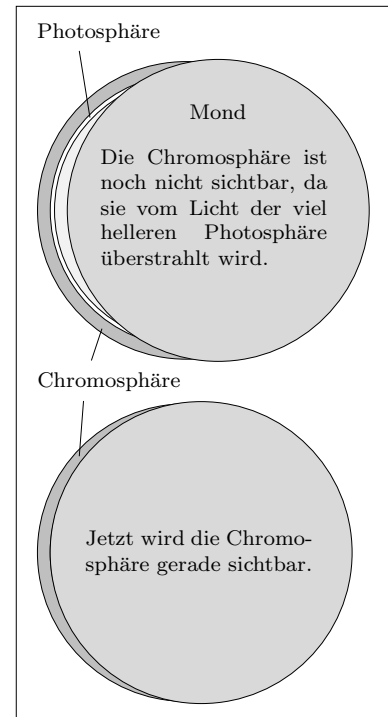


Abb.3.5.3 Sonnenfinsternis

tosphärenlicht. Im Koronalicht fehlen aber die Fraunhoferlinien, die durch den Dopplereffekt (die schnellen Elektronen sind die Lichtquellen) verschmiert werden.

Die hohen Koronatemperaturen und die daraus folgenden hohen Teilchengeschwindigkeiten in der Korona bewirken ein Entweichen der Koronamaterie nach außen. Dieser **Sonnenwind** besteht hauptsächlich aus Protonen, Elektronen und α -Teilchen. Die Dichte des Sonnenwindes am Ort der Erde liegt zwischen zwei und zehn Teilchen pro cm^3 , die Teilchengeschwindigkeit liegt bei $500 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Über die **aktive Sonne (Sonnenflecken, Protuberanzen)** siehe Buch.

3.6 Informationen im Sternenlicht

Die Hauptinformation über Sterne und andere Himmelskörper erhalten wir in Form von elektromagnetischer Strahlung aller Wellenlängen, von der langwelligen Radiostrahlung über Infrarot, sichtbares Licht, Ultraviolett und Röntgenstrahlung bis hin zur extrem kurzwelligen und energiereichen Gammastrahlung. Neben der elektromagnetischen Strahlung erreichen uns noch Neutrinos und massereichere Teilchen, hauptsächlich Elektronen, Protonen und α -Teilchen. Eine weitere Möglichkeit, Information aus den Tiefen des Alls zu erhalten, sind die **Gravitationswellen**, die von großen, beschleunigten Massen (Doppelsterne, Sternexplosionen, Fall eines Sterns in ein **schwarzes Loch**) abgestrahlt werden. Leider stehen uns noch keine Gravitationswellendetektoren zur Verfügung, deren Empfindlichkeit ausreicht, die kosmischen Ereignisse zu registrieren. Die Existenz von Gravitationswellen folgt aus der allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins.

Aber zurück zum Licht der Sterne. Die Information steckt natürlich in der spektralen Zusammensetzung des Lichtes. Mit einem Spektrografen (siehe Abb.3.6.1) wird das Sternenlicht zerlegt und fotografiert. Aus der Lage, der Stärke und der Form (Breite) der Absorptionslinien (Fraunhoferlinien)

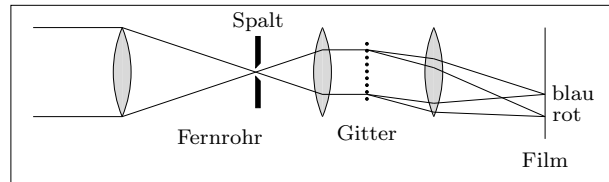


Abb.3.6.1 Gitterspektrograf

schließt man auf die chemische Zusammensetzung, die Temperatur und den Druck in der Photosphäre. Die mit H_α usw. bezeichneten Linien gehören zur Balmerreihe des Wasserstoffs. Die Breite der Linien in Abb.3.6.2 ist nicht ihre tatsächliche Breite, sondern ein Maß für ihre Stärke („Schwärze“). Die wirkliche Form einer Spektrallinie erhält man mit einer Fozelle, die als Lichteinlass einen sehr schmalen Spalt hat. Mit dieser Fozelle fährt man langsam durch das ganze Spek-

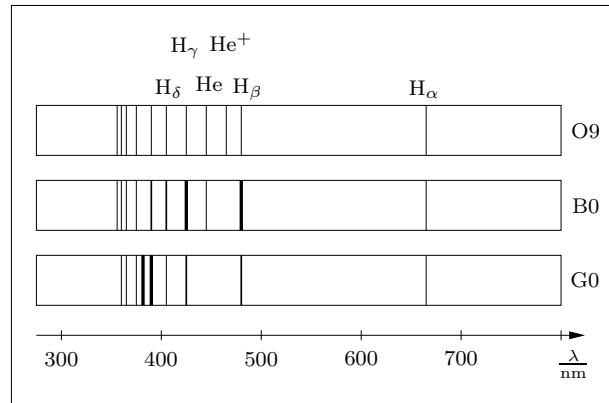


Abb.3.6.2 Verschiedene Spektren

trum und misst so die Intensität in Abhängigkeit von der Wellenlänge (siehe Abb.3.6.3).

Ähnlich aussehende Spektren werden der gleichen **Spektralklasse** zugeordnet. Die Hauptspektralklassen werden mit Großbuchstaben bezeichnet. Nach absteigenden Temperaturen geordnet lauten diese Klassen O-B-A-F-G-K-M. Ein Merksatz für diese Reihenfolge ist:

„**O**h, **B**e **A** Fine **G**irl, **K**iss **M**e“.

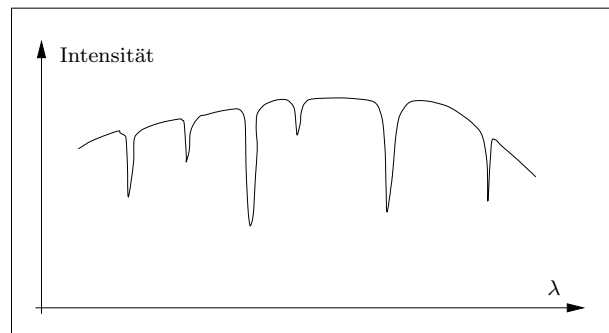


Abb.3.6.3 Spektrogramm

Diese Hauptklassen werden durch Anhängen einer Ziffer von 0 bis 9 noch in Unterklassen aufgeteilt. Unsere Sonne hat den Spektraltyp G2.

| Typ | O5 | B0 | B5 | A0 | F0 | G0 | K0 | M0 |
|--------|-------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| T in K | 44500 | 30000 | 15400 | 9520 | 7200 | 6030 | 5250 | 3850 |

Tab.3.6.1 Spektralklasse und Oberflächentemperatur für Hauptreihensterne

Ein roter Zwerg und ein roter Riese mit gleicher effektiver Temperatur gehören zur gleichen Spektralklasse. Eine genauere Untersuchung des Spektrums zeigt aber, dass die Form der Spektrallinien von der Leuchtkraft abhängt (kleine Leuchtkraft, breite Linien). Durch eine genaue Analyse des Spektrums eines Sterns erhält man also Informationen zur effektiven Temperatur und zur Leuchtkraft. Die so bestimmte Temperatur ist genauer als die über das Wiensche Verschiebungsgesetz ermittelte (die Sterne sind eben nur in grober Näherung schwarze Strahler). Sternentfernungen, die über spektroskopisch bestimmte Leuchtkräfte und die scheinbare Helligkeit ermittelt werden (Entfernungsmodul, (2.5.62)), nennt man **spektroskopische Parallaxen**.

Für eine weitere Information im Licht der Sterne sorgt der **Dopplereffekt**:

Lichtquelle und Beobachter bewegen sich mit der Relativgeschwindigkeit $v = \beta c$. Ist λ die Wellenlänge im System der Lichtquelle, dann misst der Beobachter die Wellenlänge

$$\lambda' = \lambda \cdot \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (3.6.1)$$

Dabei ist $\beta > 0$ für die gegenseitige Entfernung (**Rotverschiebung**) und $\beta < 0$ für die Annäherung (**Blauverschiebung**) von Sender und Empfänger.

Für $|\beta| \ll 1$ gilt

$$\frac{1}{1 - \beta} \approx 1 + \beta \quad (3.6.2)$$

und es folgt

$$\boxed{\lambda' \approx \lambda \cdot (1 + \beta)} \quad (3.6.3)$$

oder

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda' - \lambda \approx \lambda \cdot \beta} \quad (3.6.4)$$

Vergleicht man die Linien im Spektrum eines Himmelskörpers mit denen einer ruhenden Lichtquelle, dann lässt sich mit der Dopplerformel die Relativgeschwindigkeit des Himmelskörpers zur Erde berechnen.

3.7 Entwicklung der Sterne

3.7.1 Geburt der Sterne

Sterne entstehen aus riesigen Wolken interstellaren Gases (hauptsächlich Wasserstoff und Helium) durch die Wirkung der Gravitation. Die genauen Bedingungen, denen Masse, Dichte und Temperatur solcher Gaswolken genügen müssen, um eine Sternentstehung zuzulassen, sind Gegenstand der aktuellen Forschung. Je nach Bedingungen müssen die Massen der Wolken größer als 10^3 bis 10^4 Sonnenmassen sein. Aufgrund von Schwingungsinstabilitäten und Problemen mit der Rotation können keine Sterne mit mehr als ungefähr $90 M_{\odot}$ entstehen. Die untere Grenze für Sternmassen liegt bei ungefähr $0,08 M_{\odot}$. Es entstehen zwar Himmelskörper mit kleineren Massen, doch reicht bei diesen die Zentraltemperatur nicht aus, um das H-Brennen einzuleiten. Solche Himmelskörper nennt man **braune Zwerg**e. Bei Objekten mit mehr als $0,08 M_{\odot}$ reicht die freiwerdende Gravitationsenergie aus, die Zentraltemperatur so weit zu erhöhen, dass das H-Brennen einsetzt: Ein junger Hauptreihenstern ist entstanden.

3.7.2 Entwicklung der Sterne

Die dem Stern durch das H-Brennen zur Verfügung stehende Energie ist zur Sternmasse M proportional: $W_H = \alpha \cdot M$. Mit τ_H bezeichnen wir die Zeitdauer des H-Brennens eines Sterns. Da die Leuchtkraft L des Sterns seine abgestrahlte Leistung ist, gilt

$$\tau_H = \frac{W_H}{L} \quad (3.7.1)$$

Mit der Masse-Leuchtkraftbeziehung

$$L \sim M^3 \quad (3.7.2)$$

folgt dann

$$\tau_H \sim \frac{M}{M^3} = \frac{1}{M^2} \quad (3.7.3)$$

Die Verweildauer auf der Hauptreihe ist also für massereiche Sterne kleiner als für leichte Sterne. τ_H liegt ungefähr zwischen 10^6 und 10^{11} Jahren.

| Spektraltyp | O5 | B0 | A0 | F0 | G0 | K0 | M0 |
|--------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------------------|
| τ_H in Jahren | $2 \cdot 10^6$ | $2 \cdot 10^7$ | $6 \cdot 10^8$ | $2 \cdot 10^9$ | $5 \cdot 10^9$ | $9 \cdot 10^9$ | $2 \cdot 10^{10}$ |

Tab.3.7.1 Verweildauer τ_H auf der Hauptreihe

Während des H-Brennens sammelt sich immer mehr Helium im Zentralgebiet des Sterns an, der Bereich des H-Brennens ist dann eine zum Mittelpunkt konzentrische Kugelschale, die immer weiter nach außen wandert. Das H-Brennen endet, wenn im Zentralgebiet mit der erforderlichen hohen Temperatur aller Wasserstoff in Helium verwandelt wurde. Das ist der Fall, wenn ungefähr 10% des ursprünglichen Wasserstoffs verbrannt sind. Seiner Energiequelle beraubt kühlt das Zentralgebiet jetzt aus und der Gasdruck wird dadurch geringer. Die Gravitation gewinnt also wieder die Oberhand und das Zentralgebiet kontrahiert. Die dabei freigesetzte Gravitationsenergie heizt das Helium soweit auf, bis das He-Brennen zündet. Die beim He-Brennen entstehende Strahlung heizt jetzt den angrenzenden Wasserstoff auf und es entsteht um das Zentrum eine Kugelschale, in der H-Brennen stattfindet. Das He-Brennen liefert zwar pro Masse weniger Energie als das H-Brennen, aber es läuft schneller ab: Die Leistung beim He-Brennen ist größer als die Leistung beim H-Brennen. Der Druck der nach außen strebenden Strahlung wird jetzt so groß, dass die Hülle des Sterns nach außen gedrängt wird, es entsteht ein **roter Riese**. Die eben geschilderten Abläufe gelten für Sterne mit $M \gtrsim 2 M_{\odot}$.

Bei Sternen mit $M \lesssim 2 M_{\odot}$ sind die Verhältnisse etwas komplizierter, da die Dichte im Kern so groß wird, dass quantenmechanische Effekte (entartetes Elektronengas) wirksam werden und der Kern somit nicht mehr als ideales Gas betrachtet werden kann. Insbesondere steigt die Temperatur des Kerns bei der Kontraktion nicht mehr an und es kommt zunächst nicht zum He-Brennen.

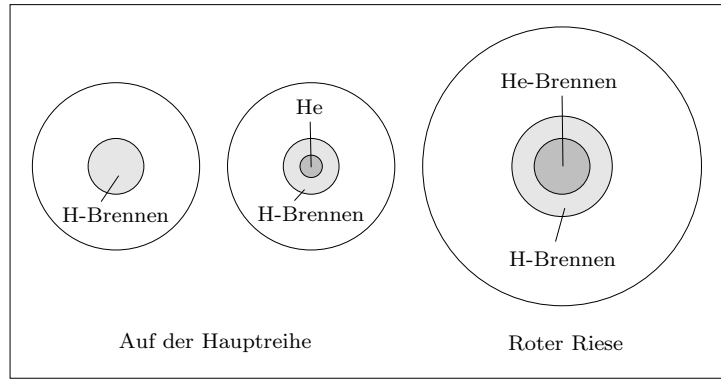


Abb.3.7.1 Vom H-Brennen zum He-Brennen

In einer Schale um den Kern findet auch hier H-Brennen statt. Die Leuchtkraft des Sterns hängt nicht mehr von M , sondern von der Masse M_c des entarteten Kerns ab und steigt mit wachsendem M_c stark an (um mehrere Zehnerpotenzen bei Verdopplung von M_c). Bei $M_c \approx 0,45 M_{\odot}$ setzt auch hier das He-Brennen ein. Wegen der Entartung dehnt sich der Kern bei der folgenden Erhitzung nicht aus und das He-Brennen schaukelt sich sehr schnell auf, bis es im **Helium-Flash** endet. Dabei steigt die Leistung des Kerns für einige hundert Sekunden auf die Leistung einer ganzen Galaxie an! Diese gewaltige Energiemenge wird hauptsächlich zur Erhitzung des Sterns selbst aufgebraucht, die Entartung des Zentralgebiets wird aufgehoben und der Stern geht in ein gleichmäßiges He-Brennen über. Im HRD durchläuft der Stern jetzt langsam eine Schleife im Gebiet der roten Riesen.

Bei roten Riesen mit ihren Radien von $R \approx 1 \text{ AE}$ ist die Fluchtgeschwindigkeit an der Oberfläche so klein, dass ständig Materie entweicht. Um die roten Riesen bildet sich langsam ein **planetarischer Nebel**. Ist das Helium verbrannt, fällt der aus C und O bestehende Kern wieder zusammen. Bei massearmen Sternen ($M \lesssim 10 M_{\odot}$) wie unserer Sonne genügt die dabei entstehende Strahlung, die äußeren Schichten des Sterns wegzublasen. Zurück bleiben ein entarteter Zwergstern (**weißer Zwerg**) und ein planetarischer Nebel.

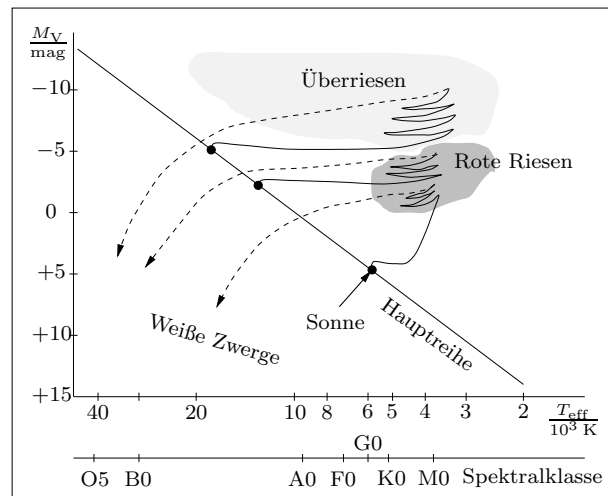


Abb.3.7.2 Sternentwicklung im HRD

3.7.3 Weiße Zwerg

Bei normalen Sternen wächst der Radius mit der Masse. Aus (3.4.10) folgt für Hauptreihensterne

$$R \sim M^{\alpha} \quad \text{mit} \quad 0,5 \lesssim \alpha \lesssim 0,8 \quad (3.7.4)$$

Bei weißen Zwergen gilt statt der Zustandsgleichung des idealen Gases

$$pV = Nkt \quad (3.7.5)$$

aber die Zustandsgleichung eines entarteten Elektronengases:

$$p \sim \rho^{\frac{5}{3}} \quad (3.7.6)$$

Aus (3.2.5) ergibt sich für den Zentraldruck in einem Stern

$$p \sim \frac{M^2}{R^4} \tag{3.7.7}$$

Mit der offensichtlichen Proportionalität

$$\varrho \sim \frac{M}{R^3} \tag{3.7.8}$$

folgt dann aus (3.7.6) und (3.7.7) (Aufgabe!) für einen weißen Zwerg die Masse-Radius-Beziehung

$$\boxed{R \sim M^{-\frac{1}{3}}} \tag{3.7.9}$$

Der Radius eines weißen Zwerges wird also mit wachsender Masse kleiner! Typische Größenordnungen für weiße Zwerge sind $M \approx M_\odot$ und $R \approx R_{\text{Erde}}$.

Weißer Zwerge haben keine Energiequelle mehr: Für Kernfusionen ist die Temperatur zu niedrig, eine Kontraktion wird durch den starken Gegendruck des entarteten Elektronengases verhindert. In den nichtentarteten **Atomkernen** ist aber noch genügend kinetische Energie gespeichert, um den Stern mit seiner sehr kleinen Oberfläche noch einige 10^9 Jahre leuchten zu lassen. Allmählich kühlt der weiße Zwerg aber aus, wird zum roten Zwerg (Wanderung im HRD nach rechts unten) und schließlich zu einem nicht mehr leuchtenden **braunen Zwerg**. Damit ist der Endzustand der masseärmeren Sterne erreicht.

3.7.4 Neutronensterne

Ist die Masse des verbleibenden Kerns eines roten Riesen größer als $1,4 \cdot M_\odot$ (**Chandrasekhar-Grenze**), dann ist der Gravitationsdruck größer als der Druck des entarteten Elektronengases und der Stern kollabiert weiter. Dabei werden die Elektronen nach



formlich in die Protonen gedrückt (inverser Betazerfall) und es entstehen lauter Neutronen und Neutrinos. Das verbleibende, fast nur aus Neutronen bestehende und äußerlich kompakte Gebilde ist ein **Neutronenstern**. In der Nähe der Oberfläche des Neutronensterns gibt es auch noch neutronenreiche Atomkerne und somit auch noch Elektronen. Die Radien der Neutronensterne liegen im Bereich von ungefähr 10 km bis 100 km. Beim Kollaps bleibt der Drehimpuls des Sterns erhalten und seine Winkelgeschwindigkeit erhöht sich drastisch (siehe Aufgaben). Die Rotationsdauer der Neutronensterne liegt zwischen 1,5 ms und 4 s.

Da ein Neutron aus geladenen **Quarks** besteht, hat ein Neutron ein Magnetfeld und wirkt wie ein kleiner Elementarmagnet. Im Neutronenstern sind diese Elementarmagnete ziemlich ausgerichtet, wodurch ein gigantisches Magnetfeld mit Werten bis zu 10^8 T an den Polen entsteht. Wenn die Dipolachse $\vec{\mu}$ des Magnetfeldes nicht mit der Drehachse $\vec{\Omega}$ des Neutronensterns zusammenfällt, dann werden geladene Teilchen (hauptsächlich Elektronen und Atomkerne die sich aufgrund induzierter elektrischer Felder etwas von der Oberfläche entfernt haben) durch die riesigen Zentrifugalkräfte nach außen geschleudert und im Magnetfeld auf Spiralbahnen gezwungen. Dabei treten gewaltige Beschleuni-

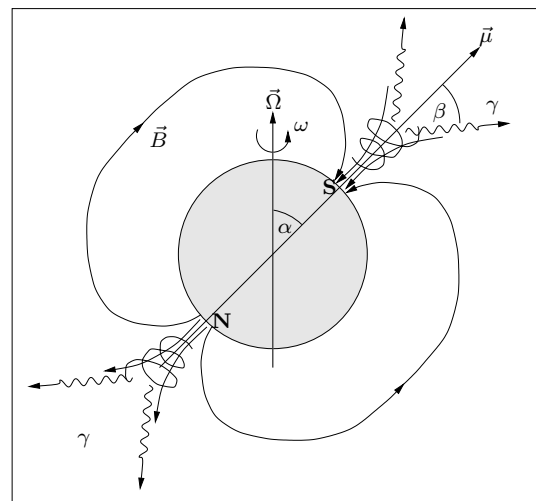


Abb.3.7.3 Neutronenstern als Pulsar

gungen auf und da jede beschleunigte Ladung strahlt, werden in Bewegungsrichtung der Teilchen Photonen abgestrahlt (**Synchrotronstrahlung**). Die Intensität dieser Strahlung nimmt mit dem Winkel β zwischen Magnetfeldachse $\vec{\mu}$ und Richtung zum Beobachter ab. Da sich β während der Rotation des Neutronensterns laufend ändert, nimmt der Beobachter (Erde) eine mit der Drehfrequenz des Sterns pulsierende Strahlungsintensität wahr (**Pulsar**). Die Frequenzen der Pulsarstrahlung reichen vom Radio- bis in den Röntgen- und Gamma-Bereich. 1967 entdeckte A. HEWISH mit dem Cambridger Radioteleskop den ersten Pulsar mit einer Periode von 1,337 s. Mittlerweile sind einige Hundert Pulsare entdeckt worden. Der bekannteste ist der Crabpulsar im Zentrum des Krebsnebels. Der Neutronenstern und der Nebel sind die Überreste einer Supernova, die 1054 von Chinesen beobachtet und aufgezeichnet wurde. Die Energie der Pulsarstrahlung wird im Endeffekt der Rotationsenergie des Neutronensterns entogen, d.h. seine Drehfrequenz (Winkelgeschwindigkeit) wird allmählich kleiner.

Pulsare, die hauptsächlich im Röntgenbereich strahlen, sind enge Doppelsternsysteme, bestehend aus einem Neutronenstern und einem normalen Stern. Vom normalen Stern fließt



Abb.3.7.4 Der Krebsnebel

ständig Materie zum Neutronenstern und spiralt um dessen magnetische Feldlinien auf seine Oberfläche. Durch das starke Gravitationsfeld in der Nähe der Oberfläche des Neutronensterns werden die einfallenden Teilchen sehr schnell, erfahren dadurch eine große Lorentzkraft und eine große Beschleunigung, was wiederum zur Abstrahlung von energiereichen Photonen führt.

3.7.5 Supernova

Bei massereichen Sternen mit einer Anfangsmasse $M \gtrsim 10 M_{\odot}$ setzt nach dem He-Brennen das C-Brennen, dann das Ne-Brennen, O-Brennen und das Si-Brennen ein. Jedesmal durchläuft der Stern dabei im HRD eine Schleife nach links und wieder nach rechts (siehe Abb.3.7.2). Die großen Energiemengen, die dabei im Kern erzeugt werden, heizen auch die äußeren Sternschichten soweit auf, dass dort in Kugelschalen die vorhergehenden Kernreaktionen weiter ablaufen. Da die Kernfusionen der schwereren Elemente bei immer höheren Temperaturen ablaufen, verbrennen diese Elemente auch immer schneller. Schließlich geht im Kern des Sterns der Brennstoff aus, wenn das ganze Silizium in Eisen, Kobalt und Nickel, die stabilsten Elemente die es gibt, verwandelt wurde. Jetzt hält der Kern dem ungeheueren Gravitationsdruck nicht mehr stand und kollabiert in einigen zehntel Sekunden zu einem Neutronenstern. Dabei entsteht nach (3.7.10) für jedes entstehende Neutron ein Neutrino. Der Rückprall der zusammenstürzenden Materie im Zentrum des Sterns erzeugt eine nach außen laufende Stoßwelle (eine Welle mit nur einem Wellenberg sehr dichter Materie). Diese Stoßwelle trifft auf die mit ca. einem Viertel der Lichtgeschwindigkeit nach innen fallende Materie der Sternhülle. Bei diesem Zusammenprall entsteht eine Schicht ungeheuer dichter Materie, die in der Lage ist, einige Prozent der nach außen eilenden Neutrinos zu absorbieren. Dabei wird genug Energie frei, um den Stern zu zerfetzen, die gesamte Hülle des Sterns wird ins All geblasen. Die nicht absorbierten Neutrinos verlassen den Stern mit praktisch Lichtgeschwindigkeit und tragen dabei eine Energiemenge fort, die um einige hundertmal größer ist als die gesamte im sichtbaren Bereich ausgestrahlte Energie. Die Stoßwelle ist viel langsamer als die Neutrinos ($\approx 0,02c$) und erreicht die Sternoberfläche erst nach einigen Stunden und bewirkt dann das sichtbare Aufleuchten des Sterns. Insgesamt wird bei einer Supernova ungefähr hundertmal soviel Energie frei, wie die Sonne in ihrem ganzen Leben abstrahlt! Bevor die Sternhülle aber im All verschwindet, setzen bei den hohen Temperaturen und dem riesigen Neutronenfluss endotherme, d.h. energieverbrauchende Kernfusionen ein. Dabei entstehen alle Elemente, die jenseits des Eisens liegen.

Alle schweren Elemente im Kosmos sind in Supernovaexplosionen entstanden!!

3 Sterne

Jedes Atom des menschlichen Körpers war also schon einmal Bestandteil eines massereichen Sterns und wurde bei einer Supernova in den Raum geschleudert. Unsere Sonne mit ihren Planeten entstand dann aus den Überresten von einer oder mehreren Sternexplosionen. Außer den ganz leichten Elementen (H, He, Li, Be, B), die schon beim Urknall erzeugt wurden, ist jedes Element in einem Stern entstanden.

Am 23.2.1987 wurde in der 160 000 Lj entfernten großen Magellanschen Wolke, einer kleinen Nachbargalaxie, eine Supernova beobachtet, die mit SN 1987A bezeichnet wird. Da der explodierende Stern schon vorher bekannt war (Sanduleak 69202, ein blauer Riese mit ca. 18 Sonnenmassen), konnten die Theorien der Astrophysiker an diesem Ereignis überprüft werden: Mit Erfolg! Insbesondere wurden die Neutrinos von SN 1987A **vor** dem sichtbaren Aufleuchten des Sterns registriert.

| H-Brennen | He-Brennen | C-Brennen | Ne-Brennen | O-Brennen | Si-Brennen |
|------------------|------------------|-----------|------------|-----------|------------|
| $1 \cdot 10^7$ a | $1 \cdot 10^6$ a | 12 000 a | 12 a | 4 a | 1 Woche |

Tab.3.7.2 Werdegang von Sanduleak 69202

In den letzten 2000 Jahren gab es, historischen Quellen zufolge, nur neun Supernovae in unserer Galaxis. Die beiden letzten wurden 1572 von TYCHO BRAHE und 1604 von KEPLER entdeckt. Gerade die Seltenheit der Supernovae macht die Entdeckung von SN 1987A so wertvoll.

In einem engen Doppelsternsystem, bestehend aus einem weißen Zwerg und einem Hauptreihenstern oder besser noch einem roten Riesen, kann der weiße Zwerg ständig Materie aus den locker gebundenen oberen Schichten des anderen Sterns an sich ziehen. Wird die Masse des weißen Zwerges größer als die Chandrasekhar-Masse $1,44 M_{\odot}$, dann kollabiert er zu einem Neutronenstern, es entsteht eine **Nova**. Der Ablauf der Nova ist ähnlich dem einer Supernova, nur um einige Größenordnungen kleiner, da einerseits die kollabierende Masse M_c kleiner ist (die freiwerdende Gravitationsenergie ist proportional zu M_c^2 !) und andererseits keine Sternhülle zur Umsetzung der Neutrinoenergien vorhanden ist.

3.7.6 Schwarze Löcher

Die Fluchtgeschwindigkeit v_F an der Oberfläche einer radialsymmetrischen Massenverteilung der Gesamtmasse M und mit dem Radius R erhält man aus dem Energiesatz:

$$\frac{m}{2} v_F^2 = \frac{\gamma M m}{R} \quad \Longrightarrow \quad v_F = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} \quad (3.7.11)$$

Aus der offensichtlichen Bedingung $v_F \leq c$ folgt

$$R \geq \frac{2\gamma M}{c^2} \quad (3.7.12)$$

Ist der Radius eines Himmelskörpers also kleiner als der **Schwarzschildradius**

$$\boxed{R_S = \frac{2\gamma M}{c^2}}, \quad (3.7.13)$$

dann kann nichts, nicht einmal Licht, die Oberfläche dieses Gebildes verlassen, es liegt ein **schwarzes Loch** vor. Diese Ideen wurden erstmals von JOHN MITCHELL 1783 und unabhängig davon von PIERRE-SIMON LAPLACE 1796 veröffentlicht. Diese einfachen Rechnungen, basierend auf dem Newtonschen Gravitationsgesetz, liefern aber nur zufällig den richtigen Wert für den Schwarzschildradius. Bei den starken Gravitationsfeldern so kompakter Objekte versagt die Newtonsche Theorie und man muss mit der Einsteinschen Gravitationstheorie, der allgemeinen Relativitätstheorie, rechnen. Einstein veröffentlichte seine Theorie am 25.11.1915 in den *Sitzungsberichten der Preußischen Akademie der Wissenschaften*. Diese Sitzungsberichte erhielt auch der Astrophysiker KARL SCHWARZSCHILD (1873-1916), der gerade als Soldat (aber nicht als einfacher Schütze, sondern als Mathematiker) an der Ostfront diente. Schwarzschild machte sich sofort daran, die neue Theorie auf Sterne anzuwenden. Er fand eine Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen für den Außenraum eines radialsymmetrischen, nicht rotierenden Sterns, die am 13.01.1916 von Einstein im Namen Schwarzschilds der Preußischen Akademie der Wissenschaften vorgetragen wurde. Ein paar Wochen später fand Schwarzschild auch eine Lösung für das Innere eines radialsymmetrischen, nicht rotierenden Sterns. Leider starb Schwarzschild im Mai 1916 an einer Krankheit, die er sich an Ostfront zugezogen hatte.

Aus den Lösungen Schwarzschilds folgt, dass ein Stern, dessen Radius kleiner als R_S ist, der Gravitation nicht mehr standhalten kann, er kollabiert bis zu einem Punkt mit unendlicher Dichte (**Singularität**). Weiter folgt, dass nichts innerhalb einer Kugelfläche mit Radius R_S (**Ereignishorizont**) über diese Fläche hinaus gelangen kann. Somit kann auch die beim Kollaps freiwerdende Gravitationsenergie nicht abgestrahlt werden. Der Ereignishorizont trennt das Innere des schwarzen Lochs vom übrigen Universum ab.

Berücksichtigt man jedoch quantenmechanische Effekte, dann kann ein schwarzes Loch doch Strahlung abgeben, die nach seinem Entdecker STEPHEN HAWKING benannt ist. Hawking veröffentlichte seine Berechnungen 1974 in der Zeitschrift *Nature*. Nach der Quantenmechanik ist das Vakuum nicht vollständig leer, sondern es entstehen für kurze Zeiten Δt virtuelle Teilchen-Antiteilchen-Paare (**Vakuumfluktuationen**). Δt genügt dabei der Unschärferelation

$$2mc^2\Delta t \lesssim h, \quad (3.7.14)$$

wobei m die relativistische Masse eines der beiden Teilchen ist. Entstehen die virtuellen Teilchen ganz nah am Ereignishorizont, dann kann es vorkommen, dass während der Lebensdauer Δt eines der beiden Teilchen hinter dem Horizont verschwindet und so das andere Teilchen als jetzt reelles Teil-

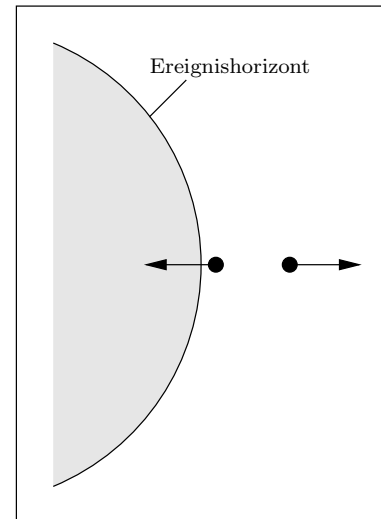


Abb.3.7.5 Hawkingstrahlung

chen zurückbleibt. Die Energie mc^2 wird dabei dem schwarzen Loch entzogen (freiwerdende Gravitationsenergie des hineinfliegenden Teilchens). Ist die kinetische Energie des zurückbleibenden Teilchens genügend groß, dann kann es dem schwarzen Loch entweichen. Die Hawkingstrahlung kann aus allen möglichen Teilchen bestehen (Photonen, Elektronen, Positronen, Protonen, ...), jedoch ist die Erzeugungswahrscheinlichkeit für leichtere Teilchen größer. Hawking berechnete auch, wie lange es dauert bis ein schwarzes Loch verdampft ist. Für ein Loch von etwas mehr als zwei Sonnenmassen sind das 10^{67} a, ungefähr das 10^{57} -fache des Alters des Universums! Im Endstadium aber, wenn die Masse des Lochs irgendwo zwischen 10^3 kg und 10^{11} kg liegt (genauer ist noch nicht bekannt), verdampft das Loch in einer gewaltigen Explosion. Es ist möglich, dass beim Urknall sehr leichte schwarze Löcher entstanden sind, die sogenannten **primordialen** (urzeitlichen) schwarzen Löcher. Nach der Strahlung solcher primordialen Löcher wurde gesucht, aber nichts gefunden. Entweder sind nicht sehr viele dieser leichten Löcher erzeugt worden oder es sind schon alle verdampft.

Wenden wir uns jetzt der Frage zu, wie schwarze Löcher entstehen. Die Antwort ist einfach: Beim Kollaps eines Sterns mit genügend großer Masse. Genauer gesagt, muss der entstehende Neutronenstern eine gewisse Grenzmasse M_{LOV} (LANDAU-OPPENHEIMER-VOLKOFF) überschreiten, um zu kollabieren. Da die exakte Zustandsgleichung eines Neutronensterns noch nicht bekannt ist, kann M_{LOV} nur näherungsweise angegeben werden (siehe Aufgaben):

$$1,5 M_{\odot} \lesssim M_{\text{LOV}} \lesssim 3 M_{\odot} \quad (3.7.15)$$

Ein schwarzes Loch kann auch aus einem Neutronenstern in einem engen Doppelsternsystem entstehen: Der Neutronenstern entzieht dem anderen Stern Materie, bis M_{LOV} erreicht wird. Noch ein Szenario, das in einem schwarzen Loch endet: Ein sehr enges Doppelsternsystem, bestehend aus zwei Neutronensternen, verliert Energie durch die Abstrahlung von **Gravitationswellen** (eine Folgerung aus der allgemeinen Relativitätstheorie). Die Neutronensterne kommen sich immer näher und kollidieren. Dabei wird ein gigantischer Schwall von Gammaquanten emittiert (eventuell eine Quelle der geheimnisvollen **Gammabay-Bursts**) und zurück bleibt ein schwarzes Loch.

| | | | |
|-----------------------------|---|--|--------------------------|
| $M_a \lesssim 0,08 M_\odot$ | $0,08 M_\odot \lesssim M_a \lesssim 10 M_\odot$ | $10 M_\odot \lesssim M_a \lesssim 40 M_\odot$ | $M_a \gtrsim 40 M_\odot$ |
| $M_e \lesssim 0,08 M_\odot$ | $0,08 M_\odot \lesssim M_e \lesssim 1,44 M_\odot$ | $1,44 M_\odot \lesssim M_e \lesssim 3 M_\odot$ | $M_e \gtrsim 3 M_\odot$ |
| brauner Zwerg | weißer Zwerg | Neutronenstern | schwarzes Loch |

Tab.3.7.3 Endstadien eines Sterns (M_a : Anfangsmasse, M_e : Endmasse)

Wir haben jetzt schon viel über schwarze Löcher geredet, aber wie kann man so ein Gebilde, das keine Strahlung aussendet (die Hawkingstrahlung ist viel zu schwach) überhaupt nachweisen? Eine Möglichkeit ist die Suche nach Doppelsternen mit einem unsichtbaren Partner, dessen Masse größer als M_{LOV} ist, auf die andere Möglichkeit kommen wir im Kapitel über Galaxien und Quasare zu sprechen.

Der wohl aussichtsreichste Kandidat für ein schwarzes Loch in einem Doppelsternsystem ist Cygnus X-1. Cygnus steht für das Sternbild *Schwan* und X für X-Ray (Röntgenstrahlung). Cygnus X-1 ist also die erste Röntgenquelle, die im Sternbild Schwan entdeckt wurde (1962). Die Auflösung der Röntgenteleskope ist sehr gering, aber 1972 wurde eine Radioquelle in derselben Gegend entdeckt, die den gleichen Schwankungen unterworfen ist wie Cygnus X-1. Die Radioquelle wurde als der schwache optische Stern HDE226868 identifiziert, ein blauer Überriese in der Entfernung 6000 LJ mit der scheinbaren Helligkeit 9^m . Abb. 3.7.6, die der

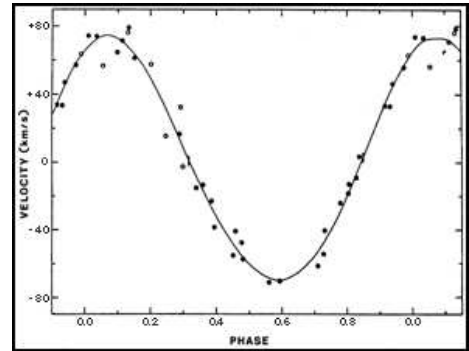


Abb.3.7.6 Radialgeschwindigkeit von HDE226868

Webseite von STEVEN DEGENNARO entnommen wurde, zeigt die von der Erde aus über die Dopplerverschiebung gemessene Radialgeschwindigkeit von HDE226868, d.h. dieser Stern ist ein Partner eines Doppelsternsystems. Die Umlaufdauer beträgt $T = 5,6$ d. Aus dem Spektrum von HDE226868 wird seine Masse zu $M_1 \gtrsim 20 M_\odot$ bestimmt. Der Winkel i zwischen der Blickrichtung auf das Doppelsternsystem und dem Lot auf die Bahnebene ist zunächst unbekannt. Mit dem Index 1 bezeichnen wir HDE226868, mit 2 den unsichtbaren Begleiter. Aus dem dritten Keplergesetz folgt für kreisförmige Umlaufbahnen mit der Radialgeschwindigkeit $v_1 = 75 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

$$\frac{v_1^3 T}{2 \pi \gamma} = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} \quad (3.7.16)$$

Der kleinste Wert für M_2 ergibt sich aus $i = 90^\circ$ (siehe Aufgaben), woraus

$$M_2 \gtrsim 5 M_\odot > M_{\text{LOV}} \quad (3.7.17)$$

folgt. Der Begleiter von HDE226868 muss also ein schwarzes Loch sein, da er für einen Neutronenstern zu schwer ist und ein normaler Stern dieser Masse sichtbar wäre.

3.8 Veränderliche Sterne

3.8.1 Bedeckungsveränderliche

Blickt man unter einem sehr kleinen Winkel auf die Bahnebene eines Doppelsternsystems mit den Komponenten A und B, dann schiebt sich während eines Umlaufs einmal B vor A und einmal A vor B. Dabei tritt jedesmal eine Schwächung der scheinbaren Helligkeit m des Doppelsterns ein. Aus der **Lichtkurve** (t - m -Diagramm) kann dann die Periode T , das Verhältnis der Flächenhelligkeiten und damit der Effektivtemperaturen und das Verhältnis der Sternradien zum Bahnradius ermittelt werden (siehe Aufgaben). Ist der Doppelstern nicht zu weit entfernt und gewinnt man so ein aussage-

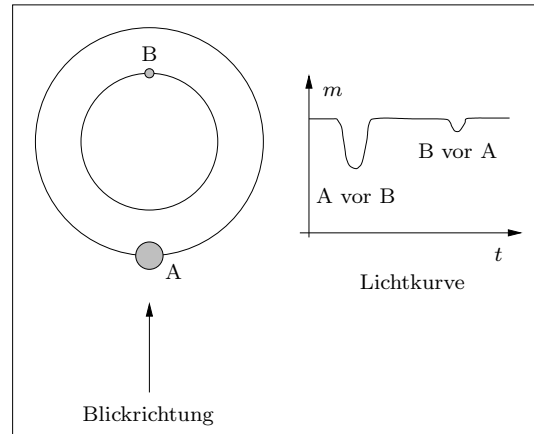


Abb.3.8.1 Doppelstern

kräftiges Spektrum, dann können mit der Dopplerverschiebung die Radialgeschwindigkeiten der beiden Komponenten gemessen werden. Da die Spektren der beiden Sterne etwas gegeneinander verschoben sind, können auch die Spektralklassen und damit die ungefähren Massen der Komponenten ermittelt werden. Mit Kepler 3 berechnet man dann die Bahnradien und die Sternradien. Es gibt zwar nur wenige Doppelsternsysteme, bei denen die Blickrichtung genau in der Bahnebene liegt, aber aus der genauen Vermessung einiger dieser Systeme können Rückschlüsse auf die Beziehungen zwischen Spektralklassen, Massen, Radien und Leuchtkräfte der Sterne gezogen werden.

3.8.2 δ -Cepheiden und Entfernungsmessung

Neben den Bedeckungsveränderlichen gibt es noch die **Pulsationsveränderlichen**, das sind Sterne, die ihren Radius und damit auch ihre effektive Temperatur und ihre Leuchtkraft periodisch verändern. Ursachen für diese Pulsationen sind Instabilitäten in den Lösungen der Grundgleichungen (3.2.12)-(3.2.16) für Sterne. Einen wesentlichen Beitrag zu den Pulsationen liefert der Absorptionskoeffizient $\kappa(T(r), p(r))$ in diesen Gleichungen, der regelt, wieviel Energie aus dem Strahlungsstrom in Schwingungsenergie verwandelt wird. Die wichtigsten Veränderlichen für die Entfernungsmessung im Weltall sind die **δ -Cepheiden**, benannt nach ihrem Prototyp, dem vierthellsten (δ) Stern im Sternbild Cepheus.

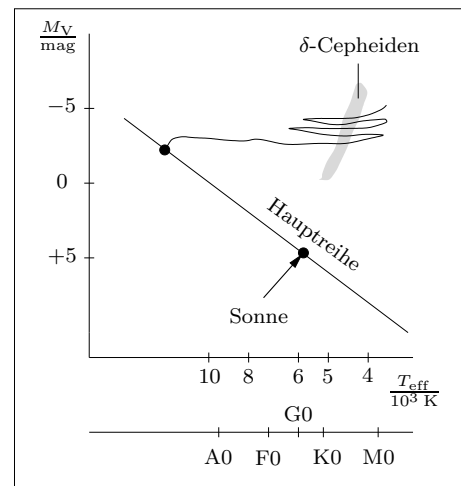


Abb.3.8.2 δ -Cepheiden im HRD

Die Spektrallinien eines Pulsationsveränderlichen pendeln mit der gleichen Periode wie die Leuchtkraft um einen Mittelwert. Damit ist über den Dopplereffekt die Geschwindigkeit $\Delta v(t)$ messbar, mit der sich die Sternoberfläche auf- und abbewegt. Der Mittelwert entspricht der Radialgeschwindigkeit, mit der sich der Stern relativ zur Erde bewegt. Die Integration über Δv ergibt dann die Radiusänderung ΔR des Sterns. Abb.3.8.3 zeigt die Lichtkurve $\Delta m(t)$ und die dazugehörigen Änderungen der Geschwindigkeit und des Radiuses bei einem δ -Cepheiden. Bemerkenswert ist, dass die maximale Helligkeit nicht gleichzeitig mit dem maximalen Radius auftritt, sondern vielmehr mit der maximalen Expansionsgeschwindigkeit einhergeht. Typische Maximalwerte von Δv liegen zwischen $10 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ und $20 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, die Radienänderungen betragen ungefähr

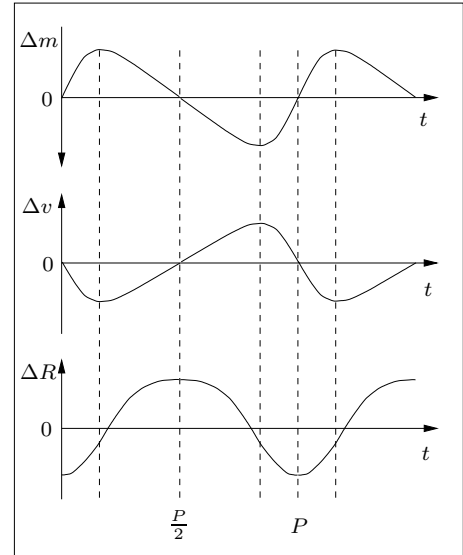


Abb.3.8.3 Lichtkurve von δ -Cepheiden

10% des mittleren Radiuses. Die Schwankungen der scheinbaren Helligkeit der Cepheiden liegen in der Größenordnung 1^m , die Perioden liegen zwischen 2 d und 50 d. Die Bedeutung der Cepheiden liegt in einer eindeutigen Beziehung zwischen absoluter Helligkeit und Periode. Durch die Untersuchung aller Cepheiden in der kleinen Magellanschen Wolke (SMC, small magellanic cloud), die also alle fast die gleiche Entfernung zur Erde haben, fand man eine logarithmische Beziehung zwischen der scheinbaren Helligkeit m_V und der Periode P :

$$m_V = \varrho' + \delta \lg \frac{P}{\text{d}} \quad (3.8.1)$$

Mit dem Entfernungsmodul (2.5.62) folgt dann für die absolute Helligkeit M_V

$$M_V = m_V - 5^m \lg \frac{r}{r_0} = \underbrace{\varrho' - 5^m \lg \frac{r}{r_0}}_{\varrho} + \delta \lg \frac{P}{\text{d}} \quad (3.8.2)$$

Der heute (1999) beste Wert für die entfernungsunabhängige Konstante δ ist $-2,81^m$, für den Wert von ϱ gibt es in der Literatur verschiedene Werte, abhängig von der angenommenen Entfernung r der SMC. Da die kosmische Entfernungsbestimmung (siehe später) noch mit großen Fehlern behaftet ist und es richtiggehend zwei Schulen gibt (SANDAGE und VAUCOULEURS), kommt es zu den unterschiedlichen Werten von ϱ . Seit 1997 gibt es aber direkte Entfernungsmessungen (trigonometrische Parallaxe) der nächsten Cepheiden (Solaris mit 130 pc und δ -Cep mit 300 pc, ...) mit dem Satelliten Hipparcos. Die Auswertung dieser Daten mit raffinierten statistischen Methoden (F. PONT, 1998, siehe [47]) liefert $\varrho = -1,43 \pm 0,16$. Damit lautet die **Perioden-Helligkeits-Beziehung** für δ -Cepheiden

$$\boxed{M_V = -1,43 - 2,81 \lg \frac{P}{\text{d}}} \quad (3.8.3)$$

4 Galaxien

4.1 Die Milchstraße

Die Sterne sind nicht gleichmäßig über das ganze All verteilt, sondern sie konzentrieren sich in **Galaxien** (Sternsystemen). Unsere Galaxis besteht aus ca. $4 \cdot 10^{11}$ Sternen, deren Masse ungefähr $1,75 \cdot 10^{11} M_{\odot}$ beträgt. Die Sterne der Galaxis konzentrieren sich auf eine dünne Scheibe mit verdicktem Kern. Der Kern ist ein riesiger Sternhaufen mit einigen $10^{10} M_{\odot}$, in dem die Abstände zwischen den Sternen sehr klein sind (einige Lichtwochen). Ganz im Zentrum der Galaxis wird ein riesiges schwarzes Loch mit $\approx 2,5 \cdot 10^6 M_{\odot}$ vermutet. Von oben gesehen ist die Scheibe in Spiralarme aufgeteilt. Die Scheibe ist von einem kugelsymmetrischen **Halo** umgeben,

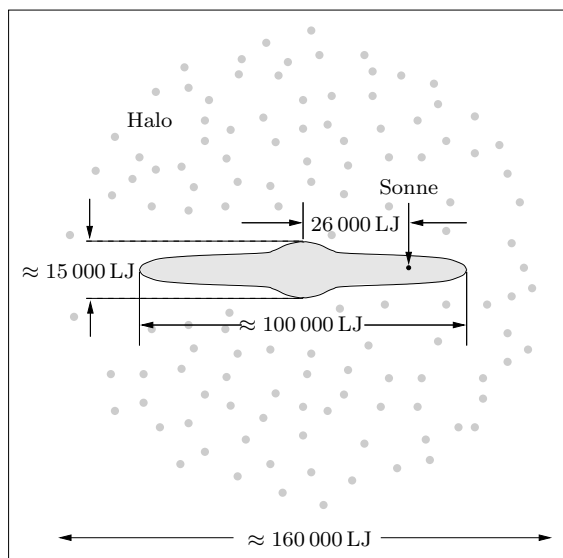


Abb.4.1.1 Sichtbarer Teil unserer Galaxis

der hauptsächlich aus Kugelhaufen besteht. Die Masse des sichtbaren Teils des Halos ist ca. $1 \cdot 10^{10} M_{\odot}$. Die Umlaufgeschwindigkeit unserer Sonne um das galaktische Zentrum ist

$$v_{\odot} \approx 220 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad (4.1.1)$$

Die Rotationsgeschwindigkeiten von kleinen Nachbargalaxien um die Milchstraße lassen darauf schließen, dass unsere Galaxis in eine kugelsymmetrische **Korona** aus **dunkler Materie** eingebettet ist, deren Masse $\approx 1 \cdot 10^{12} M_{\odot}$ beträgt. Die Untersuchung der **Rotationskurven** $v(r)$ anderer Galaxien ergibt das gleiche Phänomen, d.h. nur ca. ein Prozent der Masse des Universums ist sichtbar, der Rest ist dunkle Materie,

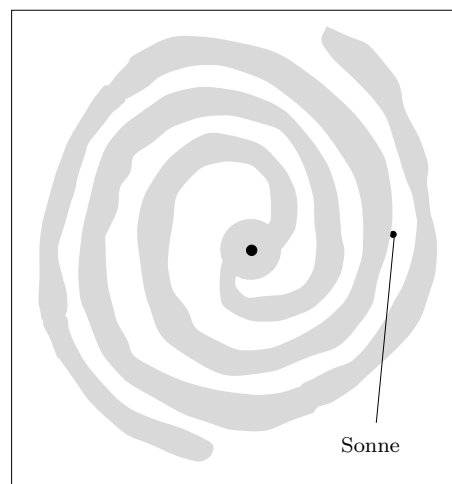


Abb.4.1.2 Spiralstruktur der Galaxis

deren Zusammensetzung noch nicht geklärt ist. Kandidaten für die dunkle Materie sind so „gewöhnliche“ Objekte wie braune Zwerge, schwarze Löcher oder Neutrinos bis hin zu noch nicht nachgewiesenen Teilchensorten (**Axionen**, **SUSY-Teilchen**), die von modernen Theorien der Elementarteilchen vorhergesagt werden. Nach den großen vereinheitlichten Theorien (**GUT**'s, grand unified theories) mit Supersymmetrie gibt es zu jedem bekannten Teilchen einen supersymmetrischen Partner, eben die SUSY-Teilchen. Diese Teilchen stehen nur über die Gravitation mit der gewöhnlichen Materie in Wechselwirkung, d.h. es könnten ganze „Schattenwelten“ existieren, ohne von uns bemerkt zu werden (jedenfalls nicht über die elektromagnetische Wechselwirkung).

Die dunkle Materie darf aber nicht mit der **interstellaren Materie** verwechselt werden, die in

unserer Galaxis eine Gesamtmasse von $\approx 10^{10} M_{\odot}$ aufweist. Die interstellare Materie besteht zu ca. einem Prozent aus festen Teilchen (Staub) und zum überwiegenden Teil aus Gasen (Atome, Moleküle, Elektronen, Protonen). Hochenergetische Teilchen der interstellaren Materie (bis zu 10^{19} eV) werden als **kosmische Strahlung** bezeichnet.

Der interstellare Staub erscheint in Form von **Dunkelwolken**, die das Licht der dahinterliegenden Sterne absorbieren oder auch in Form von **Reflexionsnebeln**, die das Licht naher Sterne reflektieren und das gleiche Spektrum wie diese Sterne aufweisen. Die Schwächung des Sternenlichtes durch den Staub muss bei der Entfernungsbestimmung mittels der spektroskopischen Parallaxe berücksichtigt werden. Der interstellare Staub verhindert auch einen direkten Blick auf das Zentrum der Galaxis. Informationen von dort erhält man aber im Radio- und im Infrarotbereich.

Entdeckt wurden interstellare Gase durch Absorptionslinien im Spektrum von Doppelsternen, die keine periodische Dopplerverschiebung mitmachen. Der Hauptteil der interstellaren Gase ist Wasserstoff, der entweder als neutraler Wasserstoff (H I-Regionen) oder als ionisierter Wasserstoff (Protonen und Elektronen, H II-Regionen) auftritt. Die H II-Regionen sind als schwach leuchtende Nebel (**Emissionsnebel**) sichtbar (Photonenerzeugung beim Einfang eines Elektrons von einem Proton). Die Emissionsnebel beziehen ihre Energie (Ionisation des Wasserstoffs) von nahen Sternen. Diese Ionisation ist aber nur mit energiereichen Photonen (ultraviolett) möglich, die wiederum nur von heißen Sternen ($T_{\text{eff}} \gtrsim 20\,000$ K) in genügender Zahl ausgestrahlt werden. Emissionsnebel findet man daher nur in der Umgebung von Sternen des Spektraltyps B1 oder früher. Eine besondere Form der Emissionsnebel sind die abgestoßenen Hüllen von Supernovausbrüchen.

Schwieriger ist der Nachweis des neutralen Wasserstoffs. Der Grundzustand des Wasserstoffatoms besteht aus zwei eng benachbarten Energieniveaus ($\Delta W = 6 \cdot 10^{-6}$ eV), die der parallelen bzw. der antiparallelen Einstellung des **Spins** von Elektron und Proton entsprechen. Der Spin ist eine Art Eigenrotation der Teilchen, die wegen der Teilchenladung kleine Kreisströme und damit ein Magnetfeld der Teilchen erzeugt. Die parallele Einstellung dieser kleinen Magnete ist energetisch etwas höher als die antiparallele Einstellung. Der Übergang dieser beiden benachbarten Energiezustände entspricht einer Strahlung der Wellenlänge

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta W} = 21 \text{ cm} \quad (4.1.2)$$

Diese 21 cm-Linie des neutralen Wasserstoffs kann mit Radioteleskopen empfangen werden. Die Untersuchung der räumlichen Verteilung der 21 cm-Strahlung hat viel zur Aufklärung der Struktur unserer Galaxis beigetragen.

4.2 Die kosmische Entfernungsskala

1. Die Astronomische Einheit

Die Entfernungen zu Planeten (Venus, Mars) werden über Laufzeitmessungen von Radarsignalen gemessen und daraus wird mittels Trigonometrie die AE bestimmt (große Genauigkeit).

2. Die trigonometrische Parallaxe

Die Entfernungen sonnennaher Sterne werden mit der trigonometrischen Parallaxe gemessen, was die Kenntnis der AE voraussetzt. Seit dem Einsatz des Satelliten Hipparcos wurde die Genauigkeit dieser Methode stark verbessert. Hipparcos misst auf $0,001''$ genau, was Entfernungsmessungen bis ca. 1500 LJ gestattet. Die Messfehler werden durch statistische Methoden verkleinert, wenn die Entfernung zu Sternhaufen (viele Einzelmessungen) be-

stimmt wird. Die geplante GAIA-Mission soll mit einer Genauigkeit von $0,00001''$ ca. eine Milliarde Sterne erfassen!!

3. Die spektroskopische Parallaxe

Mit der trigonometrischen Parallaxe wird die spektroskopische Parallaxe geeicht, die wiederum am besten bei Sternhaufen funktioniert: In ein HRD zeichnet man die absolute **und** die scheinbare Helligkeit aller Sterne des Haufens ein. Die Differenz $M_V - m_V$ ist dann genau messbar und mit dem Entfernungsmodul berechnet man die Entfernung. Funktioniert bis $\approx 300\,000$ LJ.

4. Perioden-Leuchtkraft-Beziehung bei δ -Cepheiden

Die direkte Vermessung der nächsten Cepheiden mit Hipparcos und die Beobachtung von Cepheiden in Sternhaufen bekannter Entfernung liefert die Perioden-Leuchtkraft-Beziehung. Mit dem HST können Cepheiden bis zu einer Entfernung von $\approx 10^8$ LJ beobachtet werden.

5. Galaktische Standardkerzen

Mit der Cepheidenmethode werden die Entfernungen zu den Galaxien in unserer Nachbarschaft gemessen und es wird nach Größen gesucht, die Funktionen dieser Entfernung sind. In Frage kommen die Leuchtkräfte bei Supernovaausbrüchen, die hellsten Riesensterne, die Ausdehnung der größten H II-Region und ein Zusammenhang zwischen der Rotationsgeschwindigkeit (Dopplereffekt der 21 cm-Linie) und der Gesamtleuchtkraft bei Spiralgalaxien (TULLY-FISHER-Relation). Sind solche Methoden mit Hilfe der Cepheiden geeicht, kann man damit die Entfernung von Galaxien jenseits der 10^8 LJ-Grenze ermitteln. Bei jeder Eichung einer Methode mit der Vorgängermethode werden allerdings die Fehler größer, die bei den entfernteren Galaxien durchaus bis zu 25 % betragen.

4.3 Die Expansion des Universums - Kosmologie

1929 entdeckte der amerikanische Astronom EDWIN P. HUBBLE, dass die Spektren der entfernteren Galaxien alle rotverschoben sind. Weiter untersuchte er den Zusammenhang zwischen der Entfernung D der Galaxien und der durch die Rotverschiebung gemessenen Radialgeschwindigkeit v_r und entdeckte dabei das nach ihm benannte Gesetz:

$$\boxed{v_r = H_0 \cdot D} \quad (4.3.1)$$

mit der **Hubble-Konstanten** H_0 . Bei Kenntnis der Hubblekonstanten hat man damit das ideale Werkzeug zur Entfernungsbestimmung von Galaxien, da die Rotverschiebung problemlos messbar ist. Der Haken liegt aber gerade im Wert von H_0 , zu dessen Bestimmung zunächst von vielen Galaxien die Entfernung nach herkömmlichen Methoden gemessen werden muss. Dabei dürfen die vermessenen Galaxien aber nicht zu nahe sein, da sonst die statistisch verteilten Eigenbewegungen (**Pekuliarbewegungen**) die Radialgeschwindigkeit überdecken. Es ist also nicht verwunderlich, dass der Wert von H_0 mit einem großen Fehler behaftet ist. Je nach Schule für die Entfernungsmessung liegt H_0 zwischen $50 \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}}$ (SANDAGE) und $100 \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}}$ (VAUCOULEURS). Nach neuesten Arbeiten, die schon die Hipparcosdaten berücksichtigen (J. NEVALAINEN, M. ROOS, 1998), gilt

$$\boxed{H_0 = (68 \pm 5) \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}}} \quad (4.3.2)$$

H_0 hat eigentlich die Dimension einer reziproken Zeit, aber die angegebene Einheit ist praktischer, da v_r meistens in $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ angegeben wird.

Ist λ die Wellenlänge der unverschobenen Spektrallinie und λ' die der rotverschobenen, dann

lautet die Dopplerformel für die **Rotverschiebung** z

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda'}{\lambda} - 1 = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1 \quad (4.3.3)$$

Daraus folgt für die Radialgeschwindigkeit v_r einer Galaxie, die auch ihre **Fluchtgeschwindigkeit** genannt wird

$$v_r = \beta c = c \cdot \frac{(1 + z)^2 - 1}{(1 + z)^2 + 1} \quad (4.3.4)$$

Wir werden sehen (Gleichung (4.3.24)), dass diese Formel noch revidiert werden muss, da die Hubblertotverschiebung **keine** reine Dopplerverschiebung ist. Für kleine Rotverschiebungen ($z \ll 1$) und damit auch kleine Fluchtgeschwindigkeiten ($\beta \ll 1$) gilt aber

$$\boxed{v_r = \beta c \approx z c} \quad (4.3.5)$$

Die große Bedeutung des Hubblegesetzes liegt nicht nur in einer praktischen Methode zur Entfernungsmessung von Galaxien, sondern in der Tatsache, dass sich alle entfernteren Galaxien von uns fortbewegen, und zwar um so schneller, je weiter sie entfernt sind. Dies bedeutet jedoch nicht, dass wir der Mittelpunkt des Weltalls sind, sondern dass sich das Universum als Ganzes ausdehnt. Da jeder Punkt des Universums aus Symmetriegründen gleichwertig ist (Relativitätsprinzip), kann es keine ausgezeichneten Punkte und besonders keine Randpunkte des Universums geben. Die Expansion stellt man sich so vor: Ist D die Entfernung zwischen den Galaxien A und B, dann gilt mit $R_0 = R(t_0)$

$$D(t) = \frac{R(t)}{R_0} \cdot D(t_0) = \varphi \cdot R(t) \quad (4.3.6)$$

mit dem **Skalenfaktor** $R(t)$ und einer von der Lage der beiden Galaxien abhängigen aber zeitlich konstanten Größe φ . (4.3.6) bedeutet, dass sich die Entfernungen zwischen allen Galaxien um den gleichen Faktor ändern. Verdoppelt sich z.B. die Entfernung zwischen zwei ausgewählten Galaxien in einem bestimmten Zeitraum, dann verdoppeln sich die Entfernungen von allen Galaxien im gleichen Zeitraum. Für die gegenseitige Fluchtgeschwindigkeit der beiden Galaxien A und B folgt aus (4.3.6)

$$v_r(t) = \dot{D}(t) = \varphi \cdot \dot{R}(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \cdot D(t) \quad (4.3.7)$$

(4.3.7) ist aber gerade das Hubblegesetz, wenn man

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \quad (4.3.8)$$

setzt. Die *Hubblekonstante* ist also zeitabhängig und unser oben angegebenes H_0 ist dann $H(t_0)$, wenn t_0 den gegenwärtigen Zeitpunkt bezeichnet. Untersuchungen der räumlichen Lage der Galaxien zeigen, dass sich die Sternsysteme zu Galaxienhaufen und diese wiederum zu Superhaufen anordnen. Die Haufen und Superhaufen bilden auch eine girlandenartige Struktur, d.h. längs fadenartiger Linien sind viele Galaxien angeordnet und dazwischen gibt es Räume mit wenigen Systemen. Im ganz Großen (ab ≈ 100 Mpc) aber ist die Verteilung der Galaxien homogen und isotrop, d.h. in jeder Entfernung und in jede Richtung finden wir im Mittel gleich viele Galaxien. Mit der Annahme eines homogen aufgebauten Universums folgen aus den Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation zwei relativ einfache Differentialgleichungen für $R(t)$, die **Einstein-Friedmann-Gleichungen** (1922):

$$H(t)^2 = \frac{\dot{R}(t)^2}{R(t)^2} = \frac{8\pi\gamma}{3} \cdot \varrho - \frac{k c^2}{R(t)^2} \quad \text{mit } k \in \{-1, 0, 1\} \quad (4.3.9)$$

$$\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} = -\frac{4\pi\gamma}{3} \cdot \varrho \quad (4.3.10)$$

Die Einstein-Friedmann-Gleichungen sind die Grundgleichungen der **Kosmologie**, wie man die Theorie von der Entwicklung des ganzen Universums nennt. Welcher der möglichen Werte für k in (4.3.9) gewählt werden muss, hängt von der mittleren Dichte ϱ des Universums ab. Mit der **kritischen Dichte**

$$\varrho_{c,0} = \frac{3 H_0^2}{8 \pi \gamma} \approx 8,7 \cdot 10^{-30} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \quad (4.3.11)$$

und $\varrho_0 = \varrho(t_0)$ folgt aus (4.3.9)

$$k = -1 \quad \text{für} \quad \varrho < \varrho_{c,0} \quad (4.3.12)$$

$$k = 0 \quad \text{für} \quad \varrho = \varrho_{c,0} \quad (4.3.13)$$

$$k = +1 \quad \text{für} \quad \varrho > \varrho_{c,0} \quad (4.3.14)$$

Mit dem **Massenparameter**

$$\Omega_0 = \frac{\varrho_0}{\varrho_{c,0}} \quad (4.3.15)$$

gibt es drei Klassen von Lösungen der Einstein-Friedmann-Gleichungen, die in Abb.4.3.1 dargestellt sind. Für $\Omega_0 \leq 1$ dehnt sich das Weltall immer weiter aus und für $\Omega_0 > 1$ gibt es eine maximale Ausdehnung mit einer nachfolgenden Kontraktion. Allen drei Lösungen gemeinsam ist eine unendlich große Dichte bei $t = 0$, die **Anfangssingularität** oder der **Urknall** (Big Bang). Wegen der durch die Gravitation bedingten Abbremsung sind die Grafen von $R(t)$ nach rechts gekrümmt, d.h. $\ddot{R}(t) < 0$ oder $\dot{R}(t)$ ist monoton fallend. Das tatsächliche Alter t_0 des Universums ist also kleiner als die **Hubblezeit**

$$t_H = \frac{1}{H_0} \approx 14 \cdot 10^9 \text{ a} \quad (4.3.16)$$

Die Hubblezeit wäre das Alter des Universums, wenn $\dot{R}(t)$ konstant wäre, denn aus (4.3.1) folgt dann

$$t = \frac{D}{v_r} = \frac{1}{H_0} \quad (4.3.17)$$

Für das wahre Weltalter t_0 gilt

$$t_0 < \frac{2}{3} t_H \quad \text{für} \quad \Omega_0 > 1 \quad (4.3.18)$$

$$t_0 = \frac{2}{3} t_H \quad \text{für} \quad \Omega_0 = 1 \quad (4.3.19)$$

$$\frac{2}{3} t_H < t_0 < t_H \quad \text{für} \quad \Omega_0 < 1 \quad (4.3.20)$$

Den drei verschiedenen Lösungen der Einstein-Friedmann-Gleichungen entsprechen drei verschiedenen Geometrien unseres dreidimensionalen Raumes:

- $\Omega_0 > 1 \implies$ geschlossener Raum mit endlichem Volumen (positive Krümmung)
- $\Omega_0 = 1 \implies$ euklidischer Raum mit unendlichem Volumen (Krümmung ist null)
- $\Omega_0 < 1 \implies$ offener Raum mit unendlichem Volumen (negative Krümmung)

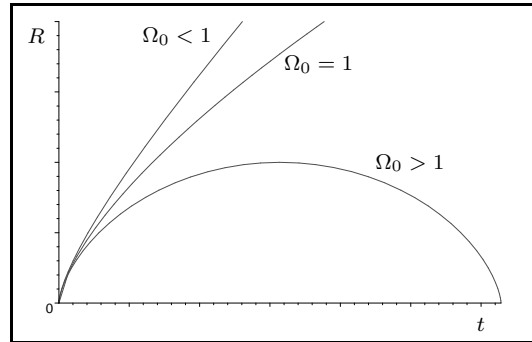


Abb.4.3.1 $R(t)$

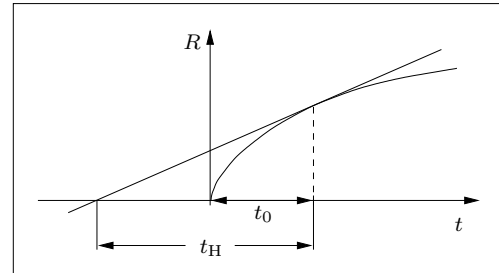


Abb.4.3.2 Alter des Universums

Rein rechnerisch sind diese gekrümmten dreidimensionalen Räume leicht zu behandeln, wenn man sich den dazu nötigen Formalismus (Differentialgeometrie, Tensorrechnung) einmal angeeignet hat. Die anschauliche Vorstellung dieser Räume aber ist für den menschlichen Verstand, der von einem dreidimensionalen euklidischen Raum geprägt ist, eine harte Nuss: Wie soll z.B. ein dreidimensionaler Raum mit endlichem Volumen aber ohne Grenzflächen aussehen?

Hier hilft nur die Verminderung um eine Dimension, d.h. wir versetzen uns in die Vorstellungswelt von „Flachländern“, die in einer zweidimensionalen Welt leben. Auch die Flachländer haben festgestellt, dass sich ihr Universum ausdehnt und sie stehen vor der Frage, wie ein endlicher zweidimensionaler Raum ohne Grenzlinie aussehen soll, in dem jeder Punkt gleichwertig ist. Mit unserem dreidimensionalen Vorstellungsvermögen ist die Beantwortung dieser Frage einfach: Das Flachländeruniversum ist die Oberfläche einer Kugel mit wachsendem Radius $R(t)$. Der zweidimensionale Flachländerraum ist also in die dritte Dimension gekrümmt. Genau so müssen wir uns vorstellen, dass unser

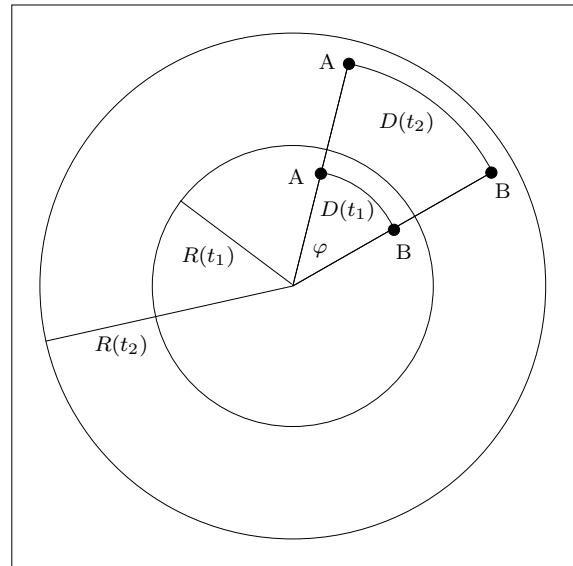


Abb.4.3.3 Flachländeruniversum

dreidimensionaler Raum gekrümmt ist. $R(t)$ ist im Fall $\Omega_0 > 1$ der Radius einer vierdimensionalen Kugel, deren „Oberfläche“ unser dreidimensionales aber gekrümmtes Universum ist. Die Krümmung des Raumes durch die Anwesenheit von Massen ist übrigens der zentrale Inhalt von Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie. In Abb.4.3.3 sind zwei Galaxien A und B zu verschiedenen Zeiten t_1 und t_2 zu sehen. Das sich ausdehnende Flachländeruniversum kann man sich wie einen Luftballon mit aufgemalten Galaxien vorstellen, der aufgeblasen wird. Die Konstante φ in (4.3.6) ist dann einfach der in Abb.4.3.3 eingezeichnete Winkel φ .

Die Vorstellung eines Raumes mit negativer Krümmung ist noch schwieriger als die eines Raumes mit positiver Krümmung. Hier ist schon das zweidimensionale Analogon, eine Fläche die der Oberfläche eines Sattels gleicht, nicht mehr leicht zu verstehen. Eine Hilfe ist es, sich die Gitterlinien eines Koordinatensystems vorzustellen, die als die Wege von Lichtstrahlen definiert sind: Im geschlossenen Universum mit positiver Krümmung gibt es keine Parallelen, d.h. zwei parallel abgeschickte Lichtstrahlen schneiden sich in weiter Ferne. Im offenen Universum mit negativer Krümmung dagegen laufen parallel abgeschickte Lichtsignale immer weiter auseinander. Den Grenzfall des **flachen Raumes** (euklidischen Raumes) mit $\Omega_0 = 1$ und verschwindender Krümmung kann man sich als normalen dreidimensionalen Raum vorstellen, bei dem allerdings die drei Achsen mit dem Faktor $\frac{R(t)}{R_0}$ laufend gestreckt werden.

Am 4. Oktober 1998 wurde in Washington eine große Konferenz zum Thema *Cosmology Solved?* (*Sind die Rätsel der Kosmologie gelöst?*) abgehalten. Einem ausgezeichneten Überblicksartikel zu diesem Thema von MICHAEL S. TURNER (siehe [46], [45]) zufolge gibt es viele Hinweise dafür, dass exakt $\Omega_0 = 1$ gilt. In diesem Fall lautet die Lösung der Einstein-Friedmann-Gleichungen

$$\frac{R(t)}{R_0} = \left(\frac{3 H_0 t}{2} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.3.21)$$

und die Gesamtenergie des Universums (Summe aller Teilchenenergien plus Gravitationsenergie) ist exakt null. Die exakte Formel für die Rotverschiebung einer Galaxie in der Entfernung D

lautet nach der allgemeinen Relativitätstheorie für $\Omega_0 = 1$ (siehe [33, S. 485] oder [42, S. 359])

$$\boxed{D = \frac{2c}{H_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right) = 3ct_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)} \quad (4.3.22)$$

Wegen (4.3.7) und (4.3.8) gilt das Hubble-Gesetz (4.3.1) auch allgemein relativistisch in der Form

$$\boxed{\dot{D}(t_0) = H_0 \cdot D(t_0)} \quad (4.3.23)$$

Damit lautet die richtige Form von (4.3.4) für $\Omega_0 = 1$

$$\boxed{v_r = \dot{D}(t_0) = 2c \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)} \quad (4.3.24)$$

(4.3.4) ist deshalb nicht korrekt, weil der Beitrag der Ausdehnung des Weltalls zur Rotverschiebung nicht berücksichtigt wurde. Außerdem ist die Radialgeschwindigkeit $\dot{D}(t_1)$ während des Aussendens viel kleiner als die Radialgeschwindigkeit $\dot{D}(t_0)$ während des Empfangs. Bemerkenswert an (4.3.24) ist, dass v_r größer als c werden kann. Das ist aber kein Widerspruch zur speziellen Relativitätstheorie, weil es sich beim ausdehnenden Universum um kein Inertialsystem handelt. Wenn die Rotverschiebung z gegen Unendlich geht, wird die Photonenenergie null, d.h. die Strahlung ist nicht mehr wahrnehmbar. Die weiteste Entfernung, aus der wir Informationen erhalten können, ist demnach für $\Omega_0 = 1$

$$\boxed{d_H = \lim_{z \rightarrow \infty} D = \frac{2c}{H_0} = 3ct_0 \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ LJ}} \quad (4.3.25)$$

Eine Kugelschale um den Beobachter mit dem Radius d_H nennt man den **Teilchenhorizont**. Im Fall des flachen, unendlich ausgedehnten Universums ist also d_H der Radius des sichtbaren Bereichs des Universums. Im flachen Universum ist zwar die Gesamtenergie null, aber wegen der nichtverschwindenden Dichte $\rho_0 = \rho_{c,0}$ ist die gesamte Ruhmasse des Universums unendlich.

Für ein geschlossenes Universum ($\Omega_0 > 1$) lautet die Lösung der Einstein-Friedmann-Gleichungen in Parameterform:

$$R = \frac{R_0 \Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)} \cdot (1 - \cos \eta) \quad (4.3.26)$$

$$t = \frac{\Omega_0}{2H_0(\Omega_0 - 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot (\eta - \sin \eta) \quad (4.3.27)$$

Dabei gilt

$$R_0 = \frac{c}{H_0} \sqrt{\frac{1}{\Omega_0 - 1}} \quad (4.3.28)$$

Die durch die Parametergleichungen (4.3.26) und (4.3.27) beschriebene Funktion $R(t)$ ist eine Zykloide (siehe Abb.4.3.1) mit

$$R_{\max} = R_0 \cdot \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} \quad \text{und} \quad t_{\max} = t(R_{\max}) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R_{\max}}{c} \quad (4.3.29)$$

Das geschlossene Universum kollabiert zur Zeit

$$t_{\text{koll}} = 2t_{\max} \quad (\eta_{\max} = 2\pi) \quad (4.3.30)$$

im **Schlussknall** (Big Crunch). Das heutige Weltalter im geschlossenen Universum ist

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \left(\frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)^{\frac{3}{2}}} \arccos \left(\frac{2}{\Omega_0} - 1 \right) - \frac{1}{\Omega_0 - 1} \right) \quad (4.3.31)$$

4 Galaxien

Der Durchmesser des geschlossenen Universums ist

$$d(t) = 2\pi R(t) \quad (4.3.32)$$

In Abb.4.3.4 ist wieder das Flachländeruniversum dargestellt. B markiert den Standort des Beobachters und der Umfang eines Großkreises entspricht $d(t)$. Für den Teilchenhorizont im geschlossenen

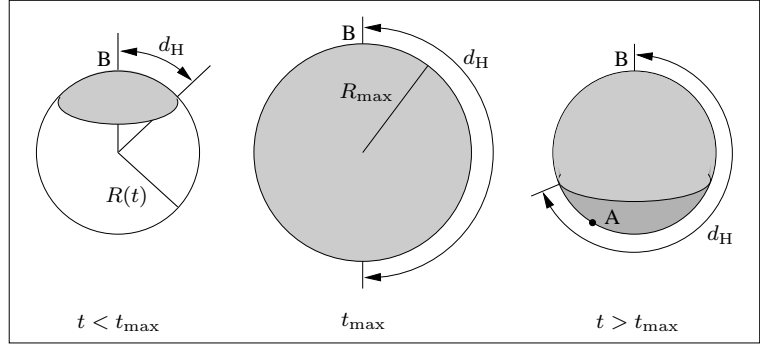


Abb.4.3.4 Teilchenhorizont im geschlossenen Universum

Universum gilt mit dem Parameter η aus (4.3.27)

$$d_H(t) = d(t) \cdot \frac{\eta}{2\pi} = R(t) \cdot \eta \quad (4.3.33)$$

In der Expansionsphase des Universums ($t < t_{\max}$) sieht man nur einen Bruchteil des Alls, im Umkehrpunkt ($t = t_{\max}$) sieht man das ganze Universum bis zu den „Antipoden“. In der Kontraktionsphase ($t > t_{\max}$) sind Teile des Universums in entgegengesetzten Richtungen sichtbar, allerdings in verschiedenen Entwicklungszuständen. Man könnte meinen, dass der Beobachter im geschlossenen Universum Licht sieht, das von ihm selbst ausgegangen ist. Das ist aber nur möglich, wenn der Teilchenhorizont d_H größer oder gleich dem Durchmesser $d(t)$ des Universums ist. Das ist wegen (4.3.33) nur für $\eta = 2\pi$, d.h. während des Schlussknalls möglich.

Licht, das mit der Rotverschiebung z empfangen wird, wurde im geschlossenen Universum zur Zeit

$$t_E = \frac{1}{H_0} \left(\frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)^{\frac{3}{2}}} \arccos \left(\frac{2 - \Omega_0(1 - z)}{\Omega_0(1 + z)} \right) - \frac{\sqrt{1 + \Omega_0 z}}{(\Omega_0 - 1)(1 + z)} \right) \quad (4.3.34)$$

in der Entfernung

$$D(z) = \underbrace{\frac{c}{H_0 \sqrt{\Omega_0 - 1}}}_{R_0} \left(\arccos \left(\frac{2(\Omega_0 - 1)}{\Omega_0(1 + z)} - 1 \right) - \arccos \left(\frac{\Omega_0 - 2}{\Omega_0} \right) \right) \quad (4.3.35)$$

ausgesandt, d.h. wir blicken um so weiter in die Vergangenheit, je größer z ist. Licht mit $z \rightarrow \infty$ (eigentlich nicht sichtbar, da $\lambda \rightarrow \infty$) stammt vom Teilchenhorizont und wurde zur Zeit null, also während des Urknalls, ausgesandt.

Das Volumen des geschlossenen Universums ist

$$V(t) = 2\pi^2 R(t)^3 \quad (4.3.36)$$

Mit (4.3.26), (4.3.11) und (4.3.15) folgt für die Gesamtmasse des Alls

$$M = \Omega_0 \varrho_{c,0} \cdot 2\pi^2 R(t_0)^3 = \frac{3\pi \Omega_0 c^3}{4\gamma H_0 (\Omega_0 - 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.3.37)$$

Tab.4.3.1 entnimmt man, dass das maximale Alter eines geschlossenen Universums für $H_0 = 60 \frac{\text{km}}{\text{s}\cdot\text{Mpc}}$ bei $t_0 \approx 11 \cdot 10^9 \text{ a}$ liegt, für $H_0 = 75 \frac{\text{km}}{\text{s}\cdot\text{Mpc}}$ gilt $t_0 \approx 8,7 \cdot 10^9 \text{ a}$. Aus dem Alter von Kugelhaufen folgt für das Universum ein Alter zwischen $9,6 \cdot 10^9 \text{ a}$ und $15 \cdot 10^9 \text{ a}$ (siehe [44]), was mit dem kosmologischen Alter noch zusammenpasst. Genauere Messwerte werden hier in Zukunft Klarheit bringen. Sollte sich heraus-

| Ω_0 | 1,00 | 1,01 | 2,00 |
|------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| t_0 | $10,87 \cdot 10^9 \text{ a}$ | $10,76 \cdot 10^9 \text{ a}$ | $9,31 \cdot 10^9 \text{ a}$ |
| t_{\max} | ∞ | $2,59 \cdot 10^{14} \text{ a}$ | $51,23 \cdot 10^9 \text{ a}$ |
| R_0 | nicht def. | $1,63 \cdot 10^{11} \text{ LJ}$ | $1,63 \cdot 10^{10} \text{ LJ}$ |
| R_{\max} | ∞ | $1,65 \cdot 10^{13} \text{ LJ}$ | $3,26 \cdot 10^{10} \text{ LJ}$ |
| $d(t_0)$ | ∞ | $1,02 \cdot 10^{12} \text{ LJ}$ | $1,02 \cdot 10^{11} \text{ LJ}$ |
| d_{\max} | ∞ | $1,03 \cdot 10^{14} \text{ LJ}$ | $2,05 \cdot 10^{11} \text{ LJ}$ |
| $d_H(t_0)$ | $3,26 \cdot 10^{10} \text{ LJ}$ | $3,25 \cdot 10^{10} \text{ LJ}$ | $2,56 \cdot 10^{10} \text{ LJ}$ |
| M | ∞ | $4,94 \cdot 10^{56} \text{ kg}$ | $9,79 \cdot 10^{53} \text{ kg}$ |

Tab.4.3.1 Daten möglicher Universen für $H_0 = 60 \frac{\text{km}}{\text{s}\cdot\text{Mpc}}$

stellen, dass das heutige Weltalter größer als $11 \cdot 10^9$ a ist, dann ist entweder das Universum offen oder unsere einfachen kosmologischen Modelle müssen modifiziert werden: Durch Einführung eines weiteren Terms in den Einstein-Friedmann-Gleichungen, der die sogenannte **kosmologische Konstante** Λ enthält (wir haben bisher der Einfachheit halber $\Lambda = 0$ gesetzt) ergeben sich Weltmodelle, die auch bei $\Omega_0 < 1$ geschlossene Universen mit größerem t_0 ermöglichen. Genaueres siehe z.B. in [42], [43] und [48].

4.4 Der Aufbau des Universums

Die **Andromeda-Galaxie** (M31 oder NGC224) ist das unserer Milchstraße am nächsten stehende größere Sternsystem ($\approx 1 \cdot 10^{11} M_\odot$). Mit einigen kleineren Galaxien bilden die Milchstraße und M31 ein gravitativ gebundenes System, die **lokale Gruppe**. Aus den Umlaufgeschwindigkeiten der Zwerggalaxien um die beiden großen Sternsysteme können die Massen der Milchstraße und von M31 berechnet werden. Insgesamt gehören mehr als 25 kleinere Sternsysteme zur lokalen Gruppe. Der nächste größere Galaxienhaufen ist der rund 70 MLJ entfernte Virgohaufen, der ca.

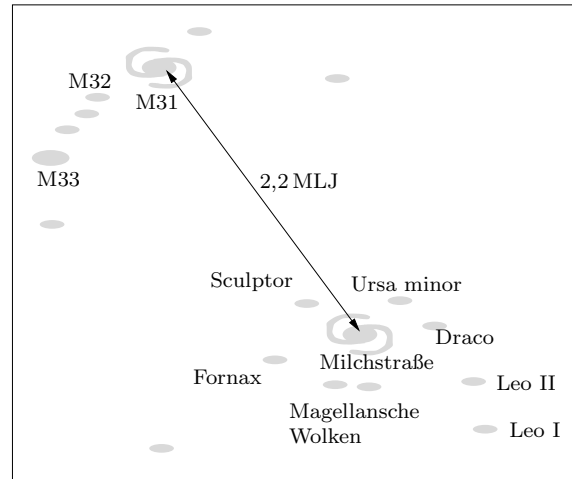


Abb.4.4.1 Schema der lokalen Gruppe

2500 Galaxien enthält. Die Galaxienhaufen in einem kugelförmigen Gebiet um den Virgohaufen mit einem Radius von ungefähr 80 MLJ bilden den Virgo-Superhaufen. Die Haufen und Superhaufen bilden eine netzartige Struktur, die von fast galaxienfreien Blasen durchsetzt ist. Damit sind wir bei den größten Strukturen des Universums angelangt.

Die Gesamtzahl der Galaxien im sichtbaren Universum, also innerhalb des Teilchenhorizonts, ist $\approx 10^{11}$, der Beitrag der hellen Sterne zur Masse des sichtbaren Universums ist dann $\approx 10^{22} M_\odot \approx 10^{52}$ kg, die Gesamtmasse des beobachtbaren Weltalls liegt bei ungefähr 10^{54} kg. Nach TURNER (siehe [46]) ist die Hauptmasse im Universum die Masse der virtuellen Teilchen (Vakuumfluktuationen) mit ungefähr 60%. Die Reliktteilchen, Überbleibsel des Urknalls, die nur gravitativ mit der normalen Materie wechselwirken, machen weitere 35% aus. Da die Hauptmasse der „normalen Materie“ aus **Baryonen** besteht (siehe nächstes Kapitel), fasst man die uns vertraute Materie unter dem Sammelbe-

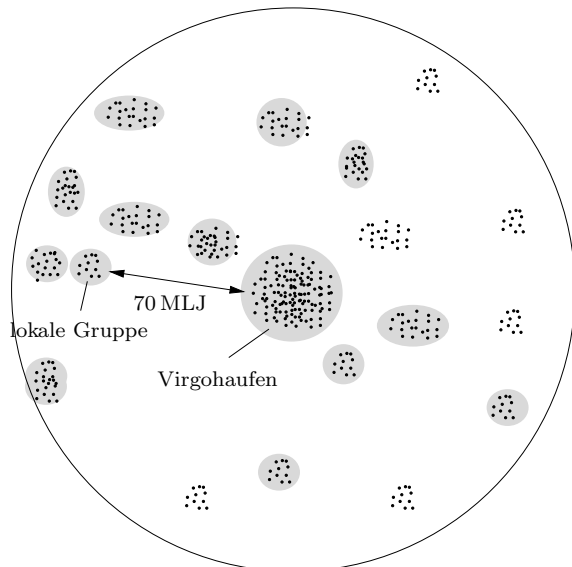


Abb.4.4.2 Der Virgo-Superhaufen

griff „baryonische Materie“ zusammen. Für den Dichteparameter gilt nach TURNER $\Omega_0 = 1 \pm 0,2$.

| | | | | |
|------------------------------|---|--------------------|------------------------|-------------------------|
| Materie 40 % | | | Reliktteilchen 35 % | Vakuumentnergie 60 % |
| Baryonen 5 % | | | | |
| sichtbare Sterne 0,5 % | schwarze Löcher braune Zwerge 4,2 % | Neutrinos 0,3 % | | |
| Dunkle Materie 99,5 % | | | | |

Tab.4.4.1 Massenverteilung im Universum

Die leuchtkräftigsten Objekte im Weltall sind die **Quasare** (Quasistellar Objects). Quasare erscheinen im Fernrohr als punktförmige Quellen wie Sterne, ihre absolute Leuchtkraft liegt im Bereich $10^{12}L_{\odot} \dots 10^{15}L_{\odot}$. Quasare werden nur mit großen Rotverschiebungen beobachtet, d.h. es sind Objekte des noch jungen Universums. Die gängigste Theorie der Quasare besagt, dass es sich dabei um riesige schwarze Löcher (bis zu $10^{10}M_{\odot}$) in Zentrum junger Galaxien handelt. Die Energiequelle der Quasare ist die freiwerdende Gravitationsenergie der in das schwarze Loch fallenden Materie. Das Licht eines fernen Quasars muss durch viele Galaxienhaufen eilen, um uns zu erreichen. In den Absorptionslinien des Quasarlichts steckt somit Information über alle diese Galaxien und Protogalaxien (viele Lyman- α -Linien mit verschiedenen Rotverschiebungen, *Lyman-Wald*, siehe [19]). Große Massenansammlungen (Galaxienhaufen) lenken das vorbeigehende Licht etwas ab, wobei ein Linseneffekt entsteht (**Gravitationslinsen**). So können mehrere Einzelbilder eines Quasars oder im Idealfall ein Quasar als Ring (**Einstein-Ring**) beobachtet werden. Die Lyman-Wälder der Bilder eines Quasars können etwas verschieden sein, woraus man auf die Ausdehnung der durchstrahlten Galaxien und Wasserstoffwolken schließen kann.

4.5 Das Standardmodell der Elementarteilchen

Die Fülle von bekannten „Elementarteilchen“ versuchte man in den Sechzigerjahren durch folgende Klassifikation in den Griff zu bekommen:

| | Von der starken WW beeinflusst (Hadronen) | Nicht von der starken WW beeinflusst |
|---|--|---|
| Fermionen (halbzahliger Spin) | Baryonen ($p, n, \Lambda, \Sigma, \dots$) | Leptonen ($e^-, \mu^-, \tau^-, \nu, \dots$) |
| Bosonen (ganzzahliger Spin) | Mesonen (π, K, μ, \dots) | Photon, Graviton W^+, W^-, Z^0 |

Tab.4.5.1 Klassifikation der Elementarteilchen

Die meisten dieser Teilchen sind aber nicht wirklich elementar, sondern aus anderen Teilchen zusammengesetzt. Nach heutiger Sicht gibt es zwei elementare Teilchenfamilien, die **Quarks** und die **Leptonen** und zusätzlich noch die **Austauschteilchen** der Wechselwirkungen zwischen diesen Teilchen. Die Eigenschaften dieser Teilchen des **Standardmodells der Elementarteilchen** findet man in den Tabellen Tab.4.5.2 und Tab.4.5.4, die dem ausgezeichneten Buch von YUVAL NE'EMAN und YORAM KIRSH entnommen sind (siehe [6]).

| | elektrische Ladung in e | Generation | | |
|-----------------|---------------------------|--|--|---|
| | | 1 | 2 | 3 |
| Quarks | $\frac{2}{3}$ | u Up $W_0 = 5 \text{ MeV}$ | c Charm $W_0 = 1500 \text{ MeV}$ | t Top $W_0 = 174000 \text{ MeV}$ |
| | $-\frac{1}{3}$ | d Down $W_0 = 10 \text{ MeV}$ | s Strange $W_0 = 200 \text{ MeV}$ | b Bottom $W_0 = 4700 \text{ MeV}$ |
| Leptonen | 0 | ν_e Elektronneutrino $W_0 \approx 0$ | ν_μ Myonneutrino $W_0 \approx 0$ | ν_τ Tauneutrino $W_0 \approx 0$ |
| | -1 | e^- Elektron $W_0 = 0,511 \text{ MeV}$ | μ^- Myon $W_0 = 105 \text{ MeV}$ | τ^- Tauon $W_0 = 1777 \text{ MeV}$ |

Tab.4.5.2 Die Elementarteilchen des Standardmodells. Zu jedem der aufgeführten Teilchen gibt es noch das Antiteilchen mit entgegengesetzter Ladung. Zudem erscheint jedes Quark in drei verschiedenen „Farben“.

Nach dem Standardmodell bestehen die Baryonen aus drei Quarks, die Anitbaryonen aus drei Antiquarks und Mesonen aus einem Quark-Antiquark-Paar (siehe Tab.4.5.3).

| Baryonen | | Mesonen | |
|-------------------|---|--------------------|----------------------------|
| Teilchen | Antiteilchen | Teilchen | Antiteilchen |
| $p = uud$ | $\bar{p} = \bar{u}\bar{u}\bar{d}$ | $\pi^+ = u\bar{d}$ | $\pi^- = d\bar{u}$ |
| $n = udd$ | $\bar{n} = \bar{u}\bar{d}\bar{d}$ | $\pi^0 = u\bar{u}$ | $\pi^0 = u\bar{u} = \pi^0$ |
| $\Lambda^0 = uds$ | $\bar{\Lambda}^0 = \bar{u}\bar{d}\bar{s}$ | $B^0 = b\bar{d}$ | $\bar{B}^0 = d\bar{b}$ |
| $\Omega^- = sss$ | $\bar{\Omega}^+ = \bar{s}\bar{s}\bar{s}$ | $B^+ = u\bar{b}$ | $B^- = b\bar{u}$ |

Tab.4.5.3 Beispiele für den Aufbau von Teilchen aus Quarks

| Eigenschaften der Austauscheteilchen | | | | | |
|--------------------------------------|------------|--------|--------|------|--------------------------------|
| Wechselwirkung | Teilchen | W_0 | Ladung | Spin | Lebensdauer |
| stark | 8 Gluonen | 0 | 0 | 1 | stabil |
| elektromagnetisch | Photon | 0 | 0 | 1 | stabil |
| schwach | W^+, W^- | 80 GeV | +1, -1 | 1 | $1,5 \cdot 10^{-25} \text{ s}$ |
| | Z^0 | 91 GeV | 0 | 1 | $1,3 \cdot 10^{-25} \text{ s}$ |
| Gravitation | Graviton | 0 | 0 | 2 | stabil |

Tab.4.5.4 Die Austauscheteilchen der fundamentalen Wechselwirkungen

Der grundlegende physikalische Formalismus zur Beschreibung der Teilchen ist die **Quantenfeldtheorie** (QFT), eine speziell-relativistische Verallgemeinerung der Quantenmechanik. In der klassischen Physik entsprechen der QFT die Newton'schen Gesetze. Wie die Newton'sche Gravitationstheorie eine spezielle Wechselwirkung im Rahmen der Newton'schen Mechanik beschreibt, gibt es Beschreibungen der fundamentalen Wechselwirkungen im Rahmen der QFT:

| Wechselwirkung | Theorie | | | |
|----------------|-----------------------------------|---|------------|------------|
| elektrisch | QED: Quantenelektrodynamik | Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung | GUT | TOE |
| schwach | | | | |
| stark | QCD: Quantenchromodynamik | | | |
| Gravitation | Quantengravitation | | | |

Tab.4.5.5 Die Theorien der fundamentalen Wechselwirkungen

Das Kapitel **Quantengravitation** ist im Rahmen der QFT leider noch nicht geschrieben. Die bisher beste Beschreibung der Gravitation liefert Einsteins allgemeine Relativitätstheorie. Ein guter Kandidat für die Quantengravitation und eine Vereinheitlichung aller vier Wechselwirkungen (**TOE: Theory Of Everything**) ist die Theorie der **Superstrings**, die Teilchen als schwingende Saiten in mehrdimensionalen Räumen behandelt. Eine weitere Theorie, an der fieberhaft gearbeitet wird, ist die Vereinheitlichung der elektroschwachen und der starken Kraft (**GUT: Grand Unified Theory**).

4.6 Entwicklung des Universums

Die wichtigsten Daten der Geschichte unseres Universums findet man in Tabelle 4.6.1.

Die wichtigsten experimentellen Bestätigungen der Urknallhypothese sind:

- Die Rotverschiebung des Lichtes ferner Galaxien.
- Das 3:1-Verhältnis von Wasserstoff zu Helium im Universum (siehe Tab. 4.6.1). Eine genaue Beschreibung der Nukleosynthese findet sich in [21].
- Die **kosmische Hintergrundstrahlung** (CBR, **Cosmic Background Radiation**), die 1964 von ROBERT WILSON und ARNO PENZIAS (Nobelpreis 1978) entdeckt wurde und ein Relikt des Urknalls ist (siehe Tab. 4.6.1).

Die Hintergrundstrahlung besteht aus energiearmen Photonen, deren Energieverteilung die Gleiche ist wie die der Wärmestrahlung eines schwarzen Körpers mit der Temperatur $T = 2,735 \text{ K}$. 1989 wurde das Spektrum und die Richtungsabhängigkeit der Hintergrundstrahlung mit dem COBE-Satelliten (**COsmic-Background-Explorer**) genau vermessen. Die Hintergrundstrahlung zeigt ein Abbild des Universums zur Zeit des Entkoppelns von Strahlung und Materie. Bei einer Temperatur von $\approx 3500 \text{ K}$ sind noch ungefähr 10% der H-Atome ionisiert. Das Alter des Universums mit der Temperatur 3500 K sei T_E . Die für alle kosmologischen Modelle gültige Rotverschiebungsformel lautet (die Wellen dehnen sich wie das Universum)

$$\frac{R(t_0)}{R(t_E)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_E} = \frac{\lambda_0 - \lambda_E}{\lambda_E} + 1 = z + 1 \quad (4.6.1)$$

Der Einfachheit halber rechnen wir mit $\Omega_0 = 1$, d.h. aus (4.3.21) folgt

$$\frac{R(t_0)}{R(t_E)} = \left(\frac{t_0}{t_E}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 + z \quad (4.6.2)$$

Aus dem Wien'schen Verschiebungsgesetz folgt, wenn λ_0 und λ_E die Wellenlängen maximaler Intensität sind und T Temperaturen bezeichnet

$$\frac{T_E}{T_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_E} = 1 + z = \left(\frac{t_0}{t_E}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3 H_0 t_E}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.6.3)$$

Mit $T_E = 3500 \text{ K}$ und $T_0 = 2,735 \text{ K}$ folgt dann $t_E \approx 7 \cdot 10^{12} \text{ s} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ a}$ und $z \approx 1300$.

Die COBE-Daten zeigen, dass die Hintergrundstrahlung ungeheuer isotrop ist, aber es wurden auch kleine Schwankungen (die sogenannten „Ripples“) um den Faktor $\approx 10^{-7}$ entdeckt. Daraus folgt, dass es im frühen Universum kleine Dichteschwankungen gab, ohne die es nicht zur Bildung von Galaxien und Sternen gekommen wäre. Wären diese Ripples nicht gefunden worden, müsste man die Urknallhypothese verwerfen (siehe [18], [22]).

Die Isotropie der Hintergrundstrahlung gilt nicht im Bezugssystem der Erde, da sich die Erde um die Sonne und die Sonne um das galaktische Zentrum bewegt und auch die Milchstraße eine

Pekuliarbewegung ausführt. Aus der Anisotropie der Hintergrundstrahlung kann mit der Dopplerformel die Geschwindigkeit der Erde relativ zum Kosmos berechnet werden. Im Universum gibt es also ein ausgezeichnetes Bezugssystem, in dem die Hintergrundstrahlung isotrop ist.

Der Entstehungsort der momentan empfangenen Hintergrundstrahlung liegt etwas innerhalb des Teilchenhorizonts. Nach (4.3.22) und (4.3.25) gilt für die Entfernung dieser Entstehungsorte vom Beobachter

$$D = \frac{2c}{H_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right) = d_H \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1300}}\right) = 0,97 d_H \quad (4.6.4)$$

Zwei gegenüberliegende Ausstrahlungsorte A und B haben dann die Entfernung $\overline{AB} = 1,94 d_H$ und sind somit kausal nicht voneinander abhängig, da z.B. A außerhalb des Teilchenhorizonts von B liegt. Dass trotzdem eine so hohe Isotropie der Hintergrundstrahlung vorliegt, kann nur durch die Theorie der **Inflation** (ALAN GUTH, 1980) erklärt werden (siehe [22]). Nach dieser Theorie wuchs das Universum in der Zeit von 10^{-34} s bis 10^{-32} s exponentiell um ungefähr den Faktor 10^{50} !! Angetrieben wurde die Inflation durch das von den GUT's vorhergesagte **Higgs-Feld**, das einer enormen Vakuumenergie entspricht. Durch die Inflation wurden alle vorhandenen Unebenheiten (Dichteschwankungen) geglättet und daher haben auch kausal unzusammenhängende Gebiete des Universums die fast gleiche Temperatur.

Noch eine Bemerkung zur dunklen Materie, die ja maßgeblich an der Galaxienbildung beteiligt war. Neuere Untersuchungen haben ergeben, dass nur kalte dunkle Materie (CDM, **C**old **D**ark **M**atter) in der erforderlichen Zeit die Entstehung von Galaxien bewirkt haben kann, da heiße dunkle Materie (relativistische Teilchen, Neutrinos) wegen der großen Geschwindigkeit der Teilchen nicht so schnell in Klumpen zerfallen wäre. Mit heißer dunkler Materie würden sich zuerst die Superhaufen, dann die Haufen und schließlich die Galaxien formieren, mit kalter dunkler Materie ist es genau umgekehrt. Die neuesten Beobachtungen zeigen aber, dass sich Galaxien bei Rotverschiebungen von $z = 2$ bis $z = 4$, Haufen bei Rotverschiebungen von $z = 0$ bis $z = 1$ und Superhaufen sich erst heute richtig bilden. Die Beobachtungen sprechen also eindeutig für die kalte dunkle Materie.

4 Galaxien

| Zeit (in s) | Temperatur (in K) | Ereignis |
|--------------------|----------------------|--|
| 0 | | Urknall , Ära der Quantengravitation (TOE) Alle vier Wechselwirkungen sind identisch. |
| $1 \cdot 10^{-43}$ | $1 \cdot 10^{32}$ | Gültigkeitsgrenze der allgemeinen Relativitätstheorie. Ära der GUT's, die starke und die elektroschwache Kraft sind identisch, aber verschieden von der Gravitation. |
| $1 \cdot 10^{-35}$ | $1 \cdot 10^{28}$ | Spontane Symmetriebrechung der GUT's, elektroschwache und starke WW sind jetzt verschieden. |
| $1 \cdot 10^{-34}$ | $1 \cdot 10^{27}$ | Start der inflationären Phase (schnelle Ausdehnung) |
| $1 \cdot 10^{-32}$ | $1 \cdot 10^{27}$ | Ende der inflationären Phase |
| $1 \cdot 10^{-11}$ | $3 \cdot 10^{15}$ | Spontane Symmetriebrechung der elektroschwachen Kraft, elektromagnetische und schwache WW sind jetzt verschieden, das Universum ist eine Suppe aus Quarks, Leptonen und den Austauscheteilchen (Gluonen, W^\pm , Z^0 , Photonen). |
| $2 \cdot 10^{-7}$ | $2 \cdot 10^{13}$ | Tauon-Antitauon-Zerstrahlung ($\frac{3}{2} kT < m_\tau$) |
| $1 \cdot 10^{-5}$ | $2 \cdot 10^{12}$ | Quarks vereinigen sich zu Mesonen und Baryonen |
| $7 \cdot 10^{-5}$ | $1 \cdot 10^{12}$ | Myon-Antimyon-Zerstrahlung ($\frac{3}{2} kT < m_\mu$) |
| $1 \cdot 10^1$ | $5 \cdot 10^9$ | Elektron-Positron-Zerstrahlung ($\frac{3}{2} kT < m_e$) |
| $1 \cdot 10^2$ | $1 \cdot 10^9$ | Typische Photonenenergien fallen unter die Bindungsenergie des Deuterons: Beginn der Nukleosynthese (D und ^4He). |
| $1 \cdot 10^3$ | $4 \cdot 10^8$ | Teilchen können die Coulombbarrieren nicht mehr überwinden: Ende der Nukleosynthese. Das Universum besteht im Wesentlichen aus Neutrinos, Photonen, freien Protonen und Elektronen und ^4He -Kernen, wobei auf 12 freie Protonen ungefähr ein ^4He -Kern trifft. 25 % der Materie bestehen aus Helium, der Rest aus Wasserstoff. Starke Wechselwirkungen der Photonen mit den freien Elektronen (Strahlungsära). |
| $7 \cdot 10^{12}$ | 3500 | Elektronen und Protonen rekombinieren zu H-Atomen, die Wechselwirkung von Strahlung mit Materie wird viel unwahrscheinlicher (die Photonenenergien sinken unter die Ionisierungsenergie des Wasserstoffs), das Universum wird „durchsichtig“ (Entkopplung von Strahlung und Materie). Die Wellenlänge der Photonen wird im gleichen Maße größer, wie sich das Universum ausdehnt, d.h. ihre Energie wird immer kleiner. Diese Photonen schwirren heute noch durch das Universum und bilden die kosmische Hintergrundstrahlung, die einen der wichtigsten experimentellen Eckpfeiler für die Urknallhypothese bildet. |
| $2 \cdot 10^{16}$ | 20 | Start der Galaxienbildung |
| $2 \cdot 10^{17}$ | 3,7 | Bildung unseres Sonnensystems |
| $3 \cdot 10^{17}$ | 2,735 | heute |

Tab.4.6.1 Kurze Geschichte des Universums

Literaturverzeichnis

[A] Klassische Physik (allgemeinverständlich):

- [1] Ivars Peterson. *Was Newton nicht wusste, Chaos im Sonnensystem*. Birkhäuser, 1994
Eine gelungene Darstellung der Geschichte der Newton'schen Mechanik, bis hin zu den komplizierten Computersimulationen unseres Sonnensystems.

[B] Quantenmechanik, Teilchenphysik, Weltformel (allgemeinverständlich):

- [2] John Gribbin. *Auf der Suche nach Schrödingers Katze*. Piper, 1987
Ein faszinierendes Buch über die Quantenmechanik und ihre Interpretationen.
- [3] John Gribbin. *Schrödingers Kätzchen und die Suche nach der Wirklichkeit*. S. Fischer, 1996
Neuere Einsichten in die Quantenmechanik und ihre Interpretationen. Fortsetzung von *Auf der Suche nach Schrödingers Katze*.
- [4] Richard P. Feynman. *QED*. Piper, 1992
Eine anschauliche Einführung in die Quantenelektrodynamik, von einem ihrer großen Meister.
- [5] Murray Gell-Mann. *Das Quark und der Jaguar*. Piper, 1995
Der Nobelpreisträger und Entdecker der Quarks beschreibt in seinem ersten populärwissenschaftlichen Buch zunächst die Grundgesetze unserer Welt (Quantenmechanik, Elementarteilchen) und dann die komplexen Strukturen, die aus den „einfachen“ Gesetzen entstehen.
- [6] Yuval Ne'eman, Yoram Kirsh. *Die Teilchenjäger*. Springer Verlag, 1995
Ein hervorragendes Buch, das neben der Theorie auch die Werkzeuge (Beschleuniger und Detektoren) und die geschichtliche Entwicklung der Teilchenphysik darstellt.
- [7] Paul Davies, Julian R. Brown (Hrsg.). *Superstrings, Eine Allumfassende Theorie der Natur in der Diskussion*. dtv, 1996
Superstrings bieten die verlockende Aussicht, die *Weltformel* vielleicht gefunden zu haben.
- [8] Paul Davies, John Gribbin. *Auf dem Weg zur Weltformel*. dtv, 1996
Superstrings, Chaos, Komplexität. Ein äußerst lesenswertes Buch über den neuesten Stand der Physik.
- [9] Steven Weinberg. *Der Traum von der Einheit des Universums*. C. Bertelsmann, 1993
Das zweite populärwissenschaftliche Werk des bekannten Physikers und Nobelpreisträgers. Hervorragend!
- [10] John D. Barrow. *Theorien für Alles, Die philosophischen Ansätze der modernen Physik*. Spektrum, Akad. Verl., 1992
Grundlegende Untersuchungen zur Ideenbildung in der Physik.

- [C] **Relativitätstheorie, schwarze Löcher, Kosmologie (allgemeinverständlich):**
- [11] Kip S. Thorne. *Gekrümmter Raum und verbogene Zeit*. Droemer Knauer, 1994
Eine anschauliche und gut lesbare Darstellung der allgemeinen Relativitätstheorie und ihrer Auswirkungen auf die moderne Astrophysik und Kosmologie, verfasst von einem der führenden Wissenschaftler auf diesem Gebiet (Roger Penrose). Wohl die beste allgemein verständliche Einführung in die Theorie der Gravitation und der schwarzen Löcher, bis hin zu den Wurmlöchern und der Möglichkeit von Zeitreisen.
- [12] Frank J. Tipler. *Die Physik der Unsterblichkeit*. Piper, 1994
„Moderne Kosmologie, Gott und die Auferstehung der Toten“, nicht aus der Sicht eines Esoterikers, sondern aus der eines renommierten Physikers. Tipler entwickelt seine Ideen auf der Grundlage von Quantenmechanik, allgemeiner Relativitätstheorie und Informationstheorie.
- [13] Stephen W. Hawking. *Eine kurze Geschichte der Zeit*. Rowohlt, 1988
Der populärwissenschaftliche Klassiker von einem der besten Physiker unserer Zeit.
- [14] Stephen W. Hawking. *Einsteins Traum*. Rowohlt, 1993
Fortsetzung von „Eine kurze Geschichte der Zeit“.
- [15] Paul Davies. *Die Unsterblichkeit der Zeit*. Scherz, 1997
Urknall, schwarze Löcher, Überlichtgeschwindigkeit, Zeitreisen: Nicht als Sciencefiction, sondern als pure **Science**, dargestellt von dem berühmten theoretischen Physiker.
- [16] Paul Davies. *Sind wir allein im Universum? Über die Wahrscheinlichkeit außerirdischen Lebens*. Scherz, 1996
Der bekannte Physiker spielt mit klarer Logik alle Argumente für und gegen die Existenz außerirdischen Lebens durch und zeigt die Konsequenzen auf, die die Entdeckung von Leben nichtirdischen Ursprungs für unser Weltbild hätte.
- [17] John Gribbin. *Jenseits der Zeit, Experimente mit der 4. Dimension*. bettendorf, 1995
Relativitätstheorie, schwarze Löcher, Zeitreisen ..., ähnlich wie [15].
- [18] John Gribbin. *Am Anfang war ... Neues zum Urknall und der Evolution des Kosmos*. Birkhäuser, 1995
Die Evolution des Universums vom Urknall bis zum Menschen. Das Universum als lebendiges System neben vielen anderen Universen.
- [19] John Gribbin, Martin Rees. *Ein Universum nach Maß*. Insel Verlag, 1994
Die Feinabstimmung der Naturgesetze und Naturkonstanten, die unsere Existenz erst ermöglicht.
- [20] John Gribbin. *Auf der Suche nach dem Omega-Punkt*. Piper, 1987
Die Zukunft des Universums: Unendlichkeit oder Big Crunch?.
- [21] Steven Weinberg. *Die ersten drei Minuten*. Piper, 1978
Der allgemeinverständliche Klassiker zum Thema Urknall, verfasst von dem international bekannten Physiker und Nobelpreisträger.
- [22] Michael Riordan, David N. Schramm. *Die Schatten der Schöpfung, Dunkle Materie und die Struktur des Universums*. Spektrum, Akad. Verl., 1993
Vom Urknall zur großräumigen Struktur des heutigen Universums und die Rolle, die die *Dunkle Materie* (ca. 90% der Gesamtmasse des Universums!) dabei spielt. Eine detaillierte Beschreibung der Vorgänge nach dem Urknall. Lesenswert!!

- [23] Michael Rowan-Robinson. *Das Flüstern des Urknalls*. Spektrum, Akad. Verl., 1994
Ein hervorragendes Buch über den Urknall, hauptsächlich aus der Sicht der Infrarotastronomie. Rowan-Robinson ist am Projekt IRAS, der Erforschung des Alls mit einem Infrarotsatelliten, führend beteiligt.
- [24] I. D. Nowikow. *Schwarze Löcher im All*. Verlag Harri Deutsch, 1989
Ein kleines, aber feines Büchlein des bekannten russischen Physikers.
- [25] George Gamov. *Mr. Tompkins' seltsame Reisen durch Kosmos und Mikrokosmos*. Vieweg, 1980
Mr. Tompkins Berichte über seine Reisen durch das Relativitätsland und den Quantendschungel sind amüsant zu lesen.
- [26] Leslie Marder. *Reisen durch die Raum-Zeit*. Vieweg, 1979
Ein Buch über die spezielle Relativitätstheorie mit einer ausführlichen Darstellung des Zwillingsparadoxons.
- [27] Albert Einstein. *Über spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*. Vieweg, 1969
Das allgemein verständliche Büchlein Einsteins über sein Werk.
- [28] Albert Einstein. *Grundzüge der Relativitätstheorie*. Vieweg, 1973
Einsteins Darstellung der Relativitätstheorie für den mathematisch gebildeten Leser.
- [29] Lawrence M. Krauss. *Die Physik von Star Trek*. Heyne, 1996
Die physikalischen Erungenschaften der Science Fiction Serie **STAR TREK** (Warp-Geschwindigkeiten, Beamen, Zeitreise, ...) werden auf ihren möglichen Realitätsgehalt hin untersucht. Krauss ist Professor für Physik und Astronomie an der Case Western University in Cleveland, Ohio.

[D] **Lehrbücher Physik:**

- [30] Paul A. Tipler. *Physik*. Spektrum-Akademische VLG, 1994
Ein Physiklehrbuch, das für gute LK-Schüler als Begleitlektüre zum Unterricht und zum Einarbeiten in neue Gebiete (z.B. für Facharbeiten oder Wettbewerbsaufgaben) gut geeignet ist.
- [31] Bergmann, Schaefer. *Lehrbuch der Experimentalphysik (8 Bände)*. Walter de Gruyter, 1997
Ein ausführliches Standardwerk der Physik, von der Mechanik bis zur Kosmologie.
- [32] L. D. Landau, E. M. Lifschitz. *Lehrbuch der theoretischen Physik (10 Bände)*. Akademie-Verlag, Berlin, 1967
Das Standardwerk der theoretischen Physik, anspruchsvoll, elegant, grandios.
- [33] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley & Sons, 1972
Ein Klassiker für allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie.
- [34] Hans C. Ohanian, Remo Ruffini. *Gravitation and Spacetime*. W. W. Norton & Company, 1994
- [35] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984
- [36] C. W. Misner, Kip S. Thorne, J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1973
Das wohl ausführlichste Werk über die allgemeine Relativität.

[E] **Lehrbücher Astronomie:**

- [37] A. Weigert, H. J. Wendker. *Astronomie und Astrophysik*. VCH, 1996
- [38] A. Guthmann. *Einführung in die Himmelsmechanik und Ephemeridenrechnung*. BI, 1994
- [39] A. Unsöld, B. Baschek. *Der neue Kosmos*. Springer-Verlag, 1981
- [40] J. B. Hagen, A. Boksenberg. *The Astronomical Almanach for the Year 1991*. U.S. Government Printing Office, 1990
Tabellen zur Astronomie, hauptsächlich Sonnensystem.
- [41] P. K. Seidelmann. *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanach*. University Science Books, 1992
Eine Fundgrube für Daten und Rechenmethoden in der Astronomie.
- [42] Bergmann, Schaefer. *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 8: Sterne und Welt-raum*. Walter de Gruyter, 1997
- [43] E. W. Kolb, M. S. Turner. *The Early Universe*. Addison-Wesley, 1990
Standardwerk zur Frühgeschichte des Universums.

[F] **Preprints:**

- [44] Brian Chaboyer. *The Age of the Universe*. astro-ph/9808200, 19 Aug 1998
- [45] P. J. E. Peebles. *Cosmology Solved? An Astrophysical Cosmologist's Viewpoint*. astro-ph/9810497, 30 Oct 1998
- [46] M. S. Turner. *Cosmology Solved? Quite Possibly!*. astro-ph/9811364, 23 Nov 1998

Literaturverzeichnis

- [47] F. Pont. *The Cepheid Distance Scale after Hipparcos*. astro-ph/9812074, 3 Dec 1998
- [48] M. S. Turner. *Dark Matter and Energy in the Universe*. astro-ph/9901109, 10 Jan 1999
- [49] M. S. Turner, J. A. Tyson. *Cosmology at the Millenium*. astro-ph/9901113, 10 Jan 1999
- [50] M. S. Turner. *Cosmology Update 1998*. astro-ph/9901168, 13 Jan 1999

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| 1 Grundlagen der Astronomie | 3 |
| 1.1 Geschichtliches | 3 |
| 1.2 Das heutige astronomische Weltbild | 4 |
| 1.3 Die Erde als Bezugssystem für Beobachtungen | 5 |
| 1.3.1 Koordinaten auf der Erde – Kugelkoordinaten | 5 |
| 1.3.2 Koordinaten für Sterne | 7 |
| 1.4 Instrumente zur Beobachtung | 10 |
| 1.4.1 Die Linsengleichung | 10 |
| 1.4.2 Fernrohre | 11 |
| 1.4.3 Teleskope für nicht sichtbare Wellenlängen | 13 |
| 1.4.4 Reduktion der Beobachtungsdaten | 13 |
| 1.5 Gravitation | 14 |
| 1.5.1 Das Gravitationsgesetz | 14 |
| 1.5.2 Das Gravitationsfeld | 15 |
| 1.5.3 Der Gauß'sche Satz | 16 |
| 1.5.4 Das Gravitationspotential | 16 |
| 1.6 Umlaufbahnen | 18 |
| 1.6.1 Kreisförmige Bahnen | 18 |
| 1.6.2 Ellipsen als Bahnkurven | 19 |
| 1.7 Astronomische Zeitrechnung | 24 |
| 1.7.1 Das Jahr | 24 |
| 1.7.2 Sterntag und Sonnentag | 25 |
| 2 Das Sonnensystem | 26 |
| 2.1 Aufbau des Sonnensystems | 26 |
| 2.2 Eigenschaften der Planeten | 29 |
| 2.3 Der Mond | 33 |
| 2.4 Allerlei Kleinzeug | 34 |
| 2.4.1 Planetoiden | 34 |
| 2.4.2 Kometen | 35 |
| 2.4.3 Meteore und Meteorite | 36 |
| 2.5 Nützliches aus der Theorie der Wärme und der Strahlung | 36 |
| 2.5.1 Kinetische Gastheorie | 36 |
| 2.5.2 Temperaturstrahlung | 36 |
| 2.5.3 Kurzer Abriss der Quantenmechanik | 40 |
| 2.5.4 Atome als Sender und Empfänger von Strahlung | 42 |
| 2.5.5 Scheinbare Helligkeiten | 43 |
| 3 Sterne | 46 |
| 3.1 Gravitationsenergie | 46 |
| 3.2 Druck und Temperatur in Sternen | 47 |
| 3.3 Energieerzeugung in Sternen | 49 |
| 3.3.1 Ein Ausflug in die Kernphysik | 49 |
| 3.3.2 Kernfusion | 52 |
| 3.3.3 Ein einfaches Modell junger Sterne | 54 |
| 3.4 Grobe Beziehungen zwischen M , L , R und T | 56 |

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.5 | Der sichtbare Bereich der Sterne | 58 |
| 3.6 | Informationen im Sternenlicht | 60 |
| 3.7 | Entwicklung der Sterne | 63 |
| 3.7.1 | Geburt der Sterne | 63 |
| 3.7.2 | Entwicklung der Sterne | 63 |
| 3.7.3 | Weißer Zwerge | 64 |
| 3.7.4 | Neutronensterne | 65 |
| 3.7.5 | Supernova | 66 |
| 3.7.6 | Schwarze Löcher | 68 |
| 3.8 | Veränderliche Sterne | 71 |
| 3.8.1 | Bedeckungsveränderliche | 71 |
| 3.8.2 | δ -Cepheiden und Entfernungsmessung | 71 |
| 4 | Galaxien | 73 |
| 4.1 | Die Milchstraße | 73 |
| 4.2 | Die kosmische Entfernungsskala | 74 |
| 4.3 | Die Expansion des Universums - Kosmologie | 75 |
| 4.4 | Der Aufbau des Universums | 81 |
| 4.5 | Das Standardmodell der Elementarteilchen | 82 |
| 4.6 | Entwicklung des Universums | 84 |

Index

- Äquator, 4
 - ebene, 4, 6
 - linie, 7
 - system
 - bewegliches, 9
 - festes, 6
 - Himmels-, 6
- Äquinoktiallinie, 8
- Äquipotentialfläche, 17

- Aberration, 13
- Abplattung, 33
- Absorptionsgrad, 39
- Absorptionskoeffizient, 52
- Absorptionslinien, 46
- Achse, optische, 10
- Additionstheorem, 5
- aktive Sonne, 64
- Albedo, 42
- Andromeda-Galaxie, 86
- Anfangssingularität, 82
- Aphel, 21
- Apogäum, 35
- Asteroiden, 37
- Atmosphäre, 31
- Auflösung, 12
- Ausstrahlung, spezifische, 40
- Austauschteilchen, 88
- Axionen, 78
- Azimut, 6

- Bahnebene, 7
- Bahnelemente, 30
- Bahnkurve, 25
- Baryonen, 87, 88
- Bedeckungsveränderliche, 75
- Bestrahlungsstärke, 41
- Bildpunkt, 10
- Bildweite, 10
- Bindungsenergie, 54
- Blauverschiebung, 66
- Boltzmann-Konstante, 39
- Bosonen, 88
- braune Zwerge, 67
- brauner Zwerg, 69

- Breitenkreis, 4
- Brennebene, 10
- Brennpunkt, 10, 21

- Cepheiden, 75
- Chandrasekhar-Grenze, 69
- chromatische Aberration, 12
- Chromosphäre, 64

- Datenreduktion, 13
- Deklination, 6, 9
- Deuterium, 54
- Dichte, kritische, 81
- Doppelstern, 75
- Dopplereffekt, 66
- Dunkelwolken, 78
- dunkle Materie, 77

- Einheit, astronomische, 3
- Einstein-Friedmann-Gleichungen, 81
- Einstein-Ring, 87
- Ekliptik, 7, 8, 30
- Elektronengas, entartetes, 68
- Ellipse, 21
- Emissionsgrad, 40
- Emissionsnebel, 78
- Emissionsvermögen, spektrales, 40
- Entfernungsmodul, 48
- Entfernungsskala, 79
- Erdachse, 8
- Erde, 32
- Ereignishorizont, 72
- Eudoxus aus Knidos, 1
- Exzentrizität
 - lineare, 22
 - numerische, 22

- Fenster
 - optisches, 13
 - Radio-, 13
- Fermionen, 88
- Fernrohre, 11
- Fluchtgeschwindigkeit, 25, 80
- Frühlingspunkt, 8, 9
- Frühlingspunkt, 30
- Fraunhoferlinien, 46

- Fraunhoferlinien, 63
- Fusion, 56
- Galaxien, 77
- Galaxis, 2
- Gammabay-Bursts, 73
- Gasgleichung, 39
- Gasriese, 31
- Gauß'scher Satz, 16
- Gegenstandsweite, 10
- Granulation, 64
- Gravitation
 - sfeld, 15
 - sgesetz, 15
 - skonstante, 15
 - spotential, 17
- Gravitationsenergie, 50
- Gravitationslinsen, 87
- Gravitationswellen, 65, 73
- Graviton, 88
- Greenwich, 4
- Großkreis, 4
- GUT, 78, 89
- H-Brennen, 56
- Höhe, 6
- Hadronen, 88
- Halbachse, 21
- Hauptebene, 10
- Hauptreihe, 62
- Hawking, Stephen, 73
- Helium-Flash, 68
- Helligkeit
 - absolute, 48
 - scheinbare, 47
- Herbstanfang, 8
- Hertzprung-Russel-Diagramm, 62
- Higgs-Feld, 91
- Himmelskugel, 6
- Himmelsmechanik, 19
- Himmelspole, 6
- Hintergrundstrahlung, 90
- Horizont, 6
- Horizontsystem, 6
- Hubble, 80
- Hubblezeit, 82
- Hyperbel, 25
- Inflation, 91
- Inklination, 30
- Intensität, 41
- interstellare Materie, 78
- Isobare, 53
- Isotone, 54
- Isotope, 53
- Jahr
 - anomalistisch, 26
 - siderisch, 3, 26
 - tropisch, 26
- Jupiter, 33
- Kepler, 2
 - sche Gesetze, 25
- Kernfusion, 56
- Kernphysik, 53
- Kirchhoff, 40
- Kleinkreis, 4
- Kleinplaneten, 37
- Knoten
 - absteigender, 30
 - aufsteigender, 30
- Knotenlinie, 30
- Koma, 38
- Kometen, 38
- Konvektion, 64
- Koordinaten
 - kartesische, 5
 - Kugel-, 4
- Kopernikus, 2
- Korona, 64, 77
- Kosmologie, 81
- kosmologische Konstante, 86
- Kulminationspunkt, 7
- Längenkreis, 4
- Leoniden, 39
- Leptonen, 88
- Leuchtkraft, 41
- Lichtjahr, 3
- Lichtkurve, 75
- Lichtquant, 46
- Linsengleichung, 10
- Mars, 32
- Massenparameter, 82
- Meridian, 4
 - Himmels-, 6
 - Null-, 4
- Merkur, 32
- Mesonen, 88
- Meteore, 39
- Meteorite, 39
- Milchstraße, 2, 77
- Mittelpunktswinkel, 4
- Monat
 - drakonitisch, 36
 - siderisch, 36

- synodisch, 36
- Mond, 35
- Mondfinsternis, 36
- Myon, 88
- Myonneutrino, 88
- Nadir, 6
- Nebel
 - planetarischer, 68
- Neptun, 35
- Neutrino, 56
- Neutron, 53
- Neutronenstern, 69
- Newton, 2
- Nord-Süd-Linie, 7
- Nordpol, 4
- Nukleonen, 53
- Nuklidkarte, 54
- Objektiv, 12
- Okular, 11
- Oort'sche Wolke, 38
- Ordnungszahl, 54
- Parabel, 25
- Parallaxe, 13
 - spektroskopische, 66
 - trigonometrische, 14
- Parallelkreis, 7
- Parsec, 3
- Pekuliarbewegung, 80
- Perigäum, 35
- Perihel, 21, 30
- Photon, 46
- Photosphäre, 63
- Planck, Max, 40
- Planeten
 - Entdeckung, 2
- Planetensystem, 2, 28, 31
- Planetoiden, 37
- Plasma, 52
- Pluto, 35
- Poldistanz, 9
- Positron, 56
- pp-Kette, 56
- Proton, 53
- Protuberanzen, 64
- Ptolemäus, 1
- Pulsar, 70
- Pythagoras, 1
- Quantenchromodynamik, 89
- Quantenelektrodynamik, 89
- Quantenfeldtheorie, 89
- Quantengravitation, 89
- Quarks, 70, 88
- Quasare, 87
- radialsymmetrisch, 16
- Radioteleskope, 13
- Reduktion von Beobachtungsdaten, 13
- Reflexionsgrad, 39
- Reflexionsnebel, 78
- Rektaszension, 9
- Relativitätstheorie
 - allgemeine, 72
- Resonanzstreuung, 63
- retrograd, 32
- Rotationskurve, 77
- roter Riese, 68
- Rotverschiebung, 66, 80
- Südpunkt, 6
 - äquatorialer, 6
- Saroszyklus, 37
- Saturn, 34
- Schlussknall, 85
- schwarzer Körper, 40
- schwarzes Loch, 65, 72
- Schwarzschildradius, 72
- Schwerpunkt, 19
- Skalarprodukt, 5
- Skalenfaktor, 81
- Solarkonstante, 41
- Solstitiallinie, 7
- Sonne, 49
- Sonnenbahn, scheinbare, 8
- Sonnenfinsternis, 36
- Sonnenflecken, 64
- Sonnentag, 27
- Sonnenwind, 38, 64
- Sonnenzeit
 - mittlere, 27
 - wahre, 27
- Sonnwende, 7
- Spektralklasse, 65
- Spiegelteleskop, 12
- Spin, 78, 88
- Standardmodell der Elementarteilchen, 88
- Stefan-Boltzmann, Gesetz von, 40
- Sterne, 49
 - Energierzeugung, 53
- Sternschnuppen, 39
- Sterntag, 8, 27
- Sternzeit, 9
- Strahlung, kosmische, 78
- Strahlungsfluss, 41
- Strahlungsflussdichte, 41

Stundenkreis, 9
Stundenwinkel, 6, 9
Supernova, 31
Superstrings, 89
SUSY-Teilchen, 78
Synchrotronstrahlung, 70

Tag
 Sonnen-, 27
 Stern-, 27
Tagundnachtgleiche, 8
Tauon, 88
Tauonneutrino, 88
Teilchenhorizont, 84
Temperaturstrahlung, 39
Thales von Milet, 1
TOE, 89
Transmissionsgrad, 39
Tritium, 54

Umlaufbahn, 19
Universal Time, 27
Universum
 Aufbau, 86
Universums
 Entwicklung, 90
 Expansion, 80
Uranus, 34
Urknall, 3, 82

Vakuumfluktuationen, 73
Venus, 32
Vergrößerung, 11
virtuelle Teilchen, 73
VLBI, 13

Wechselwirkung
 elektroschwache, 89
 schwache, 89
 starke, 54, 88, 89
Weltbild
 geozentrisches, 1
 heliozentrisches, 1
Weltraumteleskope, 13
Weltzeit, 27
Widderpunkt, 8
Wien'sches Verschiebungsgesetz, 41

Zeit, 26
Zeitgleichung, 27
Zenit, 6
 -distanz, 6
Zentralfeld, 16
zirkumsolare Kometenwolke, 38
Zweikörperproblem, 19