Astronomie
Lösungen zu den Aufgaben

Richard Reindl

Die aktuellste Version der Aufgaben findet man unter

http://www.stbit.de

3. März 2015

1 Grundlagen der Astronomie

1.1 Geschichtliches

1.1.1. $R = \frac{b}{\varphi} = \frac{800\,\text{km}}{7{,}2 \cdot \frac{\pi}{180}} \approx 6{,}4 \cdot 10^3\,\text{km}$

Schiffe, kreisförmiger Schatten bei Mondfinsternissen

heute: Blick aus einem Raumschiff

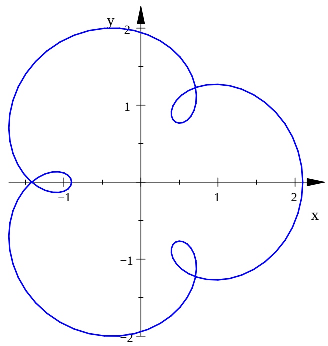
1.1.2. $\frac{\overline{\text{ES}}}{\overline{\text{EM}}} = \frac{1}{\cos\varphi} = 19{,}1;$ in Wirklichkeit: $\frac{\overline{\text{ES}}}{\overline{\text{EM}}} = \frac{1{,}496 \cdot 10^8\text{km}}{3{,}844 \cdot 10^5\,\text{km}} = 389$

$$\cos\varphi' = \frac{\overline{\text{EM}}}{\overline{\text{ES}}} = \frac{3{,}844 \cdot 10^5\,\text{km}}{1{,}496 \cdot 10^8\text{km}} = 0{,}00257 \quad\Longrightarrow\quad \varphi' = 89{,}85°$$

Ein kleiner Fehler beim Winkel bewirkt einen sehr großen Fehler im Verhältnis $\frac{\overline{\text{ES}}}{\overline{\text{EM}}}$.

1.1.3. MAPLE-Befehle:

```
w1 := 2*Pi; w2 := 8*Pi; r1 := 1.5; r2 := 0.6;
x := t -> r1*cos(w1*t)+r2*cos(w2*t);
y := t -> r1*sin(w1*t)+r2*sin(w2*t);
plot([x(t),y(t),t=0..1],-2.1..2.1,-2.1..2.1,scaling=constrained);
```



1.2 Das heutige astronomische Weltbild

1.2.1. $a = \frac{1\,\text{AE}}{\tan 1''} = 206264{,}80624548\,\text{AE} \qquad b = \frac{1\,\text{AE}}{\sin 1''} = 206264{,}80624790\,\text{AE}$

$$b - a = 2{,}42 \cdot 10^{-6}\,\text{AE} = 363\,\text{km} \quad\Longrightarrow\quad \delta_{\text{rel}} = \frac{b-a}{b} = 1{,}2 \cdot 10^{-11}$$

1.2.2.

	LJ	Parsec	AE	m	φ
Sirius	8,65	2,65	$5{,}47 \cdot 10^5$	$8{,}18 \cdot 10^{16}$	$0{,}377''$
ε-Eridani	10,8	3,30	$6{,}81 \cdot 10^5$	$1{,}02 \cdot 10^{17}$	$0{,}303''$
Barnards Stern	5,98	1,83	$3{,}78 \cdot 10^5$	$5{,}66 \cdot 10^{16}$	$0{,}545''$
α-Centauri	4,35	1,33	$2{,}75 \cdot 10^5$	$4{,}11 \cdot 10^{16}$	$0{,}750''$
Altair	16,5	5,05	$1{,}04 \cdot 10^6$	$1{,}55 \cdot 10^{17}$	$0{,}198''$

1.3 Die Erde als Bezugssystem für Beobachtungen

1.3.1. (a) Mit dem Erdradius $R = 6{,}378 \cdot 10^6\,\text{m}$ und $\varphi = 47°27'$ gilt

$$B_{\text{g}} = R \cdot 1° = 111{,}3\,\text{km} \qquad B_{\text{m}} = \frac{B_{\text{g}}}{60} = 1855\,\text{m} \qquad B_{\text{s}} = \frac{B_{\text{m}}}{60} = 30{,}92\,\text{m}$$

$$L_{\text{g}} = B_{\text{g}}\cos\varphi = 75{,}28\,\text{km} \qquad L_{\text{m}} = B_{\text{m}}\cos\varphi = 1255\,\text{m} \qquad L_{\text{s}} = B_{\text{s}}\cos\varphi = 20{,}91\,\text{m}$$

(b) 1 cm der Karte entspricht $\Delta x = 25\,000\,\mathrm{cm} = 250\,\mathrm{m}$.

$$\Delta\varphi_{\mathrm{cm}} = \left(\frac{\Delta x}{B_{\mathrm{s}}}\right)'' = 8{,}085'' \qquad \Delta\lambda_{\mathrm{cm}} = \left(\frac{\Delta x}{L_{\mathrm{s}}}\right)'' = 11{,}96''$$

(c) Δx sei die Entfernung von P zu G in Ost-West- und Δy in Nord-Südrichtung:

$$\varphi_{\mathrm{G}} = 47°30' - 2{,}7\Delta\varphi_{\mathrm{cm}} = 47°29'38'' \qquad \lambda_{\mathrm{G}} = 11° + 30{,}8\Delta\lambda_{\mathrm{cm}} = 11°6'8''$$
$$\varphi_{\mathrm{P}} = 47°24' + 18{,}7\Delta\varphi_{\mathrm{cm}} = 47°26'31'' \qquad \lambda_{\mathrm{P}} = 11°20' - 23{,}2\Delta\lambda_{\mathrm{cm}} = 11°15'23''$$

$$\Delta x_{\mathrm{cm}} = \frac{\lambda_{\mathrm{P}} - \lambda_{\mathrm{G}}}{\Delta\lambda_{\mathrm{cm}}}\mathrm{cm} = 46{,}4\,\mathrm{cm} \qquad \Delta x = 46{,}4 \cdot 250\,\mathrm{m} = 11{,}6\,\mathrm{km}$$
$$\Delta y_{\mathrm{cm}} = \frac{\varphi_{\mathrm{G}} - \varphi_{\mathrm{P}}}{\Delta\varphi_{\mathrm{cm}}}\mathrm{cm} = 23{,}1\,\mathrm{cm} \qquad \Delta y = 23{,}1 \cdot 250\,\mathrm{m} = 5{,}78\,\mathrm{km}$$

$$\overline{\mathrm{GP}} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 13{,}0\,\mathrm{km}$$

(d) $\tan\alpha' = \dfrac{\Delta x}{\Delta y} \quad\Longrightarrow\quad \alpha' = 63{,}49°$

$\tan\beta' = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \quad\Longrightarrow\quad \beta' = 26{,}51°$

$\alpha = 180° - \alpha' - A = 44{,}86°$

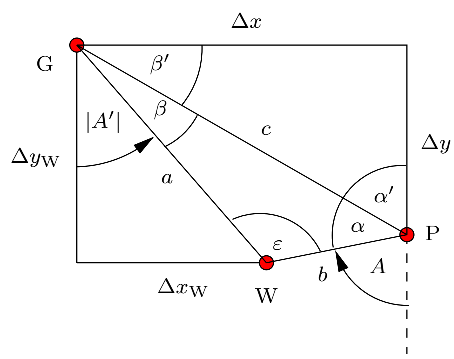
$\beta = 90° - \beta' - |A'| = 20{,}99°$

$\varepsilon = 180° - \alpha - \beta = 114{,}15°$

Sinussatz:

$a = c \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\sin\varepsilon} = 10{,}01\,\mathrm{km} \,\widehat{=}\, 40{,}04\,\mathrm{cm} = a_{\mathrm{cm}}$

$b = c \cdot \dfrac{\sin\beta}{\sin\varepsilon} = 5{,}086\,\mathrm{km} \,\widehat{=}\, 20{,}34\,\mathrm{cm} = b_{\mathrm{cm}}$



$$\Delta x_{\mathrm{W}} = a\sin|A'| = 6{,}766\,\mathrm{km} \,\widehat{=}\, 27{,}06\,\mathrm{cm} \,\widehat{=}\, 27{,}06 \cdot \Delta\lambda_{\mathrm{cm}} = 325'' = 5'25'' = \Delta\lambda_{\mathrm{W}}$$

$$\Delta y_{\mathrm{W}} = a\cos|A'| = 7{,}383\,\mathrm{km} \,\widehat{=}\, 29{,}53\,\mathrm{cm} \,\widehat{=}\, 27{,}06 \cdot \Delta\lambda_{\mathrm{cm}} = 239'' = 3'59'' = \Delta\varphi_{\mathrm{W}}$$

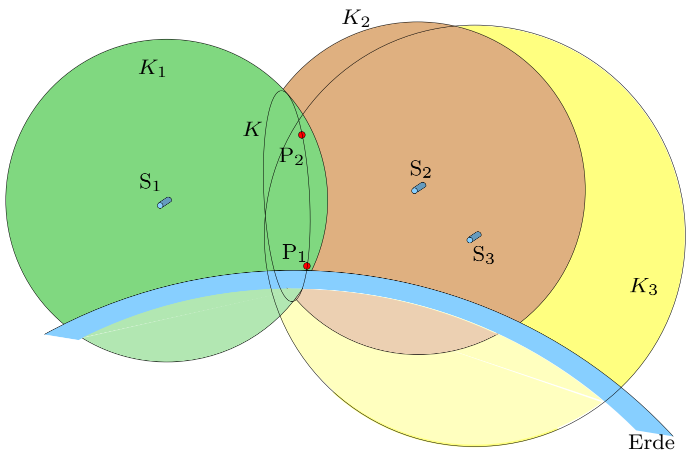
$$\varphi_{\mathrm{W}} = \varphi_{\mathrm{G}} - \Delta\varphi_{\mathrm{W}} = 47°25'39'' \qquad \lambda_{\mathrm{W}} = \lambda_{\mathrm{G}} + \Delta\lambda_{\mathrm{W}} = 11°11'32''$$

$$H_{\mathrm{W}} = 920\,\mathrm{m} + b\tan h = 2298\,\mathrm{m}$$

1.3.2. (a) $T = 43080\,\mathrm{s}, \quad \dfrac{mv^2}{r} = \dfrac{m \cdot 4\pi^2 r^2}{rT^2} = \dfrac{GmM}{r^2} \quad\Longrightarrow\quad r = \sqrt[3]{\dfrac{GMT^2}{4\pi^2}} = 2{,}66 \cdot 10^4\,\mathrm{km}$

$$h = r - R = 2{,}02 \cdot 10^4\,\mathrm{km}$$

(b) Die Kugel um den Satelliten S_i mit Radius r_i ist K_i $(i \in \{1,2,3\})$. Der Kreis K ist die Schnittmenge von K_1 und K_2. Die Schnittpunkte von K und K_3 sind P_1 und P_2. P_1 liegt an der Erdoberfläche, P_2 im Weltall.



(c) Die wahre Ankunftszeit des Signals beim Empfänger ist $t_{\text{Atom}} = t - \delta t$, die Zeit des Signals (i) vom Satelliten bis zum Empfänger also $\Delta t_i = c(t_i - \delta t - T_i)$.

$$(X_1 - x)^2 + (Y_1 - y)^2 + (Z_1 - z)^2 = c^2(t_1 - \delta t - T_1)^2$$
$$(X_2 - x)^2 + (Y_2 - y)^2 + (Z_2 - z)^2 = c^2(t_2 - \delta t - T_2)^2$$
$$(X_3 - x)^2 + (Y_3 - y)^2 + (Z_3 - z)^2 = c^2(t_3 - \delta t - T_3)^2$$
$$(X_4 - x)^2 + (Y_4 - y)^2 + (Z_4 - z)^2 = c^2(t_4 - \delta t - T_4)^2$$

(d) Mit $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 0$ und den angegebenen Werten lautet die Lösung des Gleichungssystems:

$$x = 4234511{,}7\,\text{m}, \quad y = 837860{,}2\,\text{m}, \quad z = 4698819{,}5\,\text{m}, \quad \delta t = 2{,}123456778\,\text{s}$$

(e) Es gilt, das Gleichungssystem

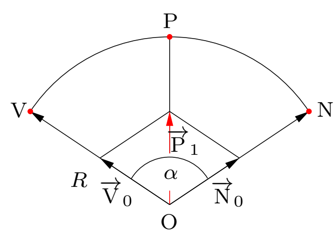
$$x = r\cos\varphi\cos\lambda \qquad (1)$$
$$y = r\cos\varphi\sin\lambda \qquad (2)$$
$$z = r\sin\varphi \qquad (3)$$

nach den Unbekannten φ, λ und r aufzulösen. Die Höhe ist dann $h = r - R_{\text{Erde}}$.

$$\frac{(2)}{(1)}: \qquad \tan\lambda = \frac{y}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = 11{,}1192°$$
$$\frac{(3)}{(2)}: \qquad \tan\varphi = \frac{z\sin\lambda}{y} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi = 47{,}4276°$$
$$(3): \qquad r = \frac{z}{\sin\varphi} = 6\,380\,596\,\text{m} \qquad \Longrightarrow \qquad h = 2296\,\text{m}$$

Der Epfänger befindet sich auf der oberen Wettersteinspitze.

1.3.3. (a) Der Schnittpunkt des Meridians vom Nordpol über Greewich zum Südpol mit dem Äquator ist der Südpunkt S. Der Ursprung unseres Koordinatensystems ist der Erdmittelpunkt, die x_1-Achse zeigt zu S, die x_3-Achse zum Nordpol. Die Einheitsvektoren, die von M nach N (Nürnberg) bzw. V (Vancouver) zeigen sind



$$\vec{N}_0 = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\lambda_1 \\ \cos\varphi\sin\lambda_1 \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}63990 \\ 0{,}12554 \\ 0{,}75813 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{V}_0 = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\lambda_2 \\ \cos\varphi\sin\lambda_2 \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}35516 \\ -0{,}54690 \\ 0{,}75813 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_1 = \vec{N}_0 + \vec{V}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}28474 \\ -0{,}42135 \\ 1{,}51627 \end{pmatrix}, \quad \vec{P}_0 = \frac{\vec{P}_1}{|\vec{P}_1|} = \begin{pmatrix} 0{,}17804 \\ -0{,}26346 \\ 0{,}94810 \end{pmatrix}$$

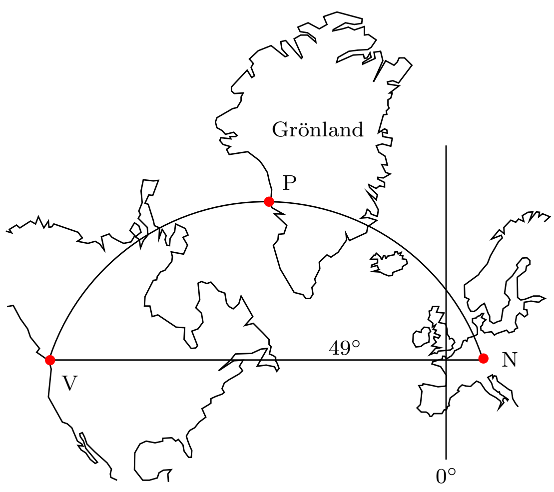
Mit $R = 6380\,\text{km}$ folgt

$$\vec{P} = R\vec{P}_0 = \begin{pmatrix} 1136 \\ -1681 \\ 6049 \end{pmatrix}\text{km}$$

Für die geografischen Koordinaten φ' und λ' von P gilt

$$\vec{P}_0 = \begin{pmatrix} \cos\varphi'\cos\lambda' \\ \cos\varphi'\sin\lambda' \\ \sin\varphi' \end{pmatrix}$$

$$\varphi' = \sin^{-1} 0{,}94810 = 71{,}46°$$
$$\lambda' = \sin^{-1}\frac{-0{,}26346}{\cos\varphi'} = -55{,}95°$$

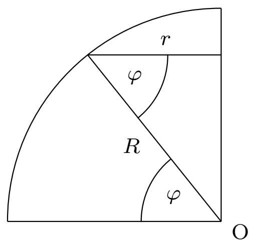


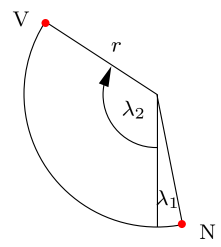
(b) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{\mathrm{N}}_0 \cdot \vec{\mathrm{V}}_0}{1 \cdot 1} = 0{,}278843 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 1{,}2882 = 73{,}81°$

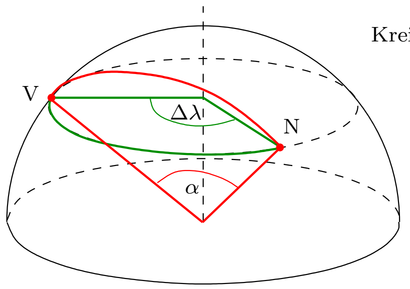
Der kürzeste Weg von N nach V auf der Erdoberfläche hat die Länge $s = R\alpha = 6380\,\mathrm{km} \cdot 1{,}2882 = 8219\,\mathrm{km}$

Der Breitenkreis hat den Radius $r = R\cos\varphi$, die Strecke Nürnberg–Vancouver auf dem Breitenkreis ist

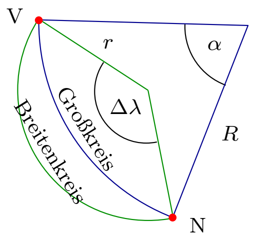
$$b = r(\lambda_1 - \lambda_2) = 9737\,\mathrm{km}$$







Kreisbögen in einer Ebene gezeichnet:



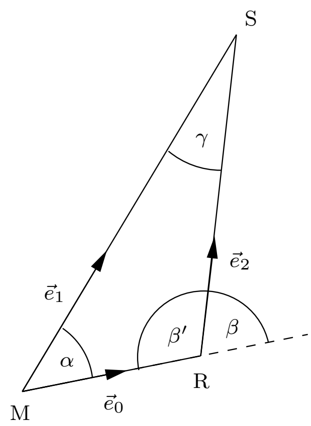
1.3.4. $1° \mathrel{\widehat{=}} 4\,\mathrm{min}, \quad 1' \mathrel{\widehat{=}} 4\,\mathrm{s}, \quad 1'' \mathrel{\widehat{=}} \dfrac{1}{15}\,\mathrm{s}, \quad 15° \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{h}, \quad 0{,}25° \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{min}, \quad \dfrac{15°}{240} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{s}$

	Bogenmaß	Dezimalgrad	$x° y' z''$	Zeitmaß
α	1,345	77,06282°	77° 3′ 46″	$5^{\mathrm{h}}\,8^{\mathrm{min}}\,15^{\mathrm{s}}$
β	0,7215	41,34°	41° 20′ 24″	$2^{\mathrm{h}}\,45^{\mathrm{min}}\,21{,}6^{\mathrm{s}}$
γ	0,43046	$24{,}66\overline{3}°$	24° 39′ 48″	$1^{\mathrm{h}}\,38^{\mathrm{min}}\,39{,}2^{\mathrm{s}}$
δ	1,1767	$67{,}4208\overline{3}°$	67° 25′ 15″	$4^{\mathrm{h}}\,29^{\mathrm{min}}\,41^{\mathrm{s}}$

1.3.5. $R = 6378\,\mathrm{km} \quad , \quad t_{\Upsilon 2} = t_{\Upsilon 1} - (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \dfrac{1\,\mathrm{h}}{15°} = 3^{\mathrm{h}}\,21^{\mathrm{min}}\,9{,}6^{\mathrm{s}}$

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \cos\lambda_1 \\ \cos\varphi_1 \sin\lambda_1 \\ \sin\varphi_1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 \cos\lambda_2 \\ \cos\varphi_2 \sin\lambda_2 \\ \sin\varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_0 = \frac{\overrightarrow{\mathrm{MR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}0140505990 \\ 0{,}5618833297 \\ -0{,}8270971551 \end{pmatrix}$$



$$\mu = \arccos\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|} = 85{,}89863° \;,\; s = \mu\,R = 9561{,}986\,\mathrm{km} \;,\; s_{\mathrm{g}} = 2\,R\,\sin\frac{\mu}{2} = 8691{,}315\,\mathrm{km}$$

$$t_{10} = t_1 + \lambda_1 = 3^{\mathrm{h}}\,11^{\mathrm{min}}\,57{,}00^{\mathrm{s}} = 47°\,59'\,15{,}00''$$

$$t_{20} = t_2 + \lambda_2 = 3^{\mathrm{h}}\,10^{\mathrm{min}}\,0{,}95^{\mathrm{s}} = 47°\,30'\,14{,}25''$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\overrightarrow{\mathrm{MS}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MS}}|} = \begin{pmatrix} \cos\delta_1 \cos t_{10} \\ \cos\delta_1 \sin t_{10} \\ \sin\delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}65441776 \\ 0{,}72648576 \\ 0{,}20965649 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\overrightarrow{\mathrm{RS}}}{|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|} = \begin{pmatrix} \cos\delta_2 \cos t_{20} \\ \cos\delta_2 \sin t_{20} \\ \sin\delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}65753414 \\ 0{,}71767213 \\ 0{,}22933724 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \arccos(\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1) = 75{,}877910° \quad \beta = \arccos(\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_2) = 77{,}126304° \quad \gamma = \beta - \alpha = 1{,}248394°$$

$$\overline{\mathrm{MS}} = s_{\mathrm{g}} \cdot \frac{\sin(\pi - \beta)}{\sin\gamma} = \underline{\underline{388897\,\mathrm{km}}}$$

1.3.6.

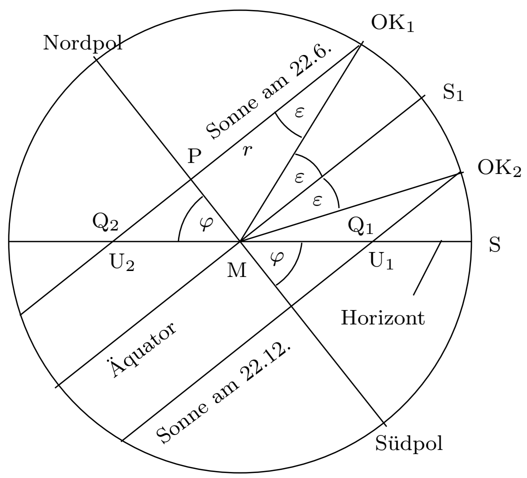
$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos\delta_1 \cos\alpha_1 \\ \cos\delta_1 \sin\alpha_1 \\ \sin\delta_1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \cos\delta_2 \cos\alpha_2 \\ \cos\delta_2 \sin\alpha_2 \\ \sin\delta_2 \end{pmatrix}$$

$$\mu = \arccos\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|} = 19°\,19'\,59{,}97''$$

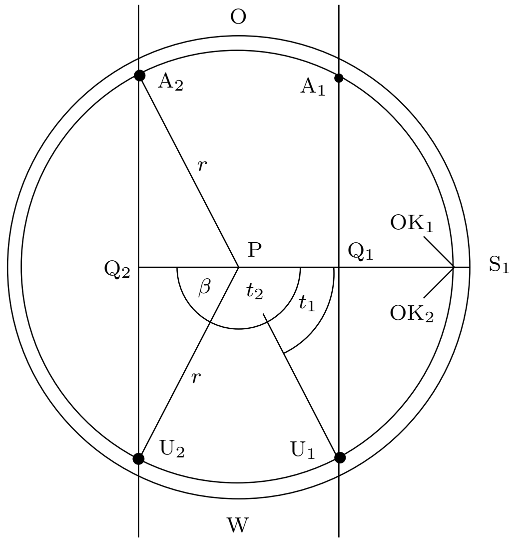
1.3.7. (a)

Neigung der Erdachse gegen die Bahnebene:	$\varepsilon = 23°\,26'\,21''$
Breite von Garmisch (WG):	$\varphi = 47°\,29'\,38''$
Obere Kulmination der Sonne am 22.06.:	$h_1 = 90° - \varphi + \varepsilon = 65°\,56'\,43''$
Obere Kulmination der Sonne am 22.12.:	$h_2 = 90° - \varphi - \varepsilon = 19°\,4'\,1''$

(b)



Blick von W nach O



Blick vom Nordpol zum Südpol

Ist R der Radius der Himmelskugel, dann hat der Parallelkreis zum Äquator, auf dem sich die Sonne am 22.6. oder 22.12. bewegt, den Radius $r = R\,\cos\varepsilon$.

$$\overline{\mathrm{PQ}}_2 = \overline{\mathrm{MP}}\sin\varphi = R\,\sin\varepsilon\sin\varphi$$

$$\cos t_1 = \cos\beta = \frac{\overline{\mathrm{PQ}}_2}{r} = \frac{\sin\varepsilon\sin\varphi}{\cos\varepsilon} = \tan\varepsilon\tan\varphi$$

$$\cos t_2 = \cos(180° - t_1) = -\cos t_1 = -\tan\varepsilon\tan\varphi$$

Im festen Äquatorsystem gilt mit $\varphi' = \varphi - 90°$:

$$\overrightarrow{\mathrm{MU}}_2 = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon\cos t_2 \\ \cos\varepsilon\sin t_2 \\ \sin\varepsilon \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{\mathrm{MS}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi'\cos 0 \\ \cos\varphi'\sin 0 \\ \sin\varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi' \\ 0 \\ \sin\varphi' \end{pmatrix}$$

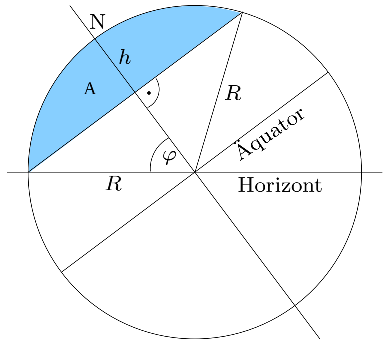
Für den Azimut des Untergangspunktes im Horizontsystem gilt:

$$\begin{aligned} \cos A_2 = \overrightarrow{\mathrm{MU}}_2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{MS}} &= \cos\varepsilon\cos t_2\cos\varphi' + \sin\varepsilon\sin\varphi' = \\ &= \cos\varepsilon\cos t_2\sin\varphi - \sin\varepsilon\cos\varphi = \\ &= -\cos\varepsilon\tan\varepsilon\tan\varphi\sin\varphi - \sin\varepsilon\cos\varphi = -\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varphi} \end{aligned}$$

Allgemein gilt für den Azimut A des Sonnenuntergangspunktes im Horizontsystem eines Ortes auf der Nordhalbkugel (Breite φ), wenn δ die Deklination der Sonne ist:

$$\boxed{\cos A = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}}$$

Garmisch, 22.06.: $\delta = \varepsilon$, $A = 126°\,3'\,57''$, 22.12.: $\delta = -\varepsilon$, $A = 53°\,56'\,3''$



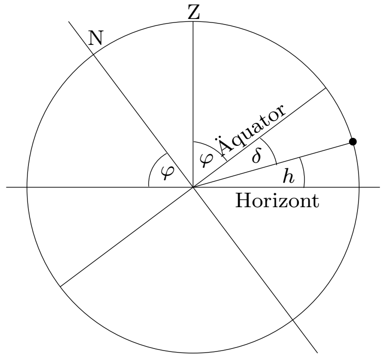
1.3.8. (a) 50 %, 50 %

(b) 0 %, 100 %

(c) $A = 2\,R\,\pi\,h = 2\,R\,\pi\,(R - R\cos\varphi)$

$$z = \frac{A}{4\,\pi\,R^2} = \frac{1-\cos\varphi}{2} = 16{,}2\,\%$$

$s = 1 - z = 83{,}8\,\%$



1.3.9. (a) $\beta = T \cdot \dfrac{360°}{365{,}25\,\mathrm{d}}$

(b) $h_{\max} = 90° - \varphi + \delta = 25°\,51'$

(c) Um Mitternacht steht die Sonne im unteren Kulminationspunkt, ihre Rektaszension ist als um 12 h größer als die von Sirius:

$$\alpha_S = \alpha + 12\,\mathrm{h} = 280{,}7364°$$

$$\beta = \arctan\frac{\tan\alpha_S}{\cos\varepsilon} = 279{,}87°$$

$$T = \beta \cdot \frac{365{,}25\,\mathrm{d}}{360°} = 284\,\mathrm{d}$$

284 d nach dem 21.3. ist der 30.12.

1.4 Instrumente zur Beobachtung

1.4.1. (a) $D_S = \dfrac{b \cdot 1\,\mathrm{AE}}{f} = 1{,}39 \cdot 10^9\,\mathrm{m}, \qquad S' = S \cdot \dfrac{d^2}{b^2} = 3{,}43 \cdot 10^4\,\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

(b) $V = 100\,\mathrm{dm}^3 = 0{,}1\,\mathrm{m}^3$, $m = 100\,\mathrm{kg}$, $C = 4{,}19 \cdot 10^3\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}$, $\Delta T = 80\,\mathrm{K}$, $\Delta t = 600\,\mathrm{s}$

Radius der Wasserkugel:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 0{,}288\,\mathrm{m}$$

Die in den Spiegel einfallende Leistung muss gleich der zur Erwärmung benötigten Leistung sein:

$$\frac{SD^2\pi}{4} = \frac{mC\Delta T}{\Delta t} \quad\Longrightarrow\quad D = \sqrt{\frac{4mC\Delta T}{S\pi\Delta t}} = 7{,}21\,\mathrm{m}$$

$$f = \frac{2Rr}{D_S} = 61{,}9\,\mathrm{m}$$

1.4.2. (a) $D = a + 2L\tan\varepsilon = a + \dfrac{2L\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon} = a + \dfrac{2L\sin\varepsilon}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon}} = a + \dfrac{2Lb_1\lambda}{a\sqrt{1-\frac{b_1^2\lambda^2}{a^2}}} = a + \dfrac{2Lb_1\lambda}{\sqrt{a^2 - b_1^2\lambda^2}}$

Wegen $\dfrac{b_1^2\lambda^2}{a^2} \ll 1$ für $a \gg \lambda$ gilt $1 - \dfrac{b_1^2\lambda^2}{a^2} \approx 1$ und damit

$$D \approx a + \frac{2Lb_1\lambda}{a}$$

(b) $a_1 = 0{,}005\,\mathrm{m}$, $a_2 = 10\,\mathrm{m}$

$$D_1 = D(a_1) = 1{,}2 \cdot 10^2\,\mathrm{km}, \qquad D_2 = D(a_2) = 70\,\mathrm{m}$$

$$D'(a) = \frac{\mathrm{d}D(a)}{\mathrm{d}a} = 1 - \frac{2Lb_1\lambda}{a^2}$$

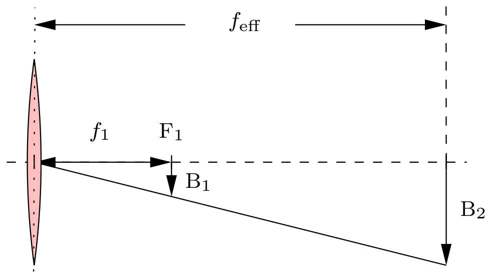
$$D'(a_0) = 0 \quad\Longrightarrow\quad a_0 = \sqrt{2Lb_1\lambda} = 24{,}5\,\mathrm{m} \qquad D_{\min} = D(a_0) = 49\,\mathrm{m}$$

1.4.3. leer

1.4.4. (a) Zerstreuungslinse:

$$f_2 < 0 \implies |f_2| = -f_2$$

$$\frac{f_{\text{eff}}}{f_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{b - f_2}{-f_2} = \frac{f_2 - b}{f_2}$$



Bei der Abbildung an der Zerstreuungslinse ist die Bildweite b und die Gegenstandsweite (rechts von der Linse negativ)

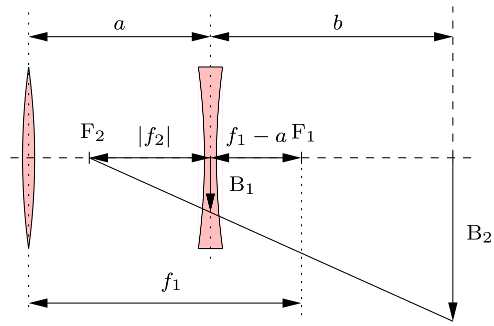
$$g = -(f_1 - a) = a - f_1$$

Linsengleichung:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f_2} \implies \frac{1}{b} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1 - a}$$

$$b = \frac{f_2(f_1 - a)}{f_1 + f_2 - a}$$

$$f_{\text{eff}} = \frac{f_1(f_2 - b)}{f_2} = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - a}$$



(b) Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\frac{f_2}{f_1 + f_2 - a} = \frac{b}{f_1 - a} \implies f_{\text{eff}} = \frac{f_1 b}{f_1 - a} \implies f_1 = \frac{a f_{\text{eff}}}{f_{\text{eff}} - b} = 5{,}14\,\text{m}$$

$$\frac{D'}{D} = \frac{b}{b + a} \implies D' = \frac{bD}{b + a} = 137\,\text{m}$$

(c) Winkelauflösung mit $\lambda = 500\,\text{nm}$:

$$\delta = 1{,}22\frac{\lambda}{D} = 2{,}5 \cdot 10^{-7} \approx 0{,}05''$$

$$A = \delta f_{\text{eff}} = 14\mu m$$

Größe des Gesichts original G_1 und G_2, auf der Platte B_1 und B_2, $g = 5000\,\text{m}$:

$$B_1 = \frac{G_1 f_{\text{eff}}}{g}$$

Mit der Pixelfläche K^2 folgt dann für die Zahl der Pixel

$$n = \frac{G_1 G_2 f_{\text{eff}}^2}{g^2 K^2} = 1{,}1 \cdot 10^4$$

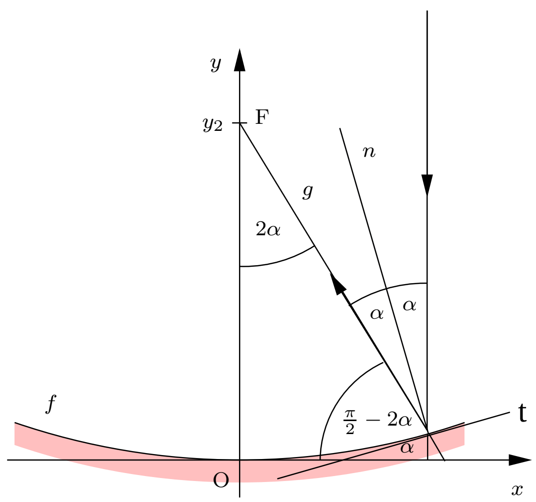
1.4.5. Die Normale n steht senkrecht auf der Spiegeloberfläche. Die Gerade g steht für den reflektierten Strahl, t ist die Tangente an den Spiegel im Reflexionspunkt. Die Steigung von t ist

$$m_t = \tan\alpha = f'(x_1) = 2ax_1$$

Die Steigung von g ist

$$m = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\frac{1}{\tan(2\alpha)} =$$

$$= -\frac{1 - \tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = -\frac{1 - 4a^2x_1^2}{4ax_1}$$



Die Gleichung von g durch den Reflexionspunkt $(x_1 \,|\, ax_1^2)$ ist

$$g: \qquad y = mx + ax_1^2 - mx_1$$

Schnittpunkt von g mit der y-Achse bei

$$y_2 = g(0) = ax_1^2 - mx_1 = ax_1^2 - \frac{1 - 4a^2x_1^2}{4a} = \frac{1}{4a}$$

Da y_2 unabhängig von x_1 ist, schneiden sich alle reflektierten Strahlen im Brennpunkt

$$\mathrm{F}\,(0|f) \quad \text{mit der Brennweite} \quad f = \frac{1}{4a}.$$

1.4.6. Winkel, unter dem die Sterne erscheinen:

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{2{,}45\,\mathrm{AE}}{40\,\mathrm{LJ}} 9{,}7 \cdot 10^{-7} = (0{,},0033'$$

Beobachtungswinkel (Auflösung des Auges): $\beta \approx 1'$. Vergrößerung v des Teleskops:

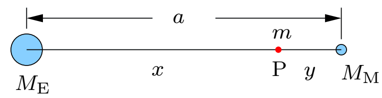
$$v = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} \approx \frac{\beta}{\alpha} = 300 = \frac{f_1}{f_2} \quad \Longrightarrow \quad f_1 = 300 f_2 = 2{,}4\,\mathrm{m}$$

Mit $\lambda \approx 600\,\mathrm{nm}$ folgt

$$D = \frac{1{,}22\lambda}{\sin\alpha} \approx 76\,\mathrm{cm}$$

1.5 Gravitation

1.5.1. Die Gesamtkraft auf eine Testmasse m am gesuchten Ort P muss null sein:



$$\frac{GM_\mathrm{E}m}{x^2} = \frac{GM_\mathrm{M}m}{y^2}$$

Mit $y = a - x$ folgt

$$M_\mathrm{E}(a-x)^2 = M_\mathrm{M}x^2 \quad \Longrightarrow \quad |a-x|\sqrt{M_\mathrm{E}} = |x|\sqrt{M_\mathrm{M}}$$

Da $a - x > 0$ und $x > 0$ gilt

$$(a-x)\sqrt{M_\mathrm{E}} = x\sqrt{M_\mathrm{M}} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{a\sqrt{M_\mathrm{E}}}{\sqrt{M_\mathrm{E}} + \sqrt{M_\mathrm{M}}} = \frac{a}{1 + \sqrt{\frac{M_\mathrm{M}}{M_\mathrm{E}}}}$$

Mit $M_\mathrm{E} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $M_\mathrm{M} = 7{,}35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$ und $a = 3{,}84 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$ folgt

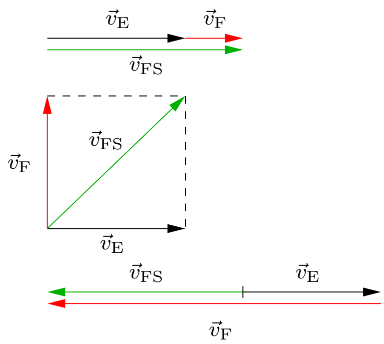
$$x = 0{,}900 \cdot a = 3{,}45 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$$

1.5.2. (a) $\displaystyle \frac{m}{2}v_1^2 - \frac{GmM_\mathrm{S}}{R} = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2GM_\mathrm{S}}{R}} = 42{,}1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$

(b) $\displaystyle \frac{m}{2}v_\mathrm{FS}^2 - \frac{GmM_\mathrm{S}}{R} - \frac{GmM_\mathrm{E}}{R_\mathrm{E}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_\mathrm{FS} = \sqrt{2G\left(\frac{M_\mathrm{S}}{R} + \frac{M_\mathrm{E}}{R_\mathrm{E}}\right)} = 43{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$

(c) Es muss sein: $\vec{v}_\mathrm{F} + \vec{v}_\mathrm{E} = \vec{v}_\mathrm{FS}$ mit $|\vec{v}_\mathrm{FS}| = v_\mathrm{FS}$.

Für den Betrag v_F gilt dann



in Richtung von $\vec{v}_\mathrm{E}$: $\displaystyle v_\mathrm{F} = v_\mathrm{FS} - v_\mathrm{E} = 13{,}8\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$

senkrecht zu $\vec{v}_\mathrm{E}$: $\displaystyle v_\mathrm{F} = \sqrt{v_\mathrm{FS}^2 - v_\mathrm{E}^2} = 31{,}8\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$

entgegen $\vec{v}_\mathrm{E}$: $\displaystyle v_\mathrm{F} = v_\mathrm{FS} + v_\mathrm{E} = 73{,}4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$

1.5.3. (a) $M = \varrho V = \dfrac{4\pi\varrho R^3}{3} \implies R = \sqrt[3]{\dfrac{3M}{4\pi\varrho}} = 13{,}8\,\mathrm{km}$

$$g = \frac{GM}{R^2} = 6{,}98 \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 7{,}11 \cdot 10^{10} g$$

(b) $g = \dfrac{GM}{R_0^2} = \dfrac{4\pi\varrho G R}{3} \implies R_0 = \dfrac{3g}{4\pi\varrho G} = 1{,}9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$

(c)

$$\Delta g(r) = GM\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+h)^2}\right) = \frac{GM(2rh+h^2)}{r^2(r+h)^2} = \frac{GMh(2r+h)}{r^2(r+h)^2}$$

Für $h \ll r$ gilt $r + h \approx r$ und $2r + h \approx 2r$:

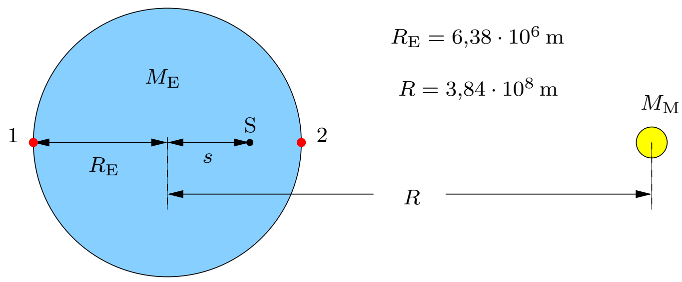
$$\Delta g(r) \approx \frac{2GMh}{r^3} =: \Delta g_n(r)$$

$$\frac{\Delta g(r) - \Delta g_n(r)}{\Delta g(r)} = 1 - \frac{\Delta g_n(r)}{\Delta g(r)} = 1 - \frac{2(r+h)^2}{r(2r+h)} = -\frac{h(3r+2h)}{r(2r+h)} \approx -\frac{3h}{2r}$$

$$r = 100\,\mathrm{km} \implies \frac{\Delta g(r) - \Delta g_n(r)}{\Delta g(r)} = -2{,}7 \cdot 10^{-5}$$

$$\Delta g(r) \approx \frac{2GMh}{r^3} = 100 \cdot g_{\mathrm{Erde}} \implies r = \sqrt[3]{\frac{GMh}{50 g_{\mathrm{Erde}}}} = 787\,\mathrm{km}$$

1.5.4. Der Schwerpunkt S des Systems Erde-Mond hat vom Erdmittelpunkt die Entfernung s:



$$M_{\mathrm{E}} s = M_{\mathrm{M}}(R - s) \implies$$

$$s = \frac{M_{\mathrm{M}} R}{M_{\mathrm{E}} + M_{\mathrm{M}}} = 4{,}66 \cdot 10^6\,\mathrm{m},$$

liegt also innerhalb der Erde.
Das Systems rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2{,}66 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Kräfte, die vom Erdmittelpunkt weg zeigen, sollen positiv sein:

$$F_1 = m\omega^2(R_{\mathrm{E}} + s) - \frac{GM_{\mathrm{M}}m}{(R + R_{\mathrm{E}})^2} = 4{,}61 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot m \qquad (1)$$

$$F_2 = m\omega^2(R_{\mathrm{E}} - s) - \frac{GM_{\mathrm{M}}m}{(R - R_{\mathrm{E}})^2} = 4{,}66 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot m \qquad (2)$$

Auf beiden Seiten wirkt also eine fast gleich große, vom Erdmittelpunkt nach außen zeigende Kraft.

1.6 Umlaufbahnen

1.6.1. $M = M_{\mathrm{Erde}} = 5{,}974 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R = R_{\mathrm{Erde,Äquator}} = 6{,}378 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$
„Zentripetalkraft gleich Gravitationskraft" und $r = R + a$:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2} \implies v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r} \implies r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

Mit $T = 24\,\mathrm{h} = 86400\,\mathrm{s}$ folgt $r = 4{,}225 \cdot 10^4\,\mathrm{km}$ und $a = r - R = 3{,}587 \cdot 10^4\,\mathrm{km}$.
Streng genommen beträgt die Rotationsdauer der Erde in einem Inertialsystem

$$T' = \frac{365{,}25}{366{,}25} \cdot T = 86164\,\mathrm{s}.$$

Damit folgt $r = 4{,}217 \cdot 10^4\,\mathrm{km}$ und $a = r - R = 3{,}579 \cdot 10^4\,\mathrm{km}$.

$$v = \frac{2\pi r}{T'} = 3081\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \left(3072\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \text{ mit } T\right)$$

$$F = \frac{GMm}{r^2} = 0{,}2234\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot m$$

Er fühlt sich schwerelos, weil in seinem (rotierenden) Bezugssystem die nach aussen wirkende Zentrifugalkraft die Schwerkraft exakt aufhebt.

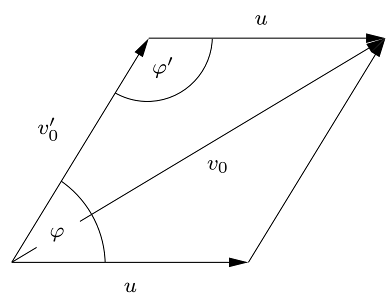
1.6.2. In einem Inertialsystem (nicht beschleunigtes, d.h. auch nicht rotierendes System) gilt: Zentripetalkraft gleich Gravitationskraft. Das nicht rotierende System S, in dem der Erdmittelpunkt ruht, ist näherungsweise ein Inertialsystem.
Mit $R = R_{\mathrm{Erde}} = 6{,}378 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ und $r = R + h = 6{,}578 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ folgt

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 7{,}78\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

v_0 sei die Abschussgeschwindigkeit des Satelliten im Inertialsystem S:

$$\frac{m}{2}v_0^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{m}{2}v^2 - \frac{GMm}{r} \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{v^2 + 2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)}$$

u ist die Geschwindigkeit, mit der sich der Abschussort relativ zu S bewegt, v_0' die Abschussgeschwindigkeit relativ zur Erdoberfläche:



$$v_0^2 = v_0'^2 + u^2 - 2v_0'u\cos\varphi'$$

Wegen $\cos\varphi' = \cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$ ist

$$v_0^2 = v_0'^2 + u^2 + 2v_0'u\cos\varphi$$

$$v_0'^2 + 2v_0'u\cos\varphi = v_0^2 - u^2$$

$$v_0' = -u\cos\varphi \underset{(-)}{+} \sqrt{v_0^2 - u^2\sin^2\varphi}$$

Abschuss am Nord- oder Südpol ($u = 0$):

$$v_0' = v_0 = 8{,}02\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Am Äquator ist

$$u = \frac{2R\pi}{24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} = 0{,}464\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Abschuss am Äquator senkrecht nach oben ($\varphi = 90°$):

$$v_0' = \sqrt{v_0^2 - u^2} = 8{,}01\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Abschuss am Äquator tangential zur Erdoberfläche nach osten ($\varphi = 0°$):

$$v_0' = v_0 - u = 7{,}56\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Abschuss am Äquator tangential zur Erdoberfläche nach westen ($\varphi = 0°$):

$$v_0' = v_0 u u = 8{,}45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

1.6.3. (a) $a = \frac{1}{2}(560 + 21400)\mathrm{km} + R_{\mathrm{E}} = 1{,}736 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$, $\qquad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_{\mathrm{E}}}} = 2{,}275 \cdot 10^4\,\mathrm{s}$

(b) Daten der Bahnellipse:

$r_0 = 560\,\text{km} + R_\text{E} = 6{,}983 \cdot 10^6\,\text{m}$

$r_1 = 2a - r_0 = 2{,}778 \cdot 10^7\,\text{m}$

$e = \dfrac{a - r_0}{a} = 0{,}600$

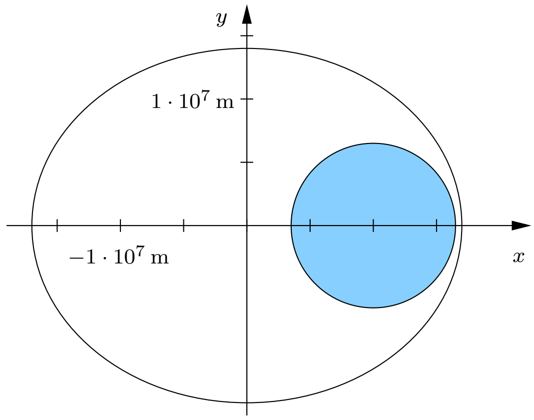
$b = \sqrt{a^2 - d^2} = a\sqrt{1 - e^2} = 1{,}388 \cdot 10^7\,\text{m}$

$d = ea = 1{,}041 \cdot 10^7\,\text{m}$

$p = r_0(1 + e) = 1{,}110 \cdot 10^7\,\text{m}$

Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$



(c) $v_0 = \sqrt{GM_\text{E} \cdot \left(\dfrac{2}{r_0} - \dfrac{1}{a}\right)} = 9593\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}, \qquad v_1 = \sqrt{GM_\text{E} \cdot \left(\dfrac{2}{r_1} - \dfrac{1}{a}\right)} = 2396\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

1.6.4. (a) $\dfrac{T_2^2}{T_1^2} = \dfrac{r_2^3}{r_1^3} \quad \Longrightarrow \quad T_2 = T_1\sqrt{\dfrac{r_2^3}{r_1^3}} = 20\,\text{d} \cdot \sqrt{\left(\dfrac{9}{4}\right)^3} = 20\,\text{d} \cdot \dfrac{27}{8} = 67{,}5\,\text{d}$

(b) $a = \dfrac{r_1 + r_2}{2} = 325\,000\,\text{km}$

$\dfrac{T^2}{T_1^2} = \dfrac{a^3}{r_1^3} \quad \Longrightarrow \quad T = T_1\sqrt{\dfrac{a^3}{r_1^3}} = 20\,\text{d} \cdot \sqrt{\left(\dfrac{13}{8}\right)^3} = 41{,}4\,\text{d}$

(c) $d = a - r_1 = 125\,000\,\text{km}, \quad e = \dfrac{d}{a} = \dfrac{5}{13} \approx 0{,}385$

$b = \sqrt{a^2 - d^2} = \sqrt{9 \cdot 10^{10}\,\text{km}^2} = 300\,000\,\text{km}$

1.6.5. (a) $\dfrac{T_\text{Eu}^2}{a_\text{Eu}^3} = \dfrac{T_\text{Io}^2}{a_\text{Io}^3} = C_\text{Jup} = 4{,}17 \cdot 10^{-17}\,\dfrac{\text{d}^2}{\text{km}^3} \quad \Longrightarrow$

$a_\text{Eu} = \sqrt[3]{\dfrac{T_\text{Eu}^2 a_\text{Io}^3}{T_\text{Io}^2}} = a_\text{Io}\sqrt[3]{\dfrac{T_\text{Eu}^2}{T_\text{Io}^2}} = 1{,}59\,a_\text{Io} = 6{,}71 \cdot 10^5\,\text{km}$

(b) $a = \dfrac{r_1 + r_2}{2} = 5 \cdot 10^5\,\text{km}$

$\dfrac{T^2}{a^3} = C_\text{Jup} \quad \Longrightarrow \quad T = \sqrt{a^3 C_\text{Jup}} = 2{,}28\,\text{d}$

$d = a - r_1 = 3 \cdot 10^5\,\text{km} = ea \quad \Longrightarrow \quad e = \dfrac{d}{a} = 0{,}6$

$b = \sqrt{a^2 - d^2} = a\sqrt{1 - e^2} = 0{,}8\,a = 4 \cdot 10^5\,\text{km}$

(c) $r_4 = \overline{\text{ES}_2} = 2a - r_3 = 6{,}8 \cdot 10^5\,\text{km}$

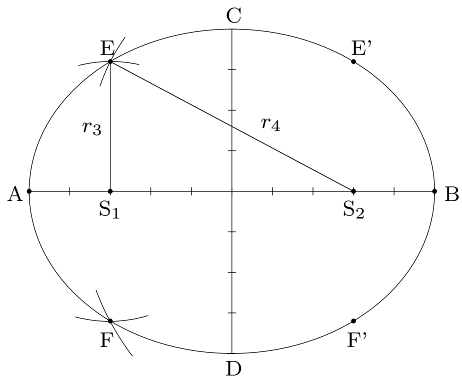
$\text{k}(\text{S}_1, r_3) \cap \text{k}(\text{S}_2, r_4) = \{\text{E,F}\}$

$\overline{\text{S}_1\text{S}_2} = 2d = 6 \cdot 10^5\,\text{km}$

$r_3^2 + \overline{\text{S}_1\text{S}_2}^2 = 46{,}24 \cdot 10^{10}\,\text{km}^2$

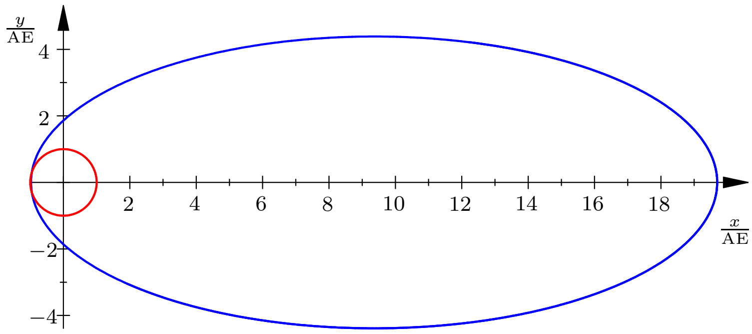
$r_4^2 = 6{,}8^2 \cdot 10^{10}\,\text{km}^2 = r_3^2 + \overline{\text{S}_1\text{S}_2}^2 \quad \Longrightarrow$

$\sphericalangle \text{S}_2\text{S}_1\text{E} = 90°$



1.6.6. (a) $\dfrac{T^2}{a^3} = C_\odot = 1\,\dfrac{\text{a}^2}{\text{AE}^3} \quad \Longrightarrow \quad a = \sqrt[3]{\dfrac{T^2}{C_\odot}} = 10{,}335\,\text{AE}$

$$d = a - r_1 = 9{,}359\,\mathrm{AE} \quad \Longrightarrow \quad b = \sqrt{a^2 - d^2} = 4{,}386\,\mathrm{AE}$$
$$r_2 = a + d = 19{,}694\,\mathrm{AE}$$



(b) $d = ea \quad \Longrightarrow \quad r_{\text{min}} = a - d = a(1-e) \quad \Longrightarrow \quad a = \dfrac{r_{\text{min}}}{1-e} = 187\,\mathrm{AE}$

$$b = a\sqrt{1-e^2} = 18{,}5\,\mathrm{AE}$$
$$\frac{T^2}{a^3} = C_\odot = 1\,\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{AE}^3} \quad \Longrightarrow \quad T = \sqrt{a^3 C_\odot} = 2{,}56 \cdot 10^3\,\mathrm{a}$$

1.6.7. (a) $r_{\text{min}} = \dfrac{c\Delta t_{\text{min}}}{2} + R_{\text{E}} + R_{\text{M}} = 363296\,\mathrm{km}$

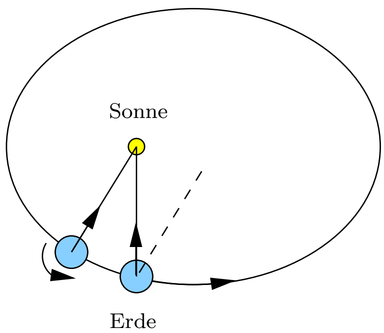
$$r_{\text{max}} = \frac{c\Delta t_{\text{max}}}{2} + R_{\text{E}} + R_{\text{M}} = 405504\,\mathrm{km}$$
$$a_{\text{M}} = \frac{r_{\text{min}} + r_{\text{max}}}{2} = 384400\,\mathrm{km}$$
$$d_{\text{M}} = a_{\text{M}} - r_{\text{min}} = 21104\,\mathrm{km}, \qquad e_{\text{M}} = \frac{d_{\text{M}}}{a_{\text{M}}} = 0{,}0549$$
$$b_{\text{M}} = \sqrt{a_{\text{M}}^2 - d_{\text{M}}^2} = 383820\,\mathrm{km}$$

(b) $T = d_{\text{sid}} = 86164\,\mathrm{s}, \qquad \dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{T_{\text{M}}^2}{a_{\text{M}}^3} \quad \Longrightarrow \quad a = a_{\text{M}} \left(\dfrac{T}{T_{\text{M}}}\right)^{\frac{2}{3}} = 42298\,\mathrm{km}$

über Erdoberfläche: $x = a - R_{\text{E}} = 35920\,\mathrm{km}$

(c) Ein Jahr hat 365,25 24 h-Tage und 366,25 Sterntage:

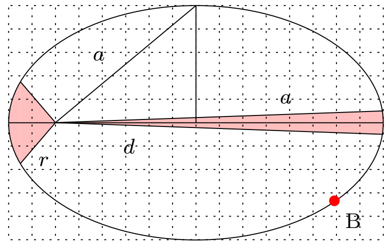
$$365{,}25 \cdot 24\,\mathrm{h} = 366{,}25 \cdot d_{\text{sid}}$$
$$d_{\text{sid}} = \frac{365{,}25}{366{,}25} \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s} = 86164\,\mathrm{s}$$
$$d_{\text{sid}} = 23\,\mathrm{h}\,56\,\mathrm{min}\,4\,\mathrm{s}$$



1.6.8. (a) $\frac{T_A^2}{r^3} = \frac{T_B^2}{a^3} = \frac{64T_A^2}{a^3} \quad\Longrightarrow\quad a = \sqrt[3]{64r^3} = 4r$

$d = a - r = 3r \quad\Longrightarrow$

$b = \sqrt{a^2 - d^2} = \sqrt{16r^2 - 9r^2} = r\sqrt{7} \approx 2{,}65r$



(b) „Der Strahl Zentralkörper–Umlaufkörper überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.“

$$\frac{1}{2}v_1\Delta t \cdot r = \frac{1}{2}v_2\Delta t \cdot 7r \quad\Longrightarrow\quad v_2 = \frac{v_1}{7} = 1200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

1.6.9. (a) $M_\mathrm{M} + M_\mathrm{Erde} = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = 6{,}051 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \quad\Longrightarrow\quad M_\mathrm{M} = 6{,}051 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} - M_\mathrm{Erde} \approx 7{,}4 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$

(b) Da die Planetenmassen sehr klein gegen die Sonnenmasse M sind, gilt für zwei Planeten mit den Massen m_1 und m_2:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m_1)} \approx \frac{4\pi^2}{G(M+m_2)} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$

Als Beispiel betrachten wir den Merkur und den Jupiter:

$$\frac{4\pi^2}{G(M+M_\mathrm{Jup})} = 1{,}9829 \cdot 10^{-29}\,\frac{1}{\mathrm{kg}}, \qquad \frac{4\pi^2}{G(M+M_\mathrm{Mer})} = 1{,}9848 \cdot 10^{-29}\,\frac{1}{\mathrm{kg}}$$

1.6.10. (a) $a = \frac{r_\mathrm{E} + r_\mathrm{J}}{2} = 4{,}64 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$

$$v_0 = \sqrt{GM_\mathrm{S} \cdot \left(\frac{2}{r_\mathrm{E}} - \frac{1}{a}\right)} = 3{,}86 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad v_1 = \sqrt{GM_\mathrm{S} \cdot \left(\frac{2}{r_\mathrm{J}} - \frac{1}{a}\right)} = 7{,}42 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\frac{mv_\mathrm{K}^2}{r_\mathrm{E}} = \frac{GmM_\mathrm{S}}{r_\mathrm{E}} \quad\Longrightarrow\quad v_\mathrm{K} = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{S}}{r_\mathrm{E}}} = 2{,}98 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(b) Umlaufzeit:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_\mathrm{S}}} = 1{,}72 \cdot 10^8\,\mathrm{s}$$

Flugdauer:

$$\Delta t = \frac{T}{2} = 8{,}61 \cdot 10^7\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{a}\,266\,\mathrm{d}$$

1.6.11. (a) Im SP-System:

$\frac{r_\mathrm{L}}{r_\mathrm{S}} = \frac{4{,}2}{7} = \frac{3}{5}$

$a_\mathrm{S} = 5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}, \;\; d_\mathrm{S} = 3 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$

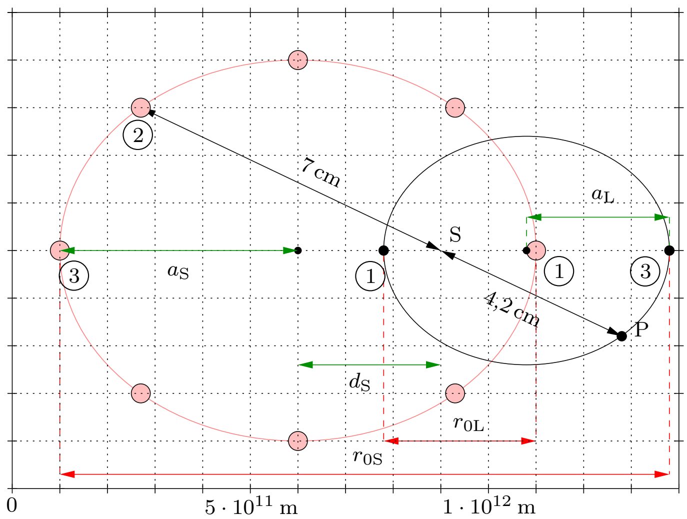
$e = \frac{d}{a} = \frac{3}{5}$

$\overline{\mathrm{S_1S}} = 2 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$

$\overline{\mathrm{L_1S}} = \frac{3}{5} \cdot \overline{\mathrm{S_1S}} = 1{,}2 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$

$\overline{\mathrm{S_3S}} = 8 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$

$\overline{\mathrm{L_3S}} = \frac{3}{5} \cdot \overline{\mathrm{S_3S}} = 4{,}8 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$



(b) im System von S (Stern): $\quad r = r_\mathrm{L} + r_\mathrm{S} = \frac{8}{5}r_\mathrm{S} = 1{,}6r_\mathrm{S}, \quad a = 1{,}6a_\mathrm{S} = 8 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$

$$M = m_\mathrm{S} + m_\mathrm{L} = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = 2{,}40 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg}$$

$$\frac{m_\mathrm{S}}{m_\mathrm{L}} = \frac{r_\mathrm{L}}{r_\mathrm{S}} = \frac{3}{5} \quad \Longrightarrow \quad m_\mathrm{S} + m_\mathrm{L} = 1{,}6 m_\mathrm{L} = M$$

$$m_\mathrm{L} = 1{,}50 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg}, \quad m_\mathrm{S} = 0{,}90 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg}$$

(c) Winkelauflösung beim HST:

$$\delta = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{D} = 0{,}063''$$

Fehler bei der Ortsbestimmung in 20 LJ Entfernung:

$$\Delta a = \delta \cdot 20\,\mathrm{LJ} = 5{,}8 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m} = 0{,}072 a \approx \Delta a$$

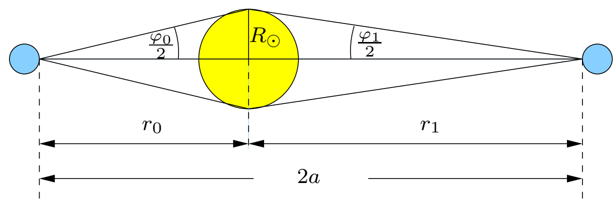
Da die Winkelauflösung mit VLBI besser ist, berücksichtigen wir nur den Fehler des HST.

$$M_\mathrm{max} = \frac{4\pi^2(a+\Delta a)^3}{GT^2} = 2{,}96 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg}, \quad M_\mathrm{min} = \frac{4\pi^2(a-\Delta a)^3}{GT^2} = 1{,}92 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg}$$

$$\delta_\mathrm{rel} = \frac{M_\mathrm{max} - M_\mathrm{min}}{M_\mathrm{max} + M_\mathrm{min}} \approx 21\%$$

1.6.12. (a) $\tan\frac{\varphi_0}{2} = \frac{R_\odot}{r_0}, \quad \tan\frac{\varphi_1}{2} = \frac{R_\odot}{r_1}$

$$\alpha := \frac{r_0}{r_1} = \frac{\tan\frac{\varphi_1}{2}}{\tan\frac{\varphi_0}{2}} = 0{,}96715$$



$$e = \frac{r_1 - a}{a} = \frac{2r_1 - 2a}{2a} = \frac{2r_1 - r_1 - r_0}{r_1 + r_0} = \frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0} = \frac{1 - \frac{r_0}{r_1}}{1 + \frac{r_0}{r_1}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 0{,}0167$$

$$2a = r_0 + r_1 = R_\odot \left(\frac{1}{\tan\frac{\varphi_0}{2}} + \frac{1}{\tan\frac{\varphi_1}{2}} \right) \quad \Longrightarrow \quad R_\odot = 6{,}96 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$$

$$a = 1\,\mathrm{AE}, \qquad b = a\sqrt{1-e^2} = 0{,}99986 \cdot a$$

$$r_0 = a(1-e) = 0{,}9833a, \qquad r_1 = a(1+e) = 1{,}0167a$$

(b) Da $M_\mathrm{Erde} \ll M_\odot$ gilt

$$M_\odot = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$$

(c) $$v_0 = \sqrt{GM_\odot \cdot \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{GM_\odot(1+e)}{a(1-e)}} = 30{,}3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

$$v_1 = \sqrt{GM_\odot \cdot \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{GM_\odot(1-e)}{a(1+e)}} = 29{,}3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

1.6.13. $r_\mathrm{P} = 2500\,\mathrm{km}, \quad r_\mathrm{C} = 17500\,\mathrm{km}, \quad r = r_\mathrm{P} + r_\mathrm{C} = 2{,}0 \cdot 10^7\,\mathrm{m}, \quad T = 2\Delta t = 551880\,\mathrm{s}$

$$M = m_\mathrm{P} + m_\mathrm{C} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = 1{,}554 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$$

$$\frac{m_\mathrm{P}}{m_\mathrm{C}} = \frac{r_\mathrm{C}}{r_\mathrm{P}} = 7 \quad \Longrightarrow \quad M = 8m_\mathrm{C}, \quad m_\mathrm{C} = \frac{M}{8} = 1{,}94 \cdot 10^{21}\,\mathrm{kg}, \quad m_\mathrm{P} = 7m_\mathrm{C} = 1{,}36 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$$

1.6.14. (a) Mit der Dopplerformel:

$$\lambda_1 = \lambda_0 \sqrt{\frac{1-\beta_1}{1+\beta_1}} \quad \Longrightarrow \quad \beta_1 = \frac{\lambda_0^2 - \lambda_1^2}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2} = 3{,}8084 \cdot 10^{-4} \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \beta_1 c = 1{,}14172 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\lambda_2 = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\beta_2}{1-\beta_2}} \quad \Longrightarrow \quad \beta_2 = \frac{\lambda_2^2 - \lambda_0^2}{\lambda_2^2 + \lambda_0^2} = 2{,}28499 \cdot 10^{-4} \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \beta_2 c = 6{,}85024 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

v_1 und v_2 sind die Umlaufgeschwindigkeiten der beiden Sterne. Zum Zeitpunkt der Messung bewegt sich der schnellere Stern auf den Beobachter zu, der langsamere von ihm weg.

(b) $2\pi r = vT \quad\Longrightarrow$

$$r_1 = \frac{v_1 T}{2\pi} = 1{,}00\cdot 10^{10}\,\mathrm{m},\qquad r_1 = \frac{v_2 T}{2\pi} = 6{,}00\cdot 10^{9}\,\mathrm{m},\qquad a = r_1 + r_2 = 1{,}60\cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$$

$$M = m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = 8{,}00\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{3}{5} \quad\Longrightarrow\quad M = m_1 + m_2 = \frac{8}{5}m_2 \quad\Longrightarrow$$

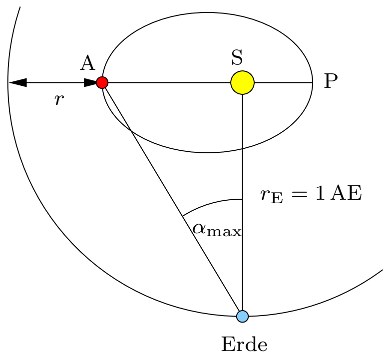
$$m_2 = 5{,}00\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg},\qquad m_1 = 3{,}00\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$$

1.6.15. (a) $\overline{\mathrm{AS}} = a(1+e) = 0{,}4667\,\mathrm{AE}$

$\overline{\mathrm{SP}} = a(1-e) = 0{,}3075\,\mathrm{AE}$

$\tan\alpha_{\max} = \frac{\overline{\mathrm{AS}}}{1\,\mathrm{AE}} = 0{,}4667$

$\alpha_{\max} = 0{,}4366 = 25{,}0°$



(b) Da der Merkur sehr nahe an der Sonne ist, kann er nach Sonnenuntergang nur im Westen beobachtet werden.

(c) $\frac{mv^2}{r_\mathrm{S}} = \frac{GmM}{r_\mathrm{S}^2}$ und $v = \frac{2\pi r_\mathrm{S}}{T_\mathrm{S}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{4\pi^2 r_\mathrm{S}^2}{T_\mathrm{S}^2} = \frac{GM}{r_\mathrm{S}} \quad\Longrightarrow\quad M = \frac{4\pi^2 r_\mathrm{S}^3}{GT_\mathrm{S}^2} = 3{,}31\cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}$

(d) $r = r_\mathrm{E} - \overline{\mathrm{AS}} = 0{,}5333\,\mathrm{AE} = 1{,}978\cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$

$$\frac{\delta}{2} \approx \tan\frac{\delta}{2} = \frac{R}{r} \quad\Longrightarrow\quad R \approx \frac{r\delta}{2} = 2{,}437\cdot 10^{6}\,\mathrm{m} = 2437\,\mathrm{km}$$

1.6.16. leer

2 Das Sonnensystem

2.1 Aufbau des Sonnensystems

2.1.1. (a) Betrachtet man die Umlaufbahnen von Erde, Venus und Merkur als Kreise mit den Radien

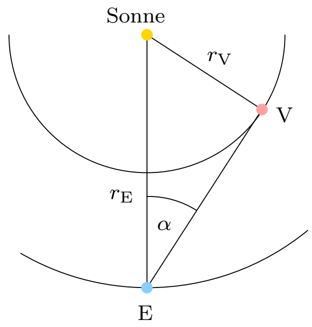
$$r_E = 1\,\mathrm{AE}, \quad r_V = 0{,}7233\, r_E \text{ und } r_M = 0{,}3871\, r_E,$$

dann erhält man für die maximale Elongation der Venus

$$\alpha_V = \arcsin\frac{r_V}{r_E} = \arcsin 0{,}7233 = 46{,}3°$$

und für den Merkur

$$\alpha_M = \arcsin\frac{r_M}{r_E} = \arcsin 0{,}3871 = 22{,}8°$$

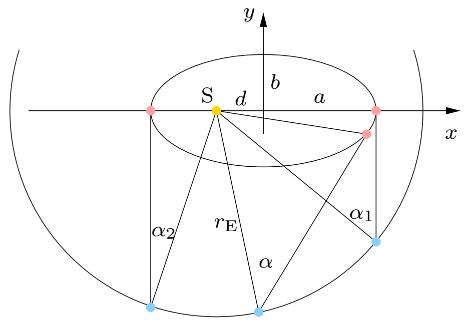


(b) Mit $a = 0{,}3871 \cdot r_E$ folgt für den maximalen Elongationswinkel

$$\alpha_1 = \arcsin\frac{a(1+e)}{r_E} = \arcsin 0{,}4667 = 27{,}8°$$

Steht Merkur im Perihel, ist der maximale Elongationswinkel

$$\alpha_2 = \arcsin\frac{a(1-e)}{r_E} = \arcsin 0{,}3075 = 17{,}9°$$



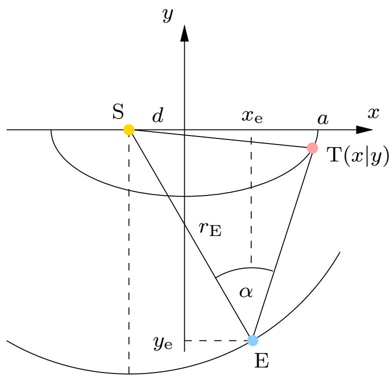
Herleitung der Behauptung in der Angabe:

Die Tangente von der Erde an die Merkurbahn berührt die Merkurbahn in T und bildet mit der Geraden Erde-Sonne den Winkel α. Der Mittelpunkt der Bahnellipse des Merkurs bildet den Ursprung eines Koordinatensystems, die x-Achse zeigt zum Perihel. Koordinaten der Erde:

$$x_e \text{ und } y_e = -\sqrt{r_E^2 - (x_e + d)^2}$$

mit $d = (1+e)a$. Aus der Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



mit $b = \sqrt{a^2 - d^2}$ folgt für die Gleichung der unteren Hälfte der Merkurbahn:

$$y = f(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad f'(x) = \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Gleichung einer Tangente von E an die Merkurbahn:

$$\frac{f(x) - y_e}{x - x_e} = f'(x) \quad \Longrightarrow \quad \left(-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} - y_e\right) a\sqrt{a^2 - x^2} = bx(x - x_e)$$

$$-ay_e\sqrt{a^2 - x^2} = b(a^2 - x_e x) \quad \Longrightarrow \quad a^2 y_e^2 (a^2 - x^2) = b^2 (a^2 - x_e x)^2$$

Umformen führt auf die quadratische Gleichung

$$(a^2 y_e^2 + b^2 x_e^2) x^2 - 2a^2 b^2 x_e x = a^4 (y_e^2 - b^2)$$

mit der Lösung

$$x = \frac{a^2}{a^2 y_e^2 + b^2 x_e^2} \cdot \left[b^2 x_e \pm y_e \sqrt{a^2 y_e^2 + b^2 x_e^2 - a^2 b^2}\right]$$

Aus x kann man $y = f(x)$ berechnen und kennt damit die Vektoren

$$\overrightarrow{\mathrm{ES}} = -\begin{pmatrix} x_\mathrm{e} + d \\ y_\mathrm{e} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{\mathrm{ET}} = \begin{pmatrix} x - x_\mathrm{e} \\ y - y_\mathrm{e} \end{pmatrix}.$$

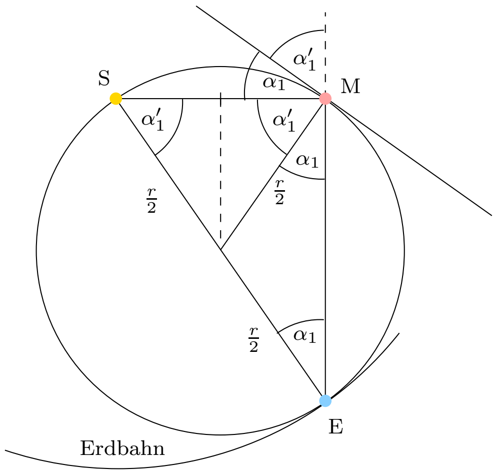
Mit Hilfe des Skalarprodukts findet man

$$\alpha = \arccos \frac{\overrightarrow{\mathrm{ES}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ET}}}{|\overrightarrow{\mathrm{ES}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{ET}}|}$$

Drückt man in α die Größen x, y und y_e durch x_e aus, erhält man den recht umfangreichen Term für $\alpha(x_\mathrm{e})$. Den Term der Ableitung $\alpha'(x_\mathrm{e})$ kann man nur noch als gigantisch bezeichnen. Mit den Mitteln der Analysis ist es also äußerst umfangreich, die Gültigkeit von $\alpha'(a) = 0$ zu zeigen.

Es gibt aber eine einfache elementargeometrische Methode zum Beweis der in der Angabe gemachten Behauptung.

Merkur (M) sei an einer beliebigen Stelle und $\sphericalangle$SME $= 90°$. Für jeden Punkt P auf dem Fasskreisbogen (Teil des Kreises durch S, M und E unterhalb von SM) gilt $\sphericalangle$MPS $= \alpha_1$, für jeden Punkt außerhalb des Fasskreisbogens und unterhalb von SM gilt $\sphericalangle$MPS $< \alpha_1$. Wegen $\alpha_1 + \alpha_1' = 90°$ ist der Mittelpunkt des Fasskreisbogens gleich dem Mittelpunkt der Strecke [SE]. Somit liegt die Erdbahn (bis auf E) vollständig außerhalb des Fasskreisbogens und die Elongation des Merkurs ist im gezeichneten Punkt E der Erdbahn am größten.:



$$\sin \alpha_1 = \frac{\overline{\mathrm{SM}}}{r}$$

Die absolut maximale Elongation erhält man für das maximale $\overline{\mathrm{SM}}$, d.h. für $\overline{\mathrm{SM}} = a + d$:

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{a + d}{r}$$

2.1.2. Blickrichtungen von der Erde auf den Mars in einem zu den Fixsternen festen Koordinatensystem während eines Jahres:

$$\omega_M = \frac{2\pi}{T_M}, \quad \omega_E = \frac{2\pi}{T_E}$$

Ort des Marses:

$$\vec{r}_M(t) = \begin{pmatrix} -r_M \sin \omega_M t \\ r_M \cos \omega_M t \end{pmatrix}$$

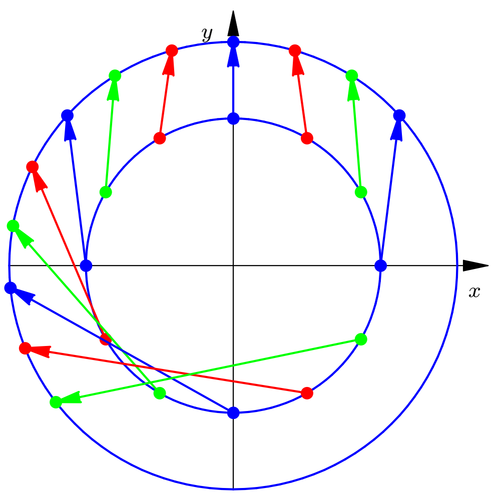
Ort der Erde:

$$\vec{r}_E(t) = \begin{pmatrix} -r_E \sin \omega_E t \\ r_E \cos \omega_E t \end{pmatrix}$$

Blickrichtung:

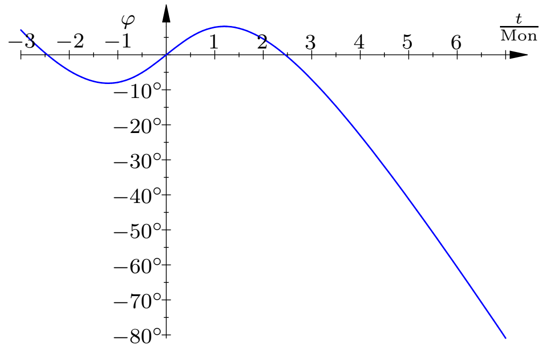
$$\overrightarrow{\mathrm{EM}}(t) = \vec{r}_M(t) - \vec{r}_E(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} -r_M \sin \omega_M t + r_E \sin \omega_E t \\ r_M \cos \omega_M t - r_E \cos \omega_E t \end{pmatrix}$$



Winkel φ zwischen Blickrichtung und y-Achse:

$$\tan\varphi = \frac{r_M \cos\omega_M t - r_E \cos\omega_E t}{-r_M \sin\omega_M t + r_E \sin\omega_E t}$$



2.1.3. Hier muss man mit den „Jahren“ aufpassen:

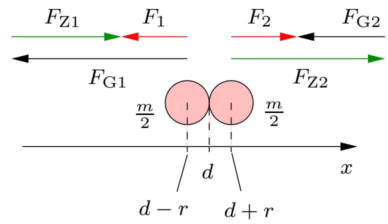
$$1\,\mathrm{a} = a_{\text{bürg}} = 365{,}2425 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s} = 31\,556\,952{,}00\,\mathrm{s}, \qquad a_{\text{sid}} = 31\,558\,149{,}53\,\mathrm{s}$$

$$T_{\text{syn}} = 1\,a_{\text{bürg}}\,1\,\mathrm{d}\,11\,\mathrm{h}\,52\,\mathrm{min}\,14\,\mathrm{s} = 31\,686\,086\,\mathrm{s}$$

$$\frac{1}{T_{\text{sid}}} = \frac{1}{a_{\text{sid}}} - \frac{1}{T_{\text{syn}}}$$

$$T_{\text{sid}} = \frac{1}{\frac{1}{a_{\text{sid}}} - \frac{1}{T_{\text{syn}}}} = 7\,816\,021\,812\,\mathrm{s} = 247{,}68\,\mathrm{a}$$

2.1.4. (a) Näherung für $\frac{r}{d} \ll 1$:



$$\frac{1}{(d\pm r)^2} = \frac{1}{d^2\left(1 \pm \frac{r}{d}\right)^2} \approx \frac{1}{d^2\left(1 \pm \frac{2r}{d}\right)} \approx \frac{1 \mp \frac{2r}{d}}{d^2}$$

Winkelgeschwindigkeit des Umlaufs für $M \gg m$:

$$m\omega^2 d = \frac{GMm}{d^2} \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{GM}{d^3}$$

Im mitrotierenden System, in dem der Mond ruht, wirken Gravitations- und Zentrifugalkräfte auf die Mondhälften:

$$\begin{aligned}
F_{G1} &= -\frac{GM \cdot \frac{m}{2}}{(d-r)^2} \approx -\frac{GMm}{2d^2} \cdot \left(1 + \frac{2r}{d}\right) \\
F_{G2} &= -\frac{GM \cdot \frac{m}{2}}{(d+r)^2} \approx -\frac{GMm}{2d^2} \cdot \left(1 - \frac{2r}{d}\right) \\
F_{Z1} &= \frac{m}{2}\omega^2(d-r) = \frac{GMm}{2d^2} \cdot \left(1 - \frac{r}{d}\right) \\
F_{Z2} &= \frac{m}{2}\omega^2(d+r) = \frac{GMm}{2d^2} \cdot \left(1 + \frac{r}{d}\right) \\
F_1 &= F_{G1} + F_{Z1} = -\frac{GMm}{2d^2} \cdot \frac{3r}{d} \\
F_2 &= F_{G2} + F_{Z2} = \frac{GMm}{2d^2} \cdot \frac{3r}{d}
\end{aligned}$$

Die beiden Mondhälften werden mit der Kraft

$$\Delta F = F_2 - F_1 = \frac{GMm}{2d^2} \cdot \frac{6r}{d} = \frac{3GMmr}{d^3}$$

auseinandergezogen. Der Mond wird zerrissen, wenn ΔF größer ist als die ihn zusammen haltende Gravitationskraft:

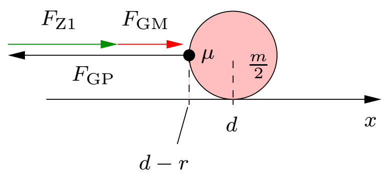
$$\frac{3GMmr}{d^3} > \frac{G\left(\frac{m}{2}\right)^2}{(2r)^2} = \frac{Gm^2}{16r^2} \quad \Longrightarrow \quad d < r \cdot \sqrt[3]{\frac{48M}{m}} =: d_{\mathrm{R}}$$

(b) $M = \frac{4\pi}{3}\varrho_\mathrm{P} R^3, \quad m = 2 \cdot \frac{4\pi}{3}\varrho_\mathrm{M} r^3 \quad \Longrightarrow \quad d_\mathrm{R} = R \cdot \sqrt[3]{\frac{24\varrho_\mathrm{P}}{\varrho_\mathrm{M}}} = 2{,}88R\sqrt[3]{\frac{\varrho_\mathrm{P}}{\varrho_\mathrm{M}}}$

In der Literatur werden oft die Zentrifugalkräfte nicht berücksichtigt:

$$\Delta F = F_\mathrm{G2} - F_\mathrm{G1} = \frac{2GMmr}{d^3} \quad \Longrightarrow \quad d'_\mathrm{R} = r \cdot \sqrt[3]{\frac{32M}{m}} = R \cdot \sqrt[3]{\frac{16\varrho_\mathrm{P}}{\varrho_\mathrm{M}}} = 2{,}52R\sqrt[3]{\frac{\varrho_\mathrm{P}}{\varrho_\mathrm{M}}}$$

Eine andere Möglichkeit zur Definition der Roche-Grenze: Ein Teilchen der Masse μ an der dem Planeten zugwandten Seite des Mondes wird abgelöst, d.h. die Gesamtkraft auf das Teilchen im System des Mondes ist null:



$$\frac{GM\mu}{(d-r)^2} = \mu\omega^2(d-r) + \frac{Gm\mu}{r^2}$$

$$\frac{GM\mu}{d^2}\left(1+\frac{2r}{d}\right) \approx \frac{GM\mu}{d^2}\left(1-\frac{r}{d}\right) + \frac{Gm\mu}{r^2}$$

$$\frac{3GM\mu r}{d^3} = \frac{Gm\mu}{r^2} \quad \Longrightarrow \quad d = d_\mathrm{r} = r \cdot \sqrt[3]{\frac{3M}{m}} = R \cdot \sqrt[3]{\frac{3\varrho_\mathrm{P}}{\varrho_\mathrm{M}}} = 1{,}44R\sqrt[3]{\frac{\varrho_\mathrm{P}}{\varrho_\mathrm{M}}}$$

(c) $\varrho_\mathrm{P} = \varrho_\mathrm{M} \quad \Longrightarrow \quad d_\mathrm{R} = 2{,}88R > d_\mathrm{A}$

2.2 Eigenschaften der Planeten

2.2.1. leer

2.2.2. leer

2.2.3. leer

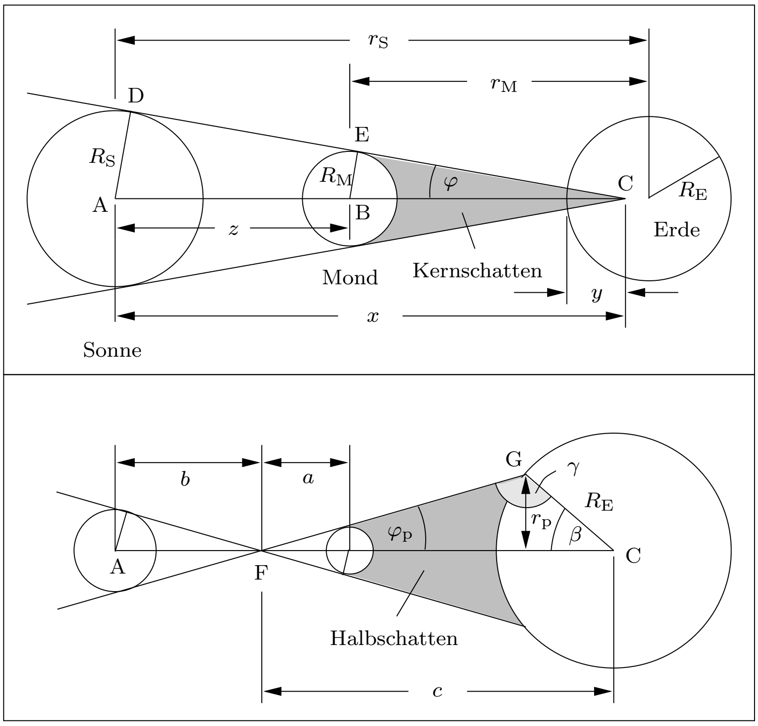
2.2.4. leer

2.3 Der Mond

2.3.1. leer

2.3.2. leer

2.3.3.
$$a_{\rm M} = 3{,}844 \cdot 10^8\,\text{m}$$
$$e_{\rm M} = 0{,}0549$$
$$R_{\rm M} = 1{,}738 \cdot 10^6\,\text{m}$$
$$a_{\rm S} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\text{m}$$
$$e_{\rm S} = 0{,}0167$$
$$R_{\rm S} = 6{,}96 \cdot 10^8\,\text{m}$$



(a)
$$r_{\rm M,min} = a_{\rm M}(1-e_{\rm M}) = 3{,}633\cdot 10^8\,\text{m} \quad , \quad r_{\rm M,max} = a_{\rm M}(1+e_{\rm M}) = 4{,}055\cdot 10^8\,\text{m}$$
$$\delta_{\rm M,min} = 2\ \arctan\frac{R_{\rm M}}{r_{\rm M,max}} = 0{,}4911^\circ \quad , \quad \delta_{\rm M,max} = 2\ \arctan\frac{R_{\rm M}}{r_{\rm M,min}-R_{\rm E}} = 0{,}5580^\circ$$

(b)
$$r_{\rm S,min} = a_{\rm S}(1-e_{\rm S}) = 3{,}633\cdot 10^8\,\text{m} \quad , \quad r_{\rm S,max} = a_{\rm S}(1+e_{\rm S}) = 4{,}055\cdot 10^8\,\text{m}$$
$$\delta_{\rm S,min} = 2\ \arctan\frac{R_{\rm S}}{r_{\rm S,max}} = 0{,}5244^\circ \quad , \quad \delta_{\rm S,max} = 2\ \arctan\frac{R_{\rm S}}{r_{\rm S,min}-R_{\rm E}} = 0{,}5422^\circ$$

(c) Kleinster Mond, größte Sonne: $\dfrac{\delta^2_{\rm M,min}}{\delta^2_{\rm S,max}} = 0{,}820 = 82{,}0\,\%$

(d) Aus den Bedingungen der Angabe folgt die Situation in den Abbildungen.

$$z = r_{\rm S,min} - r_{\rm M,max}, \qquad \frac{x}{x-z} = \frac{R_{\rm S}}{R_{\rm M}} \implies x = 1{,}521\cdot 10^{11}\,\text{m}$$

$$\varphi = \arcsin\frac{R_{\rm S}}{x}, \quad y = x - R_{\rm S,max} + R_{\rm E}, \quad r = y\cdot\varphi = \underline{\underline{105\,\text{km}}}$$

$$v = \frac{r_{\rm S,max} - r_{\rm E}}{r_{\rm S,max} - r_{\rm M,min}} \cdot \sqrt{\gamma\, M_{\rm E}\left(\frac{2}{r_{\rm M,min}} - \frac{1}{a_{\rm M}}\right)} - \frac{2\,\pi}{1\,\text{d}}\cdot R_{\rm E} = \underline{\underline{615\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

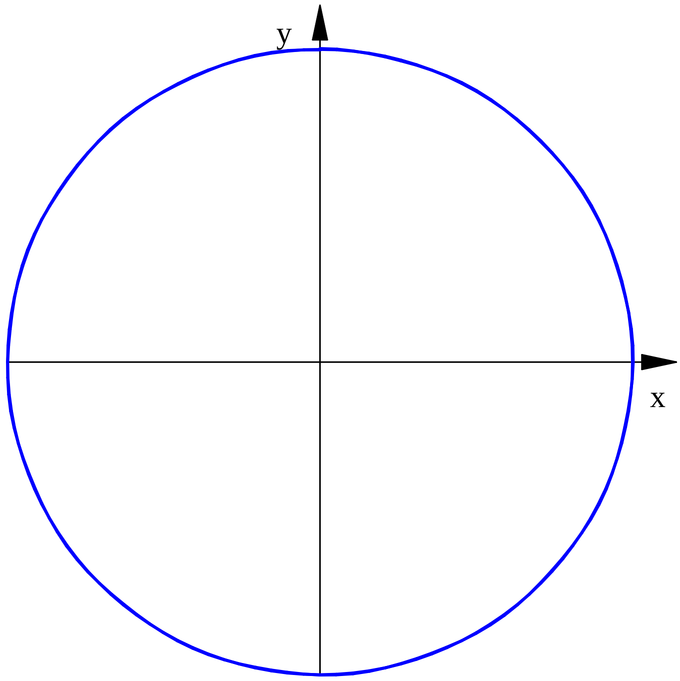
$$\Delta t_{\rm total} = \frac{2\,r}{v} = \underline{\underline{341\,\text{s}}}$$

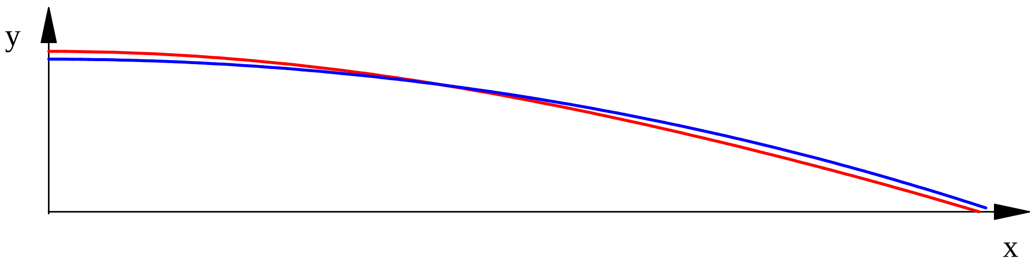
$$a = 3{,}780\cdot 10^8\,\text{m},\ b = 1{,}514\cdot 10^{11}\,\text{m},\ c = 7{,}412\cdot 10^8\,\text{m},\ \varphi_{\rm p} = 0{,}2635^\circ$$

$$\gamma = \arcsin\frac{c\,\sin\varphi_{\rm p}}{R_{\rm E}} = 32{,}304^\circ, \quad \beta = 180^\circ - \gamma - \varphi_{\rm p} = 147{,}433^\circ$$

Radius des partiellen Sichtbarkeitsbereichs: $r_{\rm p} = R_{\rm E}\,\sin\beta = \underline{\underline{3433\,\text{km}}}$

2.3.4.





2.4 Allerlei Kleinzeug

2.4.1. leer

2.4.2. leer

2.4.3. leer

2.5 Nützliches aus der Theorie der Wärme und der Strahlung

2.5.1. Absorbierte Leistung:

$$P_{\mathrm{A}} = (1-A) \cdot R^2\,\pi \cdot \frac{L_\odot}{4\,\pi\,r^2} = 1-A) \cdot R^2\,\pi \cdot \frac{\sigma \cdot R_\odot^2 \cdot T_\odot^4}{r^2}$$

Emittierte Leistung:

$$P_{\mathrm{E}} = \sigma\,\varepsilon_{\mathrm{P}} \cdot 4\,R^2\,\pi \cdot T^4 = P_{\mathrm{A}} \quad \Longrightarrow$$

$$T = T_\odot \cdot \left(\frac{1-A}{\varepsilon_{\mathrm{P}}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{R_\odot}{2\,r}}$$

Mit $R_\odot = 6{,}96 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$ und $r = r_{\mathrm{Jup}} = 7{,}78 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ folgt

$$T_{\mathrm{Europa}} = 95\,\mathrm{K}, \qquad T_{\mathrm{Callisto}} = 116\,\mathrm{K}$$

2.5.2.

$$T = T_\odot \cdot \left(\frac{1-A}{\varepsilon_{\mathrm{P}}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{R_\odot}{2\,r}} = \begin{cases} 88\,\mathrm{K} & \text{für } \varepsilon_{\mathrm{P}} = 1 \\ 105\,\mathrm{K} & \text{für } \varepsilon_{\mathrm{P}} = 0{,}5 \end{cases}$$

$$T_{\mathrm{real}} = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mK}}{22{,}3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}} = 130\,\mathrm{K}$$

Eigenwärme des Jupiters!

2.5.3. (a) $T_{\mathrm{R}} = \dfrac{2{,}898 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mK}}{\lambda_{\max}} = 1{,}23 \cdot 10^4\,\mathrm{K}$

$$L = \sigma \cdot 4\pi (19 R_\odot)^2 T_{\mathrm{R}}^4 = 2{,}9 \cdot 10^{30}\,\mathrm{W}$$

(b) $E = \dfrac{L}{4\pi r^2} \quad \Longrightarrow \quad r = \sqrt{\dfrac{L}{4\pi E}} = 8{,}5 \cdot 10^{18}\,\mathrm{m} = 900\,\mathrm{LJ}$

(c) Erdähnlich: $A = 0{,}37$, $\varepsilon = 0{,}6$, $T = 282\,\mathrm{K}$.

$$T = T_{\mathrm{R}} \cdot \left(\frac{1-A}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{R}{2\,r}} \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{R T_{\mathrm{R}}^2}{2 T^2} \sqrt{\frac{1-A}{\varepsilon}} = 1{,}29 \cdot 10^{13}\,\mathrm{m} = 86\,\mathrm{AE}$$

$$t = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = 5{,}64 \cdot 10^9\,\mathrm{s} = 179\,\mathrm{a}$$

(d) $T' = T_{\mathrm{R}} \cdot \left(\dfrac{1-A}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\dfrac{R}{2\,\mathrm{AE}}} = T \sqrt{\dfrac{r}{\mathrm{AE}}} = 2{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{K}$

2.5.4. (a) Fläche Pupille: $A_0 = (4\,\mathrm{mm})^2 \pi = 5{,}0 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^2$

Intensität am Ort des Auges: $E_0 = \dfrac{10^4 h f}{A_0\,\mathrm{s}} = 6{,}6 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

Intensität der Sonnenstrahlung am Ort der Erde: $E_{\mathrm{S}} = 1400\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

$$\frac{E(r)}{E(1\,\mathrm{AE})} = \frac{E_0}{E_{\mathrm{S}}} = \frac{1\,\mathrm{AE}^2}{r^2} \quad \Longrightarrow \quad r = 1\,\mathrm{AE} \sqrt{\frac{1400}{6{,}6 \cdot 10^{-11}}} = 6{,}9 \cdot 10^{17}\,\mathrm{m} = 73\,\mathrm{LJ}$$

(b) $E(r) = E_{\mathrm{S}} \cdot \dfrac{1\,\mathrm{AE}^2}{r^2} = 3{,}9 \cdot 10^{-18}\,\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

Mit dem Objektivradius R des Teleskops gilt

$$E(r) \cdot R^2 \pi = E_0 A_0 \quad \Longrightarrow \quad D = 2R = 2\sqrt{\frac{E_0 A_0}{\pi E(r)}} \approx 33\,\mathrm{m}$$

Auge durch Fotoplatte oder Bildsensor ersetzen und lange belichten!

2.5.5. (a) Mit $L_\odot = 3{,}84 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$ und $r = 1\,\mathrm{AE} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ ist

$$E(r) = \frac{L_\odot}{4\pi r^2} = 1367\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

$$m = -2{,}5^\mathrm{m} \cdot \lg \frac{E(r)}{E^*} = -26{,}85^\mathrm{m}$$

Mit $r_0 = 10\,\mathrm{pc} = 3{,}086 \cdot 10^{17}\,\mathrm{m}$ ist

$$M = m + 5^\mathrm{m} \cdot \lg \frac{r_0}{r} = 4{,}72^\mathrm{m}$$

(b) $m - M = 5^\mathrm{m} \cdot \lg \dfrac{r}{r_0} \quad \Longrightarrow \quad r = r_0 \cdot 10^{\frac{m-M}{5^\mathrm{m}}}$

$$m = 7^\mathrm{m} \quad \Longrightarrow \quad r = 28{,}6\,\mathrm{pc} = 8{,}82 \cdot 10^{17}\,\mathrm{m} = 93\,\mathrm{LJ}$$

$$m = 24^\mathrm{m} \quad \Longrightarrow \quad r = 7{,}2 \cdot 10^3\,\mathrm{pc} = 2{,}2 \cdot 10^{21}\,\mathrm{m} = 2{,}3 \cdot 10^5\,\mathrm{LJ}$$

(c) $r = 8{,}82 \cdot 10^{17}\,\mathrm{m} \quad \Longrightarrow \quad E(r) = 1367\,\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \cdot \dfrac{\mathrm{AE}^2}{r^2} = 3{,}93 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

Auf die Pupillenfläche $A_\mathrm{p} = \dfrac{\pi D^2}{4} = 7{,}85 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^2$ trifft die Leistung

$$P_\mathrm{p} = E(r) \cdot A_\mathrm{p} = 3{,}09 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{W}$$

Mit der Photonenenergie

$$W_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda} = 3{,}61 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

entspricht das

$$n = \frac{P_\mathrm{p}}{W_\gamma} = 8{,}55 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{Photonen}}{\mathrm{s}}$$

(d) Die Intensität des Sterns mit $m = 24^\mathrm{m}$ am Ort des Beobachters ist E_1:

$$m = -2{,}5^\mathrm{m} \cdot \lg \frac{E_1}{E^*} \quad \Longrightarrow \quad E_1 = E^* \cdot 10^{-\frac{m}{2{,}5^\mathrm{m}}} = 6{,}23 \cdot 10^{-18}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

In die Pupille muss die Leistung (siehe (c)) $P_\mathrm{p} = 3{,}09 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{W}$ einfallen:

$$E_1 \cdot \frac{D'^2\pi}{4} = P \quad \Longrightarrow \quad D' = \sqrt{\frac{4P}{\pi E_1}} = 25\,\mathrm{m}$$

Lange Belichtungszeiten bei fotografischer Aufnahme.

(e) Mit freiem Auge ($m_1 = 7^\mathrm{m}$):

$$E_1 = 3{,}93 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = \frac{100\,\mathrm{W}}{4\pi r_1^2} \quad \Longrightarrow \quad r_1 = \sqrt{\frac{100\,\mathrm{W}}{4\pi E_1}} = 450\,\mathrm{km}$$

Mit Teleskop ($m_2 = 24^\mathrm{m}$):

$$m_1 - m_2 = -17^\mathrm{m} = -2{,}5^\mathrm{m} \cdot \lg \frac{E_1}{E_2} \quad \Longrightarrow \quad E_2 = \frac{E_1}{10^{6{,}8}} = 6{,}23 \cdot 10^{-18}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

$$E_2 = \frac{100\,\mathrm{W}}{4\pi r_2^2} \quad \Longrightarrow \quad r_2 = \sqrt{\frac{100\,\mathrm{W}}{4\pi E_2}} = 1{,}1 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$$

Oder:

$$m_1 - m_2 = -17^\mathrm{m} = -2{,}5^\mathrm{m} \cdot \lg \frac{E_1}{E_2} = -2{,}5^\mathrm{m} \cdot \lg \frac{r_2^2}{r_1^2} = -5^\mathrm{m} \lg \frac{r_2}{r_1} \quad \Longrightarrow$$

$$r_2 = r_1 \cdot 10^{3{,}4} = 1{,}1 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$$

2.5.6. (a) $m_1 - m_2 = -2{,}5^\mathrm{m} \lg \dfrac{10E}{E} = -2{,}5^\mathrm{m} \quad \Longrightarrow \quad$ sie wird um $2{,}5^\mathrm{m}$ kleiner

(b) $E = 2{,}48 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \cdot 10^{-\frac{2,2}{2,5}} = 3{,}3 \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$, $\quad \frac{1367\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}}{E} = 4{,}2 \cdot 10^{11}$

2.5.7. $m - M = 5^{\mathrm{m}} \cdot \lg \frac{r}{r_0} \quad \Longrightarrow \quad r = r_0 \cdot 10^{\frac{m-M}{5^{\mathrm{m}}}} = 10\,\mathrm{pc} \cdot 10^{-0{,}58} = 2{,}6\,\mathrm{pc} = 8{,}1 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m} = 8{,}6\,\mathrm{LJ}$

2.5.8. $m - M = 5^{\mathrm{m}} \lg \frac{r}{r_0} \quad \Longrightarrow \quad M = m - 5^{\mathrm{m}} \lg \frac{r}{r_0}$

Mit $r = r'\,\mathrm{LJ}$ und $r_0 = 10\,\mathrm{pc} = 32{,}6\,\mathrm{LJ}$ folgt $M = m - 5^{\mathrm{m}} \lg \frac{r'}{32{,}6}$.

Stern	m	r in LJ	M
Arctur	$0{,}0^{\mathrm{m}}$	37	$-0{,}3$
Capella	$0{,}1^{\mathrm{m}}$	42	$-0{,}4$
Rigel	$0{,}1^{\mathrm{m}}$	900	$-7{,}1$
Mizar	$2{,}3^{\mathrm{m}}$	78	$+0{,}4$

2.5.9. Auf Jupiter trifft die Leistung

$$P = \frac{L_\odot}{4\pi r_{\mathrm{J}}^2} \cdot R_{\mathrm{J}}^2 \pi = \frac{1}{4} L_\odot \frac{R_{\mathrm{J}}^2}{r_{\mathrm{J}}^2}$$

Wenn alles gleichmässig in den Halbraum abgestrahlt wird, ist die effektive Leuchtkraft von Jupiter

$$L = 2AP = \frac{1}{2} A L_\odot \frac{R_{\mathrm{J}}^2}{r_{\mathrm{J}}^2}$$

Mit der Entfernung Erde-Jupiter

$$r = r_{\mathrm{J}} - r_{\mathrm{E}} = 4{,}20\,\mathrm{AE} = 6{,}28 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$$

ist die Intensität des Jupiters am Ort der Erde

$$E = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{A L_\odot R_{\mathrm{J}}^2}{8\pi r^2 r_{\mathrm{J}}^2} = 2{,}38 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

Unter der Annahme, dass das von Jupiter wieder abgestrahlte Licht die gleiche spektrale Zusammensetzung hat wie das Sonnenlicht, gilt mit $E^* = E_\odot^* = 24{,}8 \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

$$m = -2{,}5^{\mathrm{m}} \cdot \lg \frac{E}{E^*} = -2{,}46^{\mathrm{m}}$$

2.5.10. (a)

Lyman	$\lambda_{21} = 121{,}5\,\mathrm{nm}$	$\lambda_{31} = 102{,}5\,\mathrm{nm}$	$\lambda_{41} = 97{,}2\,\mathrm{nm}$	$\lambda_{\infty 1} = 91{,}1\,\mathrm{nm}$
Balmer	$\lambda_{32} = 656\,\mathrm{nm}$	$\lambda_{42} = 486\,\mathrm{nm}$	$\lambda_{52} = 434\,\mathrm{nm}$	$\lambda_{\infty 2} = 365\mathrm{nm}$
Paschen	$\lambda_{43} = 1875\mathrm{nm}$	$\lambda_{53} = 1281\mathrm{nm}$	$\lambda_{63} = 1094\mathrm{nm}$	$\lambda_{\infty 3} = 820\mathrm{nm}$
Brackett	$\lambda_{54} = 4050\mathrm{nm}$	$\lambda_{64} = 2624\mathrm{nm}$	$\lambda_{74} = 2165\mathrm{nm}$	$\lambda_{\infty 4} = 1458\mathrm{nm}$

Im Sichtbaren liegen nur Linien der Balmerserie, aber nicht alle:

$$\lambda_{m2} = \frac{1}{R_\infty\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2}\right)} > 385\,\mathrm{nm} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{m^2} < \frac{1}{R_\infty \cdot 3{,}85 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}} = 0{,}23669$$

$$\frac{1}{m^2} > 0{,}01331 \quad \Longrightarrow \quad m < \sqrt{\frac{1}{0{,}01019}} = 8{,}7$$

Es sind also sechs Linien sichtbar: λ_{32} (H_α) bis $\lambda_{82} = 389\,\mathrm{nm}$ (H_ζ). $\lambda_{92} = 383\,\mathrm{nm}$ liegt schon im UV. Die Balmerlinien werden mit griechischen Buchstaben bezeichnet ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$...).

(b) Galaxis 1: $\lambda_1 = 729\,\mathrm{nm}$, $\lambda_2 = 615\,\mathrm{nm}$, $\lambda_3 = 583\,\mathrm{nm}$, $\lambda_4 = 570\,\mathrm{nm}$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1{,}19 = \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{31}}, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_3} = 1{,}25 = \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{41}}, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_4} = 1{,}28 = \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{51}} \quad \Longrightarrow \quad \text{Lyman}$$

$$\lambda_1 = \lambda_{21}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_{21}^2} = k^2 = 36 \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{k^2-1}{k^2+1} = 0{,}946$$

Galaxis 2: $\lambda'_1 = 729\,\text{nm}$, $\lambda'_2 = 651\,\text{nm}$, $\lambda'_3 = 615\,\text{nm}$, $\lambda'_4 = 595\,\text{nm}$, $\lambda'_5 = 583\,\text{nm}$, $\lambda'_6 = 575\,\text{nm}$, $\lambda'_7 = 570\,\text{nm}$

$$\frac{\lambda'_1}{\lambda'_2} = 1{,}120 = \frac{\lambda_{42}}{\lambda_{52}}, \quad \frac{\lambda'_1}{\lambda'_3} = 1{,}185 = \frac{\lambda_{42}}{\lambda_{62}}, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_4} = 1{,}225 \approx \frac{\lambda_{42}}{\lambda_{72}} \quad \Longrightarrow \quad \text{Balmer}$$

$$\lambda'_1 = \lambda_{42}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{\lambda'^2_1}{\lambda^2_{42}} = k^2 = \frac{9}{4} \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{k^2-1}{k^2+1} = 0{,}385$$

2.5.11. (a) Geschwindigkeiten von A und B relativ zur Erde: $v_\text{A} = \beta_\text{A} c$ und $v_\text{B} = \beta_\text{B} c$

$$\lambda_\text{A} = \lambda_0\sqrt{\frac{1+\beta_\text{A}}{1-\beta_\text{A}}} \quad \Longrightarrow \quad \beta_\text{A} = \frac{\lambda_\text{A}^2 - \lambda_0^2}{\lambda_\text{A}^2 + \lambda_0^2} = 4{,}803 \cdot 10^{-3}$$

$$v_\text{A} = \beta_\text{A} c = 1{,}440 \cdot 10^6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

analog: $\beta_\text{B} = \dfrac{\lambda_\text{B}^2 - \lambda_0^2}{\lambda_\text{B}^2 + \lambda_0^2} = 2{,}468 \cdot 10^{-3}$, $\quad v_\text{B} = \beta_\text{B} c = 0{,}740 \cdot 10^6\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} < v_\text{A}$

$\Longrightarrow$ B bewegt sich im System der Galaxie auf die Erde zu.

$$v = \frac{v_\text{A} + v_\text{B}}{2} = 1{,}090 \cdot 10^6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(b) $v_\text{R} = v_\text{A} - v = v - v_\text{B} = 3{,}500 \cdot 10^5\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

(c) Winkelgröße der Galaxie: $\varphi = 2 \cdot \tan^{-1}\dfrac{R}{r} = 0{,}14^\circ = 8{,}5'$

Winkelgröße des Mondes: $\varphi_\text{M} = 2 \cdot \tan^{-1}\dfrac{R_\text{M}}{r_\text{M}} = 0{,}52^\circ = 31'$

(d) Mit $r_0 = 10\,\text{pc} = 3{,}086 \cdot 10^{17}\,\text{m}$ folgt für die absolute Helligkeit M der Galaxie

$$m - M = 5^\text{m} \cdot \lg\frac{r}{r_0} \quad \Longrightarrow \quad M = m - 5^\text{m} \cdot \lg\frac{r}{r_0} = -20{,}7^\text{m}$$

Mit der absoluten Helligkeit $M_\odot = 4{,}72^\text{m}$ folgt für die Leuchtkraft der Galaxie

$$\frac{L}{L_\odot} = 10^{\frac{M-M_\odot}{2{,}5^\text{m}}} = 1{,}5 \cdot 10^{10}$$

$$m_\text{S} \approx \frac{L}{L_\odot} \cdot m_\odot = 3,1 \cdot 10^{40}\,\text{kg}$$

Für eine Stern der Masse μ am Rande der Galaxis gilt

$$\frac{\mu v_\text{R}^2}{R} = \frac{G\mu m'_\text{S}}{R^2} \quad \Longrightarrow \quad m'_\text{S} = \frac{R v_\text{R}^2}{G} = 6{,}3 \cdot 10^{41}\,\text{kg} \approx 20 m_\text{S}$$

Wir haben nicht berücksichtigt, dass Licht von der dem Beobachter abgewandten Seite der Galaxis in der Galaxis absorbiert wird. Dadurch müsste L und damit m_S größer und das Verhältnis $\frac{m'_\text{S}}{m_\text{S}}$ kleiner als 20 sein. Das tatsächliche Verhältnis $\frac{m'_\text{S}}{m_\text{S}}$ liegt bei ungefähr 6,5. Galaxien bestehen also neben der sichtbaren Materie (den uns bekannten Atomen) noch aus sogenannter *dunkler Materie* der Masse m_D mit

$$\frac{m'_\text{S}}{m_\text{S}} = \frac{m'_\text{S}}{m'_\text{S} - m_\text{D}} = 6{,}5 \quad \Longrightarrow \quad \frac{m_\text{D}}{m'_\text{S}} = 1 - \frac{1}{6{,}5} = 0{,}85$$

Nur etwa 15% der Masse einer Galaxie bestehen also aus der uns bekannten (baryonischen) Materie.

3 Sterne

3.1 Gravitationsenergie

3.1.1. (a)

(b)

(c)

3.1.2.

3.2 Druck und Temperatur in Sternen

3.2.1.

3.2.2.

3.3 Energieerzeugung in Sternen

3.3.1.

3.3.2.

3.3.3. (a) $m_\mathrm{S} - M_\mathrm{S} = 5\lg\frac{r_\mathrm{S}}{10\,\mathrm{pc}} \quad\Longrightarrow\quad M_\mathrm{S} = m_\mathrm{S} - 5\lg\frac{2{,}63\,\mathrm{pc}}{10\,\mathrm{pc}} = 1{,}4$

$\frac{L_\mathrm{S}}{L_\odot} = 10^{0{,}4(M_\odot - M_\mathrm{S})} = 10^{0{,}4\cdot(4{,}8-1{,}4)} = 10^{1{,}36} = 23$

$L_\mathrm{S} = 23\,L_\odot = 23\cdot 3{,}82\cdot 10^{26}\,\mathrm{W} = 8{,}8\cdot 10^{27}\,\mathrm{W}$

(b) Pro Reaktion wird die Energie $\Delta W'$ frei:

$\Delta W' = (4\,m_\mathrm{H1} - m_\mathrm{He4})\,c^2 = 0{,}0287\,uc^2 = 4{,}28\cdot 10^{-12}\,\mathrm{J} = 26{,}7\,\mathrm{MeV}$

$\Delta W = \Delta W' - 0{,}5\,\mathrm{MeV} = 26{,}2\,\mathrm{MeV} = 4{,}20\cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}$

Die Zahl der H-Kerne, die pro Sekunde fusionieren, ist $N = 4\cdot\frac{L_\mathrm{S}\cdot 1\,\mathrm{s}}{\Delta W} = 8{,}37\cdot 10^{39}$.

Die Masse des Wasserstoffs ist damit $m_\mathrm{H} = N\cdot m_\mathrm{p} = 1{,}4\cdot 10^{13}\,\mathrm{kg} = 1{,}4\cdot 10^{10}\,\mathrm{t}$.

(c) Wien $\quad\Longrightarrow\quad T_\mathrm{S} = \frac{2{,}8978\cdot 10^{-3}\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}{\lambda} = 1{,}1\cdot 10^4\,\mathrm{K}$

$L_\mathrm{S} = \sigma\cdot 4\pi R_\mathrm{S}^2\cdot T_\mathrm{S}^4 \quad\Longrightarrow\quad R_\mathrm{S} = \sqrt{\frac{L_\mathrm{S}}{4\pi\sigma T_\mathrm{S}^4}} = 9{,}2\cdot 10^8\,\mathrm{m}$

(d) $\frac{\mu_\mathrm{S}}{\mu_\odot} = \left(\frac{L_\mathrm{S}}{L_\odot}\right)^{\frac{1}{3}} = 23^{\frac{1}{3}} = 2{,}8$

3.3.4.