

GK Physik 13

Aufgaben zur Astronomie

Richard Reindl

Die aktuellste Version der Aufgaben findet man unter

<http://www.stbit.de>

Das Werk steht unter einer Creative Commons

- Namensnennung
- Nicht-kommerziell
- Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Unported Lizenz

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.de>



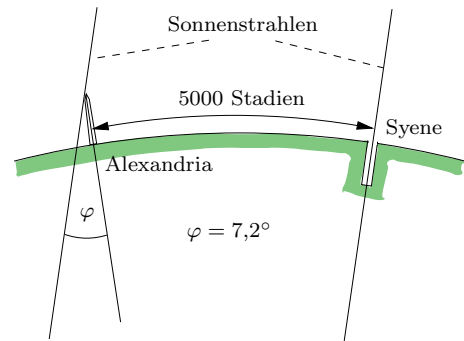
2. März 2015

1 Grundlagen der Astronomie

1.1 Geschichtliches

1.1.1. Eratosthenes (276-194 v.Chr.) berechnet den Erdradius

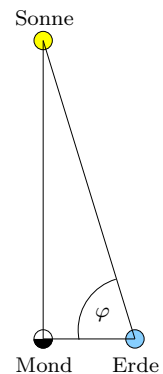
Die ägyptischen Städte Alexandria und Syene (heute Assuan) liegen auf dem gleichen Längengrad (Meridian). Am Tag der Sommersonnwende spiegelte sich zur Mittagszeit die Sonne im tiefen Brunnen von Syene, d.h. die Sonne stand genau senkrecht über Syene (Syene liegt auf dem *Wendekreis des Krebses*). Zur gleichen Zeit warf die Sonne im 5000 Stadien (≈ 800 km) nördlich gelegenen Alexandria einen kleinen Schatten (siehe Abb.). Berechne den Erdradius.



Welche anderen Argumente für die kugelförmige Gestalt der Erde konnten zur damaligen Zeit noch vorgebracht werden, welche gibt es heute?

1.1.2. Aristarch aus Samos (315-240 v.Chr.) berechnet das Verhältnis der Entfernungen Erde-Sonne und Erde-Mond

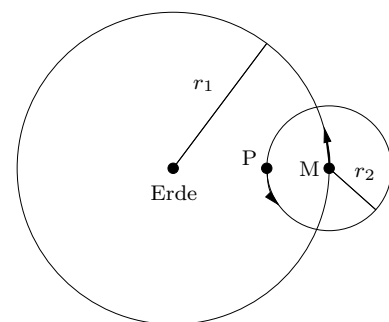
Nebenstehende Abbildung zeigt die Lage von Erde, Sonne und Mond, wenn von der Erde aus der Mond gerade als Halbmond erscheint. Aristarch aus Samos, der auch ein heliozentrisches Weltbild vorgeschlagen hatte, bestimmte den Winkel Sonne-Erde-Mond etwas ungenau zu $\varphi \approx 87^\circ$. Berechne daraus das Verhältnis der Entfernungen Erde-Sonne und Erde-Mond.



Berechne den wahren Wert des Winkels φ aus den heute bekannten Entfernungen $\overline{SE} = 1,496 \cdot 10^8$ km und $\overline{ME} = 384\,400$ km.

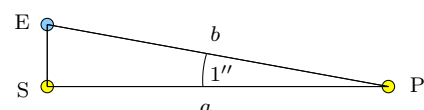
1.1.3. Das Weltbild des Ptolemäus (90-168 n.Chr.), vereinfachte Darstellung

Die Planeten (Wandelsterne, Wanderer) verändern ihre Lage relativ zu den Fixsternen. Dabei führen sie schleifenartige Bewegungen aus. Zu deren Erklärung nahm Ptolemäus an, dass ein Planet mit der Kreisfrequenz ω_2 um einen Punkt M kreist, der sich wiederum mit ω_1 auf einer Kreisbahn um die Erde bewegt (siehe Abb.). Konstruiere die Planetenbahn punktweise für $\omega_1 = 2\pi \frac{1}{a}$, $\omega_2 = 4\omega_1$ und $r_1 = 2,5r_2$ (das entspricht ungefähr dem Merkur). Erstelle die Gleichungen der Bahn in Parameterform (t als Parameter) und zeichne sie mit einer geeigneten Software.



1.2 Das heutige astronomische Weltbild

1.2.1. In verschiedenen Lehrbüchern findet man verschiedene Definitionen der Länge 1 pc nämlich a oder b in nebenstehender Abbildung (S: Sonne, E: Erde, $\overline{SE} = 1$ AE). Um welche Strecke unterscheiden sich die beiden Definitionen und wie groß ist der relative Fehler?

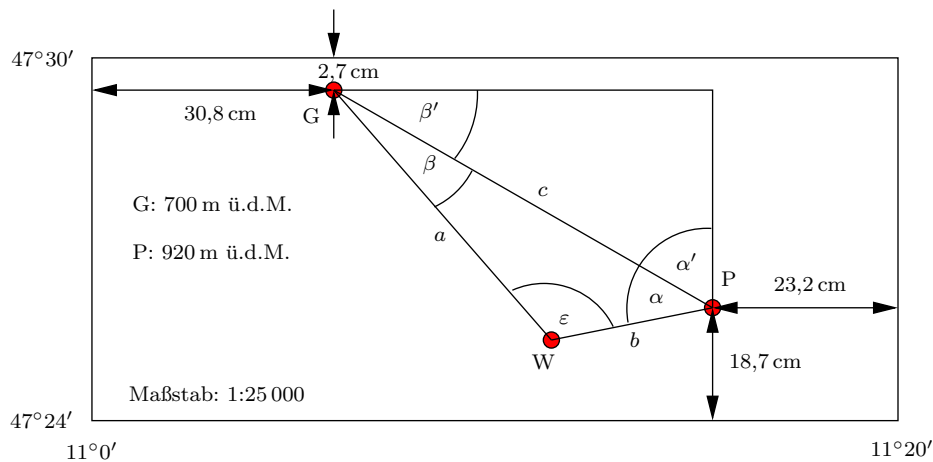


1.2.2. Ordne die Erdentfernungen folgender Sterne der Größe nach:

Sirius	8,65 LJ
ε -Eridani	3,30 pc
Barnards Stern	$5,66 \cdot 10^{16}$ m
α -Centauri	$2,75 \cdot 10^5$ AE
Altair	Erdbahnradius erscheint unter dem Winkel $0,198''$

1.3 Die Erde als Bezugssystem für Beobachtungen

1.3.1. Die Abbildung zeigt die Lage des Werdenfels-Gymnasiums (G) (Physiksaal) und der Wohnung des Physiklehrers (P) in der topografischen Karte Bayerns:



- Welchen wahren Strecken B_g , B_m , B_s , L_g , L_m und L_s entsprechen 1° , $1'$ bzw. $1''$ der Breite φ bzw. der Länge λ ?
- Welcher Breite $\Delta\varphi_{cm}$ bzw. Länge $\Delta\lambda_{cm}$ entspricht 1 cm der Karte in Nord-Süd- bzw. West-Ost-Richtung?
- Berechne die Länge und die Breite von G und P. Wie groß ist die Entfernung von G zu P (Luftlinie)?
- Der Physiklehrer bestimmt von seiner Wohnung aus den Azimut und die Höhe der oberen Wettersteinspitze W: $A = 71^\circ 39' 3''$, $h = 15^\circ 9' 34''$. Seine Schüler messen in der gleichen Zeit von G aus nur den Azimut von W: $A' = -42^\circ 30' 10''$. Auf welche Koordinaten (Länge, Breite, Höhe) muss ein GPS-Gerät (Global Positioning System) programmiert werden, damit es genau auf der oberen Wettersteinspitze Alarm schlägt?

1.3.2. Das Satelliten-Navigationssystem GPS (**G**lobal **P**ositioning **S**ystem) bestätigt täglich den Satz von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Wäre dieser Satz falsch, würde die Navigation mit GPS nicht funktionieren. Zum GPS-System gehören 24 Navstar-Satelliten, ein Netz aus Boden-Kontrollstationen und der GPS-Empfänger des Benutzers. Die mit Atomuhren ausgestatteten Kontrollstationen ermitteln über Laufzeitmessungen von Funksignalen die Positionen der Satelliten zur momentanen Zeit und übermitteln diese Daten an die Satelliten. Jeder Satellit sendet Datenpakete der Form $(X_k|Y_k|Z_k|T_k)$ aus, wobei T_k die Zeit des Aussendens und X_k , Y_k , Z_k die Ortskoordinaten des Satelliten \textcircled{k} zur Zeit T_k sind. Wenn der Empfänger über eine Atomuhr verfügt, kann aus der Empfangszeit t_k des Datenpakets die Signallaufzeit $\Delta t_k = t_k - T_k$ und damit die Entfernung $r_k = c \Delta t_k$ berechnet werden. Der Empfänger liegt also auf einer Kugeloberfläche mit Radius r_1 um den Satelliten $\textcircled{1}$. Mit den Daten eines weiteren Satelliten $\textcircled{2}$ hat man eine zweite Kugeloberfläche. Der Empfänger liegt dann auf der Schnittmenge der beiden Kugeloberflächen

(Kreis). Mit einem dritten Satelliten ③ erhält man eine dritte Kugel­fläche, deren Schnitt mit dem Kreis zwei mögliche Aufenthaltsorte für den Empfänger liefert.

- (a) Die Umlaufzeit der Navstar-Satelliten beträgt 11 h 58 min. Berechne die Höhe der Satelliten über der Erdoberfläche. ($M_{\text{Erde}} = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg, $R_{\text{Erde}} = 6378,3$ km)
- (b) Erläutere anhand einer Skizze, warum man einen der beiden möglichen Aufenthaltsorte des Empfängers ausschließen kann.
- (c) In der Praxis sind die GPS-Empfänger nicht mit einer Atomuhr, sondern mit einer Quarzuhr ausgestattet. Der Fehler der Quarzuhr sei δt , d.h. $t_{\text{Quarz}} = t_{\text{Atom}} + \delta t$. Da man jetzt neben den Ortskoordinaten des Empfängers noch δt als weitere Unbekannte hat, braucht man die Daten eines vierten Satelliten. Stelle vier Gleichungen auf, die neben den übermittelten Daten die vier Unbekannten x , y , z und δt enthalten.
- (d) Vier Navstar-Satelliten senden zur Zeit $T = 0$ folgende Daten aus, t ist die von der Quarzuhr des Empfängers registrierte Ankunftszeit der Daten:

k	1	2	3	4
X [in m]	801191	20044775	11505259	2306938
Y [in m]	-4543782	-16819563	6642564	3995734
Z [in m]	26166595	4613877	23010518	26166595
t [in s]	2,19816435	2,20251613	2,19196963	2,19612118

Berechne mit einem CAS die Ortskoordinaten des Empfängers und δt .

- (e) Wir nehmen jetzt an, dass die Erde eine Kugel ist. Die z -Achse unseres Koordinatensystems zeigt vom Süd- zum Nordpol, der Erdmittelpunkt ist der Ursprung. Der Nullmeridian durch Greenwich trifft den Äquator in P, OP bestimmt die x -Achse. Die y -Achse ergibt sich dann aus der Tatsache, dass x - y - z ein Rechtssystem bildet. Berechne die geografische Länge und Breite des Empfängers und seine Höhe über NN. Suche in der topografischen Karte Bayerns, an welchem markanten Ort sich der Empfänger befindet.

1.3.3. Flugrouten

Nürnberg ($\lambda_1 = 11,1^\circ$) und Vancouver (Kanada, $\lambda_2 = -123,0^\circ$) liegen angenähert auf dem gleichen Breitenkreis mit $\varphi = 49,3^\circ$.

- (a) Berechne die Koordinaten des nördlichsten Punktes der kürzesten Flugroute von Nürnberg nach Vancouver und suche diesen Punkt auf einer Landkarte.
- (b) Vergleiche die Länge des kürzesten Weges mit der Länge der der Flugroute, die nach Westen entlang des Breitenkreises von Nürnberg nach Vancouver führt .

1.3.4. Fülle die Tabelle aus:

	Bogenmaß	Dezimalgrad	$x^\circ y' z''$	Zeitmaß
α	1,345			
β		41,34°		
γ			24° 39' 48''	
δ				4 ^h 29 ^{min} 41 ^s

1.3.5. Ein Hobbyastronom in München ($\lambda_1 = -11^\circ 30' 21''$, $\varphi_1 = 48^\circ 6' 34''$) und sein Kollege in Rio de Janeiro ($\lambda_2 = 43^\circ 12' 15''$, $\varphi_2 = -22^\circ 29' 56''$) beobachten zur gleichen Zeit eine bestimmte Bergspitze des Ringgebirges um den Kopernikuskrater auf dem Mond. Die Messwerte der beiden Astronomen im **festen** Äquatorsystem sind:

Ort	Stundenwinkel	Deklination	Sternzeit
München	$t_1 = 3^{\text{h}} 57^{\text{min}} 58,40^{\text{s}}$	$\delta_1 = 12^\circ 06' 08''$	$t_{\gamma 1} = 7^{\text{h}} 0^{\text{min}} 0^{\text{s}}$
Rio	$t_2 = 0^{\text{h}} 17^{\text{min}} 11,95^{\text{s}}$	$\delta_2 = 13^\circ 15' 29''$	$t_{\gamma 2} = ?$

- (a) Berechne die Länge der Flugroute und die Länge der geradlinigen Verbindung zwischen den beiden Astronomen. Berechne auch den Vektor \overrightarrow{MR} von München nach Rio in einem kartesischen System, dessen x -Achse durch den Südpunkt des Nullmeridians geht.
- (b) Rechne die beobachteten Stundenwinkel auf das feste Äquatorsystem mit dem Südpunkt des Nullmeridians als Bezugspunkt um und berechne die Entfernung der Bergspitze auf dem Mond vom Münchner Astronomen!

1.3.6. Berechne den Winkelabstand der beiden Sterne des großen Wagens:

Stern	Rektaszension	Deklination
Mizar	$\alpha_1 = 13^{\text{h}} 21^{\text{min}} 54,945^{\text{s}}$	$\delta_1 = 55^\circ 11' 9,28''$
Dubhe	$\alpha_2 = 11^{\text{h}} 0^{\text{min}} 39,595^{\text{s}}$	$\delta_2 = 62^\circ 1' 16,69''$

- 1.3.7. (a) Berechne den Stand der Sonne im oberen Kulminationspunkt zur Zeit der Sommer- und Wintersonnwende im Horizontsystem des Werdenfels-Gymnasiums.
- (b) Berechne auch die Koordinaten des Sonnenauf- und Untergangspunktes an diesen beiden Tagen zuerst im festen Äquatorsystem und dann im Horizontsystem.
- 1.3.8. Diejenigen Sterne, die sich immer über dem Horizont befinden, nennt man die **Zirkumpolarsterne**. Welchen Bruchteil der gesamten Oberfläche der Himmelskugel nehmen die Zirkumpolarsterne

- (a) vom Nordpol (b) von einem Ort am Äquator (c) von Garmisch

aus gesehen ein? Wieviel Prozent der Himmelskugel können von diesen Orten aus überhaupt beobachtet werden?

- 1.3.9. P sei der Ort der Sonne auf der Himmelskugel, M der Mittelpunkt der Himmelskugel. Der Winkel, den die Sonne auf der Ekliptik mit dem Frühlingspunkt einschließt, ist $\beta = \sphericalangle \text{TMP}$. Wir nehmen näherungsweise an, dass die Erdbahn um die Sonne ein Kreis ist, d.h. dass die Sonne die Ekliptik in einem Jahr mit konstanter Geschwindigkeit einmal durchläuft. T sei die Zeit vom Frühlingsbeginn an gerechnet. α_S und δ_S seien die Rektaszension und Deklination der Sonne zur Zeit T , ε ist die Neigung der Ekliptik gegen die Äquatorebene der Erde. Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$\boxed{\sin \delta_S = \sin \varepsilon \sin \beta} \quad , \quad \boxed{\tan \alpha_S = \cos \varepsilon \tan \beta}$$

- (a) Wie berechnet sich β aus T ?
- (b) Sirius hat die Koordinaten $\alpha = 6^{\text{h}} 42^{\text{min}} 56,736^{\text{s}}$ und $\delta = -16^\circ 38' 46,40''$. Welche Höhe hat Sirius von Garmisch aus gesehen im oberen Kulminationspunkt?
- (c) An welchem Tag kulminiert Sirius genau um Mitternacht? Veranschauliche den Sachverhalt an einer dreidimensionalen Skizze.

1.4 Instrumente zur Beobachtung

- 1.4.1. (a) Eine Sammellinse mit dem Durchmesser $d = 10,0 \text{ cm}$ der Brennweite $f = 2,15 \text{ m}$ erzeugt von der Sonne ein scharfes Bild mit dem Durchmesser $b = 2,00 \text{ cm}$. Berechne den Sonnendurchmesser D_S . Die Intensität der Sonnenstrahlung am Ort der Erde ist $S = 1368 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$. Wie groß ist die Intensität im Bild der Sonne?
- (b) Im Fokus (Brennpunkt) eines Sonnenspiegels befinden sich 100 Liter Wasser der Temperatur 20°C in einem kugelförmigen Gefäß. Das Wasser soll in zehn Minuten auf 100°C erwärmt werden. Welchen Durchmesser D und welche Brennweite f muss der Spiegel haben?

1.4.2. Bei der Beugung an einer kreisförmigen Öffnung mit dem Durchmesser a ergeben sich kreisförmige Beugungsmuster. Die dunklen Ringe ($J(\varphi) = 0$) liegen bei φ_ν mit

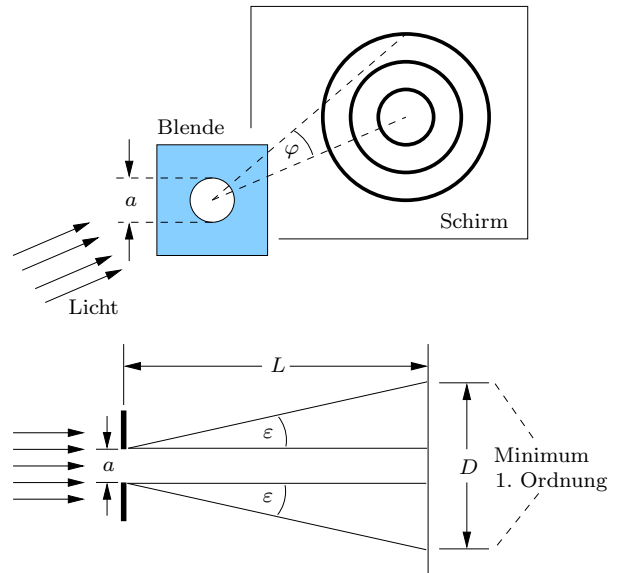
$$\sin \varphi_\nu = b_\nu \cdot \frac{\lambda}{a} \quad \text{mit}$$

$$b_1 = 1,220, \quad b_2 = 2,233, \quad b_3 = 3,238, \dots$$

Die Herleitung dieser Formel übersteigt unsere mathematischen Kenntnisse (Theorie Besselscher Funktionen u.s.w.).

Ein paralleles Lichtbündel hat nach dem Durchgang durch eine kreisförmige Blende mit dem Durchmesser a den *Öffnungswinkel* ε mit

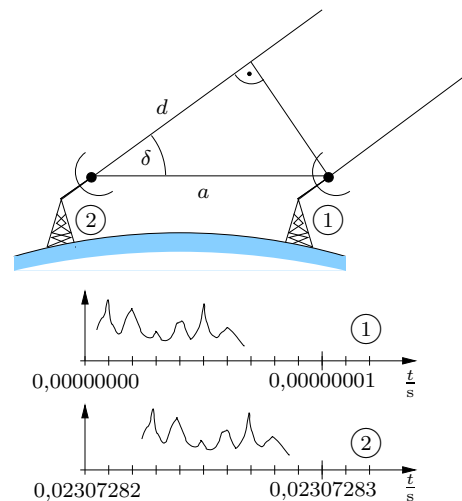
$$\sin \varepsilon = b_1 \cdot \frac{\lambda}{a}$$



- Berechne eine Formel für den Durchmesser D eines Lichtbündels im Abstand L hinter einer kreisförmigen Blende mit Durchmesser a , wenn das Lichtbündel **vor** der Blende parallel war. Vereinfache diese Formel für $a \gg \lambda$.
- Berechne D für einen Laserstrahl ($\lambda = 640 \text{ nm}$), der einmal direkt ($a = 5 \text{ mm}$) und einmal über das Keck-Teleskop auf Hawaii ($a = 10 \text{ m}$) von der Erde zum Mond geschickt wird ($L = 384000 \text{ km}$). Für welches $a = a_0$ ist D minimal? Berechne $D_{\min} = D(a_0)$ für beide Fälle.

1.4.3. **VLBI (Very Long Baseline Interferometry)**

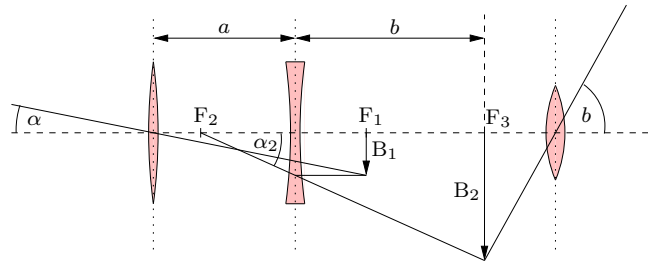
Zwei Radioteleskope (Entfernung a) sind auf die gleiche Quelle am Himmel gerichtet. Die Empfangsdaten werden auf Band aufgezeichnet, mit genauen Zeitmarken versehen und dann von einem Computer ausgewertet. Das Empfangssignal ist aufgrund von Störungen nicht mehr sinusförmig, d.h. es können einander entsprechende Abschnitte der Daten beider Teleskope identifiziert werden (Arbeit für den Computer). Die Abbildung zeigt zwei kurze, einander entsprechende Sequenzen in Abhängigkeit von der Empfangszeit. Die Schwingungsdauer T kann man dem verzerrten Signal aber noch entnehmen.



- Berechne die Wellenlänge λ der empfangenen Strahlung.
- Die Entfernung der beiden Teleskope ist $a = 9378,45 \text{ km}$. Berechne den Winkel δ mit Fehlerangabe. Wir nehmen an, dass die Zeitangaben beider Signale auf eine halbe Schwingungsdauer genau sind.
- Wie genau muss a bekannt sein, damit der aus der Ungenauigkeit von a resultierende Fehler in der Berechnung von δ gleich dem Fehler ist, der aus der Ungenauigkeit der Zeitmessung folgt.

1.4.4. Hubble Space Telescope (HST)

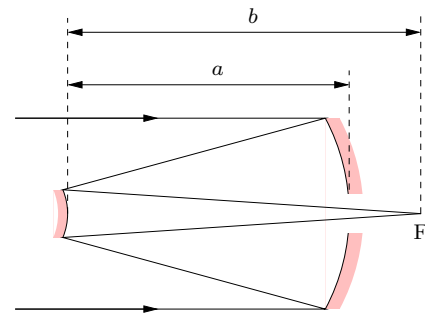
- (a) Das Objektiv eines Fernrohrs besteht aus einer Sammellinse mit der Brennweite f_1 und einer Zerstreuungslinse mit der Brennweite f_2 , der Abstand der beiden Linsen ist a . Das Licht eines sehr weit entfernten punktförmigen Gegenstandes fällt unter dem Winkel α gegen die optische Achse in das Fernrohr. Die Sammellinse erzeugt ein *virtuelles* (nicht sichtbares) Bild im Abstand B_1 von der Achse, die Zerstreuungslinse erzeugt von diesem virtuellen Bild ein reelles Zwischenbild (Abstand B_2 zur Achse), das mit einem Okular der Brennweite f_3 betrachtet wird. Als *effektive Brennweite* des Objektivs bezeichnet man die Brennweite *einer* Sammellinse, die auch ein reelles Zwischenbild im Abstand B_2 von der Achse erzeugen würde. Beweise:



$$f_{\text{eff}} = \frac{-f_1 f_2}{a - f_1 - f_2}$$

Welche Vergrößerung hat das Teleskop?

- (b) Das HST, seit 1990 in einer Umlaufbahn 590 km über der Erdoberfläche, ist ein Spiegelteleskop vom *Cassegrain-Typ* (siehe Abb.). Ein Teleskop dieses Typs ist dem Linsenteleskop aus Teilaufgabe (a) äquivalent. Auf einer Internetseite findet man die Daten $a = 4,6$ m, $b = 6,1$ m und $f_{\text{eff}} = 57,6$ m. Berechne die Brennweiten der beiden Spiegel. Der Primärspiegel hat den Durchmesser $D = 2,4$ m. Wie groß muss der Durchmesser d des Sekundärspiegels mindestens sein?



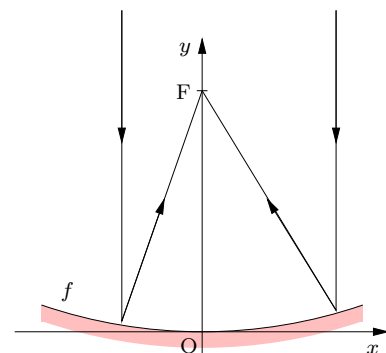
- (c) Berechne die Winkelauflösung des HST. Wie groß ist der Durchmesser A eines Beugungsscheibchens in der Brennebene? Vergleiche mit der Korngröße $K \approx 25 \mu\text{m}$ einer Fotoplatte in der Brennebene. Aus wie vielen Punkten besteht das Bild eines Gesichtes (Originalgröße: 25×20 cm) auf der Platte, das von einem $a = 5$ km entfernten Menschen aufgenommen wird?

1.4.5. Parabolspiegel

Die Oberfläche eines Parabolspiegels entsteht durch die Rotation des Grafen von

$$f(x) = ax^2$$

um die y -Achse. Beweise, dass sich alle Lichtstrahlen, die parallel zur y -Achse auf den Spiegel treffen, in einem Punkt F (Brennpunkt) auf der y -Achse schneiden. Berechne auch die Brennweite $f = \overline{OF}$.

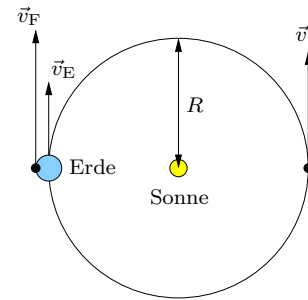


- 1.4.6. Die beiden Komponenten eines Doppelsterns sind $a = 2,45$ AE voneinander entfernt, das Licht des Doppelsterns ist bis zur Erde 40 Jahre unterwegs. Der Doppelstern wird von einem menschlichen Beobachter mit einem Fernrohr betrachtet, dessen Okular die Brennweite $f_2 = 8$ mm hat. Welche Brennweite f_1 und welchen Durchmesser D muss das Objektiv des Teleskops mindestens haben, damit der Beobachter den Doppelstern als solchen erkennen kann?

1.5 Gravitation

- 1.5.1. An welchem Punkt ist die Stärke des von Erde und Mond erzeugten Gravitationsfeldes null?

- 1.5.2. (a) Welche Geschwindigkeit v_1 muss eine Raumkapsel an einem Punkt der Erdbahn haben, um aus dem Anziehungsbereich der Sonne zu gelangen, wenn man die Erdanziehung zunächst nicht berücksichtigt (Punkt auf der Erdbahn, aber weit von der Erde entfernt)?
 $R = 1,5 \cdot 10^{11}$ m



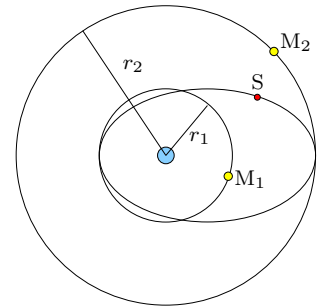
- (b) Wie groß ist die Fluchtgeschwindigkeit v_{FS} aus dem Sonnensystem von einem Punkt der Erdoberfläche aus, betrachtet im Inertialsystem der Sonne?
- (c) Wie groß ist die Fluchtgeschwindigkeit v_F aus dem Sonnensystem von einem Punkt der Erdoberfläche aus, betrachtet im Erdsystem, wenn \vec{v}_F in Richtung von \vec{v}_E (Geschwindigkeit der Erde), senkrecht zu \vec{v}_E bzw. entgegengesetzt zu \vec{v}_E zeigt?
- 1.5.3. (a) Ein Neutronenstern hat die Dichte $\rho = 1,81 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Welchen Radius R hat ein Neutronenstern mit der Masse unserer Sonne ($M = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg) und welche Gravitationsfeldstärke g herrscht an seiner Oberfläche?
- (b) Welchen Radius R_0 dürfte ein Neutronenstern nur haben, damit an seiner Oberfläche die gleiche Feldstärke herrschen würde wie an der Erdoberfläche?
- (c) Ein Mensch der Größe $h = 180$ cm fällt mit den Füßen voraus auf einen Neutronenstern mit der Masse unserer Sonne. $\Delta g(r)$ sei der Unterschied der Feldstärken an den Füßen und am Kopf, wenn sich die Füße in der Entfernung r vom Mittelpunkt des Sterns befinden. Berechne den exakten Ausdruck für $\Delta g(r)$ sowie eine Näherung mit $h \ll r$! Berechne den prozentualen Fehler der Näherung für $r = 100$ km! Für welches r ist $\Delta g(r) = 100 \cdot g_{\text{Erde}}$?
- 1.5.4. Jeder weiß, dass der Mond für die Entstehung der Gezeiten auf der Erde verantwortlich ist: „Der Mond zieht das Meerwasser auf seine Seite; auf der Mondseite herrscht also Flut, auf der dem Mond abgewandten Seite Ebbe.“ Leider stimmt diese einfache Erklärung der Gezeiten nicht, da es gleichzeitig *zwei* Flutberge gibt, nämlich einen auf der Mondseite und einen auf der dem Mond abgewandten Seite. Die Erklärung dieses Phänomens liegt darin, dass sich Erde und Mond in einem siderischen Monat ($T = 2,36 \cdot 10^6$ s) einmal um ihren gemeinsamen Schwerpunkt drehen. Berechne die Gesamtkraft F , die zusätzlich durch die Anwesenheit des Mondes auf ein Wassermolekül am Äquator wirkt, und zwar einmal auf der dem Mond zugewandten und einmal auf der dem Mond abgewandten Erdseite.

1.6 Umlaufbahnen

- 1.6.1. Welchen Abstand a von der Erdoberfläche muss eine Raumstation haben, die über einem festen Punkt am Äquator zu ruhen scheint (geostationäre Bahn)? Welche Geschwindigkeit v hat die Station von einem Inertialsystem aus betrachtet? Welche Anziehungskraft F wirkt von der Erde auf einen Astronauten der Masse m in der Raumstation? Warum fühlt sich der Astronaut trotzdem schwerelos?

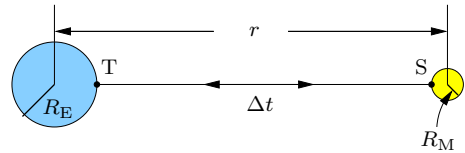
- 1.6.2. Welche Geschwindigkeit v muss ein Satellit haben, der die Erde in einer Höhe von 200 km über Grund umkreist? Mit welcher Geschwindigkeit v_0 muss der Satellit von der Erdoberfläche abgeschossen werden, damit er ohne weiteren Antrieb (außer zu Richtungskorrekturen) die Umlaufbahn mit der richtigen Geschwindigkeit v erreicht (Luftwiderstand vernachlässigen!)? Warum werden Satelliten immer in Richtung Osten abgeschossen?
- 1.6.3. Der japanische Satellit HALCA trägt ein Radioteleskop (**VSOP=VLBI Space Observatory Programme**). Der Satellit hat eine minimale Höhe von 560 km und eine maximale Höhe von 21400 km über der Erdoberfläche.
- Berechne die Umlaufdauer von HALCA.
 - Fertige eine maßstäbliche Zeichnung der Erde und der Bahn von HALCA.
 - Berechne die größte und die kleinste Geschwindigkeit von HALCA auf seiner Bahn.
 - Welche Winkelauflösung kann von HALCA in Verbindung mit einem terrestrischen Radioteleskop erreicht werden, wenn bei $f = 5$ GHz beobachtet wird?

- 1.6.4. Ein Planet wird von zwei Monden M_1 und M_2 auf kreisförmigen Bahnen umrundet, die Radien sind $r_1 = 200\,000$ km und $r_2 = 450\,000$ km. Der Mond M_1 hat die Umlaufdauer $T_1 = 20,0$ d. Die ENTERPRISE setzt einen Satelliten S aus, dessen Umlaufbahn um den Planeten die kleinste Entfernung r_1 und die größte Entfernung r_2 vom Planeten hat (siehe Abb.).



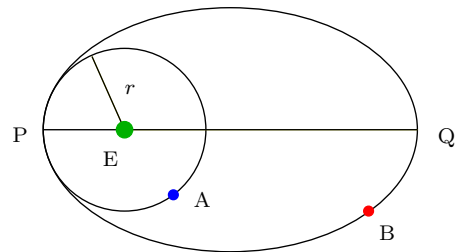
- Berechne die Umlaufdauer T_2 des Mondes M_2 .
 - Berechne die große Halbachse a und die Umlaufdauer T der Satellitenbahn.
 - Berechne die lineare Exzentrizität d , die Exzentrizität e und kleine Halbachse b der Satellitenbahn.
- 1.6.5. Der Jupitermond Io umrundet den Planeten in der Zeit $T_{Io} = 1,77$ d auf einer Bahn mit der großen Halbachse $a_{Io} = 4,22 \cdot 10^5$ km.
- Der Jupitermond Europa hat die Umlaufdauer $T_{Eu} = 3,55$ d. Wie lang ist die große Halbachse a_{Eu} der Umlaufbahn von Europa?
 - Eine Jupitersonde soll den Planeten so umrunden, dass ihre kleinste Entfernung (Punkt A) vom Planetenmittelpunkt $r_1 = 2,00 \cdot 10^5$ km und ihre größte Entfernung (Punkt B) $r_2 = 8,00 \cdot 10^5$ km ist. Berechne die Länge a der großen Halbachse, die Umlaufdauer T , die Exzentrizität e und die Länge b der kleinen Halbachse der Sondenbahn.
 - Zeichne von der Sondenbahn die Punkte A, B und die beiden Brennpunkte S_1 (Jupiter) und S_2 (10^5 km $\hat{=}$ 1 cm). Zeichne auch die Punkte C und D ein, die aus der Kenntnis der kleinen Halbachse resultieren.
Konstruiere (mit kurzer Erläuterung) die Bahnpunkte E und F, die von Jupiter die Entfernung $r_3 = 3,2 \cdot 10^5$ km haben. Welche Entfernung r_4 haben diese Punkte von S_2 ? Beweise, dass $EF \perp AB$ gilt. Skizziere jetzt die Bahn unter Ausnutzung von Symmetrien.
- 1.6.6. (a) Der Komet *Tempel-Tuttle* umrundet die Sonne in $T = 33,227$ a und hat die kleinste Sonnenentfernung $r_1 = 0,976$ AE. Berechne die Halbachsen der Kometenbahn und seine größte Entfernung r_2 von der Sonne. Skizziere die Bahn des Kometen und zeichne auch die Erdbahn ein.
- (b) Der Komet Hale-Bopp hat den Perihelabstand $r_{\min} = 0,914$ AE und die Exzentrizität seiner Bahn ist $e = 0,99511$. Berechne seine Umlaufdauer und die Halbachsen seiner Bahn.

1.6.7. Ein kurzer Laserpuls wird von einem Teleskop T am Äquator zu einem Spiegel S auf dem Mond geschickt, dort reflektiert und bei T wieder empfangen, die Zeit Δt , die der Strahl unterwegs war, wird von einer Atomuhr gemessen. Im Verlauf eines Monats misst man die kleinste Zeitdifferenz $\Delta t_{\min} = 2,369506841$ s und den größten Wert $\Delta t_{\max} = 2,651082437$ s. Der Erdradius ist $R_E = 6378$ km, der Radius des Mondes $R_M = 1738$ km.



- Berechne die kleinste (r_{\min}) und die größte (r_{\max}) Entfernung der Mittelpunkte von Erde und Mond. Ermittle daraus die große Halbachse a_M und die kleine Halbachse b_M der Mondbahn.
- Die *siderische* (in einem zu den Sternen ruhenden Koordinatensystem betrachtete) Umlaufdauer des Mondes ist $T_M = 27,32166$ d. Welchen Radius hat die kreisförmige Bahn eines geostationären Satelliten, der die Erde in genau einem siderischen Tag (*Sterntag*), d.h. in $d_{\text{sid}} = 23$ h 56 min 4 s umrundet?
- Erkläre das Zustandekommen des Zahlenwertes eines siderischen Tages.

1.6.8. Der Satellit Alpha (A) bewegt sich auf einer Kreisbahn mit Radius r und der Umlaufdauer T_A um die Erde (E). Der Satellit Beta (B) bewegt sich auf einer Ellipsenbahn um E, seine Umlaufdauer ist $T_B = 8T_A$ und seine kleinste Entfernung zur Erde ist r (siehe Abb.).



- Berechne die Längen der großen (a) und der kleinen (b) Halbachse der Bahn von Beta, ausgedrückt als Vielfache von r .
Zeichne die Bahn von Beta mit $r \hat{=} 1$ cm.
- Wie lautet das zweite Keplersgesetz (Flächensatz)? Schätze damit die Geschwindigkeit v_2 von Beta im erdfernten Punkt Q ab, wenn sie im erdnächsten Punkt P $v_1 = 8400 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ beträgt.

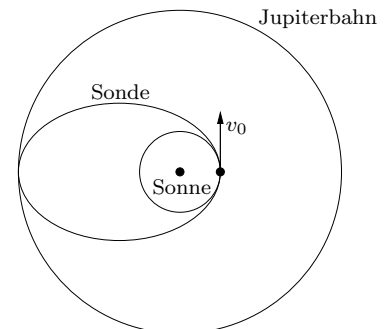
- 1.6.9. (a) Berechne die Mondmasse M_M aus dem 3. Keplerschen Gesetz unter Verwendung von $M_{\text{Erde}} = 5,977 \cdot 10^{24}$ kg, der siderischen Umlaufdauer $T = 27,32$ d und $r = 384800$ km.
- (b) Das 3. Keplersche Gesetz wird oft in folgender Form angegeben:

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der Bahnradien!

Zeige, dass diese Form des Gesetzes in guter Näherung richtig ist.

1.6.10. Von der Erdbahn aus, aber weit von der Erde entfernt, startet eine Raumsonde zum Jupiter.

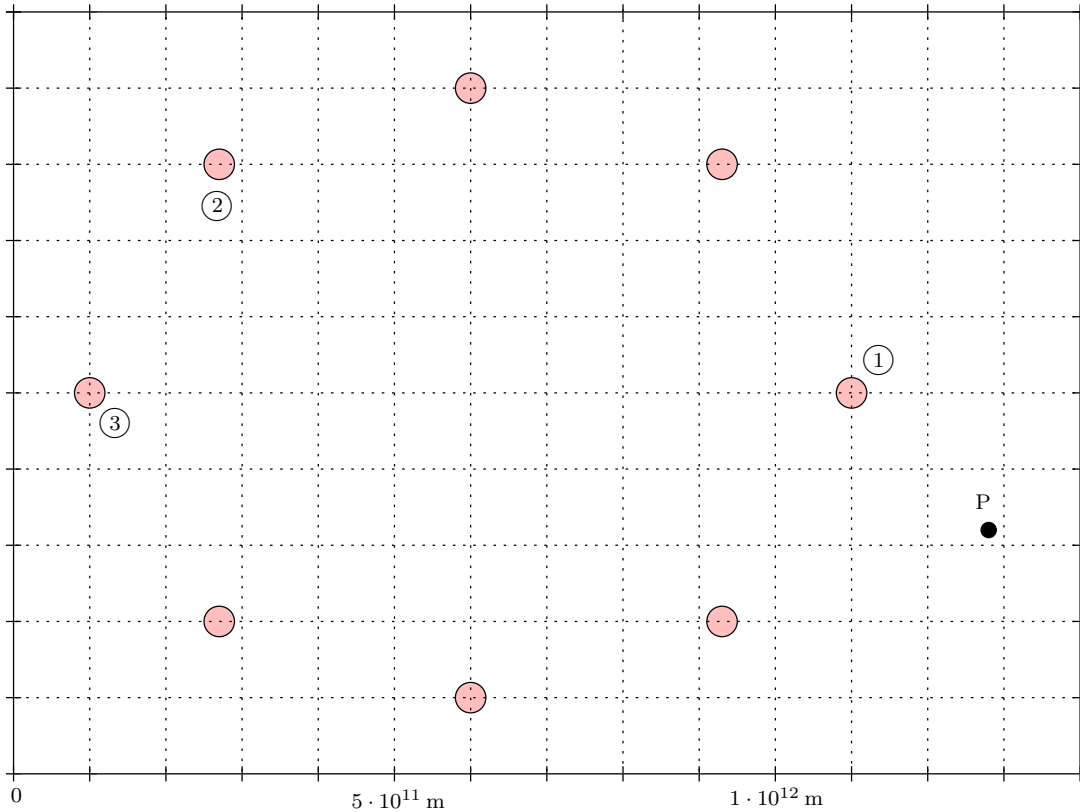
- Welche Startgeschwindigkeit v_0 (relativ zum Inertialsystem der Sonne) muss der Sonde tangential zur Erdbahn erteilt werden, damit ihre elliptische Umlaufbahn um die Sonne gerade die Jupiterbahn berührt? Vergleiche mit der Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Kreisbahn um die Sonne. Mit welcher Geschwindigkeit v_1 erreicht die Sonde die Jupiterbahn?



- Wie lange dauert der Flug zum Jupiter?

$$r_{\text{Erde}} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}, \quad r_{\text{Jupiter}} = 7,78 \cdot 10^{11} \text{ m}, \quad M_{\text{Sonne}} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

1.6.11.



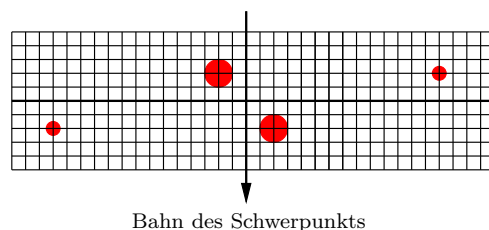
Die Abbildung zeigt ein Doppelsternsystem, dessen einer Partner ein unsichtbares schwarzes Loch ist. Durch Zufall wurde zu dem Zeitpunkt, zu dem sich der sichtbare Stern in der Position ② befand, am Ort P ein starker Radioimpuls gemessen, der durch in das Loch fallende Materie hervorgerufen wurde.

- Konstruiere den Schwerpunkt S des Systems und zeichne die Orte des schwarzen Lochs ein, die zu den Positionen ① und ③ des sichtbaren Sterns gehören. Berechne die numerische Exzentrizität e der Bahn.
- Die Umlaufdauer des Systems ist $T = 3,56$ a. Berechne die Massen m_S und m_L des Sterns und des schwarzen Lochs.
- Das Doppelsternsystem wird mit dem HST beobachtet ($D = 2,4$ m), Blickrichtung senkrecht auf die Bahnebene, die Entfernung des Systems von der Erde ist 20 LJ. Mit welchem ungefähren Fehler sind die berechneten Massen behaftet?

1.6.12. Von der Erde aus wird der Winkel gemessen, unter dem der Sonnendurchmesser erscheint. Steht die Erde im Perihel, misst man $\varphi_0 = 0,54218^\circ$, im Aphel dagegen $\varphi_1 = 0,52437^\circ$.

- Berechne den Sonnenradius R_\odot und die numerische Exzentrizität e , den Perihel- und den Aphelabstand sowie die große und die kleine Halbachse der Erdbahn.
- Berechne die Sonnenmasse M_\odot aus der Umlaufdauer $T = 365,25$ d der Erde.
- Berechne die Geschwindigkeiten v_0 und v_1 der Erde im Perihel und im Aphel.

1.6.13. Die Abbildung zeigt die HST-Aufnahme von Pluto und seinem Mond Charon in zwei aufeinanderfolgenden Lagen mit größter Elongation, wobei ein Kästchen des Rasters 1250 km entspricht. Der zeitliche Abstand der beiden Aufnahmen beträgt $\Delta t = 3$ d 4 h 39 min, die Umlaufbahn ist praktisch kreisförmig. Berechne die Massen von Pluto und Charon.



1.6.14. Die Erde liegt in der Bahnebene eines Doppelsterns, der auch mit den besten Teleskopen nur als ein Lichtpunkt gesehen werden kann. Das Licht des Sterns wird spektral zerlegt. Dabei stellt man fest, dass die Linien des Wasserstoffs zweimal vorkommen, und zwar einmal nach blau und einmal nach rot verschoben. Die H_α -Linie einer ruhenden Quelle hat die Wellenlänge $\lambda_0 = 656,46965$ nm. Die minimale blauverschobene Wellenlänge liegt bei $\lambda_1 = 656,21969$ nm, gleichzeitig wird auch die rotverschobene Linie mit $\lambda_2 = 656,61967$ nm beobachtet. Die Umlaufdauer des Doppelsternsystems wird zu $T = 6$ d 8 h 53 min 6 s gemessen.

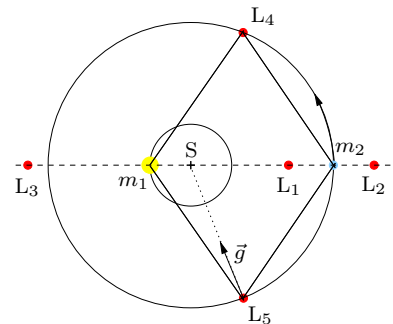
- Gib eine qualitative Erklärung für das Auftreten von zwei H_α -Linien und berechne die Geschwindigkeiten der beiden Sterne des Systems (siehe Formelsammlung unter Doppler-Effekt). Ergebnis: $v_1 = 1,1417 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_2 = 6,8502 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- Berechne die Radien r_1 und r_2 der *kreisförmigen* Bahnen der beiden Sterne und ermittle dann ihre Massen.

1.6.15. Die große Halbachse der Merkurbahn ist $a = 0,3871$ AE, ihre numerische Exzentrizität ist $e = 0,2056$. Wir nehmen an, dass die Bahnebene des Merkur mit der Bahnebene der Erde zusammenfällt und dass die Bahn der Erde kreisförmig ist.

- Berechne den Perihel- und den Aphelabstand des Merkur. Als Näherung für die maximale Elongation α_{\max} des Merkur verwenden wir die Elongation in folgender Konstellation: Der Merkur ist im Aphel, die Verbindungslinie Erde-Sonne steht senkrecht auf der Geraden Merkur-Sonne. Berechne α_{\max} .
- Ist der Merkur von der Erde aus nach Sonnenuntergang im Osten beobachtbar? Genaue Begründung deiner Antwort!
- Um die Masse des Merkur genau zu bestimmen, wird eine Raumsonde in eine kreisförmige Umlaufbahn um den Planeten gebracht. Berechne die Merkurmasse aus dem Radius $r_S = 6,00 \cdot 10^6$ m dieser Kreisbahn und aus der Umlaufdauer $T_S = 5$ h 27 min 29 s.
- Der Merkur hat in der kleinsten Entfernung zur Erde den Winkeldurchmesser $\delta = 12,6''$. Berechne den Radius R des Planeten.

1.6.16. **Lagrangepunkte**

Zwei Massen m_1 und m_2 umkreisen ihren gemeinsamen Schwerpunkt S mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Eine dritte Masse m mit $m \ll m_1$ und $m \ll m_2$ (z.B. eine Raumsonde im System Sonne-Erde) bewegt sich im *gemeinsamen* Schwerfeld $\vec{g}(\vec{r})$ von m_1 und m_2 . Ein Punkt L in der Bahnebene von m_1 und m_2 , in dem m ebenfalls eine Kreisbahn um S mit der Winkelgeschwindigkeit ω beschreibt, heißt *Lagrangepunkt* oder *Librationspunkt*. Die Lagrangepunkte im System Sonne-Erde sind geeignete Orte für Raumstationen oder Beobachtungssatelliten.



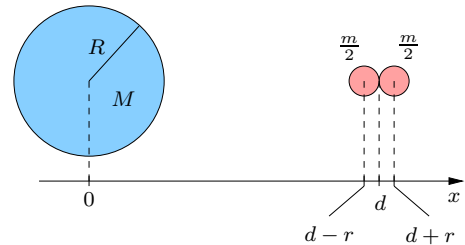
- Beweise: Ein Punkt P in der Bahnebene von m_1 und m_2 , in dem $\vec{g}(\vec{r})$ zu S zeigt, liegt auf der Verbindungsgeraden oder auf der Mittelsenkrechten von m_1 und m_2 .
- Beweise: Die Lagrangepunkte L_4 und L_5 , die nicht auf der Verbindungsgeraden der beiden Massen liegen, bilden mit diesen ein gleichseitiges Dreieck.
- Berechne mit einem Computeralgebrasystem im System Sonne-Erde die Lage der Lagrangepunkte L_1 , L_2 und L_3 , die sich auf der Verbindungsgeraden von Sonne und Erde befinden.

Um die Lagrangepunkte sind sogar Umlaufbahnen möglich. So befindet sich zur Zeit (1998) schon die dritte Raumsonde (SOHO) für Sonnenbeobachtungen auf einem Orbit um L_1 , dem Lagrangepunkt *zwischen* Erde und Sonne. Welche Vorteile bringt diese Position der Sonde gegenüber einer Umlaufbahn um die Erde?

2 Das Sonnensystem

2.1 Aufbau des Sonnensystems

- 2.1.1. (a) Berechne die maximale Elongation des Merkur und der Venus unter der vereinfachenden Annahme kreisförmiger Umlaufbahnen.
- (b) Die Merkurbahn muss wegen des relativ großen $e = 0,2056$ als Ellipse behandelt werden. Die Tangente von der Erde an die Merkurbahn bildet mit der Geraden Erde–Sonne den Winkel α . Eine genaue Analyse zeigt, dass α maximal ist, wenn die Gerade Sonne–Aphel Merkur auf der Geraden Aphel Merkur–Erde senkrecht steht. Berechne daraus den exakten Wert der maximalen Elongation des Merkur.
- 2.1.2. Von der Erde aus gesehen beschreiben die äußeren Planeten Schleifen relativ zu den Fixsternen. Erläutere das Zustandekommen einer Schleife am Beispiel des Marses. Zeichne dazu die Stellungen der Erde und des Marses in Monatsschritten, beginnend mit der Konjunktion des Marses. Es genügt, von Kreisbahnen der Planeten auszugehen.
- 2.1.3. Die synodische Umlaufdauer des Pluto beträgt 1 a 1 d 11 h 52 min 14 s. Berechne die siderische Umlaufzeit von Pluto.
- 2.1.4. Ein Mond der Masse m umkreist einen Planeten der Masse M , der Radius der Kreisbahn sei d . Wir nehmen an, dass der Mond nur durch Gravitationskräfte zusammengehalten wird. Um leichter rechnen zu können, denken wir uns den Mond aus zwei Kugeln der Massen $\frac{m}{2}$ und mit Radius r zusammengesetzt.



Der Mond wird auseinandergerissen, wenn die Differenz der Gravitationskräfte des Planeten auf die beiden „Mondkugeln“ größer ist als die Anziehungskraft der beiden Kugeln untereinander. Das ist der Fall, wenn der Bahnradius d eine gewisse Grenze d_R , die sogenannte **Roche-Grenze**, unterschreitet.

- (a) Berechne d_R in Abhängigkeit von M , m und r . Es darf angenommen werden, dass $\frac{r}{d} \ll 1$ ist und somit die lineare Näherung für

$$\frac{1}{1 \pm \frac{r}{d}}$$

verwendet werden darf.

- (b) Drücke d_R durch R und die Dichten von Planet und Mond aus.
- (c) Der Radius der Außenkante des aus vielen Einzelteilen bestehenden Saturnrings ist $d_A = 2,3 \cdot R$. Zeige, dass d_A kleiner ist als die Roche-Grenze für einen Mond mit der gleichen Dichte wie der Saturn. Der Saturnring könnte also durch Zerbersten eines Begleiters entstanden sein.

2.2 Eigenschaften der Planeten

- 2.2.1. Wieviel Prozent der gesamten Planetenmassen werden durch Jupiter abgedeckt? Wieviel Prozent der gesamten Masse des Sonnensystems machen die Planeten aus?
- 2.2.2. Berechne aus dem Äquatorradius $R_A = 71492 \text{ km}$ und der Abplattung $\frac{1}{16,4}$ den Polarradius des Jupiters.
- 2.2.3. Berechne die Fallbeschleunigung und die Fluchtgeschwindigkeit auf Jupiter und auf Pluto.

2 Das Sonnensystem

- 2.2.4. Für ein ideales Gas der Temperatur T und der Molekülmasse m ist die Wahrscheinlichkeit dafür, ein Teilchen im Geschwindigkeitsintervall $[v_1, v_2]$ vorzufinden:

$$P[v_1, v_2] = \int_{v_1}^{v_2} p(v) dv$$

mit der *Wahrscheinlichkeitsdichte*

$$p(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \alpha^3 v^2 e^{-\alpha^2 v^2} \quad \text{mit} \quad \alpha = \sqrt{\frac{m}{2kT}}$$

Dabei ist $k = 1,380658 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ die *Boltzmannkonstante*. $p(v)$ nennt man die *Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung*.

- 100 km über der Erdoberfläche herrschen in der Atmosphäre Temperaturen bis zu 2000 K. Zeichne $p(v)$ für H_2 und für O_2 bei der Temperatur $T = 2000 \text{ K}$.
- Berechne die Fluchtgeschwindigkeit 100 km über der Erdoberfläche. Berechne mit einem CAS die Wahrscheinlichkeit für ein H_2 - und für ein O_2 -Molekül, die Erde zu verlassen.
- Untersuche, ob der Erdmond bei $T = 130^\circ\text{C}$ eine Sauerstoffatmosphäre halten kann.

2.3 Der Mond

- 2.3.1. Leite die Beziehung zwischen T_{sid} und T_{syn} des Mondes her.
- 2.3.2. Der Mond kulminiert heute zur Zeit t . Wann kulminiert er morgen?
- 2.3.3.
 - Berechne die kleinste und die größte Entfernung des Mondes von der Erde. In welchem Intervall liegt der scheinbare Durchmesser (Winkeldurchmesser) des Mondes, von einem Beobachter auf der Erdoberfläche aus gesehen.
 - In welchem Intervall liegt der scheinbare Durchmesser der Sonne, von einem Beobachter auf der Erdoberfläche aus gesehen.
 - Welcher Bruchteil der Sonnenscheibe ist bei einer ringförmigen Sonnenfinsternis mindestens bedeckt?
 - Für diese Teilaufgabe nehmen wir an, dass eine totale Sonnenfinsternis mit maximaler Dauer an einer der Tagundnachtgleichen stattfindet, der Mittelpunkt des Kernschattens auf dem Äquator liegt und die Sonne gerade im Zenit steht. Welchen Radius hat der Kernschatten? Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Kernschatten über die Erdoberfläche? Wie lange dauert die totale Finsternis? Wie groß ist das Sichtbarkeitsgebiet der partiellen Finsternis?
 - Welche Form hat der Kernschatten, wenn die Sonne gerade untergeht.
- 2.3.4. Weise nach, dass die Gesamtkraft von Sonne und Erde auf den Mond immer eine Komponente zur Sonne hin aufweist. Was folgt daraus für die Krümmung der Mondbahn im Bezugssystem der Sonne? Zeichne diese Bahn mit einem CAS.

2.4 Allerlei Kleinzeug

- 2.4.1. Der Halley'sche Komet hat den Perihelabstand $r_0 = 0,5870 \text{ AE}$, in Quadratur ist seine Entfernung zur Sonne $r_1 = 1,1548 \text{ AE}$. Berechne die Umlaufdauer des Kometen.
- 2.4.2. Ein Hochspringer bringt auf der Erde seinen Schwerpunkt einen Meter in die Höhe.
 - Welche vertikale Absprunggeschwindigkeit v_0 erreicht der Athlet?

- (b) Der hochhinauswollende Sportler reist zur Hochsprungmeisterschaft auf den Asteroiden Vesta ($m = 3 \cdot 10^{20}$ kg, $R = 538$ km). Berechne die Fallbeschleunigung und die Fluchtgeschwindigkeit auf Vesta.
- (c) Welche Sprunghöhe erreicht unser Springer bei gleichem v_0 wie auf der Erde?
- (d) Welchen Radius dürfte ein Asteroid bei gleicher Dichte wie Vesta haben, damit unser Sportler aus eigener Kraft dem Himmelskörper entfliehen kann?

2.4.3. Wie stark die Verwüstungen sind, die ein Zusammenstoß der Erde mit einem größeren Meteoriten hervorrufen würde, ist fast nicht vorstellbar. Wir betrachten einen kugelförmigen Eisenmeteoriten mit dem Radius $R = 1$ km, der mit der Geschwindigkeit $v = 50 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ auf die Erde stürzt. Die gesamte kinetische Energie des Meteoriten wird dabei in zerstörende Energieformen verwandelt. Einige Kubikkilometer des Materials in der Umgebung der Aufschlagstelle werden augenblicklich verdampft, eine riesige Menge Staub oder Wasser wird in die Atmosphäre geschleudert, Erdbeben und Flutwellen von ungeheuren Ausmaßen suchen die Erde heim. Das Material in der Atmosphäre behindert den Durchgang des Sonnenlichts, so dass es nach dem Aufschlag zu einem jahrzehnte dauernden Winter kommt.

Wie gewaltig die beim Aufschlag umgesetzte Energie ist, zeigt ein Vergleich mit der Atombombe, die auf Hiroshima abgeworfen wurde. Diese Bombe hatte eine Sprengkraft wie $1 \cdot 10^7$ kg des Sprengstoffs TNT. Bei der Explosion von 1 kg TNT wird die Energie $4,2 \cdot 10^6$ J frei.

- (a) Die Dichte von Eisen ist $\rho = 7,86 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Berechne die kinetische Energie des Meteors.
- (b) Wie viele Atombomben des Hiroshimatyps setzen die gleiche Energie frei wie der Meteorenaufschlag?
- (c) Wir denken uns diese Atombomben gleichmäßig über die ganze Erdoberfläche verteilt. Auf welche Fläche kommt dann eine Bombe ($R_{\text{Erde}} = 6378$ km)? Wie groß ist die Kantenlänge eines Quadrates mit dieser Fläche?
- (d) Wie viele Kilogramm TNT müßte man auf jedem Quadratmeter der Erdoberfläche zur Detonation bringen, damit die gleiche Energie wie beim Meteorenaufprall erzeugt würde?

2.5 Nützliches aus der Theorie der Wärme und der Strahlung

- 2.5.1. Vergleiche die Temperaturen auf den Jupitermonden Europa und Callisto. Die Albedo dieser Monde sind $A_E = 0,64$ und $A_C = 0,20$, für beide Emissionsgrade nehmen wir in grober Näherung 1 an.
- 2.5.2. Berechne die Temperatur auf der Jupiteroberfläche (Albedo: $A = 0,73$). Rechne für einen Emissionsgrad zwischen 0,5 und 1. Man muss bei einem Planeten zwischen dem reflektierten Sonnenlicht und der vom Planeten selbst ausgesandten Temperaturstrahlung unterscheiden, die weit im Infraroten liegt. Das Maximum von Jupiters Temperaturstrahlung liegt bei $22,3 \mu$. Berechne daraus die Temperatur der Jupiteroberfläche. Wie erklärt sich die Diskrepanz zum oben erhaltenen theoretischen Ergebnis?
- 2.5.3. Die Strahlung von Rigel im Sternbild Orion zeigt bei der Wellenlänge $\lambda_{\text{max}} = 235,6$ nm ihr Intensitätsmaximum, Rigel hat den 19-fachen Sonnendurchmesser.
 - (a) Berechne die Temperatur auf Rigels Oberfläche und seine Leuchtkraft.
 - (b) Die Bestrahlungsstärke von Rigel am Ort der Erde ist $E = 3,13 \cdot 10^{-9} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$. Berechne die Entfernung Rigels von der Erde.
 - (c) Welchen Radius müßte die Umlaufbahn eines erdähnlichen Planeten um Rigel haben, damit auf ihm die gleichen klimatischen Verhältnisse wie auf der Erde herrschen

2 Das Sonnensystem

würden? Wie lange würde „ein Jahr“ auf diesem Planeten dauern, wenn Rigel ungefähr die 20-fache Sonnenmasse hat?

- (d) Wie groß wäre die Temperatur auf dem Planeten, wenn er Rigel in 1 AE Entfernung umkreisen würde?

2.5.4. Ein Stern kann mit bloßem Auge noch gesehen werden, wenn ungefähr 100 Lichtquanten pro Sekunde von den Stäbchen im Auge absorbiert werden. Dazu müssen ungefähr 10^4 Photonen die weit geöffnete Pupille (Durchmesser: 8 mm) treffen.

- (a) Die Intensität der Sonnenstrahlung am Ort der Erde beträgt $1400 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$, als mittlere Frequenz des Sonnenlichts wählen wir $5 \cdot 10^{14}$ Hz. Welche Entfernung darf ein Beobachter zu unserer Sonne haben, damit er sie mit freiem Auge gerade noch erkennen kann?
- (b) Welchen Objektivdurchmesser muss ein Fernrohr mindestens haben, damit ein mit diesem Teleskop bewaffnetes Auge einen 300 000 LJ entfernten Stern der Sonnenhelligkeit beobachten kann? Wie kann man mit dem gleichen Fernrohr noch viel weiter entfernte Sterne erfassen?

2.5.5. Für einen Stern mit dem Spektrum unserer Sonne lautet der Zusammenhang zwischen der scheinbaren (bolometrischen) Helligkeit m und der Bestrahlungsstärke E

$$E = E^* \cdot 10^{-\frac{m}{2,5}} \quad \text{mit} \quad E^* = 24,8 \cdot 10^{-9} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

- (a) Berechne die scheinbare Helligkeit der Sonne am Ort der Erde. Wie groß ist die absolute Helligkeit der Sonne?
- (b) Mit bloßem Auge sind unter besten Bedingungen Sterne bis $m \approx 7^{\text{m}}$ sichtbar, mit großen Teleskopen bis $m \approx 24^{\text{m}}$. Aus welcher Entfernung kann unsere Sonne mit bloßem Auge bzw. mit einem großen Fernrohr gerade noch wahrgenommen werden?
- (c) Wie viele Photonen treffen pro Sekunde die weit geöffnete Pupille (1 cm Durchmesser) eines Beobachters, der die Sonne mit dem unbewaffneten Auge gerade noch wahrnehmen kann? Wir nehmen an, dass alle Photonen die Wellenlänge $\lambda = 550$ nm haben.
- (d) Welchen Durchmesser müsste das Objektiv eines Fernrohres haben, damit bei Beobachtung mit dem Auge noch ein Stern der Größe $m = 24^{\text{m}}$ (gleiche Spektralklasse wie die Sonne) gesehen werden könnte? Wie werden diese schwachen Sterne dann registriert?
- (e) Aus welcher Entfernung kann eine 100-Watt-Lampe (gleiches Spektrum wie die Sonne) mit bloßem Auge bzw. mit einem großen Fernrohr gerade noch gesehen werden?
- 2.5.6. (a) Wie ändert sich die scheinbare Helligkeit eines Sterns, wenn sich seine Leuchtkraft verzehnfacht?
- (b) Um welchen Faktor ist die Bestrahlungsstärke der Sonne am Ort der Erde größer als die des Polarsterns ($m = 2,2^{\text{m}}$, der Polarstern hat eine ähnliche Oberflächentemperatur wie die Sonne).

2.5.7. Der hellste von der Erde aus sichtbare Stern ist Sirius. Er hat die scheinbare Helligkeit $m = -1,5^{\text{m}}$ und die absolute Helligkeit $M = 1,4^{\text{m}}$. Wie weit ist Sirius von der Erde entfernt?

2.5.8. Berechne die absoluten Helligkeiten der folgenden Sterne:

Stern	m	r in LJ
Arctur	$0,0^{\text{m}}$	37
Capella	$0,1^{\text{m}}$	42
Rigel	$0,1^{\text{m}}$	900
Mizar	$2,3^{\text{m}}$	78

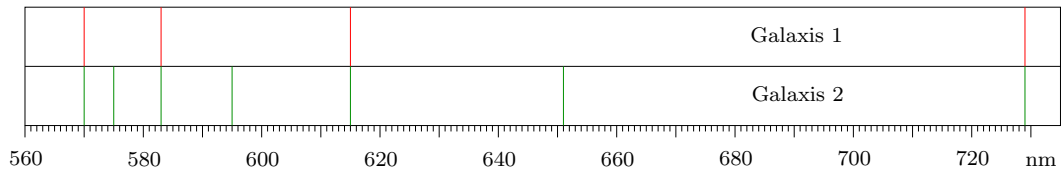
2 Das Sonnensystem

2.5.9. Jupiter hat die Albedo $A = 0,73$. Schätze die scheinbare Helligkeit Jupiters ab, wenn er in Opposition zur Erde steht.

2.5.10. Die Wellenlängen λ_{mn} der von Wasserstoffatomen ausgesandten Strahlung werden zu Serien zusammengefasst: LYMAN-Serie ($n = 1$), BALMER-Serie ($n = 2$), PASCHEN-Serie ($n = 3$), BRACKETT-Serie ($n = 4$) usw.

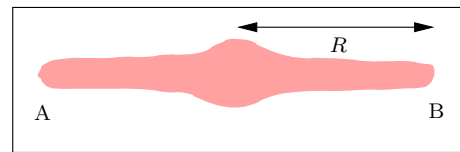
(a) Berechne die ersten drei Wellenlängen und die Grenzwellenlänge ($m \rightarrow \infty$) der vier angegebenen Serien. Welche Wellenlängen liegen im sichtbaren Bereich (385 nm bis 780 nm)?

(b) Da Wasserstoff das beherrschende Element des Universums ist (ca. 75 %), findet man im Licht ferner Galaxien die Linien des Wasserstoffs. Wegen des Dopplereffekts sind diese Linien aber rotverschoben (die Galaxien bewegen sich von uns weg). Man kann die gefundenen Wellenlängen somit nicht direkt mit den in (a) berechneten Wellenlängen vergleichen. Da die rotverschobenen Wellenlängen bei ein und derselben Quelle (und somit ein und derselben Geschwindigkeit) zu den unverschobenen Wellenlängen proportional sind, bleiben die Verhältnisse der Wellenlängen zur Identifizierung der Serie erhalten.



Obenstehende Abbildung zeigt die Ausschnitte aus den Spektren von zwei Galaxien. Mit welchen Geschwindigkeiten bewegen sich diese Galaxien von uns fort?

2.5.11. Nebenstehende Abbildung zeigt das Fernrohrbild der Sombrero-Galaxie (M 104), Bickrichtung auf deren Schmalseite. Der Radius von M 104 ist $R = 3,6 \cdot 10^4$ LJ, ihre Entfernung von der Erde ist $r = 29 \cdot 10^6$ LJ. Die $H\beta$ -Linie des Wasserstoffs hat in einem zum Sender ruhenden Bezugssystem die Wellenlänge $\lambda_0 = 486,1342$ nm. Auf der Erde misst man folgende Wellenlängen der $H\beta$ -Linie:



Ort des Aussendens	A	B
Wellenlänge	$\lambda_A = 488,4749$ nm	$\lambda_B = 487,3356$ nm

- (a) Mit welcher Geschwindigkeit v bewegt sich der Mittelpunkt der Galaxie von uns fort?
- (b) Mit welcher Geschwindigkeit v_R rotiert der Rand der Galaxie relativ zu ihrem Mittelpunkt? Welcher Randpunkt bewegt sich dabei vom Mittelpunkt aus gesehen auf die Erde zu?
- (c) Vergleiche die von der Erde aus sichtbare Größe der Galaxie mit der des Mondes.
- (d) Die scheinbare Helligkeit von M 104 ist $9,0^m$. Schätze die Masse m_S der Galaxie ab und vergleiche mit der Masse m'_S , die sie auf Grund der Rotation der äußeren Sterne haben müsste.

3 Sterne

3.1 Gravitationsenergie

- 3.1.1. (a) Für welchen Radius R_0 einer homogenen Kugel (konstante Dichte) der Masse M ist ihre Gesamtenergie (Massenenergie plus Gravitationsenergie) gleich null?
 (b) Berechne R_0 für die Erde, die Sonne und das ganze Universum ($M \approx 10^{80} \cdot m_{\text{Proton}}$).
 (c) Vergleiche R_0 mit dem Radius R_c , für den die Fluchtgeschwindigkeit an der Kugeloberfläche gleich der Lichtgeschwindigkeit ist.
- 3.1.2. (a) Wir nehmen an, dass unsere Sonne eine homogene Kugel ohne eigene Energieerzeugung ist. Mit welcher Geschwindigkeit $v_R = \dot{R}$ muss sich der Radius der Kugel ändern, damit die konstante Sonnenleuchtkraft L aufrecht erhalten wird?
 (b) Beweise in diesem Fall die Formel

$$R(t) = \frac{1}{\frac{10L}{3\gamma M^2} \cdot t + \frac{1}{R_0}}$$

Nach welcher Zeit sinkt R auf $\frac{R_0}{2}$?

3.2 Druck und Temperatur in Sternen

- 3.2.1. Vergleiche die mittlere Dichte der Sonne mit der mittleren Dichte der Erde.
- 3.2.2. Wir nehmen an, dass die Dichte eines Sterns mit Radius R linear von außen nach innen zunimmt:

$$\varrho(r) = \varrho_0 \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

- (a) Drücke $\varrho(r)$ durch die Gesamtmasse M und durch R aus. Berechne die Massenfunktion $m(r)$.
 (b) Berechne die Gravitationsenergie des Sterns.
 (c) Beweise (μ ist die mittlere Teilchenmasse):

$$p(r) = \frac{3\gamma M^2}{\pi R^8} \cdot (R-r)^2(R^2 + rR - r^2)$$

$$T(r) = \frac{\gamma \mu M}{k R^4} \cdot (r^3 - 2Rr^2 + R^3)$$

Wie lauten die Formeln für den Zentraldruck und die Zentraltemperatur?

- (d) Wie groß sind der Zentraldruck und die Zentraltemperatur der Sonne nach diesem Modell?

3.3 Energieerzeugung in Sternen

- 3.3.1. (a) Berechne die Dichte von Kernmaterie.
 (b) Welchen Radius hat ein Kern von ${}^{238}_{92}\text{U}$?
 (c) ${}^{238}_{92}\text{U}$ hat die relative Atommasse $A = 238,05078256$. Berechne die Bindungsenergie dieses Kerns.
- 3.3.2. Beweise, dass bei der Zerstrahlung eines e^- und eines e^+ mindestens zwei Photonen entstehen. Welche Wellenlänge haben die beiden Photonen im Schwerpunktsystem der Teilchen?

3.3.3. Sirius, der hellsten Stern an unserem Nachthimmel, ist $r_S = 8,57 \text{ LJ}$ von der Erde entfernt. Das Spektrum des Lichtes von Sirius zeigt bei der Wellenlänge $\lambda = 263,45 \text{ nm}$ maximale Intensität, seine scheinbare Helligkeit ist $m_S = -1,5$.

- (a) Berechne die absolute Helligkeit M_S und die Leuchtkraft L_S von Sirius.

[Zur Kontrolle: $L_S = 23 \cdot L_\odot$]

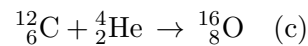
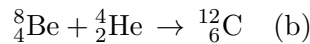
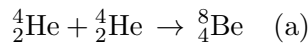
- (b) Bei der Fusionsreaktion $4p^+ + 2e^- \rightarrow {}^4_2\text{He}$ gehen $0,5 \text{ MeV}$ durch die Neutrinos verloren. Weise durch Rechnung nach, dass pro erzeugtem Heliumkern die Energie $26,2 \text{ MeV}$ für die Leuchtkraft des Sterns zur Verfügung steht. Wie viele Tonnen Wasserstoff müssen in Sirius pro Sekunde zu Helium fusioniert werden, damit die Leuchtkraft des Sterns aufrecht erhalten werden kann?

Masse Proton: $m_p = 1.00727647 u$, Masse Elektron: $m_e = 5,4858 \cdot 10^{-4} u$

Masse ${}^4_2\text{He}$ -Kern: $m_{\text{He4}} = 4,00150617 u$

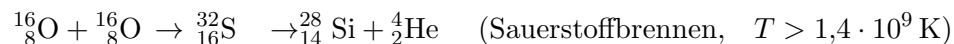
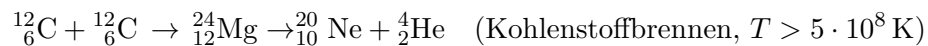
- (c) Berechne die Oberflächentemperatur T_S und den Radius R_S von Sirius.
 (d) Schätze die Masse μ_S von Sirius als Vielfaches der Sonnenmasse μ_\odot ab.

3.3.4. (a) Ab ca. 10^8 K beginnt das Heliumbrennen mit der wahrscheinlichsten Reaktionsfolge



Der in (a) entstehende angeregte Be8-Kern zerfällt nach ca. 10^{-16} s wieder in zwei He4-Kerne, d.h. der Be8-Kern muss in dieser kurzen Zeit von einem weiteren He4-Kern getroffen werden, um die Reaktion (b) einzuleiten (nur bei sehr großen Dichten möglich). Berechne die gesamte beim Heliumbrennen freiwerdende Energie pro erzeugtem O16-Kern.

- (b) Weitere Fusionsreaktionen in Sternen sind (es ist jeweils nur eine von mehreren Möglichkeiten angegeben):



Mit Fe56 endet die Kette der exotherm ablaufenden Fusionsreaktionen. Berechne für jede der Reaktionen die pro Endkern freiwerdende Energie. Vergleiche die *pro Masse* erzeugte Energie (MeV/u) beim H-, He-, C-, O- und Si-Brennen.

- (c) Mit welchen Geschwindigkeiten müssen zwei H- bzw. zwei Si-Kerne aufeinander geschossen werden, damit sie sich gegenseitig berühren und somit in den Bereich der starken Kraft kommen ($R_{\text{Kern}} \approx 1,3f \cdot \sqrt[3]{A}$)? Um welchen Faktor muss demnach die Temperatur für das Si-Brennen höher sein als für das H-Brennen?

Atom	A_r	N_r
${}^4_2\text{He}$	4,00260325	4,00150617
${}^{12}_6\text{C}$	12,00000000	11,99670963
${}^{16}_8\text{O}$	15,99491463	15,99052815
${}^{20}_{10}\text{Ne}$	19,99244018	19,98695802
${}^{28}_{14}\text{Si}$	27,97692654	27,96925440
${}^{56}_{26}\text{Fe}$	55,93494217	55,92071291

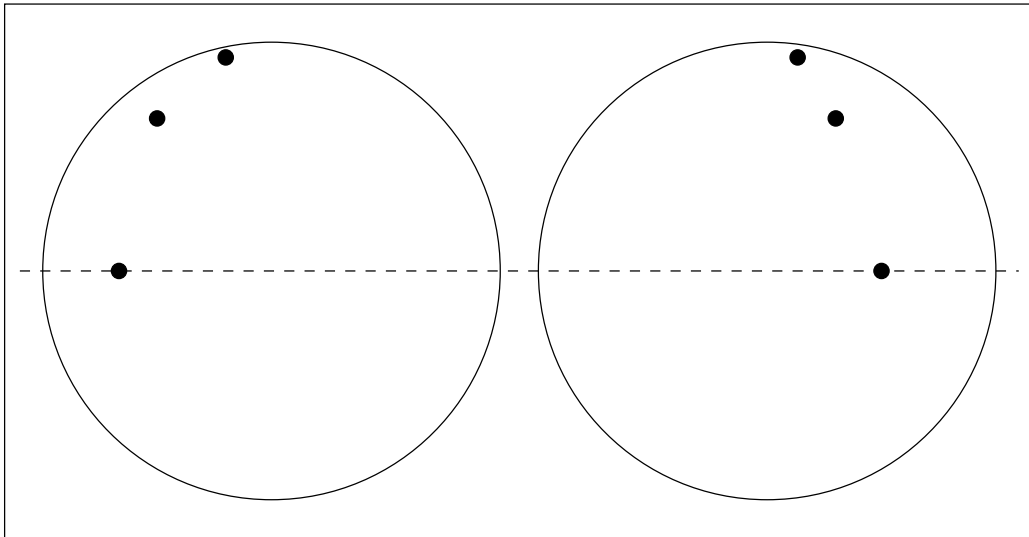
3.4 Grobe Beziehungen zwischen M , L , R und T_{eff}

- 3.4.1. Berechne für die Sterne der Tabelle die absolute Helligkeit, die effektive Temperatur, den Radius und die Leuchtkraft im Verhältnis zur Sonnenleuchtkraft. Markiere die Lage der Sterne im HRD. Wenn möglich, ist auch die Masse der Sterne abzuschätzen.

Stern	Parallaxe	m_V	λ_{max}
Sirius	0,3806''	-1,5 ^m	263 nm
Begleiter von Sirius	0,3806''	8,7 ^m	250 nm
Beteigeuze	0,0105''	0,8 ^m	906 nm
Rigel	0,0036''	0,1 ^m	235 nm
Polaris	0,0076''	2,0 ^m	460 nm
Spika	0,0119''	1,0 ^m	145 nm
Capella	0,0777''	0,1 ^m	518 nm
Barnards Stern	0,5454''	9,5 ^m	935 nm

3.5 Der sichtbare Bereich der Sterne

- 3.5.1. (a) Im Koronalicht der Sonne gibt es eine intensive Emissionslinie mit der Wellenlänge 530,3 nm (grün), die vom hochionisierten Fe^{13+} ausgesandt wird. Diese hohe Ionisationsstufe des Eisens wird erreicht, wenn Eisenatome mit der kinetischen Energie 355 eV aufeinanderprallen. Wie groß ist die Temperatur in der Korona, wenn die mittlere kinetische Energie der Eisenatome gerade diesem Wert entspricht?
- (b) Die hohe Temperatur des Koronagases bewirkt eine Verbreiterung der Spektrallinien auf Grund des Dopplereffekts. Wird das Koronalicht von einem Gitter mit $5000 \frac{\text{Linien}}{\text{cm}}$ spektral zerlegt, dann hat die grüne Koronalinie im Spektrum 1. Ordnung, das auf einen 2 m entfernten Schirm projiziert wird, eine Breite von 0,14 mm. Schätze daraus die Koronatemperatur ab.
- 3.5.2. Der Grundzustand des Natriumatoms liege bei $W_0 = 0$, die beiden nächsten Energiestufen sind $W_1 = 2,10230 \text{ eV}$ und $W_2 = 2,10443 \text{ eV}$. Berechne die Lage der Fraunhoferlinien, die durch Spuren von Natrium in der Photosphäre verursacht werden. Ab welcher Temperatur verschmelzen die beiden Linien auf Grund des Dopplereffekts zu einer breiten Linie?
- 3.5.3. Bei Kernreaktionen entstehende Kerne sind meistens in einem hohen Energieniveau und gehen erst durch Aussenden eines Photons (γ -Quants) in den Grundzustand über. Die großen kinetischen Energien der durch Fusion entstehenden Kerne werden durch Stöße mit anderen Kernen und Elektronen zum Teil in Photonen verwandelt (jede beschleunigte Ladung strahlt!). Bei den meisten Sternen wird die ganze durch Fusion erzeugte Energie in Form von Photonen nach außen transportiert. Wir nehmen an, dass primär lauter 0,5 MeV Photonen entstehen. Um welchen ungefähren Faktor erhöht sich die Zahl der Photonen auf ihrem Weg durch die Sonne?
- 3.5.4. Wie lange ist die Chromosphäre (Dicke 10 000 km) bei einer totalen Sonnenfinsternis sichtbar?
- 3.5.5. Der Sonnenwind besteht hauptsächlich aus Protonen und Elektronen. Am Ort der Erde besteht der Sonnenwind aus ungefähr 1 bis 10 Protonen pro cm^3 bei einer Teilchengeschwindigkeit von $v_1 \approx 500 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Im Folgenden rechnen wir mit 5 Protonen pro cm^3 (die Elektronen werden wegen ihrer geringen Masse vernachlässigt).
- (a) Welche Geschwindigkeit v_0 müssen die Protonen einen Sonnenradius über der Sonnenoberfläche haben, um die Erdbahn mit v_1 zu erreichen? Bei welcher Koronatemperatur würde die mittlere kinetische Energie der Teilchen der Geschwindigkeit v_0 entsprechen? Warum ist die wahre Koronatemperatur viel kleiner?
- (b) Welche Masse verliert die Sonne pro Sekunde und pro Jahr durch den Sonnenwind? Vergleiche mit der Masse, die die Sonne durch Photonen verliert!
- (c) Ein *Sonnensegler* besteht aus einer kleinen Raumkapsel der Masse $m_0 = 800 \text{ kg}$ (einschließlich Steuermann) und einem riesigen Sonnensegel aus einer sehr dünnen Alufolie der Dicke $d = 0,02 \text{ mm}$ mit der Fläche A , das senkrecht von der Sonnenstrahlung und vom Sonnenwind getroffen wird. Das Sonnenlicht wird reflektiert, der Sonnenwind absorbiert. Untersuche die Beschleunigung des Seglers in Abhängigkeit von A .
- 3.5.6. Die Abbildung zeigt zwei Aufnahmen der Sonne im Abstand von genau fünf Tagen, und zwar zu einer Zeit, zu der wir genau senkrecht auf den Sonnenäquator blicken. Ermittle aus der Bewegung der Sonnenflecken die synodische und die siderische Rotationsdauer der Sonne in Abhängigkeit vom der heliografischen Breite.



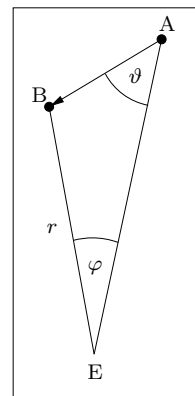
- 3.5.7. Erkläre, warum die von der Erde aus beobachtete Sonne in der Mitte der Scheibe am hellsten erscheint und sich zum Rand hin verdunkelt. Beachte dabei, dass die Temperatur in der Photosphäre von innen nach außen von ca. 6000 K auf 4000 K und die Dichte von ungefähr $10^{-7} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ auf $10^{-8} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ absinkt.

3.6 Informationen im Sternenlicht

- 3.6.1. Von der Erde E aus wird ein Stern beobachtet, der sich von A nach B bewegt, d.h. die Sternengeschwindigkeit \vec{v} schließt mit \overrightarrow{AE} den Winkel ϑ ein. Ist f_S die Frequenz des vom Stern ausgesandten Lichtes im Sternsystem und f_E die Frequenz des empfangenen Lichtes im Erdsystem, dann lautet die Dopplerformel in diesem allgemeinen Fall mit $v = |\vec{v}| = \beta c$:

$$k = \frac{f_E}{f_S} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \vartheta}$$

In der Zeitspanne Δt verschiebt sich der Stern am Himmelsgewölbe um den Winkel φ .

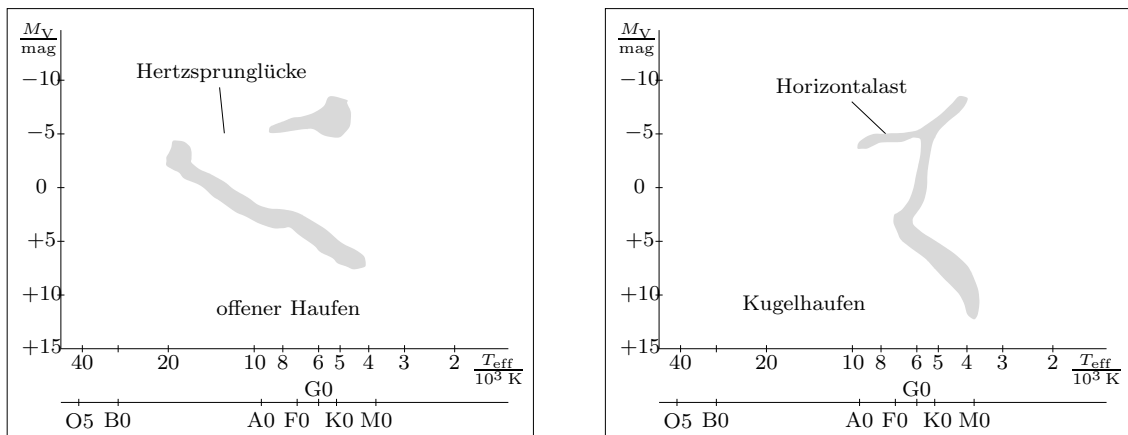


- (a) Zeige, dass die allgemeine Dopplerformel die bekannten Spezialfälle für Annäherung und Entfernung von Sender und Empfänger enthält. Wie lautet die Dopplerformel für $\vec{v} \perp \overrightarrow{AE}$ (transversaler Dopplereffekt)? Mit welcher Formel der Relativitätstheorie stimmt dieser Spezialfall überein?
- (b) Drücke v und ϑ im Fall $\beta \ll 1$ durch die Messgrößen k , r , Δt und φ aus.
- (c) Für Aldebaran lauten die Messwerte: $k = 0,99982$, $r = 65 \text{ LJ}$, $\Delta t = 1,00 \text{ a}$ und $\varphi = 0,203''$. Berechne v und ϑ .
- 3.6.2. Die Balmerlinien in den Sternspektren sind bei M-Sternen überhaupt nicht vorhanden, bei A0-Sternen sehr stark ausgeprägt und bei O-Sternen wieder sehr schwach. Erklärung!

3.7 Entwicklung der Sterne

- 3.7.1. Die Verweildauer unserer Sonne auf der Hauptreihe ist $\tau_{H\odot} \approx 6 \cdot 10^9 \text{ a}$, wobei ungefähr $4,5 \cdot 10^9 \text{ a}$ schon vergangen sind. Schätze die Verweildauer auf der Hauptreihe für einen Stern mit 100 Sonnenmassen und einen roten Zwerg mit 0,08 Sonnenmassen ab.

3.7.2. Da nur sehr massereiche Gasnebel zu Sternen kollabieren können, entsteht immer eine große Zahl ($\approx 10^2$ bis $\approx 10^6$) von Sternen auf einmal. Daher beobachtet man viele sogenannte **Sternhaufen**, die meist kugelsymmetrisch aufgebaut sind. Alle Sterne in einem Haufen sind also gleich alt. In der galaktischen Scheibe gibt es genügend interstellare Materie, so dass man auch heute noch Sternentstehungsgebiete beobachtet. In der Scheibe unserer Milchstraße gibt es also Sternhaufen, die gerade erst entstanden sind bis zu solchen, die genau so alt sind wie die Galaxis selbst. Die Hauptmasse der Galaxis konzentrierte sich in Folge der Rotation auf eine Scheibe, doch in der Entstehungsphase war die Materie kugelförmig verteilt. Daher gibt es einen kugelförmigen Halo von gleich alten Sternhaufen um unser Milchstraßensystem herum. Diese Sternhaufen sind sehr isoliert und erscheinen im Fernrohr als klar abgeschlossene Scheiben, weshalb sie **Kugelhaufen** genannt werden. Die Sternhaufen in der Scheibe sind nicht so isoliert von anderen Sternen und da sie teilweise viel näher sind, erscheinen ihre Ränder nicht so scharf, man spricht von **offenen Haufen**. Die beiden Abbildungen zeigen das HRD eines offenen und eines Kugelhaufens.



- (a) Erläutere, warum bei älteren Sternhaufen der linke Teil der Hauptreihe im HRD nicht mehr besetzt ist.
 (b) Für Sterne der Hauptreihe gilt näherungsweise

$$M_V \approx 80^m - 20^m \lg \left(\frac{T_{\text{eff}}}{\text{K}} \right)$$

Leite damit folgende Näherungen für Hauptreihensterne her:

$$\boxed{\frac{M}{M_\odot} \approx 4,3 \cdot 10^{-\frac{M_V}{7,5^m}}} \quad \boxed{\frac{M}{M_\odot} \approx 10^{-10} \cdot \left(\frac{T_{\text{eff}}}{\text{K}} \right)^{\frac{8}{3}}} \quad \boxed{\tau_H \approx 6 \cdot 10^{29} \text{ a} \cdot \left(\frac{T_{\text{eff}}}{\text{K}} \right)^{\frac{-16}{3}}}$$

- (c) Berechne das Alter der beiden Sternhaufen aus dem HRD.

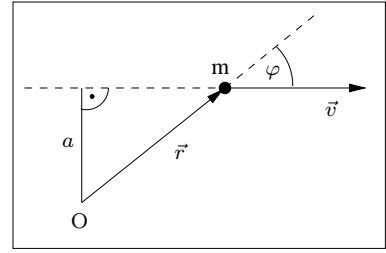
3.7.3. Neutronenstern

Der **Drehimpuls** eines Teilchens der Masse m und der Geschwindigkeit \vec{v} bezüglich eines Punktes O ist definiert als

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$$

Der Betrag des Drehimpulses ist dann (siehe Abb.)

$$L = m v r \sin \varphi = m v a$$



Für ein Teilchen auf einer Kreisbahn um O mit Radius r und der Winkelgeschwindigkeit ω gilt wegen $v = \omega r$

$$L = m v r = m r^2 \omega$$

- (a) Beweise durch Integration für den Drehimpuls einer homogenen Kugel der Masse M mit Radius R , die um eine den Kugelmittelpunkt enthaltende Achse rotiert:

$$L = \Theta \omega \quad \text{mit} \quad \Theta = \frac{2}{5} M R^2$$

Θ nennt man das **Trägheitsmoment** der Kugel.

- (b) Als Beispiel betrachten wir einen schweren Stern, dessen ausgebrannter Kern die Masse $M_0 = 3,0 \cdot 10^{30}$ kg und den Radius $R_0 = 5,0 \cdot 10^8$ m hat. Dieser Kern rotiert einmal in $T_0 = 1,0 \cdot 10^6$ s um seine Achse. Der Kern kollabiert zu einem Neutronenstern mit dem Radius $R = 20$ km, wobei er die halbe freiwerdende Gravitationsenergie als Strahlung verliert. Welche Gesamtmasse M hat dieser Neutronenstern? Rechne mit einer konstanten Dichte.
- (c) Es gilt der Drehimpulssatz:

Der Drehimpuls eines abgeschlossenen Systems ist konstant.

Welche Rotationsdauer T hat unser Neutronenstern, wenn Anfangs- und Endkörper als homogene Kugeln betrachtet werden und der Drehimpuls der Strahlung null ist?

- (d) Die Rotationsenergie eines Körpers ist $W_{\text{rot}} = \frac{\Theta}{2} \omega^2$. Wieviel Prozent der Gesamtenergie des Neutronensterns stecken in der Rotationsenergie?
- (e) Vergleiche die Fallbeschleunigung mit der maximalen Zentrifugalbeschleunigung an der Oberfläche unseres Neutronensterns. Wie lange braucht ein Neutron für zehn Meter freien Fall am Pol bzw. am Äquator des Neutronensterns? Welche mittlere Dichte hat er, wie groß ist die Fluchtgeschwindigkeit an seiner Oberfläche?
- (f) Was passiert mit einem Menschen, der, mit den Füßen voraus, auf einen Neutronenstern fällt? Schätze dazu die Kraft ab, mit der seine Rumpfmittle belastet wird. Verwende als einfaches Modell des Menschen zwei Kugeln der Masse 40 kg in der Entfernung 1,0 m, die durch eine Feder miteinander verbunden sind.
- (g) Welche Umlaufdauer hat ein Neutron, das den Neutronensterns 10 km über der Oberfläche umkreist?

- 3.7.4. (a) Ein geladenes Teilchen ($q = 1e$) der Geschwindigkeit v tritt unter dem Winkel $\varphi = 30^\circ$ in ein homogenes Magnetfeld der Kraftflussdichte $B = 1,0 \cdot 10^8 \text{ T}$ ein (Feld am Pol eines Neutronensterns). Berechne zunächst allgemein den Radius r und die Ganghöhe h der Schraubenlinie, die das Teilchen beschreibt. In welcher Zeit T wird ein Gang durchlaufen?
- (b) Berechne r , h und T für ein Elektron und für ein Proton mit $v = 0,9c$.
- (c) Berechne r , h und T für ein Elektron und für ein Proton, wenn die Gesamtenergie des Teilchens das Zehntausendfache seiner Ruhenergie ist.
- 3.7.5. Die Neutrinos der Supernova SN 1987A in der großen Magellanschen Wolke (Entfernung 160 000 LJ) wurden am 23.02.87 um 7:36 Uhr registriert. Innerhalb von 12s wurden 19 Neutrinos entdeckt (11 vom Kamiokande in Japan und 8 vom IMB-Detektor in den USA). Die Energien der registrierten Neutrinos lagen im Bereich von 6 MeV bis 39 MeV. Um 9:30 Uhr am gleichen Tag beobachtete Albert Jones, ein Amateurastronom, die fragliche Himmelsgegend, ohne etwas Verdächtiges zu bemerken. Auf einer Fotoplatte der großen Magellanschen Wolke, die Robert McNaught um 10:30 belichtete, war SN 1987A vorhanden. Schätze unter der Annahme, dass die Schockwelle in der Supernove die Oberfläche des Sterns erst ungefähr drei Stunden nach den Neutrinos erreichte, die Ruhmasse eines Neutrinos der Gesamtenergie $W = 10 \text{ MeV}$ ab.
- 3.7.6. Während der heißen Phase einer Supernovaexplosion wird sehr viel $^{56}_{28}\text{Ni}$ erzeugt. Dieses Isotop zerfällt durch zwei β^+ -Zerfälle in das stabile Eisen-56:



Der erste Zerfall hat die Halbwertszeit $T_1 = 5,9 \text{ d}$, der zweite $T_2 = 77,3 \text{ d}$. Die bei den Zerfällen entstehenden Positronen zerstrahlen mit Elektronen in energiereiche Photonen, die durch Wechselwirkung mit der noch vorhandenen Sternmaterie in viele energieärmere Photonen aufgespalten werden, die nach $t_0 \approx 90 \text{ d}$ die Oberfläche erreichen. 93 % der Lichtausstrahlung der Supernova SN 1987A stammen aus diesen Zerfällen! Ist $N(t)$ die Zahl der noch nicht zerfallenen Kerne eines Isotops, dann nennt man $A(t) = -\frac{dN}{dt}$ die **Aktivität** (Zerfälle pro Sekunde). Die Leuchtkraft der Supernova ist dann (wenn man die restlichen 7% vernachlässigt) proportional zur Gesamtaktivität $A(t - t_0)$ der beiden Zerfälle. Nach dem Zerfallsgesetz gilt

$$N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t} \quad \text{und} \quad N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t} \right)$$

N_2 ist etwas komplizierter, da laufend Material durch den ersten Zerfall nachgeliefert wird.

- (a) Wie hängt die Halbwertszeit T mit der **Zerfallskonstanten** λ zusammen?
- (b) Zeichne die Leuchtkraftkurve $L(t)$ ($L(0) \hat{=} 5 \text{ cm}$) von SN 1987A in den ersten 100 Tagen nach Erreichen der maximalen Leuchtkraft und zeichne auch die beiden Teil-Leuchtkräfte $L_1(t)$ und $L_2(t)$ ein.
- (c) Die scheinbare Helligkeit der am 23.02.87 ausbrechenden und 160 000 LJ entfernten SN 1987A betrug am 24.05.87 (t_0) ungefähr $2,8^m$. Berechne $L(t_0)$ und die Zahl N_0 der erzeugten Ni 56-Kerne. Wie groß war die scheinbare Helligkeit am 24.05.88?