

# LK Physik 12

## Aufgaben zur Elektrodynamik

Richard Reindl

Die aktuellste Version der Aufgaben findet man unter

<http://www.stbit.de>

Das Werk steht unter einer Creative Commons

- Namensnennung
- Nicht-kommerziell
- Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Unported Lizenz

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.de>



# 1 Grundlagen

## 1.1 Grundgrößen

- 1.1.1. Am 1.1.1990 um 0:00:00 Uhr wird eine Quartzuhr mit der Standardatomuhr synchronisiert (genau gleich gestellt). Am 24.3.1993 zur Standardzeit 12:00:00 Uhr zeigt die Quartzuhr die Zeit 12:00:17 an. Berechne die relative Ungenauigkeit der Quartzuhr!
- 1.1.2. Ein Laserstrahl wird zum Mond geschickt, dort an einem von Neill Armstrong aufgestellten Winkelspiegel reflektiert und anschließend am Ort des Aussendens wieder empfangen. Die Laufzeit des Laserblitzes (hin und zurück) wurde mit einer Cäsiumuhr zu  $t = (2,564474207 \pm 2 \cdot 10^{-9})$  s bestimmt. Berechne die Entfernung des Winkelspiegels vom Laser mit Angabe des absoluten und relativen Fehlers!

## 1.2 Messfehler

- 1.2.1. Eine Kugel fällt achtmal eine immer gleiche Höhe von 7 m hinunter. Mit einer Stoppuhr werden die Fallzeiten 1,13 s, 1,24 s, 1,22 s, 1,17 s, 1,20 s, 1,15 s, 1,18 s und 1,26 s gemessen. Berechne den Mittelwert und den relativen Fehler der Fallzeit!
- 1.2.2. Ein Vielfachmessgerät hat bei Spannungsmessungen einen Fehler von 2% und bei Strommessungen einen Fehler von 0,5%. Mit dem Gerät wird an einem Widerstand  $R$  die Spannung  $U = 10,00$  V und durch den Widerstand der Strom  $I = 0,200$  A gemessen. Berechne  $R$  mit Angabe des absoluten und relativen Fehlers!  
Welches Gesetz vermutet man für den relativen Fehler eines Quotienten von zwei ungenauen Zahlen?
- 1.2.3. **Dezimalen und geltende Ziffern**

**Dezimalen** sind Nachkommastellen, geltende Ziffern beginnt man mit der ersten Ziffer ungleich Null zu zählen:

Zahl	Dezimalen	geltende Ziffern
23,0234	4	6
0,0034	4	2
20	0	2
20,00	2	4
$2 \cdot 10^1$	0	1
$3,78 \cdot 10^{-7}$	9	3

- (a) Begründe folgende Regeln:

Eine Summe ungenauer Zahlen hat höchstens so viele sinnvolle Dezimalen wie der ungenaueste Summand!

Ein Produkt (Quotient) ungenauer Zahlen hat höchstens so viele geltende Ziffern wie der ungenaueste Faktor!

- (b)  $a = 2,304$ ,  $b = 0,00456$ ,  $c = 3,5 \cdot 10^{-3}$ ,  $d = 1,004 \cdot 10^8$ ,  $e = 5 \cdot 10^{-8}$   
Die in folgenden Termen auftretenden numerischen Werte sind exakt,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  und  $e$  sind gerundete Zahlen.
- i. Schreibe die Ergebnisse sinnvoll gerundet:

$$2a + 3b; \quad a^2 + b^2; \quad (b + c) \cdot d; \quad a \cdot d; \quad \sqrt{d} + \frac{a - b}{c}; \quad d \cdot c^3; \quad d \cdot e^2$$

- ii. Runde einmal schon die Zwischenergebnisse und einmal nur das Endergebnis:

$$\frac{a}{b} + 100 \cdot b; \quad \frac{c^2}{e^2}$$

Welche Regel folgt daraus?

1.2.4.

Der relative Fehler eines Terms der Form

$$T = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_m}$$

ist ungefähr gleich der Summe der relativen Fehler der Faktoren.

Beweise diesen Satz für die Spezialfälle  $T = a \cdot b$  und  $T = \frac{a}{b}$  unter der Voraussetzung  $\Delta a \ll a$  und  $\Delta b \ll b$ ! Für den zweiten Fall darf die Näherungsformel

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x \quad \text{für } |x| \ll 1$$

verwendet werden. Überprüfe diese Formel für  $x \in \{0,01; 0,0006; -0,00008\}$ !

- 1.2.5. Mit einer Atomuhr wird die Zeitspanne  $T$  gemessen. Da eine Atomuhr nur **ganze** Schwingungsdauern  $\Delta T_0$  zählen kann, setzt sich der absolute Fehler dieser Zeitmessung aus  $\Delta T_0$  und dem Langzeitfehler  $\Delta T_L = 10^{-14} \cdot T$  zusammen.

- (a) Berechne den relativen Fehler der Zeitmessung für  $T \in \{1 \text{ ns}, 1 \mu\text{s}, 1 \text{ s}, 1 \text{ a}\}$ !  
 (b) Für welches  $T$  beträgt der relative Fehler  $2 \cdot 10^{-14}$ ?  
 (c) Zur Messung der Länge  $s$  einer Strecke [AB] wird von einer Atomuhr die Zeit gestoppt, die ein Lichtimpuls zum zurücklegen dieser Strecke benötigt. Berechne den relativen Fehler dieser Messung für  $s = 1 \text{ m}$ ,  $s = 1 \text{ km}$  und  $s = 1 \text{ LJ}$ !

Die Ergebnisse von (c) zeigen, dass für eine präzise Längenmessung andere Verfahren benötigt werden (Schwebungsfrequenz von zwei Lasern; siehe z.B. W. Kranzer: "So interessant ist Physik", S.148 oder F. Westermann: "Laser", S.146).

### 1.3 Messung linearer Zusammenhänge

- 1.3.1. Ein auf der Autobahn flüchtender Bankräuber ist von Zeugen (daher die große Ungenauigkeit) um 0.00 Uhr bei km 100, um 3.00 Uhr bei km 200, um 4.00 Uhr bei km 500 und um 5.00 Uhr bei km 400 gesichtet worden. Berechne die Geschwindigkeit  $v$  und den Ort  $x_0 = x(0)$  des Bankräubers unter der Annahme einer konstanten Geschwindigkeit mit Hilfe der Gauß'schen Ausgleichsgeraden! Zeichnung! Wann begann der Räuber aller Wahrscheinlichkeit nach seine Flucht bei km 0?

- 1.3.2. Die lineare Näherung für eine Funktion  $y = f(x)$  kann in der Form

$$dy = f'(x) \cdot dx = \frac{df}{dx} \cdot dx$$

geschrieben werden. Für eine Funktion  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  von mehreren Veränderlichen lautet die lineare Näherung

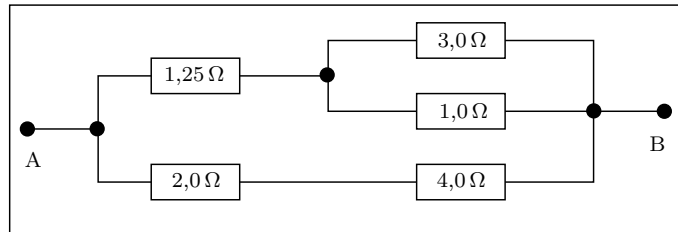
$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n$$

- (a) Ein Widerstand  $R$  wird aus  $U = 5 \text{ V}$  und  $I = 2 \text{ A}$  bestimmt. Berechne die Änderung  $dR$  des Widerstandes für  $dU = 0,1 \text{ V}$  und  $dI = 0,05 \text{ A}$  einmal direkt und einmal mit der linearen Näherung!
- (b) Beweise mit der Formel für die lineare Näherung den schon bekannten Satz für den relativen Fehler in der etwas exakteren Form

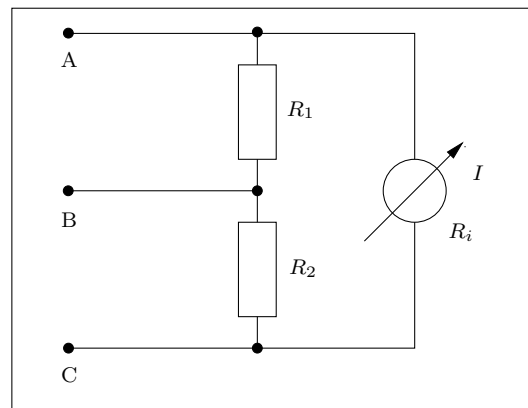
$$\left| \frac{dR}{R} \right| \leq \left| \frac{dU}{U} \right| + \left| \frac{dI}{I} \right|$$

### 1.4 Wiederholung Elektrizität

- 1.4.1. Berechne den Gesamtwiderstand  $R_{AB}$  der nebenstehend gezeichneten Schaltung!



- 1.4.2. Das Drehspulmesswerk mit dem Innenwiderstand  $R_i = 50,0 \Omega$  zeigt bei einem Strom von  $I_0 = 2,00 \text{ mA}$  Vollausschlag. Wie müssen  $R_1$  und  $R_2$  gewählt werden, damit das Gerät bei  $100 \text{ mA}$  von A nach B und ebenfalls bei  $10,0 \text{ mA}$  von A nach C Vollausschlag zeigt?



- 1.4.3. Auf einer Glühbirne steht „220 V / 40 W“. Welchen Widerstand  $R$  hat die Lampe?
- 1.4.4. Ist  $\Delta Q$  die frei bewegliche Ladung eines Leiters im Volumen  $\Delta V$ , dann nennt man

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

die **Dichte** der frei beweglichen Ladung. Fließt senkrecht durch die Fläche  $\Delta A$  der Strom  $\Delta I$ , dann heißt

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta A}$$

die **Stromdichte**.

In einem Draht mit dem Querschnitt  $A$  fließt ein räumlich und zeitlich konstanter Strom  $I$ . Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Dichte  $\rho$  der frei beweglichen Ladung, der Stromdichte  $j$  und der Elektronengeschwindigkeit  $v$ ?

- 1.4.5. Durch einen Kupferdraht mit dem Querschnitt  $A = 5,00 \text{ mm}^2$  fließt der Strom  $I = 4,00 \text{ A}$ . Von jedem Cu-Atom der Masse  $m = 1,06 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$  stammen im Mittel 1,27 Leitungselektronen. Berechne die Stromdichte  $j$ , die Dichte  $\rho$  der frei beweglichen Ladung und die Driftgeschwindigkeit  $v$  der Elektronen! Die Dichte von Kupfer ist  $\sigma = 8,93 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ .
- 1.4.6. Ein Strom genügt dem Zeitgesetz

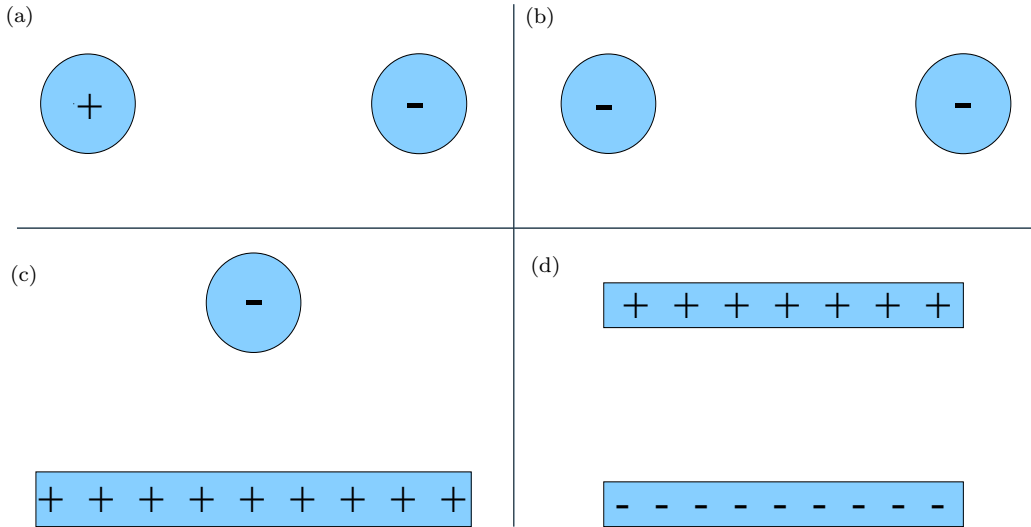
$$I(t) = 5,00 \frac{\text{A}}{\text{s}^2} \cdot t^2$$

Welche Ladung fließt im Zeitintervall  $[1 \text{ s}; 3 \text{ s}]$  durch den Leiterquerschnitt?

## 2 Elektrostatik

### 2.1 Das elektrische Feld

2.1.1. Zeichne die Feldlinienbilder folgender Ladungsverteilungen (Leiter sind grau)! Achte auf Symmetrien!



2.1.2. Welche Beschleunigung erhält eine kleine Alukugel der Masse  $m = 0,50 \text{ g}$  mit der Ladung  $Q = 2,0 \cdot 10^{-9} \text{ C}$  in einem elektrischen Feld der Feldstärke  $E = 4,0 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ ?

2.1.3. Eine Kugel der Masse  $m = 0,100 \text{ g}$  trägt die Ladung  $Q = 5,00 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  und hängt an einem  $l = 2,00 \text{ m}$  langen Faden. Die horizontale Auslenkung der Kugel in einem waagrechten und homogenen elektrischen Feld der Stärke  $E$  beträgt  $x = 2,50 \text{ cm}$ . Berechne  $E$ !

2.1.4.  $\vec{E}_1(\vec{r}), \dots, \vec{E}_n(\vec{r})$  seien die Feldstärken der Punktladungen  $Q_1, \dots, Q_n$  am Ort  $\vec{r}$ . Beweise das Superpositionsprinzip für Feldstärken:

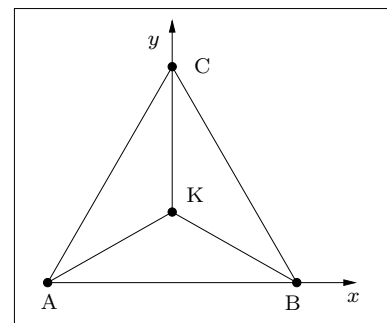
$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{\nu=1}^n \vec{E}_{\nu}(\vec{r})$$

2.1.5. (a) Ein elektrisches Feld mit dem Betrag  $E = 3,00 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  zeigt in die Richtung von  $P(-2,00 \text{ m} | 3,00 \text{ m} | 1,00 \text{ m})$  nach  $Q(-5,00 \text{ m} | -3,00 \text{ m} | 4,00 \text{ m})$ . Berechne  $\vec{E}$ .

(b) Ein Flugzeug startet mit  $v = 2,30 \cdot 10^2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  genau nach NNO mit einem Steigungswinkel von  $\varphi = 22,5^\circ$  gegen den Boden. Berechne  $\vec{v}$ .

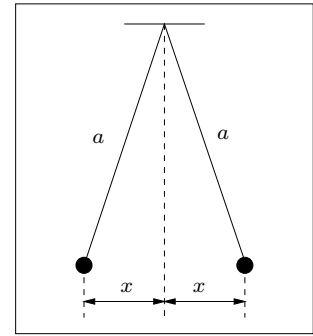
### 2.2 Das Coulombsche Gesetz

2.2.1. An den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge  $a$  sitzt je ein Elektron, im Schwerpunkt  $K$  des Dreiecks ruhen drei Protonen („Atomkern“). Berechne die Kräfte (Betrag und vektoriell) auf die Elektronen und auf den Kern! Für welche Kernladung wäre das System im Gleichgewicht?



2.2.2. Zwei Protonen in einem Atomkern haben die gegenseitige Entfernung  $r = 2,6 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ . Mit welcher Kraft stoßen sich die beiden Protonen ab? Wie groß wäre die Beschleunigung der Protonen, wenn keine anziehenden Kernkräfte vorhanden wären?

- 2.2.3. Zwei gleiche Alukugeln (jede hat die Masse  $m = 2,0\text{ g}$ ) hängen an Fäden der Länge  $a = 2,0\text{ m}$ . Die sich berührenden Kugeln werden geladen (wie stellt man das an?) und stoßen sich dann ab. Berechne die Ladung  $Q$  einer Kugel aus  $x = 2,6\text{ cm}$ !



- 2.2.4. Zwei Schaumstoffkugeln der jeweiligen Masse  $m = 0,20\text{ g}$  hängen an Fäden der Länge  $a = 1,0\text{ m}$ , die Aufhängepunkte der Fäden sind  $b = 15\text{ cm}$  voneinander entfernt. Berechne die Entfernung der Kugelmittelpunkte, wenn jede Kugel die Ladung  $Q = 8,9 \cdot 10^{-9}\text{ C}$  trägt.
- 2.2.5. Auf der  $x$ -Achse eines Koordinatensystems sitzen die Ladungen  $Q_1$  und  $Q_2$ ,  $Q_1$  bei  $x_1 = 0$  und  $Q_2$  bei  $x_2 = a$ .  $F(x)$  ist die Kraft auf eine positive Probeladung  $q$ , die sich auf der  $x$ -Achse am Ort  $x$  befindet. Schreibe  $F(x)$  hin, zeichne ein qualitatives  $xF$ -Diagramm ( $F < 0$ , wenn  $F$  nach links zeigt) und suche den Ort  $x_0$ , an dem  $F(x)$  Null ist:
- (a)  $Q_2 = 4Q_1$  ,  $Q_1 > 0$     (b)  $Q_2 = -4Q_1$  ,  $Q_1 > 0$
- 2.2.6. Welche Kraft (Betrag und Vektor) übt die Ladung  $Q_1$  am Ort R auf die Ladung  $Q_2$  am Ort S aus?
- (a)  $Q_1 = 1,69 \cdot 10^{-9}\text{ C}$ , R (2,00 cm | 1,00 cm | 3,00 cm)  
 $Q_2 = 2,60 \cdot 10^{-9}\text{ C}$ , S (5,00 cm | 5,00 cm | 15,00 cm)
- (b)  $Q_1 = 5,07 \cdot 10^{-9}\text{ C}$ , R (2,00 cm | 1,00 cm | 3,00 cm)  
 $Q_2 = -5,20 \cdot 10^{-9}\text{ C}$ , S (-10,00 cm | 4,00 cm | -1,00 cm)
- 2.2.7. (a) Welche Beschleunigung erfährt ein Elektron ( $m = 9,1 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$ ) in der Entfernung  $d = 0,30\text{ nm}$  von einem He4-Kern (2 Protonen)?
- (b) Einer Kupferkugel der Masse  $m = 1,0\text{ kg}$  werden alle Elektronen entzogen und auf eine gleichartige Kugel transportiert. Mit welcher Kraft ziehen sich die beiden Kugeln an, wenn die Entfernung ihrer Mittelpunkte dem dreifachen Radius einer Kugel entspricht?

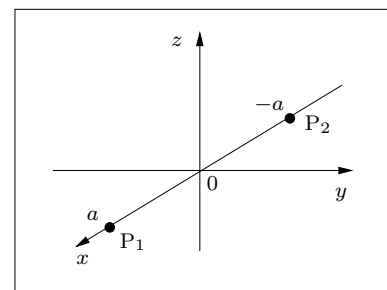
### 2.3 Das Feld von Punktladungen

- 2.3.1. Die Punktladungen  $Q_1 = Q$  und  $Q_2 = -Q$  sitzen an den Orten  $P_1(a|0|0)$  und  $P_2(-a|0|0)$ . Das von  $Q_1$  und  $Q_2$  erzeugte Feld heißt **Dipolfeld**.

(a) Drücke  $\vec{E}(\vec{r})$  durch  $Q$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und  $a$  aus.

(b) Berechne  $\vec{E}(\vec{r}_1)$  für  $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}\text{ cm}$ ,  $a = 10\text{ cm}$

und  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} = 0,27\text{ Vm}$ .



- (c) Berechne  $\vec{E}(\vec{r})$  und  $E(\vec{r}) = |\vec{E}(\vec{r})|$  auf der  $x$ -Achse, d.h. für  $y = z = 0$ . Unterscheide die Fälle  $x < -a$ ,  $-a < x < a$  und  $x > a$ . Skizziere die  $x$ -Koordinate  $E_x(x)$  qualitativ für  $Q > 0$ . Mit welcher Potenz fällt  $E(x)$  für  $x \gg a$  ab?
- (d) Berechne  $\vec{E}(\vec{r})$  und  $E = |\vec{E}(\vec{r})|$  in der  $yz$ -Ebene, d.h. für  $x = 0$ . Mit welcher Potenz fällt  $E(r)$  ( $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ ) für  $r \gg a$  ab?

- (e) Berechne  $\vec{E}(\vec{r})$  in der  $yz$ -Ebene, wenn  $Q_1 = Q_2 = Q$  gilt.  
Mit welcher Potenz fällt  $E(r)$  ( $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ ) für  $r \gg a$  ab?

## 2.4 Der Gauß'sche Satz

### 2.4.1. Homogen geladene Kugelfläche

Berechne den Betrag  $E(r)$  der Feldstärke im Innen- und Außenraum einer Kugel mit Radius  $R$ , deren Oberfläche gleichmäßig verteilt die Ladung  $Q$  trägt.  
Zeichne ein qualitatives  $rE$ -Diagramm.

### 2.4.2. Homogen geladene Kugel

Berechne den Betrag  $E(r)$  der Feldstärke im Innen- und Außenraum einer Kugel mit Radius  $R$ , die gleichmäßig über das ganze Volumen verteilt die Ladung  $Q$  trägt.  
Zeichne ein qualitatives  $rE$ -Diagramm.

### 2.4.3. Modell des Wasserstoffatoms

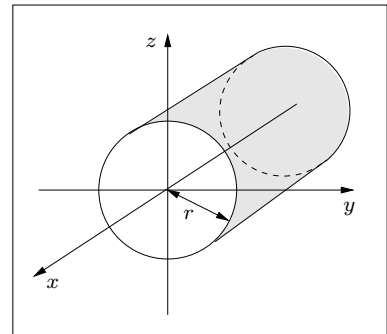
Ein einfaches Modell des H-Atoms sieht folgendermaßen aus: Das Elektron ist eine homogen geladene Kugel ( $R \approx 10^{-10}$  m), in deren Mittelpunkt das Proton (Punktladung) sitzt.

- (a) Warum führt das Elektron eine harmonische Schwingung aus, wenn es etwas aus seiner Ruhelage ausgelenkt wird? Das Proton bleibt dabei wegen seiner sehr viel größeren Masse praktisch in Ruhe! Berechne die Frequenz  $f$ , mit der das Elektron schwingt.
- (b) Welches äußere Feld muss am Ort des H-Atoms mindestens wirken, damit es ionisiert werden kann? Um welchen Bruchteil des Atomradius  $R$  verschiebt sich der Kern bei dem äußeren Feld  $E^* = 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  aus seiner Ruhelage (**Polarisation**)?

- 2.4.4. Eine Zylinderfläche mit Radius  $r$  um die  $x$ -Achse ist die Punktmenge

$$Z = \{P(x|y|z) \mid y^2 + z^2 = r^2\}$$

Eine Ladungsverteilung heißt **zylindersymmetrisch**, wenn die Ladungsdichte  $\varrho(r)$  auf jeder Zylinderfläche um die  $x$ -Achse konstant ist. Für welche zylindersymmetrische Ladungsverteilung  $\varrho(r)$  ist das elektrische Feld im ganzen Raum **betragsmäßig**



konstant? Verwende als Gauß'sche Fläche die Oberfläche eines Zylinders der Höhe  $h$ !

- 2.4.5. Für welche radialsymmetrische Ladungsverteilung  $\varrho(r)$  ist das elektrische Feld im ganzen Raum **betragsmäßig** konstant? Warum ist dieses Feld trotzdem nicht homogen?

### 2.4.6. Geladene Ebenen

- (a) Die  $xy$ -Ebene trägt eine Ladung mit der konstanten Flächenladungsdichte  $\sigma$ . Welches Feld  $\vec{E}$  wird von dieser Ladungsverteilung erzeugt?
- (b) Die  $xy$ -Ebene trägt eine Ladung mit der konstanten Flächenladungsdichte  $\sigma_1 > 0$ , die zur  $xy$ -Ebene parallele Ebene durch den Punkt  $P(0|0|a)$  trägt eine Ladung mit  $\sigma_2 = -\sigma_1$ . Welches Feld  $\vec{E}$  wird von dieser Ladungsverteilung erzeugt?
- (c) Ein Kondensator besteht aus zwei kreisförmigen Platten (Radius  $r$ ) im Abstand  $d \ll r$ ; die Platten tragen gleichmäßig verteilt die Ladung  $Q$  bzw.  $-Q$ . Welches Feld herrscht zwischen den Platten?

- 2.4.7. Berechne die Feldstärke  $E(r)$  der radialsymmetrischen Ladungsverteilung mit der Ladungsdichte

$$\varrho(r) = \frac{\alpha}{\sqrt{r}}.$$

Zeichne den qualitativen Verlauf von  $\rho(r)$  und  $E(r)$ ! Welche Benennung hat  $\alpha$ ?

2.4.8. Im Unterricht haben wir gezeigt, dass der Gauß'sche Satz aus dem Coulomb'schen Gesetz folgt. Beweise die Umkehrung! (Damit sind Gauß und Coulomb äquivalent!)

2.4.9. Auf die Punktladung  $q$  wirkt nur die Kraft der Punktladungen  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ .

- Beweise mit Hilfe des Gauß'schen Satzes, dass es keine Anordnung der Punktladungen gibt, für die  $q$  in einer **stabilen** Gleichgewichtslage wäre!
- Trotz des Ergebnisses von Teilaufgabe (a) gibt es rein elektrostatische Gleichgewichtslagen für eine Punktladung  $q$ . Für welche Art von Ladungsverteilung ist das nur möglich? Durchforste die schon gerechneten Aufgaben nach einem Beispiel!

## 2.5 Arbeit im elektrischen Feld

2.5.1. Berechne die Arbeit für die Überführung eines Elektrons (eines  ${}^4\text{He}$ -Kerns) von  $P_1(-5,0\text{ cm}|2,0\text{ cm})$  nach  $P_2(6,0\text{ cm}|4,0\text{ cm})$  im Feld

$$(a) \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ -200 \end{pmatrix} \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (b) \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

2.5.2. Die Ladung  $Q = 10^{-8}\text{ C}$  sitzt fest am Ort  $P_0(-2\text{ cm}| -2\text{ cm})$ . Berechne die Arbeit für die Überführung der Ladung  $q = 10^{-10}\text{ C}$  von  $P_1(-5,0\text{ cm}|2,0\text{ cm})$  nach  $P_2(6,0\text{ cm}|4,0\text{ cm})$ !

2.5.3. Die drei Punktladungen  $Q_1, Q_2$  und  $Q_3$  sitzen fest an den Orten  $P_1(0|a)$ ,  $P_2(-a|0)$  und  $P_3(0| -a)$ . Berechne die Arbeit für die Überführung der Ladung  $q$  von  $P_4(a|0)$  nach  $P_5(2a|0)$ .

- $Q_1 = Q, Q_2 = -Q, Q_3 = Q$  und  $q = -Q$  mit  $Q = 10^{-4}\text{ C}$
- $Q_1 = Q, Q_2 = Q, Q_3 = -Q$  und  $q = Q$  mit  $Q = 10^{-4}\text{ C}$

2.5.4. Berechne die Überführungsarbeit  $W_{AB}$  im homogenen Feld  $\vec{E}$  für die Bewegung der Ladung  $q = 3 \cdot 10^{-8}\text{ C}$  von A  $(-1,0\text{ cm}|3,0\text{ cm}|3,0\text{ cm})$  nach B  $(2,0\text{ cm}| -2,0\text{ cm}|5,0\text{ cm})$ .

$$(a) \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 800 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$(b) \quad \vec{E} \text{ zeigt in die Richtung von } \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} \text{ m und } |\vec{E}| = 800 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

2.5.5. Eine homogen geladene Kugel (Mittelpunkt  $M$ ) mit dem Radius  $R = 5,00\text{ m}$  trägt die Gesamtladung  $2Q$  mit  $Q = 5,564 \cdot 10^{-4}\text{ C}$ . Auf einer zur Kugel konzentrischen Kugelschale mit dem Radius  $3R$  befindet sich gleichmäßig verteilt die Ladung  $-Q$ . Eine kleine Styroporkugel der Masse  $m = 2,50\text{ g}$  trägt die Ladung  $q = 3,00 \cdot 10^{-6}\text{ C}$ .  $r$  sei die Entfernung von  $M$ , das Verhältnis von  $r$  zu  $R$  sei  $x: x = \frac{r}{R}$ .

- Berechne den Betrag  $E$  der Feldstärke, ausgedrückt durch  $x$  und die Konstante  $\alpha = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}$ . Zeichne  $E(x)$ .
- $W$  ist die potentielle Energie der Ladung  $q$  bezüglich  $r = 0$ . Berechne  $W(x)$  unter Benützung der Abkürzung  $\beta = q\alpha R$ . Berechne speziell  $W\left(\frac{R}{2}\right), W(R), W(2R), W(3R), W(6R)$  und  $W(\infty)$ . Zeichne  $W(x)$ .
- Die Styroporkugel startet bei  $r_0$  mit  $v_0 = 0$  und erreicht  $r$  mit der Geschwindigkeit  $v$ . Berechne  $v$  für  $r_0 = 0$  und  $r = \infty$  bzw.  $r_0 = 2R$  und  $r = 6R$ .

2.5.6. Wir betrachten noch einmal das einfache Modell des Wasserstoffatoms aus Aufgabe (2.4.3):



- Das Elektron ist eine homogen geladene Kugel mit Radius  $R$
  - Das Proton sitzt als Punktladung im Zentrum des Elektrons
- (a) Die Ionisierungsenergie, d.h. die Arbeit zur vollständigen Trennung von Kern und Elektron, beträgt beim H-Atom  $W_I = 13,6 \text{ eV} = 13,6 \cdot 1 \text{ e} \cdot 1 \text{ V}$ . Berechne aus diesem Wert den Radius  $R$  des H-Atoms.
- (b) Welche Geschwindigkeit  $v_0$  muss das Proton im Zentrum des Elektrons mindestens besitzen, um das Elektron vollständig verlassen zu können, wenn das Elektron, wie auch immer das realisiert wird, an seinem Ort in Ruhe bleibt.

## 2.6 Das Potential des elektrischen Feldes

- 2.6.1.  $\vec{E}$  ist ein homogenes Feld parallel zur  $z$ -Achse mit  $E_z = E$ .
- (a) Berechne das Potential  $\varphi_A$  bzw.  $\varphi_B$  in A ( $a_x|a_y|a_z$ ) bzw. B ( $b_x|b_y|b_z$ ) bezüglich des Punktes  $P_0(x_0|y_0|z_0)$  sowie  $\varphi'_A$  bzw.  $\varphi'_B$  bezüglich  $P'_0(x'_0|y'_0|z'_0)$ . Berechne die Spannung  $U_{AB}$  in B bezüglich A einmal mit  $\varphi$  und einmal mit  $\varphi'$ .
- (b) Berechne die Größen aus Teilaufgabe (a) speziell für  $E = E_z = 300 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ,  $P_0(0|0|0)$ ,  $P'_0(1 \text{ cm}|3 \text{ cm}| - 2 \text{ cm})$ , A ( $1 \text{ cm}| - 2 \text{ cm}|2 \text{ cm}$ ) und B ( $-3 \text{ cm}|4 \text{ cm}|5 \text{ cm}$ ).
- 2.6.2. Berechne im homogenen Feld  $\vec{E} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{\text{V}}{\text{m}}$  das Potential bezüglich des Ursprungs in den Punkten A ( $-3 \text{ cm}|1 \text{ cm}$ ) und B ( $4 \text{ cm}|1 \text{ cm}$ ). Berechne die Spannung  $U_{AB}$  in B bezüglich A.
- 2.6.3. Am Ort A ( $0|a$ ) befindet sich die Punktladung  $Q$ . Berechne das Potential  $\varphi(x)$  auf der  $x$ -Achse, wenn einmal ein unendlich ferner Punkt und ein anderes Mal der Ursprung als Bezugspunkt gewählt wird. Skizziere die Grafen der beiden Potentialfunktionen für  $Q > 0$ . Berechne  $U_{RS}$  für R ( $5 \text{ cm}|0$ ), S ( $9 \text{ cm}|0$ ),  $Q = -10^{-8} \text{ C}$  und  $a = 12 \text{ cm}$ .
- 2.6.4. An den Orten A ( $0|0|a$ ) und B ( $0|0| - a$ ) befindet sich jeweils die Punktladung  $Q$ .
- (a) Berechne das Potential  $\varphi(x, y)$  in der  $xy$ -Ebene, wenn ein unendlich ferner Punkt als Bezugspunkt gewählt wird.
- (b) Berechne  $U_{RS}$  für R ( $33 \text{ cm}|56 \text{ cm}|0$ ) und S ( $16 \text{ cm}|63 \text{ cm}|0$ ).
- (c)  $r$  sei die Entfernung des Punktes P ( $x|y|0$ ) vom Ursprung O. Berechne die Spannung  $U(r) = U_{OP}$  in P bezüglich O. Wie groß ist  $U(\infty)$  für  $Q = e$  und  $a = 10^{-15} \text{ m}$ ?
- 2.6.5. Berechne das Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  und das Potential  $\varphi(\vec{r})$  der geladenen  $z$ -Achse mit der konstanten Längenladungsdichte  $\varrho = \frac{dQ}{dz}$ .

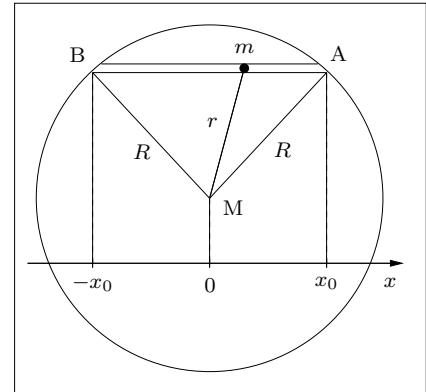
## 2.7 Elektrostatik und Gravitation

- 2.7.1. Berechne das Verhältnis aus elektrischer Kraft und Gravitationskraft auf das Elektron im Wasserstoffatom. Der Radius des H-Atoms ist  $r = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ .
- 2.7.2. Welche Ladung  $Q$  müsste man gleichmäßig über die Erdoberfläche verteilen, damit ein Elektron im Gravitationsfeld der Erde schweben würde?
- 2.7.3. **Elektrische Kraft kontra Gravitation**
- (a) Wie viele Kilogramm Elektronen müsste man je auf Erde und Mond verteilen, damit die Gravitationskraft zwischen den beiden Himmelskörpern gerade aufgehoben wird?
- (b) Welche Ladung  $Q_M$  kann man höchstens gleichmäßig über die Mondoberfläche verteilen, wenn die elektrische Feldstärke an der Oberfläche den Wert  $E_0 = 1,00 \cdot 10^7 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  nicht überschreiten darf? Was geschieht beim Überschreiten dieser Feldstärke? Welcher Bruchteil der in (a) berechneten Ladung kann also nur auf den Mond gebracht werden?

- 2.7.4. Eine homogene Kugel (Dichte überall gleich) mit Radius  $R$  hat die Masse  $M$ . Berechne das von der Kugel erzeugte Gravitationsfeld  $g(r)$ .

Zeichne  $g(r)$  im Intervall  $[0; 4R]$  für  $R = 5000$  km und  $M = 3,747 \cdot 10^{24}$  kg.

- 2.7.5. Durch einen Planeten mit Radius  $R$  und der konstanten Dichte  $\rho$  wird ein gerader Kanal gebohrt, der zwei Städte A und B miteinander verbindet. Durch den **Sehnenkanal** fällt reibungsfrei eine Transportkapsel der Masse  $m$  mit der Anfangsgeschwindigkeit Null am Ort A.



- (a) Berechne unter Verwendung von Aufgabe 2.7.4 den Betrag  $F_G(x)$  der Kraft auf die Kapsel!
- (b) Berechne die Komponente  $F(x)$  der Kraft  $F_G(x)$ , die parallel zur  $x$ -Achse zeigt! Welche Bewegung führt die Kapsel demnach aus?
- (c) Berechne die Fallzeit  $\tau$  von A nach B zunächst allgemein und dann speziell für die Erde, und zwar einmal für München-New-York und einmal für München-Sydney!
- 2.7.6. Welche Geschwindigkeit  $v$  muss ein Satellit haben, der die Erde in einer Höhe von 200 km über Grund umkreist? Mit welcher Geschwindigkeit  $v_0$  muss der Satellit von der Erdoberfläche abgeschossen werden, damit er ohne weiteren Antrieb (außer zu Richtungskorrekturen) die Umlaufbahn mit der richtigen Geschwindigkeit  $v$  erreicht (Luftwiderstand vernachlässigen!)? Warum werden Satelliten immer in Richtung Osten abgeschossen?
- 2.7.7. (a) Ein Neutronenstern hat die Dichte  $\rho = 1,81 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Welchen Radius  $R$  hat ein Neutronenstern mit der Masse unserer Sonne ( $M = 1,99 \cdot 10^{30}$  kg) und welche Gravitationsfeldstärke  $g$  herrscht an seiner Oberfläche?
- (b) Welchen Radius  $R_0$  dürfte ein Neutronenstern nur haben, damit an seiner Oberfläche die gleiche Feldstärke herrschen würde wie an der Erdoberfläche?
- (c) Ein Mensch der Größe  $h = 180$  cm fällt mit den Füßen voraus auf einen Neutronenstern mit der Masse unserer Sonne.  $\Delta g(r)$  sei der Unterschied der Feldstärken an den Füßen und am Kopf, wenn sich die Füße in der Entfernung  $r$  vom Mittelpunkt des Sterns befinden. Berechne den exakten Ausdruck für  $\Delta g(r)$  sowie eine Näherung mit  $h \ll r$ ! Berechne den prozentualen Fehler der Näherung für  $r = 100$  km! Für welches  $r$  ist  $\Delta g(r) = 100 \cdot g_{\text{Erde}}$ ?
- 2.7.8. (a) Ein Körper der Masse  $m$  fällt aus der Höhe  $h$  über der Erdoberfläche mit der Anfangsgeschwindigkeit Null herab. Berechne die Aufprallgeschwindigkeit bei Vernachlässigung der Luftreibung einmal exakt ( $v(h)$ ) und einmal mit der Näherung eines konstanten Gravitationsfeldes ( $v_n(h)$ )! Berechne  $v(1$  km),  $v(100$  km) und  $v(10000$  km) und den jeweiligen prozentualen Fehler der Näherung!
- (b) Berechne  $h(v)$  einmal exakt und einmal mit der obigen Näherung! Berechne  $h(100 \frac{\text{m}}{\text{s}})$ ,  $h(1000 \frac{\text{m}}{\text{s}})$  und  $h(10000 \frac{\text{m}}{\text{s}})$  sowie den jeweiligen prozentualen Fehler der Näherung!
- (c) Ab welcher Höhe  $h$  ist der Betrag des relativen Fehlers der Näherung  $v_n(h)$  größer als ein Prozent?

## 2.8 Zusammenhänge zwischen $\vec{E}$ , $\varphi$ und $\rho$

- 2.8.1. Berechne die Feldstärke  $\vec{E}(\vec{r})$  aus dem Potential

(a)  $\varphi(\vec{r}) = ax + by + cz$       (b)  $\varphi(\vec{r}) = -a \cdot r^2$

2.8.2. Zeige, dass das Potential  $\varphi(\vec{r}) = ax + by + cz$  des homogenen Feldes und das Potential einer Punktladung im Ursprung die Laplace-Gleichung erfüllen.

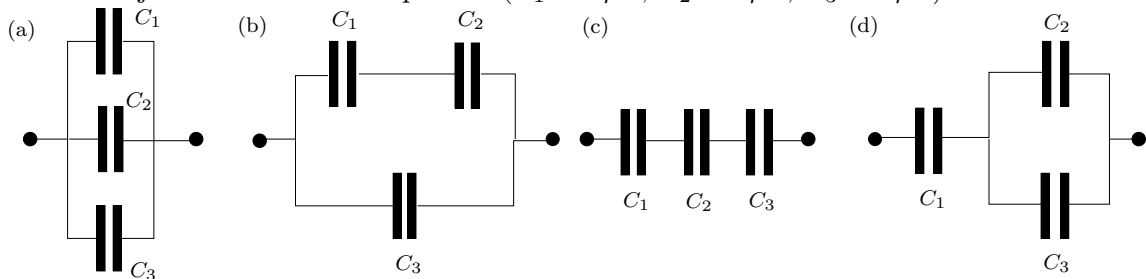
2.8.3. Gegeben ist die Ladungsverteilung mit

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für alle Punkte mit } -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Aus Symmetriegründen hat das Feld dieser Ladungsverteilung nur eine Komponente  $E$  parallel zur  $x$ -Achse. Berechne  $E(x)$ .
- Berechne das Potential der Ladungsverteilung mit dem Ursprung als Bezugspunkt in Abhängigkeit von  $x$ . Zeige, dass  $\varphi(x)$  bei  $x = \pm\frac{d}{2}$  glatt verläuft, d.h. differenzierbar ist. Skizziere  $E(x)$  und  $\varphi(x)$ .
- Welche Arbeit  $W$  muss man aufwenden, um die Ladung  $q$  von  $x_1 = -\frac{d}{2}$  nach  $x_2 = \frac{d}{2}$  zu transportieren?

## 2.9 Kondensatoren

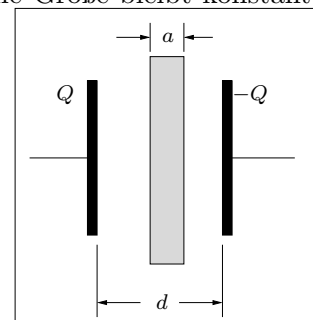
2.9.1. Berechne jeweils die Gesamtkapazität ( $C_1 = 1 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 2 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 4 \mu\text{F}$ ):



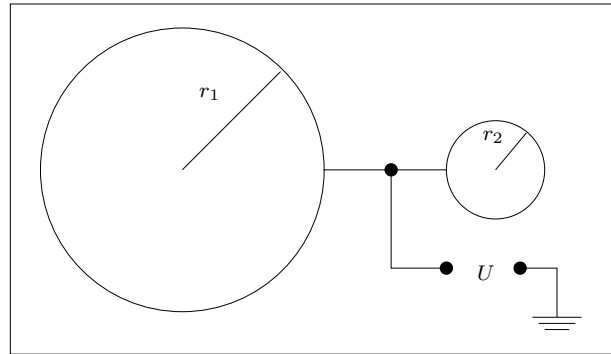
2.9.2. Ein Plattenkondensator trägt auf jeder Platte die Ladung  $Q = 5,00 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ , der Plattenabstand ist  $d = 4,00 \text{ mm}$  und die Fläche einer Platte beträgt  $A = 900 \text{ cm}^2$ . Welche Spannung  $U$  liegt an den Platten? Welche Kraft  $F$  wirkt auf ein Staubteilchen zwischen den Platten, das die Ladung  $q = 2,00 \cdot 10^{-13} \text{ C}$  trägt? Welche Beschleunigung erhält das Teilchen mit  $m = 4,00 \cdot 10^{-5} \text{ g}$ ?

2.9.3. Ein Plattenkondensator mit dem Plattenabstand  $d$  liegt an der Spannung  $U$  und trägt die Ladung  $Q$ , das Feld zwischen den Platten sei  $E$ . Drücke die jeweils neuen (gestrichenen) Größen durch die alten (ungestrichenen) aus, wenn folgende Änderungen vorgenommen werden:

- Vergrößerung von  $d$  auf  $d' = n \cdot d$  bei angeklemmter Spannung, d.h.  $U$  ist konstant. Gesucht:  $E'$ ,  $Q'$  und  $C'$ .
- Wie (a), jedoch mit abgeklemmter Spannungsquelle! Welche Größe bleibt konstant? Gesucht:  $E'$ ,  $U'$  und  $C'$ .
- Eine Leiterplatte der Dicke  $a$  ( $a < d$ ) wird parallel zu den Kondensatorplatten ins Feld geschoben. Berechne  $E'$ ,  $U'$  und  $C'$  bei angeklemmter Spannung!
- Berechne  $E'$ ,  $Q'$  und  $C'$  in der Anordnung aus Teilaufgabe (c), jedoch mit angeschlossener Spannungsquelle.



- 2.9.4. Ein einfaches Modell eines Körpers mit verschiedenen Krümmungen der Oberfläche zeigt nebenstehende Abbildung. Wir nehmen an, dass die beiden Kugeln weit voneinander und weit von anderen Körpern entfernt sind, d.h. wir können beide Kugeln in guter Näherung als freistehend betrachten.



Berechne die Beträge der Feldstärken an den Oberflächen der Kugeln sowie deren Verhältnis. Das Ergebnis zeigt das Phänomen der sogenannten **Spitzenwirkung**:

Das Feld an der Oberfläche geladener Leiter ist im Bereich großer Krümmungen (kleiner Krümmungsradien) groß, im Bereich kleiner Krümmungen klein.

- 2.9.5. Feldstärken der Größenordnung  $10^7 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  reißen Elektronen aus Leiteroberflächen heraus (**kalte Feldemission**). Welchen Radius  $R$  darf eine freistehende Kugel höchstens haben, damit
- die Ladung auf ihr nicht größer als  $10^{-6} \text{ C}$  wird? Wie groß ist in diesem Fall die maximale Spannung  $U_{\text{max}}$  der Kugel gegen  $\infty$ ?
  - $U_{\text{max}}$  nicht größer als 220 kV wird? Wie groß ist  $Q_{\text{max}}$  in diesem Fall?
- Berechne die Kapazitäten der Kugeln in beiden Fällen.

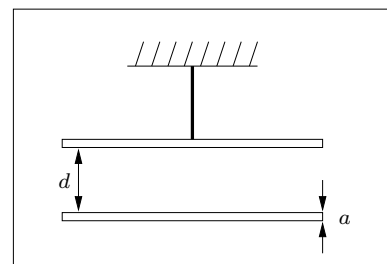
## 2.10 Energie des elektrischen Feldes

- 2.10.1. Ändert man den Plattenabstand eines Plattenkondensators, dann treten folgende Energieänderungen auf, wobei  $F$  die Kraft auf eine Platte bezeichnet:

$$\begin{aligned} \Delta W_e &= \text{Änderung der Feldenergie} \\ \Delta W_s &= \int_{Q_1}^{Q_2} U \, dQ \quad (\text{Arbeit der Stromquelle, Ladungstransport}) \\ \Delta W_m &= \int_{d_1}^{d_2} F \, dx \quad (\text{von außen hineingesteckte mechanische Arbeit}) \end{aligned}$$

Beweise, dass der Energiesatz  $\Delta W_e = \Delta W_s + \Delta W_m$  bei einer Änderung des Plattenabstandes von  $d_1$  auf  $d_2$  für die beiden Fälle  $Q = \text{konst.}$  und  $U = \text{konst.}$  erfüllt ist.

- 2.10.2. Die untere Kondensatorplatte in nebenstehender Abbildung soll im Gravitationsfeld an der Erdoberfläche frei schweben. Die Grenzfeldstärke für einen Funkenüberschlag durch kalte Feldemission sei bei der herrschenden Luftfeuchtigkeit  $E_0 = 5,00 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ . Die Dicke der unteren Platte sei  $a$ , ihre Dichte ist  $\rho$ .



- Welche Spannung  $U$  muss zwischen den Platten liegen, damit eine Eisenplatte ( $\rho = 7,86 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ) mit  $a = 2,00 \text{ mm}$  und dem Plattenabstand  $d = 5,00 \text{ mm}$  frei schwebt? Kann diese Spannung überhaupt zwischen den Platten liegen?

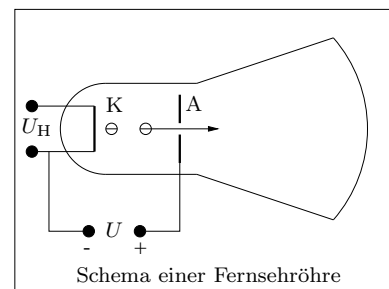
- (b) Welche maximale Dichte  $\rho_0$ , ausgedrückt durch  $E_0$  und  $a$ , darf die untere Platte haben, um frei schweben zu können? Berechne  $\rho_0$  speziell für  $a = 2,00$  mm.
- 2.10.3. In der Relativitätstheorie wird gezeigt, dass jeder Masse  $m$  die Energie  $W = mc^2$  mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  entspricht. Damit entspricht auch umgekehrt jeder Energie  $W$  die Masse  $m = \frac{W}{c^2}$ . Insbesondere folgt, dass das elektrische Feld, das ja Energie besitzt, auch eine Masse hat.
- (a) Ein ungeladener Plattenkondensator mit der Fläche  $A = 1,00$  m<sup>2</sup> einer Platte und dem Plattenabstand  $d = 10,0$  cm wird auf eine Waage gestellt und mit der Spannung  $U = 200$  kV aufgeladen. Welche Masse zeigt die Waage nach dem Laden mehr an?
- (b) Jetzt werden der ungeladene Kondensator und die Spannungsquelle gemeinsam auf die Waage gestellt. Wie ändert sich jetzt die Anzeige der Waage beim Laden des Kondensators?

#### 2.10.4. Der klassische Elektronenradius

- (a)  $W$  sei die Energie des Feldes einer Kugel mit Radius  $R$ , die gleichmäßig über die Oberfläche verteilt die Ladung  $Q$  trägt. Berechne  $W$  durch Integration der Energiedichte und verwende dabei als Volumenelement  $dV$  das Volumen einer dünnen Kugelschale mit Radius  $r$  und der Dicke  $dr$ . Berechne  $W$  noch einmal mit Hilfe der Kapazität einer freistehenden Kugel.
- (b) Wir nehmen an, dass die Ladung eines Elektrons gleichmäßig auf eine Kugeloberfläche mit Radius  $R$  verteilt ist und die Masse des Elektrons gleich der Masse seiner elektrischen Feldenergie ist. Berechne  $R$  (klassischer Elektronenradius).
- (c) Berechne die Massendichte  $\rho(r)$  unseres Modellelektrons! Wie groß ist  $\rho$  speziell für  $r = R$  und  $r = 10^{-6}$  m?
- (d) Berechne den Radius einer Kugel, in der sich 99% der Elektronenmasse befinden.

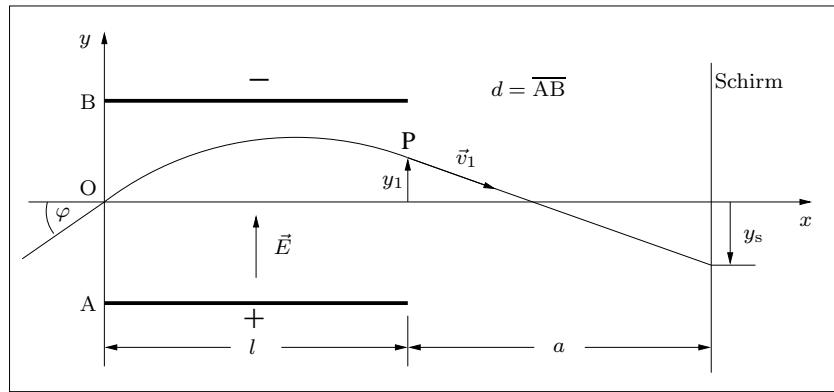
### 2.11 Bewegung geladener Teilchen im elektrischen Feld

- 2.11.1. Das Elektron eines H-Atoms springt von einer Kreisbahn mit dem Radius  $r_2 = 4,0r_1$  auf eine Kreisbahn mit  $r_1 = 5,3 \cdot 10^{-11}$  m; dabei wird die Hälfte der Differenz der potentiellen Energien als Lichtenergie abgestrahlt. Welche Geschwindigkeit hat das Elektron nach dem Sprung, wenn sie vorher  $1,1 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  betrug? Zeichne den Verlauf der potentiellen Energie des Elektrons im Kernfeld ( $r_1 \hat{=} 1$  cm und  $10 \text{ eV} \hat{=} 1$  cm).
- 2.11.2. Ein Goldkern ( $Q_1 = 79e$ ,  $R = 8,1 \cdot 10^{-15}$  m) wird mit  $\alpha$ -Teilchen ( $Q_2 = 2e$ ,  $m = 6,64 \cdot 10^{-27}$  kg) beschossen. Welche Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  muss ein  $\alpha$ -Teilchen im Unendlichen mindestens haben, um bis an die Kernoberfläche zu gelangen? Welche Spannung herrscht zwischen der Kernoberfläche und dem Unendlichen?
- 2.11.3. Die Glühkathode K einer Fernschröhre wird von einer kleinen Heizspannung  $U_H \approx 6 \text{ V}$  zum Glühen gebracht. Die kinetische Energie der Elektronen in der Kathode wird dabei so groß, dass einige das Metall verlassen können. Durch das elektrische Feld zwischen K und der Anode A werden diese freien Elektronen beschleunigt und treten durch ein Loch in der Anode in den feldfreien Raum zwischen A und dem Bild-



schirm ein. K und A sind 3,0 cm voneinander entfernt, von A zum Bildschirm sind es 30 cm. In welcher Zeit fliegt ein Elektron von der Kathode zum Bildschirm, wenn die Beschleunigungsspannung  $U = 1500$  V beträgt? Mit welcher Geschwindigkeit trifft das Elektron auf den Bildschirm?

- 2.11.4. Am Ort O tritt ein Elektronenstrahl, der von einer Spannung  $U$  beschleunigt wurde, unter dem Winkel  $\varphi$  gegen die  $x$ -Achse in das homogene Kondensatorfeld



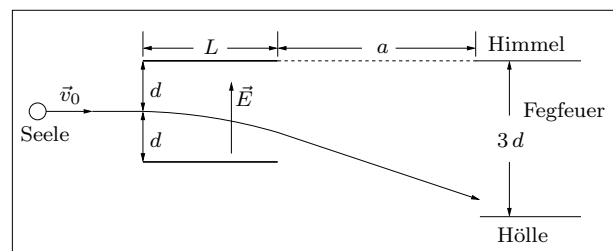
$E$  ein, das er bei  $P(l|y_1)$  wieder verlässt. Der Strahl trifft den Bildschirm bei  $y = y_s$ .

- (a) Berechne  $y_1$  und die Geschwindigkeit  $\vec{v}_1$  im Punkt P. Beweise damit die Formel

$$y_s = \frac{-E \cdot l}{2U \cos^2 \varphi} \cdot \left( \frac{l}{2} + a \right) + (l + a) \cdot \tan \varphi$$

- (b) Für welchen Eintrittswinkel  $\varphi$  ist  $y_s$  zur Spannung  $U_K$  zwischen den Kondensatorplatten proportional?  
 (c) Wie hängt  $y_s$  von  $U$  ab, wenn  $U_K = U$  gewählt wird?  
 (d) Welchen Wert muss die Ablenkspannung  $U_K$  erreichen können, damit ein quadratischer Bildschirm mit der Seitenlänge 40 cm voll ausgeleuchtet wird?  
 Verwende  $U = 2000 \text{ V}$ ,  $a = 50 \text{ cm}$ ,  $l = 2 \text{ cm}$ ,  $\varphi = 0$  und  $d = 1 \text{ cm}$ .

- 2.11.5. Um Arbeitskräfte zu sparen, hat die himmlische Gerichtsbarkeit von der ARGE „HimHöl“ folgenden Seelensortierer bauen lassen: Die Seelen werden zunächst für gute Taten mit positiven und für schlechte Taten mit negativen Ladungen versehen.



Danach werden die Seelen mit der Geschwindigkeit  $v_0 = 4 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  in den Sortierkondensator ( $L = 20 \text{ m}$ ,  $d = 5 \text{ m}$ ) eingeschossen, in dem das Entscheidungsfeld  $E = 5000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  herrscht. Die Eingänge zu den verschiedenen Aufenthaltsorten liegen im Abstand  $a = 90 \text{ m}$  hinter dem Sortierkondensator. Die Seele des dahingegangenen Alois Schlauberger hat eine Masse von  $m = 10^{-4} \text{ g}$  und weist eine große positive Ladung  $Q_1 = 0,02 \text{ C}$  auf, weil er bei seinem Weib zu allem „Ja und Amen“ gesagt hat. Es gibt auch einige negative Ladungen, denn seine Lieblingsbeschäftigung war das Betrügen beim Schafkopfen. Wie oft durfte der Alois beschummeln, wenn er für jeden Betrug die Ladung  $Q_2 = -5 \cdot 10^{-5} \text{ C}$  verpasst bekommt, um

- (a) gleich in den Himmel  
 (b) wenigstens nicht in die Hölle

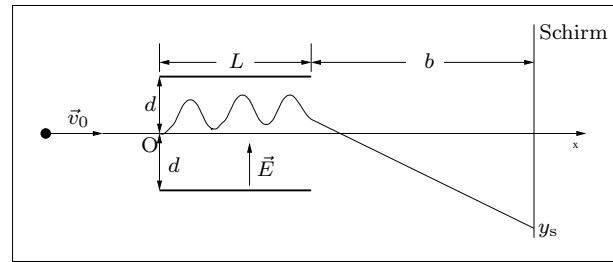
zu kommen. Da der Alois ein Münchner war, darf seine Seele als kugelförmig und klein angesehen werden.

- 2.11.6. Ein Elektron tritt zur Zeit  $t_0$  bei O mit der Geschwindigkeit

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in das homogene Wechselfeld

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cdot \sin \omega t \end{pmatrix}$$



ein. Außerhalb des Kondensators ist das elektrische Feld Null. Welche  $y$ -Koordinate  $y_s$  hat der Auftreffpunkt des Elektrons auf dem Schirm? Unter welchen Anfangsbedingungen  $(v_0, t_0, \omega, L)$  verlässt das Elektron den Kondensator parallel zur  $x$ -Achse? Untersuche mit MAPLE die Bewegung des Elektrons nach allen Regeln der Kunst (z.B.  $y_{s,\max}$ , Auftreffen auf die Platten u.s.w.)! Verwende zum Plotten die Zahlenwerte  $v_0 = 1,2 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $L = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 30 \text{ cm}$ ,  $\omega = \pi \cdot 10^8 \frac{1}{\text{s}}$ ,  $d = 3 \text{ cm}$  und  $U_0 = E_0 \cdot 2d = 34,12 \text{ V}$ !

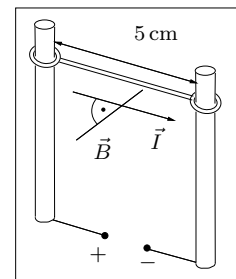
## 2.12 Die Elementarladung

- 2.12.1. (a) Wie berechnet sich das elektrochemische Äquivalent eines  $z$ -wertigen Stoffes aus seiner relativen Molekülmasse  $M_r$ ?
- (b) Silber hat die relative Atommasse  $M_{\text{Ag}} = 107,9$ . Welche Masse  $m$  hat ein Silberatom? Wie viele Atome, kmol und kg scheidet ein Strom der Stärke  $2,5 \text{ A}$  in  $20 \text{ min}$  aus einer wässrigen  $\text{AgNO}_3$ -Lösung ab (Ag ist einwertig)?

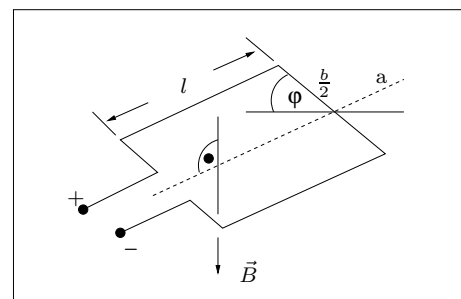
## 3 Elektrodynamik

### 3.1 Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter

- 3.1.1. Eine vertikal frei bewegliche Kupferstange der Masse  $m = 4,00 \text{ g}$  und der Länge  $l = 5,00 \text{ cm}$  wird bei einer Stromstärke von  $I = 3,92 \text{ A}$  genau in der Schwebe gehalten, wenn  $\vec{B}$  senkrecht auf  $\vec{I}$  steht und  $\vec{B}$  sowie  $\vec{I}$  horizontal verlaufen. Berechne  $B = |\vec{B}|$ . Welche Orientierung hat  $\vec{B}$ ?



- 3.1.2. Eine rechteckige Spule ( $l = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$ ) mit 200 Windungen ist um die Achse a frei drehbar und wird von dem zu a senkrechten Magnetfeld der Stärke  $B = 0,05 \text{ T}$  durchsetzt. Berechne den Betrag  $M$  des Drehmoments auf die Spule in Abhängigkeit von  $\varphi$ , wenn der Strom durch die Spule  $I = 0,4 \text{ A}$  beträgt!



- 3.1.3. In unserer Gegend bildet das magnetische Feld der Erde mit der Horizontalen den Winkel  $\varphi = 65^\circ$ , zeigt ziemlich genau nach Norden und hat den Betrag  $B = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ . Welche Kraft (vektoriell und Betrag) wirkt pro Meter Länge auf ein Kabel einer Überlandleitung, das in genau nord-westlicher Richtung von einem Strom der Stärke  $I = 2000 \text{ A}$  durchflossen

wird? Verwende ein Koordinatensystem, in dem die  $x$ -Achse nach Osten, die  $y$ -Achse nach Norden und die  $z$ -Achse nach oben zeigt!

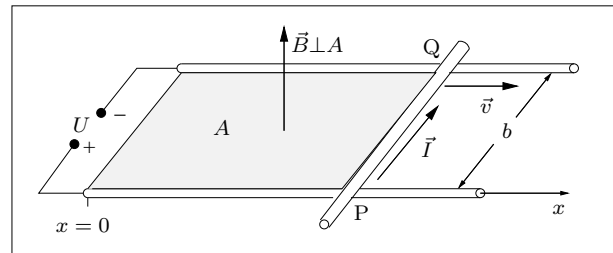
### 3.2 Der magnetische Fluss

3.2.1. Berechne den magnetischen Fluss  $\Phi$  eines homogenen Magnetfeldes der Stärke  $B = 0,07\text{ T}$  durch eine Kreisfläche ( $r = 5\text{ cm}$ ), die in der  $xy$ -Ebene liegt; der Neigungswinkel des Magnetfeldes zur  $xy$ -Ebene ist  $\varphi = 20^\circ$ .

3.2.2. Berechne den magnetischen Fluss des Feldes  $\vec{B}$  durch die Rechtecksfläche, die von der  $x$ -Achse, der  $y$ -Achse, der Geraden  $x = 4\text{ cm}$  und der Geraden  $y = 3\text{ cm}$  begrenzt wird!

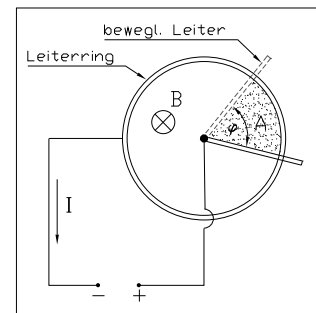
$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 x^3 \frac{\text{T}}{\text{m}^3} \\ 0,1 x^2 \frac{\text{T}}{\text{m}^2} \end{pmatrix}$$

3.2.3. Das bewegliche Leiterstück gleitet reibungsfrei auf den festen Leiterschienen. Der Strom  $I$  ist konstant,  $B$  hängt von  $x$  ab.  $W(x)$  sei die am beweglichen Leiterstück der Masse  $m$  verrichtete Arbeit, wenn es von 0 bis  $x$  bewegt wird.



- Wie hängt  $W$  mit dem Fluss  $\Phi$  durch die Fläche  $A$  zusammen?
- Woher stammt die Energie  $W$ ? Jetzt sei  $B(x) = \text{konst.}$ . Wie muss  $U$  von der Zeit abhängen, damit  $I$  konstant bleibt? Alle Ohm'schen Widerstände sind zu vernachlässigen!
- „Was“ entsteht durch die Bewegung des Leiters im Magnetfeld zwischen den Punkten P und Q? Wie hängt dieses „Etwas“ mit der Leitergeschwindigkeit  $v$  und mit  $B$  zusammen?

3.2.4. Welche Arbeit  $W$  muss verrichtet werden, um den beweglichen Leiter im Uhrzeigersinn um den Winkel  $\varphi$  zu drehen? Wie hängt  $W$  mit dem Fluss  $\Phi$  durch die Sektorfläche  $A$  zusammen?



### 3.3 Die Lorentzkraft

3.3.1. Berechne die Kraft  $\vec{F}$  auf ein Teilchen der Ladung  $q$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  im Feld  $\vec{B}$  für

(a)  $q = -e$ ,  $v = 1000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und  $\vec{v} \parallel x$ -Achse

(b)  $q = 2e$ ;  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  mit  $v_1 = -v_2 = v_3 = 500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

(c)  $q = -e$ ;  $\vec{v}$  wie in (b).

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

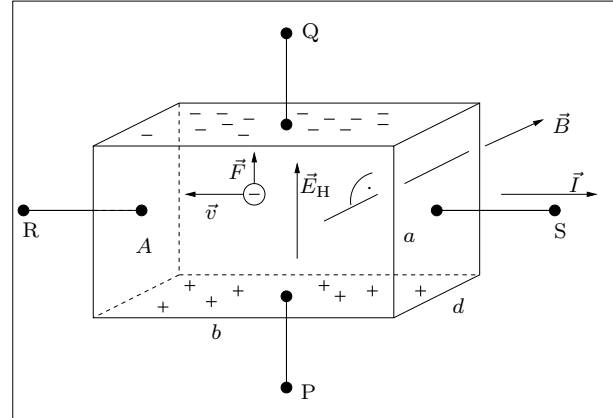
mit  $B = 0,001\text{ T}$



3.3.2. Der Hall-Effekt

Ein quaderförmiges Leiterstück mit der Querschnittsfläche  $A = a \cdot d$  wird von R nach S vom Strom  $\vec{I}$  durchflossen. Der Leiter ist von einem Magnetfeld  $\vec{B}$  mit  $\vec{B} \perp \vec{I}$  und  $\vec{B} \perp PQ$  durchsetzt. Zeige, dass sich im Leiter ein elektrisches Feld  $\vec{E}_H$  (**Hallfeld**) aufbaut und beweise, dass zwischen P und Q die **Hallspannung**

$$U_H = v B a$$



liegt, wobei  $v$  der Betrag der Elektronengeschwindigkeit ist. Ist  $N$  die Zahl der frei beweglichen Elektronen im Leitervolumen  $V$ , dann nennt man  $n = \frac{N}{V}$  die Ladungsträgerkonzentration. Die materialabhängige Konstante

$$R_H = \frac{1}{ne}$$

heißt **Hallkonstante**. Beweise für die Hallspannung ( $d$  ist die Dicke des Leiterplättchens)

$$U_H = R_H \cdot \frac{I B}{d}$$

Ein Gerät, das über die Hallspannung Magnetfelder misst, heißt **Hallsonde**. Den Kehrwert  $\sigma = \frac{1}{\rho}$  des spezifischen Widerstandes  $\rho$  eines Materials nennt man **Leitfähigkeit**. An einer Hallsonde liegt zwischen R und S die Spannung  $U$ . Beweise für die Hallspannung

$$U_H = R_H \cdot \sigma \cdot \frac{a}{b} \cdot B \cdot U$$

Welches der Materialien in folgender Tabelle ist am besten zum Bau einer Hallsonde geeignet?

Stoff	Ag	Cu	Bi	Indium-Arsenid	Ge
$R_H$ in $\frac{\text{m}^3}{\text{As}}$	$9 \cdot 10^{-11}$	$5,3 \cdot 10^{-11}$	$5,4 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	0,01
$\sigma$ in $\frac{1}{\Omega \text{m}}$	$6,25 \cdot 10^7$	$5,71 \cdot 10^7$	$8,55 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^4$	40

Berechne die Hallspannungen an Hallsonden, die aus den in der Tabelle aufgeführten Materialien hergestellt sind ( $a = 5 \text{ mm}$ ,  $b = 10 \text{ mm}$  und  $d = 2 \text{ mm}$ ) für  $U = 10 \text{ V}$  und  $B = 0,4 \text{ T}$ .

Von welchem Magnetfeld ist eine Indium-Arsenid-Sonde der Dicke  $d = 0,8 \text{ mm}$  durchsetzt, die bei einer Stromstärke von  $I = 1,2 \text{ A}$  die Hallspannung  $U_H = 0,0135 \text{ V}$  anzeigt?

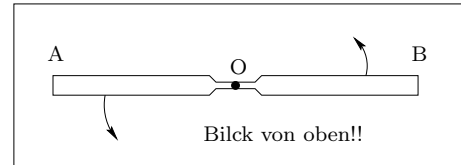
Ein AD-Wandler ist eine elektronische Schaltung, die ein analoges Eingangssignal (Spannung  $U_e$ ) in ein digitales Ausgangssignal (Bytefolge) verwandelt. Konstruiere eine Hallsonde aus zwei AD-Wandlern, einem temperaturunabhängigen Präzisionswiderstand  $R_0$ , einer Batterie und einem Computer. Schreibe den Kern eines Programms zur Messung von  $B$ .

### 3.4 Bewegungsinduktion

3.4.1. Ein Flugzeug mit der Spannweite 30 m (Tragflächen horizontal) fliegt mit  $v = 800 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  im Magnetfeld der Erde genau nach Norden (siehe Aufgabe 3.1.3).

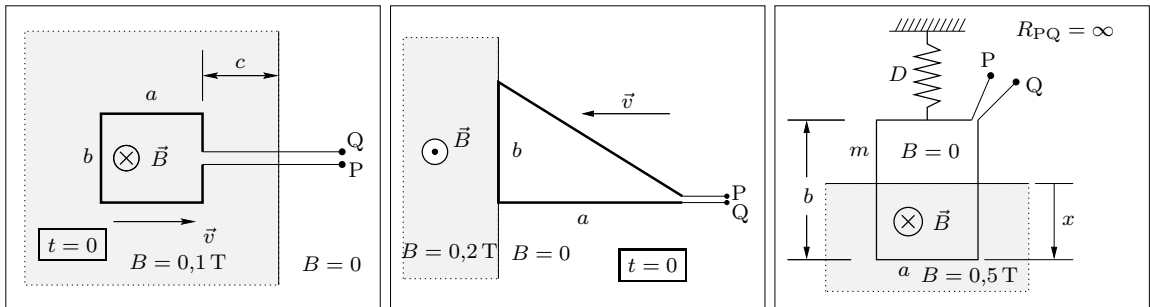
- Welche Spannung  $U$  liegt zwischen den Flügelspitzen? Wie ist diese Spannung gepolt?
- Wie ändert sich die Spannung  $U$ , wenn die Flugrichtung horizontal um den Winkel  $\alpha$  geändert wird?
- Wie ändert sich  $U$ , wenn die Flugrichtung wieder nach Norden zeigt, aber vertikal um den Winkel  $\beta$  geändert wird?

3.4.2. Der elektrisch leitende Rotor eines Hubschraubers ( $\overline{OA} = \overline{OB} = 7 \text{ m}$ ) dreht sich in der Sekunde achtmal im Magnetfeld der Erde (siehe Aufgabe 3.1.3). Berechne  $|U_{OA}|$  und  $|U_{AB}|$ !



3.4.3. Wie kann sich ein gerader Leiter (der Vektor vom Anfang zum Ende des Leiters sei  $\vec{l}$ ) relativ zu einem homogenen Magnetfeld  $\vec{B}$  bewegen, damit die zwischen den Leiterenden induzierte Spannung Null ist? Verwende zur Beschreibung ein Koordinatensystem, in dem  $\vec{B}$  parallel zur  $z$ -Achse liegt! Suche alle Möglichkeiten!

3.4.4. Berechne den magnetischen Fluss  $\Phi(t)$  durch die Leiterschleife und die Induktionsspannung  $U(t)$  zwischen P und Q! Das Vorzeichen von  $U$  sei so gewählt, dass  $U > 0$  für P positiv gilt. Zeichne den Verlauf von  $\Phi(t)$  und  $U(t)$ !

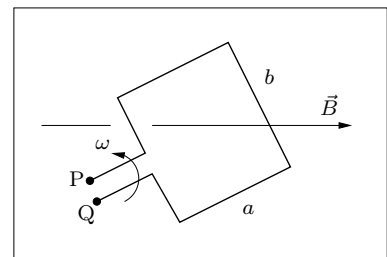


(a)  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $b = 3 \text{ cm}$   
 $c = 2 \text{ cm}$ ,  $v = 2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

(b)  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$   
 $v = 3 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

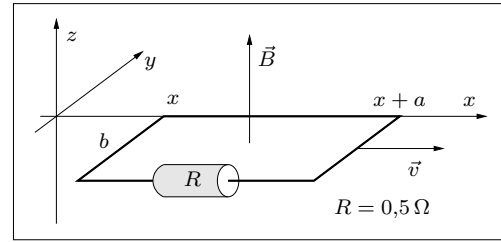
(c)  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 20 \text{ cm}$   
 $m = 20 \text{ g}$ ,  $D = 1,28 \frac{\text{N}}{\text{m}}$   
 Ruhelage:  $x(0) = 10 \text{ cm}$   
 $v_0 = v(0) = 0,64 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3.4.5. Das homogene Magnetfeld steht zu jeder Zeit senkrecht auf den Drahtstücken mit der Länge  $a$ , die Leiterschleife dreht sich mit der Kreisfrequenz  $\omega$ . Zur Zeit  $t = 0$  steht die Leiterschleife senkrecht (P oben). Berechne die Spannung  $U(t)$  zwischen P und Q ( $U > 0$  für Q positiv)! Wie ändert sich  $U$ , wenn statt der Leiterschleife eine Spule mit  $n$  Windungen verwendet wird? Berechne  $U(t)$  speziell für  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$ ,



$n = 100$ ,  $B = 0,2 \text{ T}$  und 20 Umdrehungen pro Sekunde!

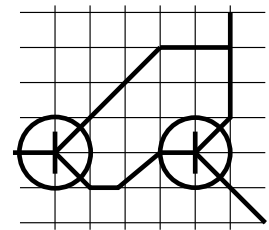
- 3.4.6. Ein rechteckiger Drahtrahmen ( $a = 30 \text{ cm}$ ,  $b = 20 \text{ cm}$ ), in den ein Widerstand  $R$  eingelötet ist, wird parallel zur  $xy$ -Ebene mit der konstanten Geschwindigkeit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ( $v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) durch das nur von  $x$  abhängige



ge Magnetfeld  $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B(x) \end{pmatrix}$  mit  $B(x) = 0,1 \frac{\text{T}}{\text{m}} \cdot x$  gezogen. Welcher Strom  $I$  fließt durch den Widerstand? Welche Zugkraft muss auf den Leiterraum wirken, damit  $\vec{v}$  tatsächlich konstant ist?

### 3.5 Das Induktionsgesetz

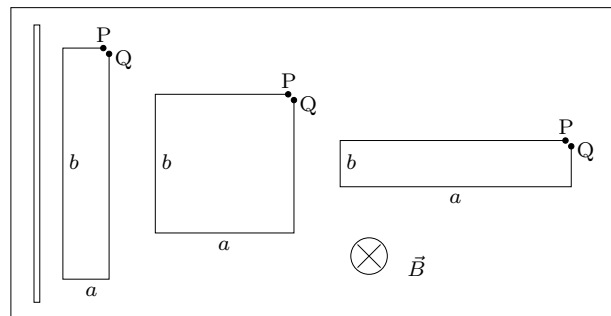
- 3.5.1. Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus einer älteren elektronischen Schaltung in natürlicher Größe (ein Kästchen entspricht  $5 \text{ mm}$ ). Durch einen Blitzschlag in der Nähe wird in der Zeit  $t_0 = 10 \mu\text{s}$  das Magnetfeld  $B_0 = B(t_0) = 1 \text{ T}$  nach dem Gesetz  $B(t) = \alpha \cdot t^2$  ( $0 \leq t \leq t_0$ ) aufgebaut.  $U$  sei die gesamte in der Leiterschleife induzierte Spannung, d.h. an einem der beiden Transistoren liegt mindestens die Spannung  $\frac{U}{2}$ .



Berechne  $\alpha$ ,  $U(t)$ ,  $U(t_0)$  und die gesamte Flussänderung  $\Delta\Phi$  durch die Leiterschleife!

Löse die Aufgabe noch einmal für einen NEMP (Nuclear-Electro-Magnetic-Puls), der elektromagnetischen Begleiterscheinung einer Kernexplosion. Der einzige Unterschied zum Blitzschlag ist die extrem kurze Anstiegszeit  $t_0 = 10 \text{ ns}$ .

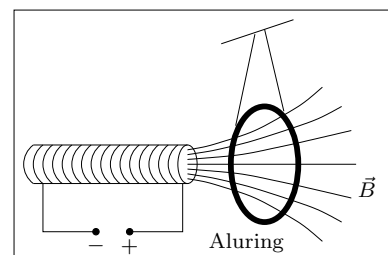
- 3.5.2. Die Form einer Leiterschleife wird nach folgendem Gesetz geändert: Der Umfang  $u = 2(a + b)$  ist konstant und  $a = v \cdot t$  mit konstantem  $v$ . Das Magnetfeld ist (räumlich) homogen. Die Induktionsspannung  $U(t) = U_{PQ}$  ist größer Null, wenn P positiv ist.



- (a) Berechne  $U(t)$  im Zeitintervall  $0 < t < \frac{u}{2v}$  für ein zeitlich konstantes Magnetfeld! Zeichne den zeitlichen Verlauf von  $U$  und des magnetischen Flusses  $\Phi$  durch die Leiterschleife für  $B = 2 \text{ T}$ ,  $u = 40 \text{ cm}$  und  $v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ !
- (b) Für welches  $B(t)$  wäre  $U(t) = 0$  für alle  $t$  aus obigem Intervall?

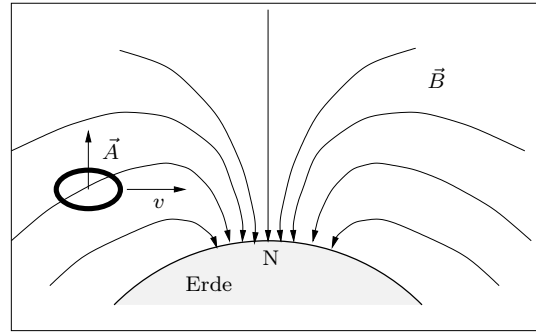
- 3.5.3. In welche Richtung bewegt sich der Aluring (Aluminium ist nicht magnetisierbar)

- (a) beim Ausschalten (Einschalten) des Stromes?  
 (b) bei einer Bewegung des Elektromagneten nach links (rechts)?



### 3 Elektrodynamik - Aufgaben

- 3.5.4. Ein ringförmiges Raumschiff mit leitender Außenhaut bewegt sich auf geradem Weg mit konstanter Geschwindigkeit durch das Magnetfeld der Erde. Zeichne qualitativ den zeitlichen Verlauf des magnetischen Flusses  $\Phi$  durch das Raumschiff und des Induktionsstromes bei angegebener Richtung des Flächenvektors!

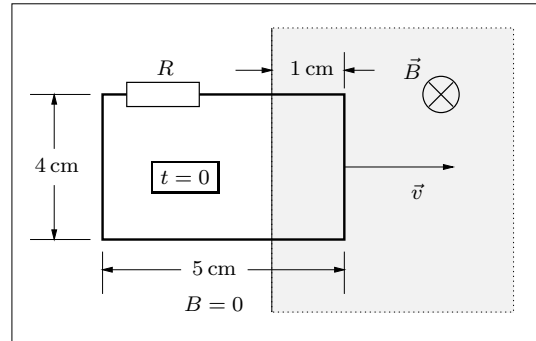


- 3.5.5. Welchen zeitlichen Verlauf hat der Betrag des Stromes im gezeichneten Leiterraahmen für

$$v = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}, \quad R = 0,1 \Omega \quad \text{und} \quad B = \frac{\alpha}{t + 1 \text{ s}}$$

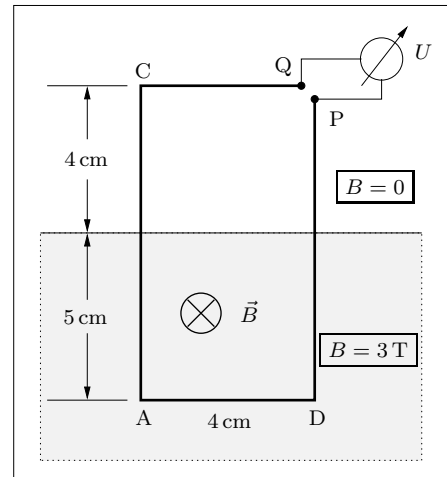
mit

$$\alpha = 4 \frac{\text{Vs}^2}{\text{m}^2}$$



- 3.5.6. Welcher Spannungsstoß  $|\Delta\Phi| = |\int U dt|$  mit  $U = U_{PQ}$  wird bei folgenden Änderungen induziert? Gib jeweils an, ob P positiv oder negativ ist!

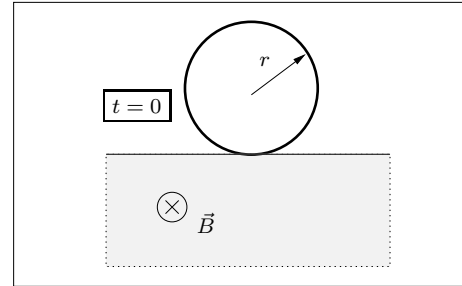
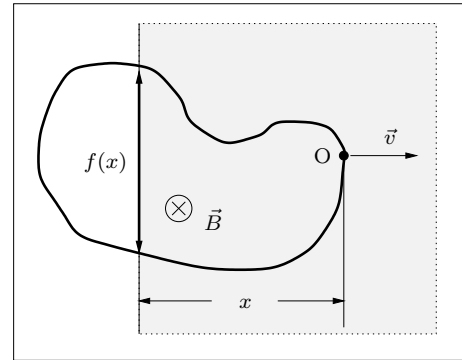
- Verschiebung um  $2 \cdot \vec{AD}$ .
- Verschiebung um  $\vec{AC}$ .
- Verschiebung um  $-\vec{AC}$ .
- Drehung um Achse AC um  $90^\circ$  nach hinten.
- Drehung um Achse AC um  $70^\circ$  nach vorne.
- Drehung um Achse AD um  $30^\circ$  nach vorne.
- Drehung um A um  $45^\circ$  nach links.
- Ausschalten des Magnetfeldes.



- 3.5.7. Die Breite einer beliebig geformten Leiterschleife mit dem Widerstand  $R$  wird durch die Funktion  $f(x)$  beschrieben (siehe Abb.). Zur Zeit Null taucht die Leiterschleife mit dem Punkt  $O$  in ein homogenes und zeitlich konstantes Magnetfeld  $\vec{B}$  ein, die Eintauchtiefe ist  $x = x(t)$ . Beweise für den Strom in der Leiterschleife die Formel

$$I(t) = \frac{B}{R} \cdot \dot{x}(t) \cdot f(x(t))$$

Als Beispiel betrachten wir eine kreisförmige Leiterschleife ( $r = 10 \text{ cm}$ ,  $R = 1 \Omega$ ), die zur Zeit  $t = 0$  einen freien Fall in ein homogenes Magnetfeld mit der Kraftflussdichte  $B = 2 \text{ T}$  beginnt. Berechne  $I(t)$  und zeichne den Grafen dieser Funktion! Reche mit  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

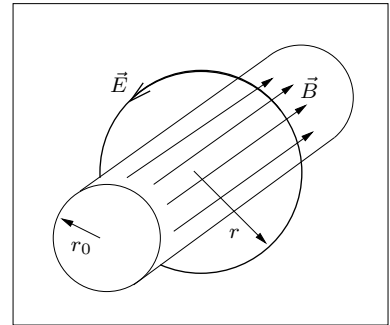


### 3.6 Wirbelfelder und Wirbelströme

- 3.6.1. Gegeben ist ein axialsymmetrisches Magnetfeld mit dem Betrag

$$B(t) = \begin{cases} B_0 \cdot \sin \omega t & \text{für } r \leq r_0 \\ 0 & \text{für } r > r_0 \end{cases}$$

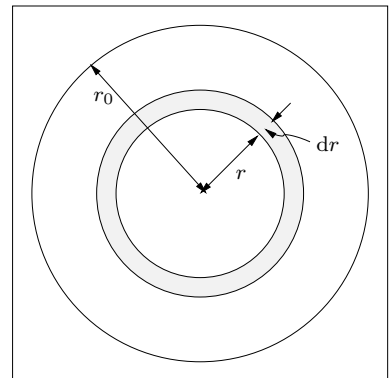
- (a) Berechne die Stärke  $E(r, t)$  des elektrischen Wirbelfeldes für  $r_0 = 4 \text{ cm}$ ,  $B_0 = 0,1 \text{ T}$  und  $\omega = 6 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}}$ . Unterscheide die Fälle  $r \leq r_0$  und  $r > r_0$ . Zeichne  $E(r)$  für  $t = 0$ .
- (b) Die ganze Anordnung befindet sich jetzt in einem verdünnten Gas. Überschreitet die maximale Stärke des Wirbelfeldes den Wert  $E_0 = 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ , dann tritt eine Ringentladung auf, d.h. es fließt entlang der Feldlinien ein Strom, der die Atome des Gases zum Leuchten anregt. Zwischen welchen Werten von  $r$  tritt die Ringentladung auf?



### 3.6.2. Wirbelströme:

Eine kreisförmige Leiterschleife mit dem Radius  $r_0$ , der Dicke  $a$  und dem spezifischen Widerstand  $\varrho$  wird senkrecht von einem räumlich homogenen aber zeitlich veränderlichen Magnetfeld  $B(t)$  durchsetzt. Aus Symmetriegründen erzeugt das entstehende elektrische Wirbelfeld  $E(r)$  kreisförmige Wirbelströme.

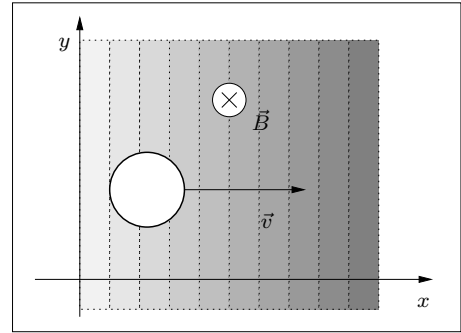
- (a) Welchen Widerstand  $R$  hat ein Kreisring mit Radius  $r$  und der Breite  $dr$ ? Welchen Betrag hat der Strom  $dI$  in diesem Kreisring?
- (b) Welcher Strom  $I$  fließt in der gesamten Scheibe?
- (c) Welche Leistung  $dP$  wird im Kreisring in Wärme umgesetzt? Wie groß ist die gesamte Verlustleistung  $P$  in der Scheibe?



- (d) Berechne  $I$  und  $P$  speziell für eine Aluminiumscheibe ( $r_0 = 3 \text{ cm}$ ,  $a = 2 \text{ mm}$ ,  $\rho = 0,027 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$ ) im Feld  $B(t) = 0,5 \frac{\text{V}}{\text{m}^2} \cdot t!$

### 3.6.3. Prinzip der Wirbelstrombremse:

Die Leiterscheibe aus Aufgabe 3.6.2 bewegt sich jetzt im räumlich inhomogenen aber zeitlich konstanten Magnetfeld  $B(x) = \alpha \cdot x$  mit der Geschwindigkeit  $v$  parallel zur  $x$ -Achse. Zur einfacheren Rechnung nehmen wir an, dass  $B$  über die ganze Leiterscheibe konstant ist; damit ist der Fluss durch die Scheibe  $\Phi = r_0^2 \pi \cdot B(x)$ .



- (a) Drücke  $\dot{B} = \frac{dB}{dt}$  durch  $v$  aus!
- (b) Auf dem Weg  $dx$  wird die Energie  $dW = F dx = P dt$  durch Wirbelströme in Wärme umgesetzt. Verwende die Ergebnisse von Teilaufgabe (a) und von Aufgabe 3.6.2(c) und zeige damit, dass  $F$  proportional zu  $v$  ist, d.h. dass  $|F| = \beta \cdot v$  gilt.
- (c) Da die Stromarbeit der kinetischen Energie der Scheibe entzogen wird (woher sollte sie sonst stammen?), wird  $v$  kleiner und  $F$  ist somit eine Bremskraft ( $F < 0$ ). Nach Newton2 gilt:

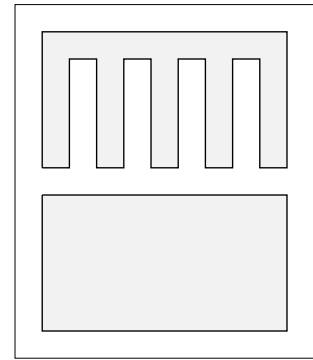
$$F = m \cdot a = m \cdot \dot{v} = -\beta \cdot v \quad \implies \quad \dot{v} = -\frac{\beta}{m} \cdot v = -k \cdot v. \quad (1)$$

Zeige, dass  $v = v_0 \cdot e^{-kt}$  die Lösung von (1) mit  $v(0) = v_0$  ist.  
Berechne  $x(t)$  mit  $x(0) = 0$ .

- (d)  $B$  steigt im Intervall  $[0; 20 \text{ cm}]$  von Null auf  $1,62 \text{ T}$  an. Berechne  $\alpha$  und  $k$  (Dichte von Aluminium:  $\rho^* = 2,7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ). Unsere Aluscheibe tritt zur Zeit Null bei  $x = 0$  mit  $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  in das Magnetfeld ein. Welche Geschwindigkeit hat die Scheibe bei  $x_1 = 10 \text{ cm}$ ? Wann kommt die Scheibe bei  $x_1$  an? Wo und wann kommt die Scheibe zur Ruhe?

3.6.4. Anwendungen von Wirbelströmen:

- (a) Die beiden nebenstehend gezeichneten Aluscheiben werden durch ein inhomogenes Magnetfeld gezogen. Welche Scheibe wird mehr abgebremst?
- (b) Warum sind die Eisenkerne von Transformatoren nicht aus einem Guß, sondern aus mehreren Blechen mit Isolierschichten dazwischen aufgebaut?
- (c) Nenne ein Beispiel für die technische Anwendung einer Wirbelstrombremse! Welchen Vorteil haben Wirbelstrombremsen gegenüber rein mechanischen Bremsen?

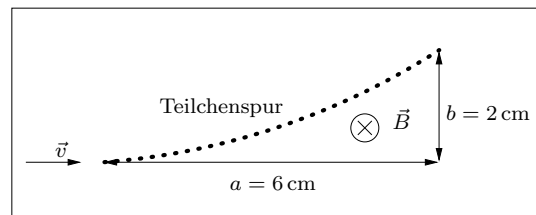


3.7 Bewegung geladener Teilchen im Magnetfeld

3.7.1. Ein Neutronenstern hat ein extrem starkes Magnetfeld mit der Kraftflussdichte  $B = 1,0 \cdot 10^6 \text{ T}$  an seiner Oberfläche. Eine Gewehrkugel der Masse  $m = 5,0 \text{ g}$  wird mit der Geschwindigkeit  $v = 400 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  an der Oberfläche des Neutronensterns senkrecht zu den magnetischen Feldlinien abgeschossen, die Kugel trägt die Ladung  $1,0 \cdot 10^{-5} \text{ C}$ . Berechne den Flugbahnradius  $r$  der Kugel!

3.7.2. Beweise mit Hilfe einer Energiebetrachtung, dass bei der Bewegung eines geladenen Teilchens in einem **beliebigen** Magnetfeld der Betrag der Geschwindigkeit des Teilchens konstant ist!

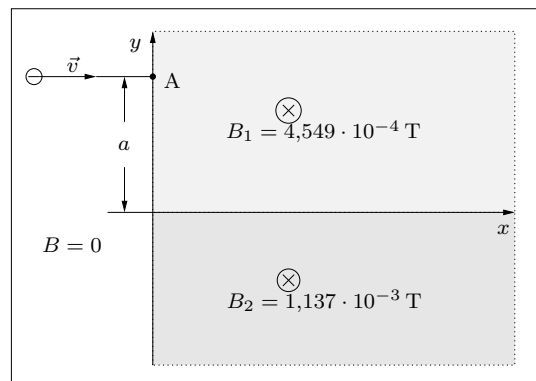
3.7.3. (a) In einer sogenannten **Nebelkammer** hinterlassen geladene Teilchen in einer gesättigten Wasserdampfatmosphäre eine feine Spur von Wassertröpfchen. Aus der Zahl der Tröpfchen kann die kinetische Energie des Teilchens berechnet werden, die in unserem Fall



284,7 eV beträgt. Berechne die Masse des Teilchens unter der Annahme, dass der Betrag seiner Ladung  $e$  ist ( $B = 5,690 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ )!

(b) Welches Teilchen würde für  $B = 0,02438 \text{ T}$ , unter sonst gleichen Bedingungen wie in Teilaufgabe (a), dieselbe Spur erzeugen?

3.7.4. Ein Elektronenstrahl, der von der Spannung  $U = 11,37 \text{ V}$  beschleunigt wurde, tritt bei A in das nebenstehend gezeichnete System von zwei homogenen Magnetfeldern  $\vec{B}_1$  und  $\vec{B}_2$  ein. Zeichne den weiteren Verlauf des Elektronenstrahls für  $a = 2,5 \text{ cm}$ ! Berechne zuerst die für die Zeichnung benötigten Größen! Die Elektronen führen in den Magnetfeldern eine periodische Bewegung aus; berechne die



Periodendauer! An welchem Ort befindet sich ein Elektron zur Zeit  $t = 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ , das zur Zeit Null den Punkt A passiert?

3.7.5. Ein Proton bewegt sich im Magnetfeld  $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  T; dabei sind die Anfangswerte

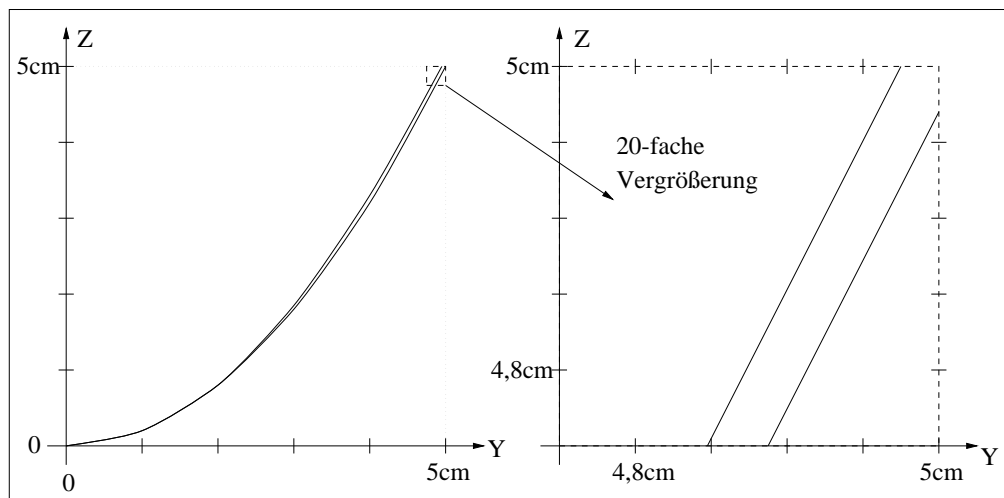
$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ cm und } \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ bekannt.}$$

- Welche Ganghöhe  $h$  hat die Schraubenlinie, auf der sich das Proton bewegt?
- An welchem Ort befindet sich das Teilchen zur Zeit  $t = 10^{-7}$  s?
- Durch welche Spannung wurde das Proton beschleunigt?

### 3.8 Bewegung in kombinierten Feldern

3.8.1. Die folgende Abbildung entstand mit einem Thomson'schen Massenspektrografen (Bezeichnungen wie im Unterricht:  $l = 2,000$  cm,  $a = 40,00$  cm,  $B = 1,000$  T,  $E = 1,306 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ), durch den ein Strahl von einfach positiv geladenen Antimon-Ionen ( $\text{Sb}^+$ ) geschossen wurde.

- Berechne die relativen Atommassen der beiden Antimon-Isotope mit den Näherungsformeln für  $l \ll r$ !
- Berechne näherungsweise  $r$  und die Einschußgeschwindigkeit  $v_0$ ! Ist die Näherung  $l \ll r$  für  $Y = 5$  cm noch gerechtfertigt?
- Stelle für die Bearbeitung mit MAPLE die exakten Gleichungen zur Berechnung der Masse  $m$  auf!



3.8.2. In einen Thomson'schen Massenspektrografen mit der Feldlänge  $l = 2,000$  cm, dem Abstand  $a = 20,00$  cm vom Feldende zur Fotoplatte,  $B = 0,1000$  T und  $E = 5,000 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  werden zweifach positiv geladene Heliumionen ( $\alpha$ -Teilchen) der relativen Atommasse  $A_r = 4,0015$  eingeschossen. Berechne die Koordinaten des Auftreffpunktes in der Filmebene einmal exakt und einmal mit der Näherung  $l \ll r$  für Teilchen mit den Geschwindigkeiten  $v_0 = 4,000 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  bzw.  $v_0 = 1,000 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ! Berechne den jeweiligen relativen Fehler des Näherungswertes der Y-Koordinaten des Auftreffpunktes  $P(Y|Z)$ . Zeichne die Parabel der Auftreffpunkte im Maßstab 1 : 1.

3.8.3. Das erste Zyklotron (Lawrence, 1932) beschleunigte  $\text{H}_2^+$ -Ionen auf eine maximale Energie von 80 keV. Berechne die Zyklotronfrequenz und den Radius des Gerätes ( $B = 0,5$  T)!

3.8.4. Ein großes Zyklotron (z.B. in Berkeley/Kalifornien) hat den Radius  $r = 2,25$  m und beschleunigt Protonen auf die Endenergie  $E_{\text{max}} = 30$  MeV.

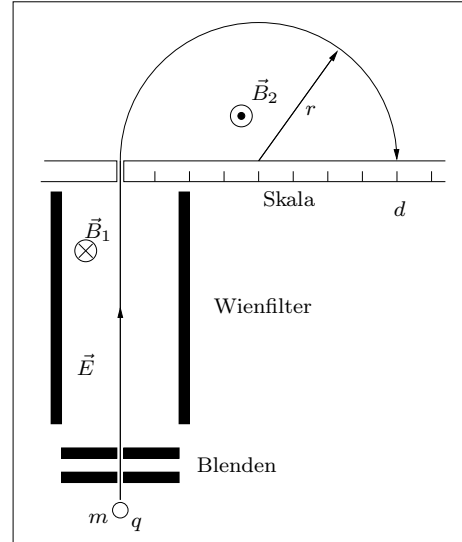


- (a) Welche Stärke muss das magnetische Führungsfeld haben?
- (b) Berechne die Zyklotronfrequenz und die Zeit für einen vollen Umlauf!
- (c) Die Spannung zwischen den Polen beträgt  $U = 100 \text{ kV}$ ; nach wie vielen Umläufen und in welcher Zeit wird die maximale Energie erreicht?
- (d) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit der Protonen? Welche Spannung müsste ein Proton in einem Stück durchlaufen, um diese Geschwindigkeit zu erreichen?

**3.8.5. Der Massenspektrograf nach Bainbridge:**

Teilchen mit verschiedenen Ladungen und Geschwindigkeiten gelangen durch das Wien-Filter in den mit  $\vec{B}_2$  erfüllten Raum.

- (a) Berechne den Auftreffort  $d = 2r$  in Abhängigkeit von  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $E$ ,  $m$  und  $q$ ! Wie muss das  $\vec{E}$ -Feld für positive bzw. negative Teilchen orientiert sein?
- (b) Ab jetzt sei  $E = 2,00 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  und  $B_1 = 0,500 \text{ T}$ . Mit welcher Geschwindigkeit treten die Teilchen in den Feldraum von  $\vec{B}_2$  ein?  $B_2$  wird so gewählt, dass  $1,00 \text{ cm}$  auf der Skala für einfach positiv geladene Ionen gerade der Teilchenmasse  $1,00 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  entspricht? Berechne  $B_2$ !

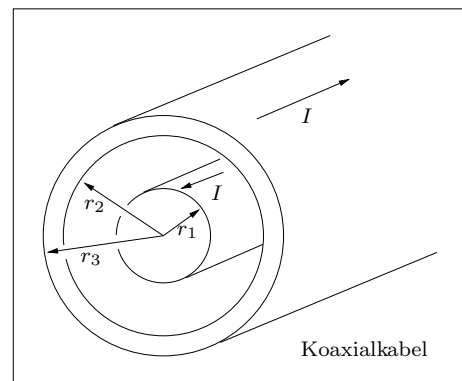


- (c) Wo treffen folgende Ionen auf die Skala:  $\text{H}_2^+$ ,  $\text{He}_4^+$ ,  $\text{He}_4^{++}$ ,  $\text{He}_3^{+?}$ ?
- (d)  $B_1$  ist jetzt  $1,00 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ ; wie muss die Apparatur sonst noch geändert werden, damit Elektronen, die eine Beschleunigungsspannung von  $1,00 \cdot 10^3 \text{ V}$  durchlaufen haben, bei  $d = 5,00 \text{ cm}$  auftreffen? Wo würden die Elektronen ohne Änderung der anderen Feldgrößen auftreffen?

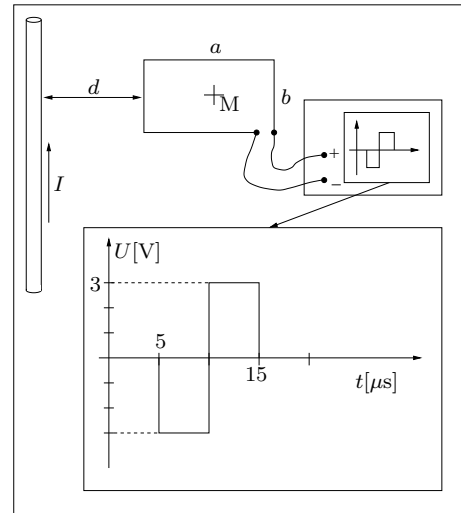
**3.9 Das Ampèresche Durchflutungsgesetz**

- 3.9.1. Ein magnetischer Spannungsmesser mit den Daten  $l = 1 \text{ m}$ ,  $A = 1 \text{ cm}^2$  und  $c_{\text{ut}} = 10^{-5} \frac{\text{Vs}}{\text{Skt}}$  umschließt den Strom  $I = 10 \text{ A}$ . Wie groß muss die Windungszahl  $n$  sein, damit das Messgerät beim Ausschalten des Stromes genau einen Skalenteil anzeigt?
- 3.9.2. Ein magnetischer Spannungsmesser mit den Daten  $l = 0,5 \text{ m}$ ,  $A = 2 \text{ cm}^2$ ,  $c_{\text{ut}} = 10^{-4} \frac{\text{Vs}}{\text{Skt}}$  und  $n = 3979$  wird als Messgerät für hohe Gleichströme verwendet (Zangenampèremeter). Welchen Strom umschließt die Rogowski-Spirale, wenn beim Ausschalten des Stromes ein ballistischer Ausschlag von genau einem Skalenteil angezeigt wird?
- 3.9.3. Das Koaxialkabel wird im Kern und im Mantel von entgegengesetzt gerichteten Strömen mit dem gleichen Betrag  $I$  durchflossen. Die Stromdichte im jeweiligen Leiter ist konstant.

Berechne  $B(r)$  für  $0 \leq r \leq \infty$  (4 Fälle)! Zeichne  $B(r)$  für  $r_1 = 1 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 2,5 \text{ cm}$ ,  $r_3 = 3 \text{ cm}$  und  $I = 0,2 \text{ A}$ !

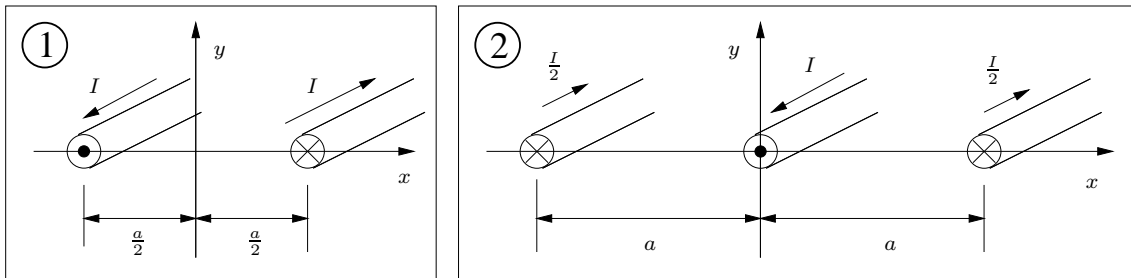


- 3.9.4. (a) Berechne eine exakte Formel für den magnetischen Fluss  $\Phi$  durch die rechteckige Leiter-schleife! Berechne eine Näherung  $\Phi^*$  für  $\Phi$  unter der Annahme, dass  $B$  auf der ganzen Rechtecksfläche den gleichen Wert wie im Mittelpunkt  $M$  des Rechtecks hat! Berechne den prozentualen Fehler der Näherung für  $d = 5 \text{ m}$  und  $a = 20 \text{ cm}$ !
- (b) Bei einem Blitzeinschlag wurde mit einem Speicheroszilloskop nebenstehender Spannungsverlauf registriert ( $d = 5 \text{ m}$ ,  $a = 20 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$ ). Berechne und zeichne den zeitlichen Stromverlauf!



3.9.5. **Eine Untersuchung zum Elektromog:**

Die folgende Abbildung zeigt ein zweifaches und ein dreifaches Paralleldrahtsystem zur Hin- und Rückleitung eines Stromes  $I$  von der Stromquelle zum Verbraucher.

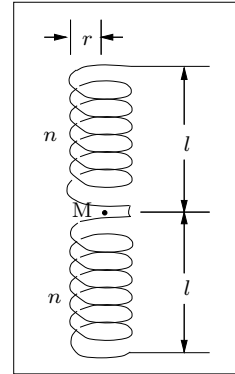


- (a) Berechne die Kraftflussdichten  $\vec{B}_{1x}$ ,  $\vec{B}_{1y}$ ,  $\vec{B}_{2x}$  und  $\vec{B}_{2y}$  auf der  $x$ -Achse und der  $y$ -Achse!
- (b) Wie groß sind die Beträge der in (a) berechneten Kraftflussdichten für  $x \gg a$  bzw.  $y \gg a$ ?
- (c) Berechne die Beträge der vier Kraftflussdichten für eine Haushaltsleitung mit  $a = 4 \text{ mm}$  und  $I = 10 \text{ A}$  in den Entfernungen  $20 \text{ cm}$  und  $1 \text{ m}$  vom Ursprung!
- (d) Wie (c), jedoch mit  $a = 10 \text{ cm}$  (Halogenlampen-Seilsystem)!
- (e) Berechne die Beträge der vier Kraftflussdichten für eine Hochspannungsleitung mit  $a = 4 \text{ m}$  und  $I = 2000 \text{ A}$  in den Entfernungen  $20 \text{ m}$  und  $100 \text{ m}$  vom Ursprung!

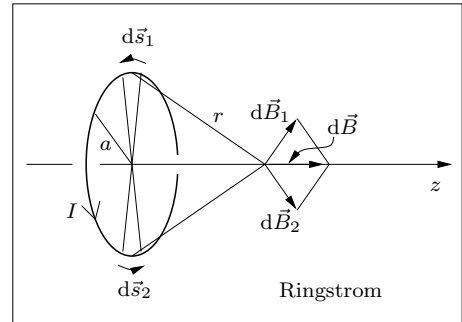
3.10 Berechnung von Magnetfeldern

- 3.10.1. Ein Toroid mit einem quadratischen Querschnitt von  $16 \text{ cm}^2$ ,  $r_i = 5 \text{ cm}$  und  $n = 12000$  Windungen wird vom Strom  $I = 0,5 \text{ A}$  durchflossen. Berechne den magnetischen Fluss durch den Querschnitt des Toroids! Wie lang muss ein Solenoid mit gleichem Querschnitt und gleicher Windungszahl sein, dessen Querschnitt bei gleicher Stromstärke vom gleichen Fluss durchsetzt ist? Vergleiche diese Länge mit der Länge der „Mittellinie“ des Toroids!

- 3.10.2. (a) Die Formel für das Magnetfeld eines Solenoids gilt exakt nur im Mittelpunkt der Spule. Im Punkt M zwischen zwei gleichen Spulen mit  $n$  Windungen und der Länge  $l$ , die sich fast berühren, herrscht das gleiche Feld wie im Mittelpunkt **einer** Spule mit  $n' = 2n$  und  $l' = 2l$ . Leite daraus eine Formel für die Kraftflussdichte  $B_R$  am Rand eines Solenoids her (Superposition)!
- (b) Für eine große Nebelkammer werden zwei Spulen mit kreisförmigem Querschnitt ( $l = 2\text{ m}$ ,  $r = 1\text{ m}$ ,  $n = 5000$ ) verwendet. Für welchen Strom  $I$  herrscht in M das Feld  $B = 4\text{ T}$ ?

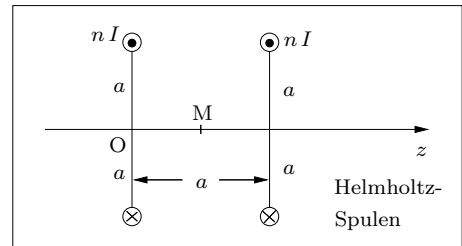


- 3.10.3. (a) Die  $z$ -Achse geht durch den Mittelpunkt eines kreisförmigen Ringstromes (Radius  $a$ ) und steht auf der Kreisebene senkrecht. Berechne das Magnetfeld auf der  $z$ -Achse in Abhängigkeit von  $z$ !  
**Hinweis:** Ähnliche Dreiecke!
- (b) Berechne das Magnetfeld auf der  $z$ -Achse eines Helmholtzspulenpaares! Stelle  $B(z)$  in der Form



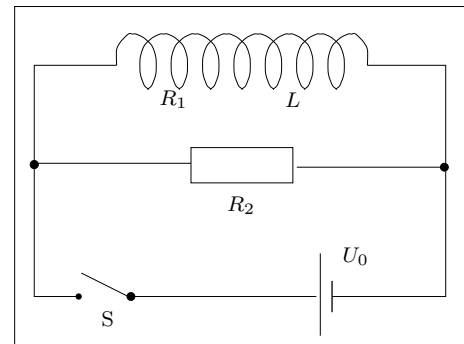
$$B(z) = \frac{\mu_0 I n}{a} \cdot g(\alpha) \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{z}{a}$$

dar! Zeichne  $g(\alpha)$  mit der Einheit 5 cm auf beiden Achsen!



### 3.11 Induktivität und magnetische Feldenergie

- 3.11.1. Der Schalter S wird zur Zeit  $t_0 = 0$  geschlossen und zur Zeit  $t_1$  wieder geöffnet. Der Innenwiderstand der Stromquelle darf vernachlässigt werden ( $R_i = 0$ ).  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $U_1$  und  $U_2$  sind die Ströme durch bzw. die Spannungen an  $R_1$  und  $R_2$ .
- (a) Berechne  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $U_1$  und  $U_2$  für  $0 < t < t_1$  und  $t > t_1$ .
- (b) Die Spule hat jetzt 1000 Windungen, den Querschnitt  $A = 20\text{ cm}^2$ , die Länge



$l = 10\text{ cm}$  und den Ohm'schen Widerstand  $R_1 = 5,03\ \Omega$ ,  $R_2 = 15,08\ \Omega$ . Zeichne den zeitlichen Verlauf von  $U_1$  und  $U_2$  für  $U_0 = 2\text{ V}$  und  $t_1 = 0,03\text{ s}$  ( $1\text{ cm} \hat{=} 0,004\text{ s}$ )!

- (c) In welcher Zeit erreicht  $I_1$  99% seines Endwertes  $I_0$ ? In welcher Zeit sinkt  $I_1$  auf 1% von  $I_0$  ab?
- (d) Wird  $R_2$  durch eine Glühlampe ersetzt oder ganz herausgenommen, dann gibt es direkt nach dem Ausschalten eine sehr hohe Spannung  $U_2$ . Gib eine qualitative Erklärung dieses Phänomens. Die quantitative Behandlung dieses Problems gelingt uns erst im Kapitel über den elektrischen Schwingkreis.

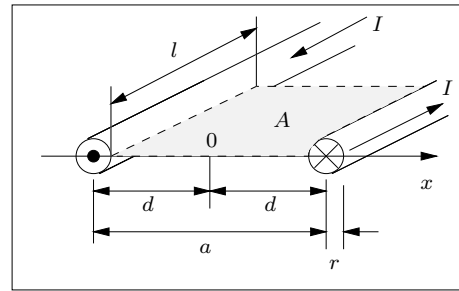
3.11.2. Berechne die Induktivität eines Toroids mit **quadratischem** Querschnitt aus den allgemeinen Daten  $n$ ,  $r_i$  und  $r_a$ !

3.11.3. **Induktivität eines Paralleldrahtsystems:**

Berechne den Fluss  $\Phi$  durch die Fläche  $A$ !

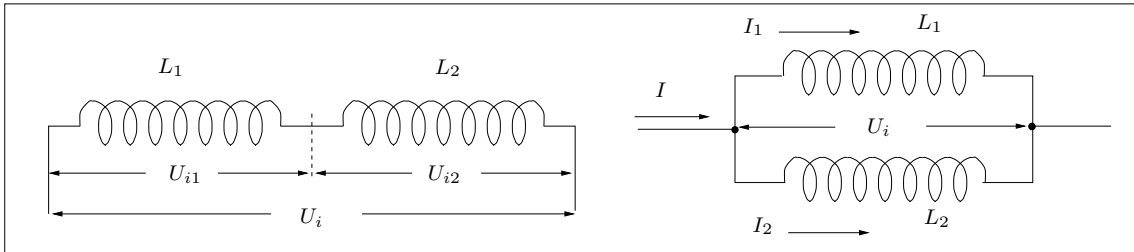
Hinweis:  $\int \frac{dx}{c \pm x} = \pm \ln(c \pm x) + C$

Welche Induktivität hat das Leitersystem pro Länge ( $\frac{L}{l}$ ), wenn das Feld **im** Leiter vernachlässigt werden kann, d.h. für  $r \ll a$ ?



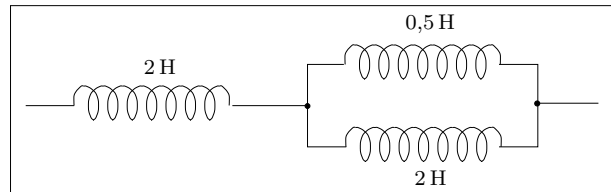
Berechne  $\frac{L}{l}$  konkret für eine Stegleitung mit  $a = 0,5 \text{ cm}$  und  $r = 0,5 \text{ mm}$ .

3.11.4.

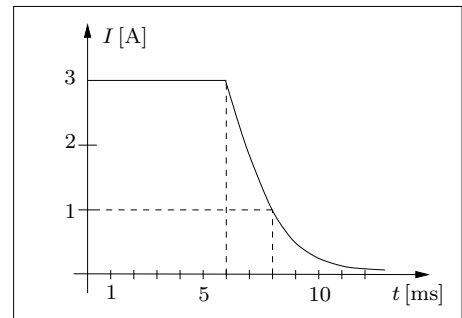


Zeige, dass für Reihen- und Parallelschaltungen von zwei Induktivitäten die gleichen Gesetze gelten wie für Widerstandsschaltungen! Verwende dazu die Beziehung  $U_i = -L \dot{I}$ .

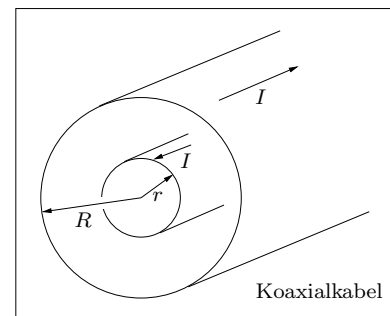
3.11.5. Berechne  $L_{\text{ges}}$ !



3.11.6. Ein Oszilloskop zeichnet den Strom  $I$  durch eine Spule auf (Ausschalten zur Zeit  $t_0 = 6 \text{ ms}$ ; siehe Abb.). Nach dem Ausschalten der Stromquelle liegt ein Widerstand an den Spulenden, der Gesamtwiderstand des neuen Stromkreises ist  $R = 225 \Omega$ . Welche Energie war vor dem Ausschalten im Feld der Spule gespeichert?

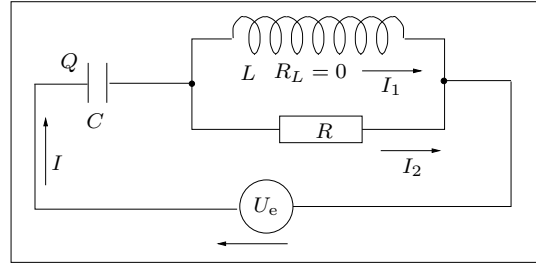


3.11.7. Berechne die Energie, die im Magnetfeld eines Koaxialkabels der Länge  $l$  (Kernradius =  $r$ , Mantelradius =  $R$ ) gespeichert ist! Dabei darf das Feld **in** den Leitern vernachlässigt werden, d.h. es wird ein dünner Kern ( $r \ll R$ ) und ein dünner Mantel vorausgesetzt. Welche Induktivität hat das Kabel der Länge  $l$ ?



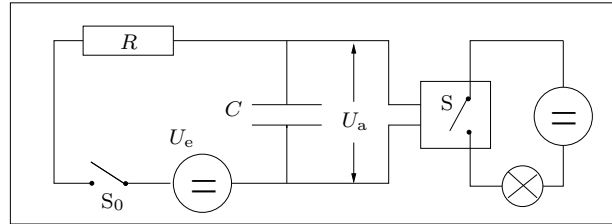
### 3.12 Netzwerke

- 3.12.1. Wende zweimal die Maschenregel und einmal die Knotenregel auf nebenstehendes Netzwerk an! Wandle die erhaltenen Gleichungen so um, dass sie als Unbekannte nur noch die Ströme  $I$ ,  $I_1$  und  $I_2$  enthalten. Kombiniere diese drei Gleichungen so, dass nur noch eine DGL für  $I$  übrigbleibt. Beachte, dass  $U_e$  nicht konstant sein muss!



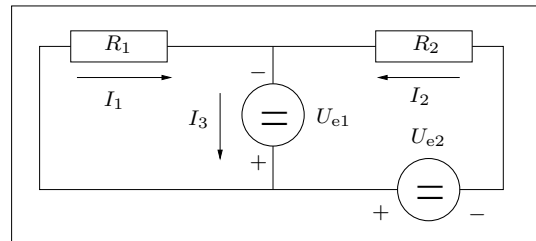
- 3.12.2. **RC-Glied als Zeitschalter:**

Der elektronische Schalter S ist geschlossen, wenn  $U_a \geq 0,6\text{ V}$  ist. Zur Zeit  $t = 0$  wird die konstante Spannung  $U_e = 0,7\text{ V}$  mit  $S_0$  eingeschaltet. Stelle die DGL für die Spannung  $U_a$  am Kondensator auf und löse sie mit der Anfangsbedingung  $U_a(0) = 0$ .



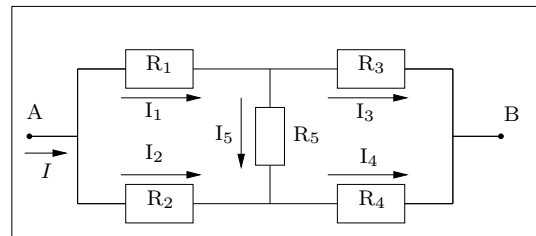
Wie muss  $R$  für  $C = 50\ \mu\text{F}$  gewählt werden, damit die Lampe für  $t \geq 10\text{ s}$  aufleuchtet?

- 3.12.3. (a) Berechne  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  für  $R_1 = 4\ \Omega$ ,  $R_2 = 6\ \Omega$ ,  $U_{e1} = 10\text{ V}$  und  $U_{e2} = 4\text{ V}$ ! Die Innenwiderstände der Stromquellen seien  $R_{i1} = R_{i2} = 0$ .  
 (b) Berechne wiederum  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$ , aber diesmal für  $R_{i1} = 2\ \Omega$  und  $R_{i2} = 1\ \Omega$ .

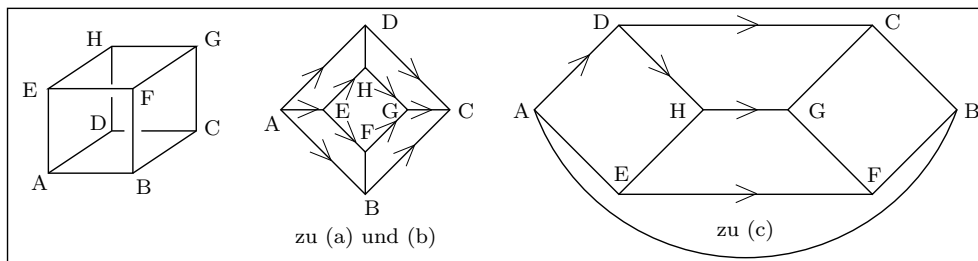


- 3.12.4. Verwende MAPLE zur Berechnung von  $R_{AB}$ !

Hinweis: Denke dir eine Spannung  $U$  zwischen A und B, stelle Gleichungen für die Ströme auf und berechne zum Schluß  $R = \frac{U}{I}$ .



- 3.12.5.

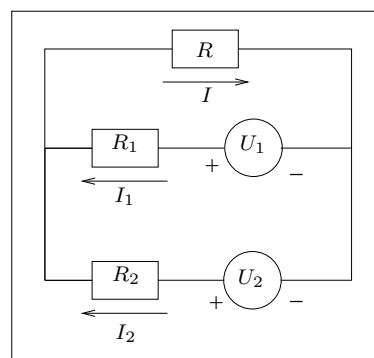


Die Kanten eines Drahtwürfels haben alle den gleichen Widerstand  $R$ . Berechne

- (a)  $R_{AG}$  (b)  $R_{AC}$  (c)  $R_{AB}$

3.12.6. Zwei Stromquellen mit den EMK's  $U_1$  und  $U_2$  sowie den Innenwiderständen  $R_1$  und  $R_2$  versorgen, parallel geschaltet, den Verbraucher mit dem Widerstand  $R$ .

- Berechne  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I$  und die Spannung  $U$  am Verbraucher aus den allgemeinen Daten!
- Vergleiche die Spannung am Verbraucher, wenn zwei identische Batterien parallel angeschlossen sind mit der der Spannung, wenn nur eine dieser Batterien angeschlossen ist!



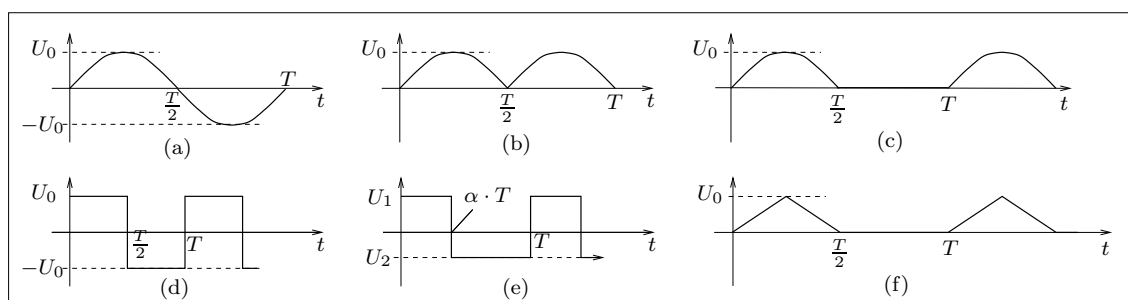
## 4 Elektromagnetische Schwingungen und Wellen

### 4.1 Wechselströme

4.1.1. Beweise die Integralformel  $\int \sin^2 ax \, dx = \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2a} \cdot \sin 2ax \right) + C$

Hinweis: Verwende die Formel für  $\cos 2\alpha$  aus der mathematischen Formelsammlung.

4.1.2. Berechne den Mittelwert und den Effektivwert folgender Wechselspannungen:



(g) Wie (b), jedoch mit Parabelbögen statt Sinusfunktionen.

4.1.3. (a) Mittelwerte einer Größe werden entweder durch einen Querstrich über die Größe oder durch spitze Klammern um die Größe dargestellt:  $\overline{P} = \langle P \rangle$ . Beweise für die Effektivspannung die Formel

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\langle U^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T U(t)^2 \, dt}$$

(b) Zeige an einem Beispiel, dass i.Allg.  $\langle U^2 \rangle \neq \langle U \rangle^2$  gilt.

(c) Zeige mit der allgemeinen Definition der Effektivwerte, dass  $U_{\text{eff}} = R \cdot I_{\text{eff}}$  gilt.

### 4.2 Kondensatoren und Spulen im Wechselstromkreis

4.2.1. An einem Kondensator der Kapazität  $C$  liegt die Spannung  $U_e = U_0 \cdot \sin \omega t$ . Berechne die momentane und mittlere Leistung, die von der Spannungsquelle verrichtet wird! Zeichne  $U_e(t)$ ,  $I(t)$  und  $P(t)$  in ein Diagramm! Welche Bedeutung hat eine negative Leistung?

4.2.2. Ein Kondensator wird aus zwei Lagen Silberpapier und zwei Lagen Kunststoff (Breite 3 cm, Länge 2 m, Dicke des Kunststoffes 0,1 mm) gewickelt. Der Kunststoff bewirkt, dass  $\epsilon_0$  durch  $\epsilon = 45 \cdot \epsilon_0$  ersetzt werden muss. Welcher Strom fließt, wenn dieser Kondensator an die

Steckdose angeschlossen wird? Wie groß ist der Strom, wenn der Widerstand  $R = 100\text{ k}\Omega$  mit dem Kondensator in Reihe liegt?

4.2.3. Eine Spule der Länge  $l = 10\text{ cm}$  mit kreisförmigem Querschnitt ( $r = 3\text{ cm}$ ) wird an die Steckdose angeschlossen. Ein auf Effektivwerte geeichtes Instrument zeigt den Strom  $0,55\text{ A}$  an. Berechne die Windungszahl  $n$ !

4.2.4. (a) Beweise: 
$$\int \sin ax \cdot \cos ax \, dx = \frac{1}{2a} \cdot \sin^2 ax + C$$

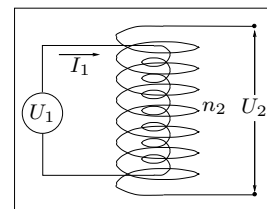
(b) Berechne die momentane ( $P(t)$ ) und mittlere ( $\bar{P}$ ) Leistung, die von der Spannung  $U_e = U_0 \cdot \sin \omega t$  in einer realen Spule ( $L, R$ ) umgesetzt wird! Integriere erst nach Anwendung eines Additionstheorems auf  $\sin(\omega t + \varphi)$ !

(c) Beweise, dass die „**Wirkleistung**“  $\bar{P}$  gleich der am Widerstand  $R$  in Wärme umgesetzten Leistung ist! Verwende  $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$ !

Ist  $\bar{P}$  gleich der „**Scheinleistung**“  $P^* = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$ ?

#### 4.2.5. Der Transformator:

Eine Spule mit  $n_2$  Windungen (Sekundärspule) ist über eine Spule mit  $n_1$  Windungen (Primärspule) gewickelt. Beide Spulen haben die gleiche Länge  $l$  und die gleiche Querschnittsfläche  $A$ . An der Primärspule liegt die Wechselspannung  $U_1 = U_{10} \cdot \sin \omega t$ . Berechne den Primärstrom  $I_1$  und die Sekundärspannung  $U_2$  im Fall einer unbelasteten Sekundärspule ( $I_2 = 0$ )!



### 4.3 Der elektrische Schwingkreis

4.3.1. Ein Schwingkreis, bestehend aus einem Solenoid und einem Plattenkondensator, wird räumlich um den Faktor  $k$  zentrisch gestreckt. Um welchen Faktor ändert sich die Eigenfrequenz?

4.3.2. Der Empfangsschwingkreis eines Mittelwellenempfängers besteht aus einem Drehkondensator ( $50\text{ pF}$  bis  $550\text{ pF}$ ) und einem Solenoid ( $l = 3\text{ cm}$ ,  $A = 1\text{ cm}^2$ ). Zwischen welchen Werten darf die Windungszahl  $n$  der Spule liegen, damit die Eigenfrequenz des Schwingkreises jeden Frequenzwert des Mittelwellenbereiches ( $0,5\text{ MHz}$  bis  $1,5\text{ MHz}$ ) annehmen kann?

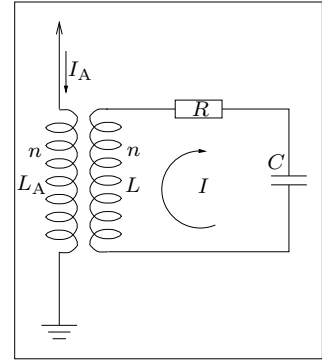
4.3.3.  $W_C$  bzw.  $W_L$  sind die Energieinhalte des Kondensator- bzw. Spulenfeldes eines idealen Schwingkreises mit der Induktivität  $L = 0,2\text{ H}$ , der Schwingungsdauer  $T = 4 \cdot 10^{-4}\text{ s}$  und der maximalen Kondensatorladung  $Q_0 = 1,62 \cdot 10^{-7}\text{ As}$ . Berechne die Kapazität  $C$  des Kondensators, die Scheitelspannung  $U_0$  und den Scheitelstrom  $I_0$ ! Zeichne  $W_C(t)$ ,  $W_L(t)$  und  $W_{\text{gesamt}}(t)$  in ein Diagramm!

4.3.4. Für welche Widerstandswerte  $R$  im realen Schwingkreis ist der Fehler kleiner als ein Prozent, wenn das wirkliche  $\omega$  durch den Näherungswert  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  ersetzt wird? Überprüfe das Ergebnis für  $L = 1\text{ H}$  und  $C = 1\text{ }\mu\text{F}$ !

4.3.5. Auf einen Plastikzylinder der Länge  $l = 10\text{ cm}$  mit dem Radius  $r = 2\text{ cm}$  wird eine einlagige Schicht eines Kupferdrahtes (Durchmesser  $0,2\text{ mm}$ ) so gewickelt, dass sich zwei benachbarte Windungen gerade berühren (die Dicke der Isolationsschicht ist vernachlässigbar). Der spezifische Widerstand von Kupfer ist  $\rho = 0,017 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$ . Die Spule bildet mit einem Kondensator der Kapazität  $C = 0,1\text{ nF}$  einen Schwingkreis. Nach wie vielen Schwingungen bzw. nach welcher Zeit sinkt die Amplitude der Schwingung auf  $90\%$  des Anfangswertes ab?

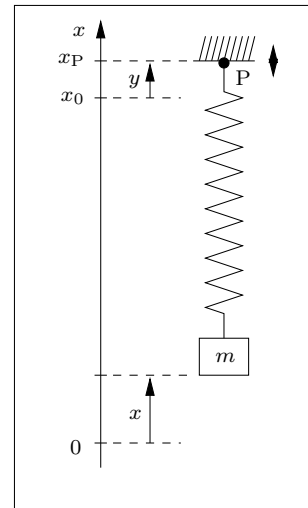
### 4.4 Erzwungene Schwingungen (Resonanz)

4.4.1. Der Schwingkreis eines Radios ist induktiv an den Antennenkreis angekoppelt. Durch die Antennenspule fließt der Strom  $I_A = I_{A0} \cdot \sin \omega t$ . Das  $k$ -fache ( $k < 1$ ) des in der Antennenspule erzeugten magnetischen Flusses  $\Phi$  durchdringt auch die Schwingkreisspule; im Schwingkreis wirkt also die EMK  $U_e = -n k \dot{\Phi}$ .



- Stelle die Differentialgleichung für  $I$  auf und berechne den Scheitelwert  $I_0$  von  $I$  nach dem Einschwingen!
- Für welches  $C = C_{\max}$  ist  $I_0$  maximal? Berechne  $C_{\max}$  und  $I_{0,\max}$  für  $L = 2 \cdot 10^{-5} \text{ H}$ ,  $L_A = 4 \cdot 10^{-3} \text{ H}$ ,  $\omega = 1 \cdot 10^8 \frac{1}{\text{s}}$ ,  $k = \frac{1}{2}$ ,  $R_L = 0,02 \Omega$  und  $I_{A0} = 1 \cdot 10^{-12} \text{ A}$ .
- Um wieviel Prozent weicht  $I_0$  von  $I_{0,\max}$  ab, wenn die in (b) berechnete Kapazität um 1% geändert wird? Für welches  $R_L$  ist  $I_0 = \frac{1}{2} \cdot I_{0,\max}$ , wenn  $C$  wiederum um 1% vom Idealwert abweicht?

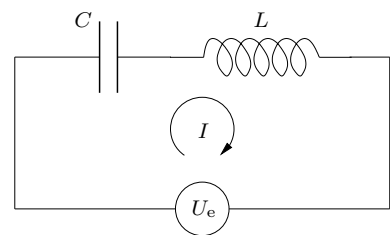
4.4.2. An einer Feder mit der Richtgröße  $D = 0,8 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  hängt ein Körper der Masse  $m = 50 \text{ g}$ . Der Aufhängepunkt P der Feder bewegt sich nach dem Gesetz  $x_P(t) = x_0 + y(t)$  mit  $y(t) = y_0 \cdot \sin \omega t$  und  $y_0 = 1 \text{ mm}$ . Die einsetzende Schwingung unterliegt der Reibungskraft  $R = -\beta \cdot v$  mit  $\beta = 0,0005 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ .



- Stelle die Differentialgleichung der Bewegung von  $m$  auf!
- Berechne allgemein die Amplitude  $A(\omega)$  der Schwingung nach dem Einschwingvorgang!
- Berechne das Maximum von  $A$  und zeichne den Grafen von  $A(\omega)$ !
- Für welche  $\omega$  ist  $A(\omega) > \frac{1}{2} \cdot A_{\max}$ ?

### 4.4.3. Siebkette

Eine Spule mit der Induktivität  $L$  und ein Kondensator mit der Kapazität  $C$  liegen in Reihe an einer Stromquelle mit der Spannung  $U_e = U_0 \sin \omega t$ .



- Stelle mit Hilfe der Maschenregel die Differentialgleichung für den Strom  $I$  auf und zeige durch Einsetzen, dass

$$I(t) = I_0 \cos \omega t \quad \text{mit} \quad I_0 = I_0(\omega) = \frac{\omega U_0 C}{1 - \omega^2 LC}$$

eine Lösung ist.

- Für welches  $\omega = \omega_0$  ist  $I_0(\omega)$  nicht definiert? Was sorgt wohl in der Realität dafür, dass diese Katastrophe nicht eintritt? Skizziere qualitativ den Verlauf von  $I_0(\omega)$ . Zeichne  $U_e(t)$  und  $I(t)$  einmal für  $\omega < \omega_0$  und einmal für  $\omega > \omega_0$  in jeweils ein Diagramm.
- Skizziere den Verlauf des Wechselstromwiderstandes  $Z(\omega)$  der Schaltung. Wie verhält sich die Schaltung, wenn  $U_e$  eine Überlagerung vieler Wechselspannungen mit unterschiedlichsten Frequenzen ist?

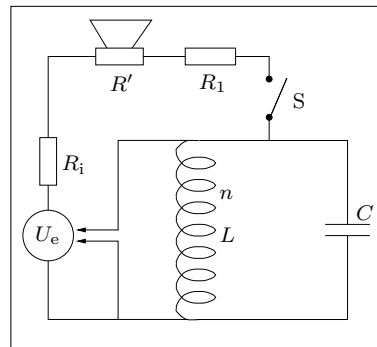


### 4.5 Erzeugung ungedämpfter Schwingungen

#### 4.5.1. Prinzip einer elektronischen Orgel:

Beim Schließen des Schalters S soll der Ton  $c'$  ( $f_{c'} = 264 \text{ Hz}$ ) in gleichbleibender Lautstärke erklingen.  
 $L = 0,363 \text{ H}$ ,  $R_1 + R' = 50 \Omega$ .

- (a) Berechne den Verstärkungsfaktor  $A$  der steuerbaren Spannungsquelle  $U_e$ , den Widerstand  $R_1$  sowie die Kapazität  $C$  für  $R_L = 0!$
- (b) Berechne  $R_1$  und  $C$  für  $A = 1,08$  und  $R_L = 300 \Omega!$



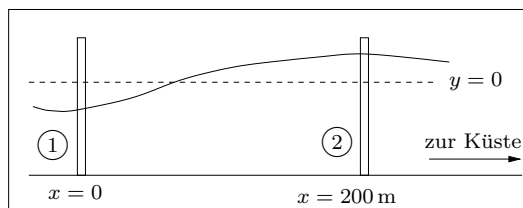
### 4.6 Die Wellengleichung

4.6.1. Im Pazifik entstehen manchmal riesige Wellen, die sogenannten „Tsunamis“:

$$y(x, t) = A \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

100 km vor der japanischen Küste sind zwei „Wellenregistratorer“ angebracht, die folgende Messdaten zur Küste funken:

Gerät 1		Gerät 2	
$t$	$y$	$t$	$y$
0 s	5 m	0 s	8,66 m
20 s	-2,62 m	Amplitude: $A = 10 \text{ m}$	



Durch einen Vergleich mit weiteren Messergebnissen ist noch bekannt, dass  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ,  $500 \text{ m} < \lambda < 1000 \text{ m}$  und  $150 \text{ s} < T < 170 \text{ s}$  ist. Berechne  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $f$ ,  $T$ ,  $k$  und  $\lambda$  der Welle! Wie lange dauert es vom Empfang der Messergebnisse bis zur Flutkatastrophe an der Küste?

4.6.2. Ein Seil ist bei  $x = 0$  fest eingespannt. Eine nach links laufende Welle

$$u_l(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$$

wird bei  $x = 0$  reflektiert. Dabei wird die Welle „umgedreht“, d.h. die Senderfunktion für die reflektierte Welle ist  $s(t) = -u_l(0, t)$ . Die wirklich vorhandene Welle  $u(x, t)$  ist die Überlagerung der einlaufenden Welle  $u_l(x, t)$  und der reflektierten Welle  $u_r(x, t)$ :

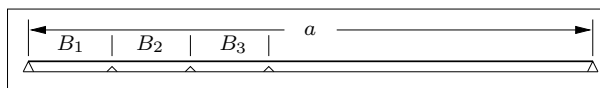
$$u(x, t) = u_l(x, t) + u_r(x, t).$$

- (a) Weise nach, dass  $u(x, t)$  eine stehende Welle ist!
- (b) Eine Welle wird auch am losen Ende eines Seiles reflektiert, die Senderfunktion für die reflektierte Welle ist in diesem Fall aber  $s(t) = +u_l(0, t)$ . Zeige, dass wieder eine stehende Welle entsteht! Skizziere die stehenden Wellen bei der Reflexion am festen und am losen Ende!

4.6.3. Eine Orgelpfeife der Länge  $a$  ist an einem Ende geschlossen, am anderen offen. Für eine Schallwelle in der Pfeife gilt am geschlossenen Ende ( $x = 0$ )  $u(0, t) = 0$  und am offenen Ende  $u(a, t)$  ist maximal, d.h.  $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0$ .

- (a) Skizziere die drei ersten Hauptschwingungen der Pfeife und berechne ihre Wellenlängen und Frequenzen!
- (b) Wie lang muss eine Orgelpfeife sein, deren Grundschwingung die Frequenz  $f_0 = 220 \text{ Hz}$  hat (die Schallgeschwindigkeit ist  $c = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ )? Welche Frequenzen gehören zu den beiden ersten Oberschwingungen?

- 4.6.4. Eine Oktave besteht aus 12 Halbtönen, wobei das Frequenzverhältnis zweier aufeinanderfolgender Halbtöne kon-



stant ist (chromatische Tonleiter):  $\frac{f_{n+1}}{f_n} = \alpha = \text{konstant}$ . Berechne  $\alpha$  und die ersten drei Bundbreiten  $B_1$ ,  $B_2$  und  $B_3$  einer Gitarre mit der Saitenlänge  $a = 65 \text{ cm}$ ! Welche Oberschwingung der a-Saite ( $f_a = 110 \text{ Hz}$ ) entspricht der Grundschwingung der e"-Saite?

## 4.7 Wellen auf Leitern

- 4.7.1. (a) Am Anfang ( $x = 0$ ) eines einseitig unendlichen Lechersystems liegt die Spannung

$$U_e(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ U_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

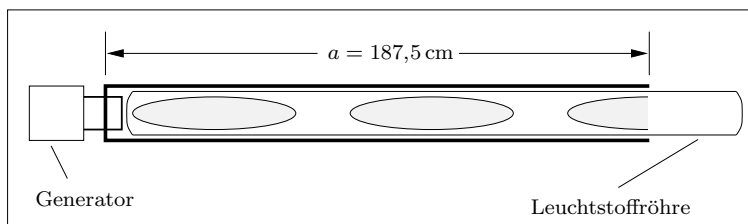
Wie lautet die Gleichung der Spannungswelle  $U(x, t)$ ? Zeichne  $U(x, t_1)$  für  $U_0 = 2 \text{ V}$  und  $t_1 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ s}$ !

- (b) Jetzt sei

$$U_e(t) = \begin{cases} 2 \text{ V} & \text{für } 0 \leq t \leq 5 \cdot 10^{-11} \text{ s} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

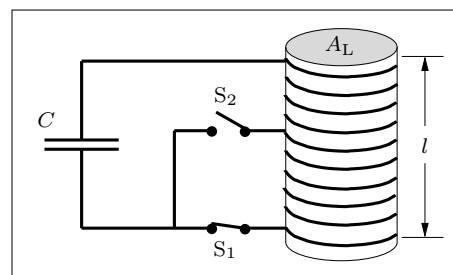
Zeichne  $U(x, t_1)$  für  $t_1 = 1 \cdot 10^{-10} \text{ s}$  und  $U(x, t_2)$  für  $t_2 = 3 \cdot 10^{-10} \text{ s}$ !

- 4.7.2. Die Neonröhre auf dem Lechersystem leuchtet in den schraffierten Bereichen. Berechne die Frequenz des Generators!



## 4.7.3. Dualband-Handy

Der Schwingkreis eines Dualband-Handys besteht aus einem Kondensator mit der Plattenfläche  $A_C = 0,30 \text{ cm}^2$  und dem Plattenabstand  $x$  sowie aus einer Spule mit  $n = 24$  Windungen und der Länge  $l = 7,2 \text{ cm}$ . Jede Windung der Spule umschließt die Fläche  $A_L = 0,23 \text{ cm}^2$ . Es ist entweder der Schalter  $S_1$  geschlossen und der Schalter  $S_2$  offen oder  $S_1$  offen und  $S_2$  geschlos-



sen. Das D-Netz arbeitet mit der Frequenz  $f_D = 900 \text{ MHz}$ , das E-Netz mit  $f_E = 1800 \text{ MHz}$ .

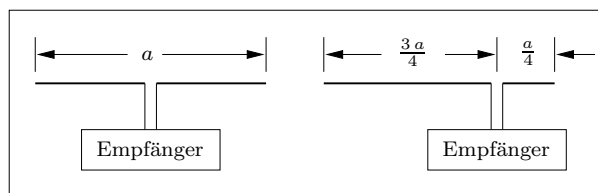
- (a) Überlege dir zunächst, welcher Schalter beim Betrieb im D-Netz geschlossen sein muss. Berechne dann den Plattenabstand  $x$  des Kondensators.
- (b) Bei welcher Windungszahl  $n_2$  (die erste Windung ist in der Zeichnung oben) muss die Zuleitung zum Schalter  $S_2$  angeschlossen werden? Wie weit ist diese Anschlussstelle von der obersten Windung entfernt?
- (c) Leite die Formeln für die Frequenzen eines  $\frac{\lambda}{2}$ - und eines  $\frac{\lambda}{4}$ -Dipols der Länge  $a$  her. Welche Dipolart fester Länge kommt als Antenne für unser Handy nur in Frage, wenn die Antenne für beide Netze in Resonanz schwingen soll? An welcher Stelle muss die Antenne angeschlossen werden und welche Länge  $a$  muss sie haben?
- 4.7.4. Welche Länge  $a^*$  muss ein  $\frac{\lambda}{2}$ -Dipol haben, damit seine  $n$ -te Eigenfrequenz gleich der  $n$ -ten Eigenfrequenz eines  $\frac{\lambda}{4}$ -Dipols der Länge  $a$  ist?

4.7.5. Die Spannung in einem einseitig offenen und endlichen Lechersystem ist

$$U(x, t) = U_0 \sin kx \sin \omega t$$

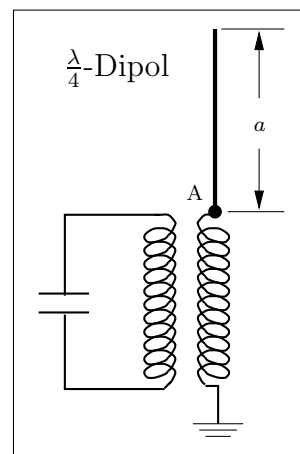
Berechne den Strom  $I(x, t)$ ! Wie groß ist die Impedanz  $Z = \frac{U_0}{I_0}$  bei einem Drahtdurchmesser von  $d = 5 \text{ mm}$  und einem Abstand der Drahtachsen von  $a = 5 \text{ cm}$ !

4.7.6. Welche Frequenzen können mit nebenstehenden Anordnungen in Resonanz empfangen werden? Für welche Frequenzen ist die jeweilige Anordnung total ungeeignet?



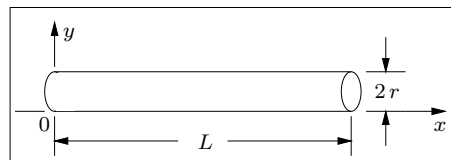
4.7.7. Die Stabantenne

- Ein Dipol der Länge  $a$  ist wie in nebenstehender Abbildung induktiv an einen Schwingkreis gekoppelt (**Stabantenne**). Am Kopplungspunkt A ist der Strom auf dem Dipol maximal. Warum heißt der Dipol in dieser Anordnung  $\frac{\lambda}{4}$ -Dipol? Berechne die Eigenfrequenzen des Dipols!
- Ein D2-Netz-Handy sendet auf der Frequenz 900 MHz. Wie lang sollte die (Stab-)Antenne des Handys sein (in der Grundschwingung wird die meiste Energie abgestrahlt)? Wie groß sind die Frequenzen der beiden ersten Oberschwingungen auf dieser Antenne?



## 4.8 Elektromagnetische Wellen im Vakuum oder Dielektrikum

4.8.1. In einem zylinderförmigen, von einem Leiter umgebenen Hohlraum, bilden sich für  $L \gg r$  stehende Wellen mit  $E_y(0) = E_y(L) = 0$  aus (für  $L$  nicht sehr groß gegen  $r$  sind die Verhältnisse recht kompliziert). Ein elektronischer Zähler misst die Reso-



nanzfrequenz des „Hohlraumresonators“ in der Grundschwingung zu  $f_V = 27,92914 \text{ MHz}$  im Vakuum und  $f_L = 27,92085 \text{ MHz}$  in Luft. Die Unsicherheit der angegebenen Zahlenwerte beträgt jeweils eine halbe Einheit der letzten Dezimale (gerundete Zahlen). Berechne  $L$  und  $\epsilon_r$  von Luft, jeweils mit Fehlerangabe!

4.8.2. Die Intensität der Sonnenstrahlung beträgt direkt außerhalb der Erdatmosphäre  $1380 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ , der Abstand Erde-Sonne ist  $r = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$  und der Sonnenradius beträgt  $R = 7 \cdot 10^5 \text{ km}$ .

- Berechne die Intensität der Sonnenstrahlung an der Sonnenoberfläche! Welche Gesamtenergie strahlt die Sonne pro Sekunde ab?
- Berechne die Maximalwerte der elektrischen und magnetischen Feldstärke der Sonnenstrahlung an der Sonnenoberfläche und am Ort der Erde!

4.8.3. Der Sendedipol ( $\frac{\lambda}{2}$ ) eines Fernsehsenders ( $f = 600 \text{ MHz}$ ,  $P = 5 \text{ MW}$ ) ist in horizontaler Lage auf einem  $h = 30 \text{ m}$  hohen Turm angebracht.

Welche Strahlungsintensität herrscht in  $r = 1,5 \text{ km}$  Entfernung vom Sender in Bodenhöhe? Vergleiche mit dem Wert von  $0,005 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ , der in der Broschüre „Strahlenthemen: Radio- und Mikrowellen“ des Bundesamtes für Strahlenschutz angegeben ist!

In der gleichen Broschüre steht, dass der Grenzwert von  $2 - 4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$  ab einer Entfernung von ca.  $75 \text{ m}$  eingehalten wird. Kritische Stellungnahme!

- 4.8.4. Lawinensuchgeräte senden auf der Frequenz  $f = 457 \text{ kHz}$ . Warum verwendet man Ferritantennen und keine Dipole? Beschreibe eine Strategie, wie man einen Verschütteten mit einem zweiten Gerät, das auf Empfang geschaltet ist, in möglichst kurzer Zeit finden kann!
- 4.8.5. Ein starker Mittelwellensender sendet mit der Leistung  $P = 1,0 \text{ MW}$  auf der Frequenz  $f = 1,4 \text{ MHz}$ .
- Wie hoch muss der einseitig geerdete Sendedipol sein?
  - Das Ergebnis von Teilaufgabe (a) zeigt, dass ein Empfangsdipol für einen tragbaren Mittelwellenempfänger etwas unhandlich ist. Man verwendet deshalb eine sogenannte Ferritantenne, das ist eine Spule mit einem Kern, dessen Material das Magnetfeld des Senders um den Faktor  $\mu_r$  verstärkt. Wie muss die Spule angeordnet werden, um einen optimalen Empfang zu gewährleisten?
  - Die Daten einer Ferritantenne seien  $A = 1 \text{ cm}^2$  (Querschnittsfläche),  $n = 100$  (Zahl der Windungen) und  $\mu_r = 5000$ . Die Antenne befindet sich in optimaler Ausrichtung  $r = 1000 \text{ km}$  vom Sender entfernt. Berechne die Maximalwerte der Beträge von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  am Ort der Antenne sowie die an den Enden der unbelasteten Spule induzierte Spannung!

## 4.9 Reflexion und Brechung

4.9.1. Leite das Reflexionsgesetz mit dem Huygens'schen Prinzip her!

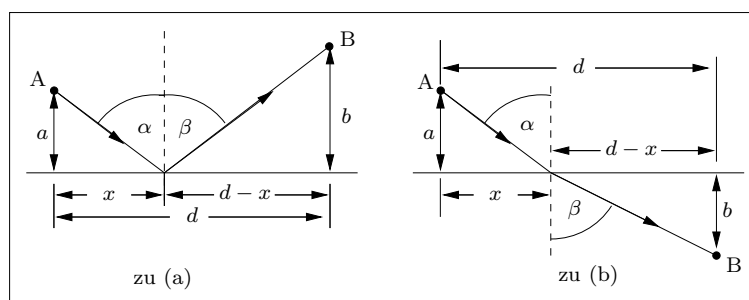
### 4.9.2. Das Fermat'sche Prinzip

Pierre de Fermat (1601 - 1665) stellte folgendes Prinzip auf:

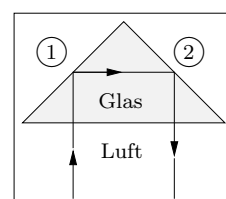
Licht bewegt sich auf dem schnellsten Weg von A nach B, d.h die Laufzeit ist minimal.

Den Beweis des Fermat'schen Prinzips aus den Maxwellgleichungen findet man z.B. in dem Klassiker „Optik“ von Max Born.

Beweise (a) das Reflexionsgesetz und (b) das Brechungsgesetz mit dem Fermat'schen Prinzip! Drücke dazu die Laufzeit  $t$  des Lichtes durch  $x$  aus und setze die Ableitung  $\frac{dt}{dx}$  gleich Null. Versuche in der erhaltenen Gleichung  $\sin \alpha$  und  $\sin \beta$  zu identifizieren (das Auflösen der Gleichung nach  $x$  führt auf eine Gleichung vierten Grades)!



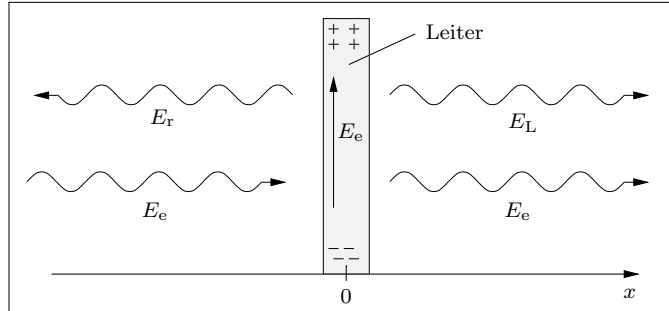
- 4.9.3. Welchen Brechungsindex muss das Glas des nebenstehend gezeichneten Prismas mindestens haben, damit an den Grenzflächen ① und ② Totalreflexion auftritt?



- 4.9.4. Warum gilt auch für Teilchen, die voll elastisch und reibungsfrei gegen eine feste Wand prallen ( $m_{\text{Wand}} = \infty$ ), das Reflexionsgesetz?

4.9.5. Reflexion an einer idealen Leiterwand unter senkrechtem Einfall

Die einfallende Welle  $E_e$  regt die Elektronen im Leiter zum Mitschwingen an. Zeigt  $E_e$  im Leiter nach oben, dann zeigt das von den Ladungen erzeugte Feld nach unten, da die Gesamtfeldstärke im Leiter Null ist. Die schwingenden Elektronen erzeugen also eine zur

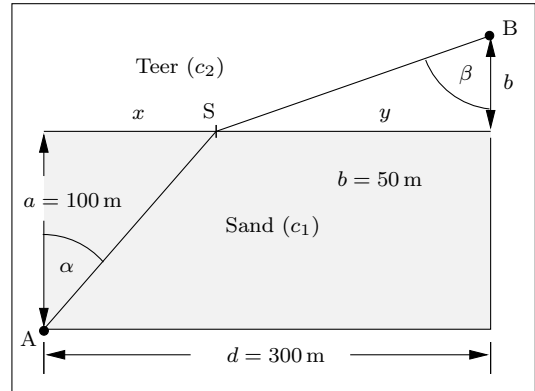


einfallenden Welle gegenphasige Welle ( $\varphi = \pi$ ) mit der gleichen Amplitude  $E_0$ .

Einfallende Welle :  $E_e = E_0 \cdot \sin(kx - \omega t)$   
 Von den Leiterelektronen erzeugte Welle ( $x > 0$ ) :  $E_L = E_0 \cdot \sin(kx - \omega t + \pi)$   
 Von den Leiterelektronen erzeugte Welle ( $x < 0$ ) :  $E_r = E_0 \cdot \sin(-kx - \omega t + \pi)$

Berechne das Gesamtfeld links ( $E_1 = E_e + E_r$ ) und rechts ( $E_2 = E_e + E_L$ ) vom Leiter! Zeichne  $E_e$ ,  $E_L$ ,  $E_r$ ,  $E_1$  und  $E_2$  für  $\lambda = 6 \text{ cm}$  und  $\omega t = \frac{\pi}{3}$  in ein Diagramm ( $E_0 \hat{=} 1,5 \text{ cm}$ )! Zeichne in das Diagramm auch die extremalen Werte der stehenden Welle  $E_1$  ein!

4.9.6. Ein Superathlet möchte so schnell wie möglich vom Punkt A am Strand zu einem Kiosk auf dem Parkplatz bei Punkt B, um seiner Freundin ein Eis zu holen. Im Sand schafft er die Geschwindigkeit  $c_1 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , auf dem Teer  $c_2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Welchen Punkt S auf der Trennlinie Sand-Teer muss er ansteuern? Zeichne zur Lösung den Grafen von  $t(x)$  ( $t$  ist die einfache Laufzeit von A nach B) und bestimme näherungsweise die Koordinaten ( $x_0|t_0$ ) des Minimums (MAPLE)!



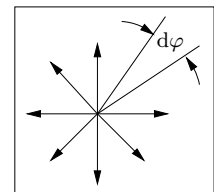
Berechne speziell die Laufzeiten für  $x = 0$ ,  $x = d$  und bei geradlinigem Lauf! Berechne  $\alpha$  und  $\beta$  für den schnellsten Lauf und überprüfe das Brechungsgesetz!

4.10 Polarisation

4.10.1. Die Intensität  $J_0$  von natürlichem Licht sei gleichmäßig auf alle Richtungen verteilt, d.h.

$$dJ = \frac{J_0}{2\pi} \cdot d\varphi$$

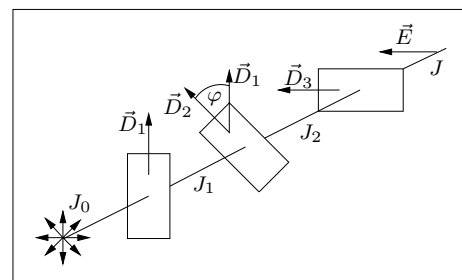
Berechne die Intensität nach dem Durchgang durch ein Polfilter!



4.10.2. Natürliches Licht der Intensität  $J_0$  geht durch drei Polfilter mit  $\vec{D}_1 \perp \vec{D}_3$ . Berechne die Intensität  $J$  nach dem dritten Filter in Abhängigkeit von  $\varphi$ !

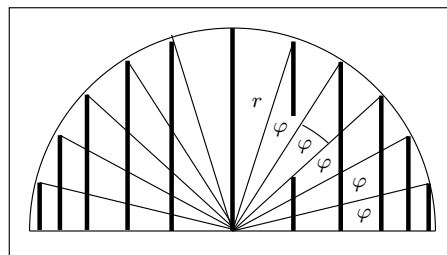
Für welche  $\varphi$  zwischen  $-\pi$  und  $\pi$  ist  $J$  maximal?

Zeichne  $J(\varphi)$  im Bereich von  $-\pi$  bis  $\pi$  ( $J_0 \hat{=} 16 \text{ cm}$ )!



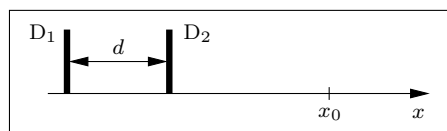
### 4.11 Summen von Sinusfunktionen

- 4.11.1. Berechne die Summe der Längen der senkrechten (dick gezeichneten) Strecken für  $\varphi = 1^\circ$ .



### 4.12 Überlagerung von zwei gleichfrequenten Wellen

- 4.12.1. Zwei Dipole  $D_1$  und  $D_2$  senden gleichphasig mit der Frequenz  $f = 100$  MHz.  $J_1$  und  $J_2$  sind die Intensitäten von  $D_1$  und  $D_2$  am Ort  $x_0$ . Berechne die Gesamtintensität  $J(d)$  am Ort  $x_0$  für  $J_2 = 4 J_1$ ! Diskutiere  $J(d)$ !

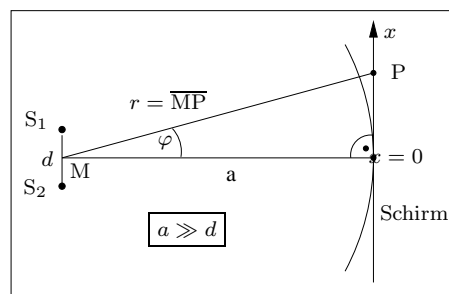


### 4.13 Zweistrahlinterferenzen

- 4.13.1. Berechne die Zahl der Maxima bei zwei gleichphasigen Sendern im Bereich  $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$  für (a)  $d = 4$  cm,  $\lambda = 1$  cm und (b)  $d = 3$  cm,  $\lambda = 0,7$  cm.

Wie groß sind in beiden Fällen die Maximumwinkel  $\varphi_\nu$ ? Löse die Aufgabe noch einmal für die Minima! Konstruiere für (a) die Kurven der Maxima und berechne die Gleichungen dieser Kurven! Die Intensität eines einzelnen Senders in der Entfernung 1 cm vom Sender sei  $J_0$ ; berechne die Gesamtintensität  $J$  im Punkt  $P(3 \text{ cm} \mid 4 \text{ cm})$ !

- 4.13.2. Die Sender  $S_1$  und  $S_2$  schwingen gleichphasig und gleich stark und strahlen in der Zeichenebene isotrop (z.B. zwei Dipole, die senkrecht zur Zeichenebene stehen oder ein Doppelspalt).  $J_0$  sei die Intensität eines Senders bei  $x = 0$  auf dem Schirm.  $J^*$  sei die Gesamtintensität auf einem Kreis um den Mittelpunkt  $M$  der Sender mit Radius  $a$ .  $J$  sei die Gesamtintensität im Punkt  $P$  auf dem Schirm.



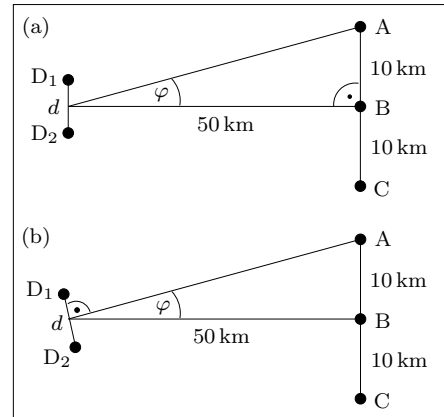
- (a) Berechne die Zahlen  $n_k$  bzw.  $n_s$  der Intensitätsmaxima auf dem Kreis und auf dem Schirm!
- (b) Berechne  $J^*(\varphi)$ ,  $J(\varphi)$  und  $J(x)$ ! Zeichne die Grafen der drei Funktionen (die beiden von  $\varphi$  abhängigen in ein Diagramm) für  $a = 1$  m,  $d = 4$  cm und  $\lambda = 1$  cm! Wähle die Einheiten  $J_0 \hat{=} 1$  cm,  $\varphi = 20^\circ \hat{=} 1$  cm und  $x = 20$  cm  $\hat{=} 1$  cm.
- 4.13.3. Das parallele Lichtbündel eines Lasers ( $\lambda = 600$  nm) fällt senkrecht auf einen Doppelspalt mit dem Spaltabstand  $d = 0,1$  mm. Im Abstand  $a = 3$  m hinter dem Doppelspalt wird das Interferenzmuster auf einer Wand beobachtet.
- (a) Wie viele helle Streifen sind auf der Wand theoretisch (Wand unendlich breit) sichtbar? Wie viele sind es bei einer 5 m breiten Wand (das Maximum nullter Ordnung ist in der Mitte der Wand)?
- (b) Berechne die Abstände der hellen Streifen vom Maximum nullter Ordnung einmal genau und einmal mit der Näherung

$$\sin \varphi_\nu \approx \tan \varphi_\nu \approx \varphi_\nu \quad \text{für kleine } \varphi_\nu$$

(zuerst allgemeine Rechnung und dann konkret bis zur fünften Ordnung)! Berechne auch jeweils den relativen Fehler der Näherung! Bis zu welcher Ordnung ist der relative Fehler der Näherung kleiner als ein Prozent?

4.13.4. **Richtantenne:**

- (a) Für welchen kleinsten Abstand  $d$  der beiden gleichphasig schwingenden Dipole  $D_1$  und  $D_2$  ist
- maximaler Empfang in B und kein Empfang in A und in C?
  - in A, B und in C maximaler Empfang?
- (b) Jetzt soll in B die Intensität Null (feindlicher Lauscher) und in A und C möglichst maximaler Empfang herrschen. Das erreicht man
- durch gegenphasiges Schwingen oder
  - durch Drehung der Dipole um  $\varphi$ .

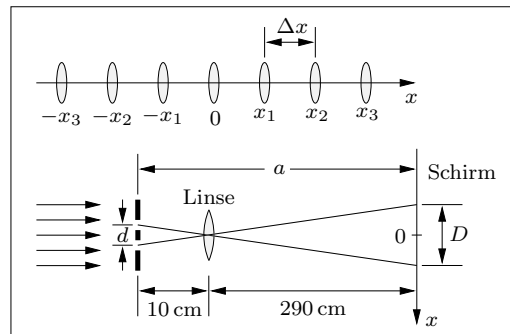


Berechne in beiden Fällen den minimalen Dipolabstand  $d$ !

Im Fall (ii) ist eine maximale Intensität in C nicht erreichbar; berechne  $\frac{J_C}{J_A}$ !

- 4.13.5. (a) Beweise: Für  $\varphi$  sehr klein, d.h. für  $x \ll a$ , besteht das Interferenzbild des Doppelspalts aus äquidistanten Streifen mit dem Abstand

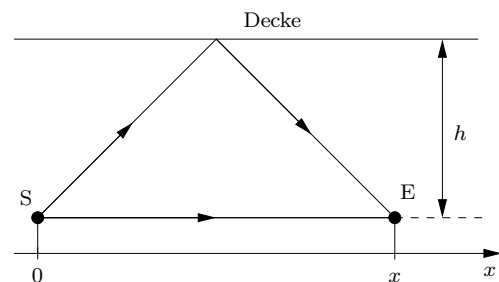
$$\Delta x = \frac{a \lambda}{d}$$



- (b) Die Linse entwirft auf dem Schirm ein Bild des Doppelspalts mit  $D = 9 \text{ mm}$  (Abstand der Spaltbilder). Nach dem Entfernen der Linse erzeugt das monochromatische Licht einer Na-Dampf-Lampe ein Streifenmuster mit dem Abstand  $7,40 \text{ cm}$  zwischen 14 hellen Streifen. Berechne  $\lambda$ !

- 4.13.6. (a) Erläutere anhand einer Skizze, warum es bei der Reflexion einer elektromagnetischen Welle an einer Leiterwand zu einem Phasensprung kommt. Wie groß ist dieser?

- (b) Ein großer Hangar ist oben von einer Aludecke abgeschlossen. Der Sender S strahlt elektromagnetische Wellen der Wellenlänge  $\lambda = 2,00 \text{ m}$  ab. Der Empfänger E wird in Höhe des Senders entlang der  $x$ -Achse bewegt. Unter anderem beobachtet man zwei benachbarte Empfangsmaxima bei  $x_k = 122,5 \text{ m}$  und



bei  $x_{k+1} = 93,5 \text{ m}$ . Beweise, dass für die Orte der Maxima  $x_k = \frac{4h^2 - (k - \frac{1}{2})^2 \lambda^2}{2(k - \frac{1}{2})\lambda}$  gilt und berechne dann  $k$  und die Höhe  $h$  der Decke über den Antennen.

### 4.14 Das optische Gitter

4.14.1. Diese Aufgabe ist mit einem CAS (ComputerAlgebraSystem, z.B. MAPLE) zu lösen!

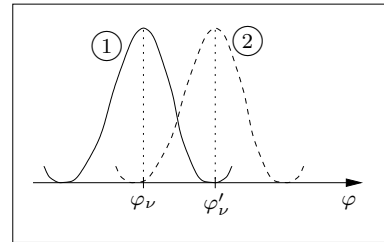
Wir betrachten die Intensitätsverteilung am Gitter

$$J(\varphi) = J_0 \cdot f(x(\varphi)) \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x} \quad \text{und} \quad x(\varphi) = \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda}$$

am speziellen Beispiel mit  $n = 10$ ,  $d = 4 \text{ cm}$  und  $\lambda = 1 \text{ cm}$  (Mikrowellen). Mit  $\varphi_\nu$  seien die Lagen der Hauptmaxima, mit  $\varphi_{M,\nu}$  die Lagen der Minima und mit  $\varphi_{N,\nu}$  die Lagen der Nebenmaxima bezeichnet, entsprechendes gilt für  $x_\nu$ ,  $x_{M,\nu}$  und  $x_{N,\nu}$ .

- Zeichne  $J(\varphi)$  im Bereich  $-\varphi_{M,2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  und  $f(x)$  im entsprechenden Intervall!
- Die Leistung, die in den Winkelbereich  $[\varphi, \varphi + d\varphi]$  gestreut wird, ist proportional zu  $J(\varphi) d\varphi$  (warum?).  $P_1$  sei die gesamte Leistung, die in  $[0, \varphi_1]$  gestreut wird,  $P_0$  die Leistung im Hauptmaximum nullter Ordnung, d.h. in  $[-\varphi_{M,1}, \varphi_{M,1}]$ . Berechne  $\frac{P_0}{P_1}$ !
- Warum folgt aus  $f'(x^*) = 0$  auch  $J'(\varphi^*) = 0$  mit  $x^* = x(\varphi^*)$ ? Berechne die Lage und Höhe der drei ersten Nebenmaxima durch Nullsetzen von  $f'(x)$ ! Vergleiche mit den Näherungslösungen „Lage des Nebenmaximums ungefähr Mittelpunkt zwischen zwei Nullstellen“!

- 4.14.2. (a) Fällt Licht, das aus zwei Komponenten ① und ② mit den Wellenlängen  $\lambda$  und  $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$  besteht, durch ein Gitter, dann sind die Hauptmaxima der beiden Komponenten gegeneinander verschoben. Die beiden Hauptmaxima sind noch deutlich voneinander getrennt, wenn das Hauptmaximum von ② auf die erste Nullstelle nach dem



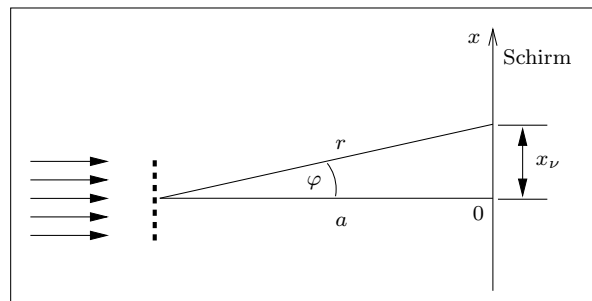
Hauptmaximum von ① fällt. Zeige für das **Auflösungsvermögen** des Gitters in  $\nu$ -ter Ordnung

$$\boxed{\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = n \cdot \nu},$$

wobei  $n$  die Zahl der vom Licht getroffenen Gitterlinien ist.

- Natrium sendet Licht mit den benachbarten Wellenlängen  $\lambda = 589,0 \text{ nm}$  und  $\lambda' = 589,6 \text{ nm}$  aus. Wie viele Striche pro cm muss ein Gitter haben, damit die beiden Komponenten in zweiter Ordnung noch getrennt werden können, wenn der einfallende Strahl 2 mm breit ist?

- 4.14.3. (a) Warum kann man die Wellenlänge von Licht mit einem Gitter ( $n \gg 1$ ) genauer messen als mit einem Doppelspalt?



- $x_\nu$  sei die Entfernung des  $\nu$ -ten Hauptmaximums vom Hauptmaximum nullter Ordnung auf dem Schirm. Berechne  $\lambda$  aus  $x_\nu$ ,  $a$  und dem Spaltabstand  $d$  des Gitters!

Rechne zuerst allgemein und dann für  $n = 5000 \frac{\text{Linien}}{\text{cm}}$ ,  $a = 2,00 \text{ m}$  und  $x_1 = 823 \text{ mm}$ !



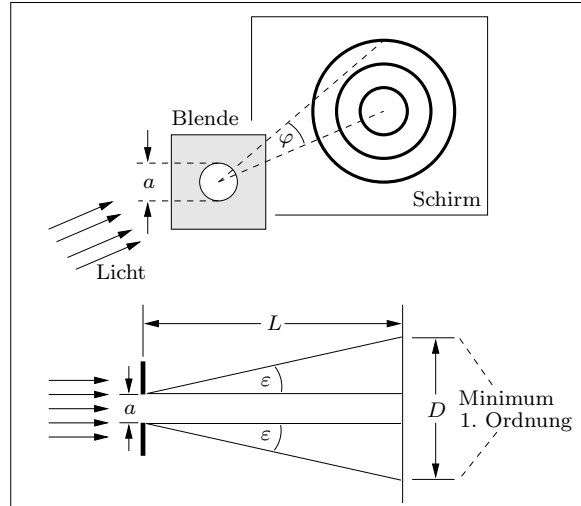
### 4.15 Beugung

- 4.15.1. Bei der Beugung an einer kreisförmigen Öffnung mit dem Durchmesser  $a$  ergeben sich kreisförmige Beugungsmuster. Die dunklen Ringe ( $J(\varphi) = 0$ ) liegen bei  $\varphi_\nu$  mit

$$\sin \varphi_\nu = b_\nu \cdot \frac{\lambda}{a} \quad \text{mit}$$

$$b_1 = 1,220, \quad b_2 = 2,233, \quad b_3 = 3,238, \dots$$

Die Herleitung dieser Formel übersteigt unsere mathematischen Kenntnisse (Theorie Besselscher Funktionen u.s.w.).



Ein paralleles Lichtbündel hat nach dem Durchgang durch eine kreisförmige Blende mit dem Durchmesser  $a$  den **Öffnungswinkel**  $\varepsilon$  mit

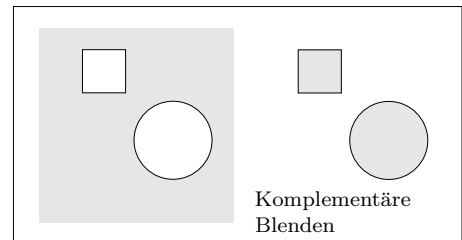
$$\sin \varepsilon = b_1 \cdot \frac{\lambda}{a}$$

- Berechne eine Formel für den Durchmesser  $D$  eines Lichtbündels im Abstand  $L$  hinter einer kreisförmigen Blende mit Durchmesser  $a$ , wenn das Lichtbündel **vor** der Blende parallel war! Vereinfache diese Formel für  $a \gg \lambda$ !
- Berechne  $D$  für einen Laserstrahl ( $\lambda = 640 \text{ nm}$ ), der einmal direkt ( $a = 5 \text{ mm}$ ) und einmal über das 5 m-Spiegelteleskop auf dem Mount Palomar von der Erde zum Mond geschickt wird ( $L = 384000 \text{ km}$ )! Für welches  $a = a_0$  ist  $D$  minimal? Berechne  $D_{\min} = D(a_0)$  für beide Fälle!

### 4.15.2. Das Babinet'sche Prinzip

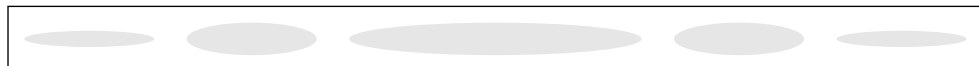
Eine „Blende“ ist eine Anordnung aus durchsichtigen und undurchsichtigen Körpern. Vertauscht man in einer Blende die durchsichtigen mit den undurchsichtigen Teilen, dann erhält man eine **komplementäre** Blende.

Komplementäre Blenden liefern in großer Entfernung gleiche Beugungsbilder!  
(**Babinet'sches Prinzip**)



Von sehr kleinen Teilchen (Durchmesser  $a \ll \lambda$ ), die von Licht getroffen werden, geht somit, wie von einer kleinen Öffnung, eine kugelförmige Elementarwelle aus (Streuung von Licht).

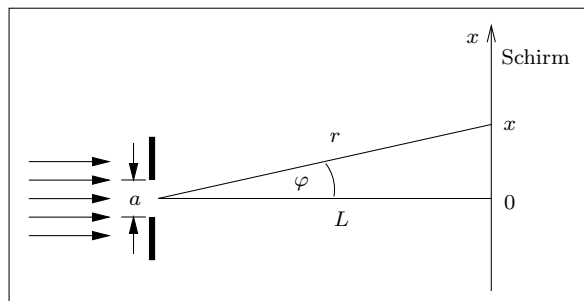
- Licht der Wellenlänge  $\lambda$  trifft auf zwei sehr kleine Teilchen mit dem gegenseitigen Abstand  $d$ . Wie kann  $d$  gemessen werden? Warum können die beiden Teilchen nicht mehr unterschieden werden, wenn  $d < \frac{\lambda}{2}$ ?
- Ein Laserstrahl ( $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ ) fällt auf einen Schirm. Hält man 4 m vor dem Schirm ein Haar in den Strahlengang, dann beobachtet man auf dem Schirm folgendes Beugungsbild (Originalgröße). Berechne die Dicke des Haares!



- 4.15.3. (a) Beweise: Für  $a \rightarrow 0$  geht vom Spalt eine **isotrope** Zylinderwelle aus!  
 (b) Für welche Spaltbreiten  $a$  liegt im Winkelbereich  $[-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}]$  **keine** Nullstelle von  $J(\varphi)$ ?  
 (c) Für welche  $a$  weicht  $J(\varphi)$  im ganzen Winkelbereich  $[-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}]$  um höchstens ein Prozent von  $J_0 = J(0)$  ab?

4.15.4.

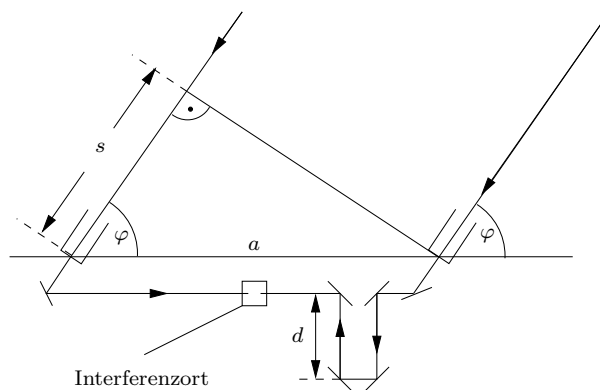
- (a) Berechne die Intensität  $J(x)$  auf dem Schirm für  $L \gg a$  und  $L \gg x$ ! Da die Intensität der Nebenmaxima sehr schnell abnimmt, ist  $x \ll L$  für die meisten Beugungsmuster erfüllt.  
 (b) Zeichne  $J(x)$  für  $a = 0,08 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 640 \text{ nm}$  und  $L = 5 \text{ m}$  mit  $J_0 = J(0) \hat{=} 4 \text{ cm}$ !



4.15.5. **Teleskope der ESO (European Southern Observatory)**

Die Europäische Südsternwarte auf dem Cerro Paranal in Chile besteht unter anderem aus vier großen Teleskopen (VLT, Very Large Telescope) mit einem Spiegeldurchmesser von  $A = 8,2 \text{ m}$  und drei beweglichen Teleskopen (AT, Auxiliary Telescope) mit  $1,8 \text{ m}$  Spiegeldurchmesser. Als Beobachtungswellenlänge ist immer  $\lambda = 500 \text{ nm}$  zu wählen.

- (a) Welchen Winkelabstand  $\varepsilon$  dürfen zwei punktförmige Lichtquellen haben, die mit dem VLT gerade noch als getrennte Objekte wahrgenommen werden? Welche Entfernung hätten diese beiden Lichtquellen auf dem Mond ( $380\,000 \text{ km}$  von der Erde entfernt)?  
 (b) Ein VLT und ein AT sind wie in nebenstehender Abbildung positioniert, der Abstand der Teleskope ist  $a = 200 \text{ m}$ . Das Licht, das die Teleskope von einem Stern auffangen, wird über ein Spiegelsystem ins Interferenzlabor geleitet. Am Interferenzbild erkennt man, wenn die Delaystrecke  $2d$  exakt gleich dem Gangunterschied  $s$  der Teilstrahlen ist.



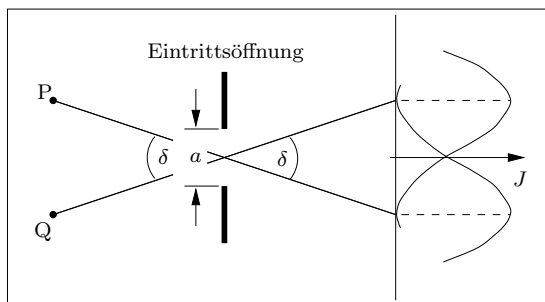
Ebenfalls durch interferometrische Methoden kann  $d$  so genau gemessen werden, dass der Fehler bei der Bestimmung von  $s$  in der Größenordnung einer Wellenlänge liegt, d.h.  $\Delta s = \lambda$ . Wie lautet der Zusammenhang zwischen dem Positionswinkel  $\varphi$  des Sterns,  $s$  und  $a$ ? Beweise mit der Näherungsformel  $f(x + h) \approx f(x) + h \cdot f'(x)$  und unter der Annahme, dass  $a$  exakt bekannt ist, für den Fehler von  $\varphi$ :

$$\Delta\varphi \approx \frac{\lambda}{a \sin \varphi}.$$

Wie weit dürfen zwei Gegenstände auf dem Mond voneinander entfernt sein, um unter günstigsten Umständen mit der Anordnung aus beiden Teleskopen noch getrennt wahrgenommen werden zu können? Welchem Winkelabstand entspricht das?

#### 4.15.6. Auflösungsgrenze optischer Instrumente

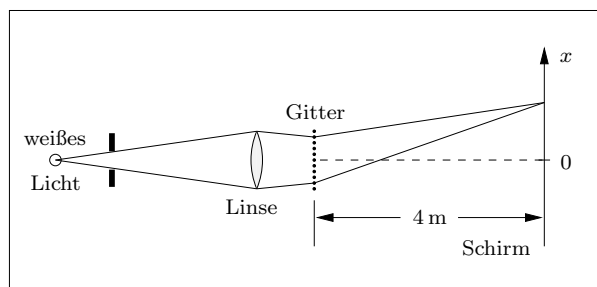
Eine punktförmige Lichtquelle liefert wegen der Beugung an der Eintrittsöffnung keinen Bildpunkt, sondern ein „Beugungsscheibchen“. Zwei Punkte  $P$  und  $Q$  können noch als getrennt beobachtet werden, wenn das Hauptmaximum von  $P$  auf das erste Minimum von  $Q$  fällt.



- Berechne den Grenzwinkel  $\delta$ , für den  $P$  und  $Q$  gerade noch getrennt beobachtet werden können!
- Berechne  $\delta$  für das menschliche Auge ( $a = 5 \text{ mm}$ ) und für ein Spiegelteleskop mit  $a = 5 \text{ m}$ , jeweils für eine Wellenlänge  $\lambda = 500 \text{ nm}$ . Wie weit dürfen die lichtempfindlichen „Stäbchen“ und „Zäpfchen“ der Netzhaut höchstens voneinander entfernt sein, damit die durch Beugung festgelegte Auflösungsgrenze des Auges voll ausgenutzt wird? Die Entfernung Pupille-Netzhaut beträgt ungefähr  $2 \text{ cm}$ , für die Wellenlänge des sichtbaren Lichtes gilt  $400 \text{ nm} \lesssim \lambda \lesssim 800 \text{ nm}$ .
- Welche gegenseitige Entfernung müssen zwei Sterne mindestens haben, damit sie 100 LJ von einem Beobachter entfernt mit bloßem Auge (mit dem 5 m-Spiegel) noch getrennt werden können?

#### 4.16 Das elektromagnetische Spektrum

- 4.16.1. Das Gitter in nebenstehender Anordnung hat  $1000 \frac{\text{Linien}}{\text{cm}}$ . Berechne  $x$  für den violetten und den roten Rand des Spektrums in erster, zweiter und dritter Ordnung! Was ist mit dem Spektrum nullter Ordnung? Berechne den **Frequenzbereich** des sichtbaren Lichts!

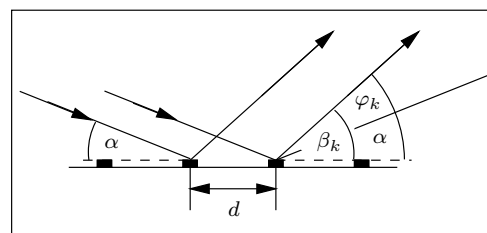


#### 4.17 Beugung von Röntgenstrahlen an Kristallen

- 4.17.1. Auf einen NaCl-Kristall, dessen Oberfläche parallel zu den Netzebenen verläuft, fällt ein Röntgenstrahl mit der Wellenlänge  $\lambda = 0,1542 \text{ nm}$ . Mit der Drehkristallmethode (Einfallswinkel = Ausfallswinkel) werden die Glanzwinkel  $15,90^\circ$  (1. Ordnung) und  $55,25^\circ$  gemessen. Welchen Abstand haben die Netzebenen? Welche Ordnung hat der zweite gemessene Reflex? Berechne die Glanzwinkel aller möglichen Reflexe!

#### 4.17.2. Gedrehtes Reflexionsgitter

Röntgenstrahlung der Wellenlänge  $\lambda$  fällt unter einem sehr kleinen Winkel  $\alpha$  zur Gitterebene auf ein Reflexionsgitter. Der Abstand der reflektierenden Streifen ist  $d$ . Die Winkel der reflektierten Strahlen (Interferenzmaxima) gegen die Gitterebene sind  $\beta_k$ .

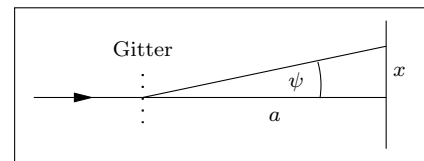


- (a) Beweise unter Zuhilfenahme einer sauber beschrifteten Zeichnung für den Gangunterschied zweier benachbarter Strahlen die Formel

$$\delta_k = d(\cos \alpha - \cos \beta_k)$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen  $\delta_k$  und  $\lambda$ ?

- (b) Für welche Wellenlängen gibt es nur den Reflex nullter Ordnung? Wie groß ist der dazugehörige Reflexionswinkel  $\beta_0$ ? Welches Gesetz gilt also in diesem Fall?
- (c) Forme die Formel für  $\delta_k$  mit den trigonometrischen Additionstheoremen um und vereinfache sie unter der Annahme  $\alpha \ll 1$  und  $\beta_k \ll 1$ . Das Ergebnis soll durch  $\varphi_k = \beta_k - \alpha$  ausgedrückt werden!
- (d) Ein Röntgenstrahl fällt jetzt unter  $\alpha = 1,000'$  auf ein Gitter mit 500 Linien pro mm, für den Reflex erster Ordnung ist  $\varphi_1 = 41' 42''$ . Berechne  $\lambda$ . [Ergebnis: 0,1542 nm]
- (e) Unser Röntgenstrahl fällt jetzt senkrecht auf ein Transmissionsgitter mit ebenfalls 500 Linien pro mm. Wie weit ist auf einem  $a = 5$  m entfernten Film das Maximum 1. Ordnung vom Maximum 0. Ordnung entfernt? Wie



groß wäre diese Strecke beim Reflexionsgitter aus (d), wenn der Strahl nullter Ordnung ebenfalls senkrecht auf den Film auftrifft?

- (f) Ein schlampiger Physikstudent misst die Glanzwinkel unseres Röntgenstrahls an einem Goldkristall. Ohne die Ordnung der Reflexe zu untersuchen, erhält er die Winkel  $\vartheta_k = 34,535^\circ$  und  $\vartheta_m = 70,883^\circ$ . Weiter ist bekannt, dass es weniger als zehn Reflexe gibt. Ermittle  $k$  und  $m$  und berechne den Netzebenenabstand  $d_N$  des Goldes.