# Mathematik Q11
# Aufgaben

Richard Reindl

Die aktuellste Version der Aufgaben findet man unter
`http://www.stbit.de`

9. Dezember 2013

# 1 Gebrochen rationale Funktionen

## 1.1 Grenzwerte mit $x \to a$

1.1.1. (a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x$ (b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} |\tan x|$

1.1.2. (a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left( x^n \cdot \sin \frac{1}{x} \right)$ mit $n \in \mathbb{N}$

1.1.3. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$$

(a) Untersuchen Sie $f$ auf Symmetrie und berechnen Sie dann $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

(b) Berechnen Sie $\delta$ so, dass $|f(x) - \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)| < \varepsilon$ für $0 < x < \delta$. Wie groß ist $\delta$ speziell für $\varepsilon = 0{,}001$?

(c) Zeichnen Sie den Graphen von $f$ mit der Einheit 2 cm auf beiden Achsen.

1.1.4. Geben Sie für folgende Funktionen die maximale Definitionsmenge an und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen an den Grenzen der Definitionsmenge.

(a) $f(x) = \dfrac{2}{1 - \sqrt{x}}$

(b) $g(x) = \dfrac{1 - x}{1 - \sqrt{x}}$

1.1.5. (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \frac{1}{x}}{x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 2^\pm} \dfrac{3 - x}{\frac{3}{x-2}}$ (c) $\lim\limits_{x \to 2^\pm} \dfrac{x}{x^2 - 4}$

1.1.6. Wir betrachten die Funktion $f$ mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

(a) In welchen $x$-Bereichen ist $f(x)$ positiv, in welchen negativ?

(b) Gib den maximalen Definitionsbereich $D_f$ von $f$ an und untersuche das Verhalten von $f$ an den Rändern von $D_f$.

(c) Zeichne den Grafen von $f$ in geeigneten Einheiten.

(d) Für welche $x$ ist $f(x) > 100$?

## 1.2 Gebrochen rationale Funktionen

1.2.1. $f(x) = \dfrac{(3-x)(x^2-4)}{5(x+2)}$ ; zeichnen Sie $G_f$ und berechnen Sie $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

1.2.2. Berechnen Sie $D_f$, untersuchen Sie das Verhalten von $f$ am Rande von $D_f$ und zeichnen Sie den Graphen $G_f$:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-6}$

1.2.3. Zeichnen Sie $G_f$ und berechnen Sie alle Grenzwerte an den Rändern von $D_f$:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{9-x^2}$ ; $D_f$ maximal (b) $f(x) = \dfrac{x}{9-x^2}$ ; $D_f$ maximal

1.2.4. Geben sie gebrochen rationale Funktionen an, die folgende Eigenschaften haben:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} a(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to -\infty} a(x) = 2$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} b(x) = \dfrac{1}{3}$, $\lim\limits_{x\to -\infty} b(x) = \dfrac{1}{3}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} c(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} c(x) = -\infty$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} d(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} d(x) = -\infty$

(e) $\lim\limits_{x\to 2+0} e(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 2-0} e(x) = -\infty$

(f) $\lim\limits_{x\to -3+0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -3-0} f(x) = -\infty$

(g) $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} g(x) = \infty$

(h) $\lim\limits_{x\to 5} h(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} h(x) = -\infty$

1.2.5. Wir betrachten die Funktion $f$ mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{2x-4}$$

(a) Bestimme die maximale Definitionsmenge $D_f$ von $f$ und berechne die Nullstellen von $f$.

(b) In welchen $x$-Bereichen ist $f(x)$ positiv, in welchen negativ?

(c) Untersuche das Verhalten von $f$ an den Rändern von $D_f$. Gib die Gleichungen der Asymptoten an.

(d) Zeichne den Grafen von $f$ gemeinsam mit den Asymptoten im $x$-Intervall $[-4; 8]$.

(e) $p(x)$ sei die Gleichung der schrägen Asymptote. Für welche $x$-Werte gilt

$$|f(x) - p(x)| < 10^{-3}\,?$$

# 2 Die Ableitung

## 2.1 Definition der Ableitung, Tangenten

2.1.1. $\mathrm{G}_t$ sei die Tangente an $\mathrm{G}_f$ mit $f(x) = x^2$ im Punkt $\mathrm{A}\,(a|f(a))$, $\mathrm{G}_n$ sei die Normale auf $\mathrm{G}_f$ in A. Stellen Sie die Funktionsgleichungen $t(x)$ bzw. $n(x)$ auf und berechnen Sie die Nullstellen von $t$ und $n$. Stellen Sie eine Regel zum *Konstruieren* von $\mathrm{G}_t$ auf.

2.1.2. $\mathrm{G}_t$ sei die Tangente an $\mathrm{G}_f$ mit $f(x) = x^2$ im Punkt $\mathrm{A}\,(a|f(a))$, $\mathrm{G}_n$ sei die Normale auf $\mathrm{G}_f$ in A. $\{\mathrm{P}\} = (\mathrm{G}_f \cap \mathrm{G}_n) \setminus \{\mathrm{A}\}$ und $\mathrm{G}_h$ ist die Tangente an $\mathrm{G}_f$ in P. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von $\mathrm{G}_t$ und $\mathrm{G}_h$, jeweils ausgedrückt durch $a$! Auf welcher Kurve liegen alle möglichen Schnittpunkte S, wenn $a$ alle Werte aus $\mathbb{R}$ durchläuft?

2.1.3. $\mathrm{G}_t$ sei die Tangente an $\mathrm{G}_f$ mit $f(x) = x^2$ im Punkt $\mathrm{A}\,(a|f(a))$, $\mathrm{G}_n$ sei die Normale auf $\mathrm{G}_f$ in $\mathrm{B}\,(-a|f(-a))$. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von $\mathrm{G}_t$ und $\mathrm{G}_n$, jeweils ausgedrückt durch $a$!

$$\left[\text{Ergebnis: } \mathrm{S}\,(x_s|y_s) = \mathrm{S}\left(\frac{(4a^2+1)\cdot a}{4a^2-1}\middle|\frac{(4a^2+3)\cdot a^2}{4a^2-1}\right)\right]$$

Der Graph $\mathrm{G}_s$ der Relation $s$ sei die Menge aller möglichen Schnittpunkte S. Zeichnen Sie $\mathrm{G}_s$ *ohne* die Gleichung dieser Kurve in der Form $y = s(x)$ zu berechnen! Füllen Sie dazu folgende Wertetabelle aus (eventuell ergänzen):

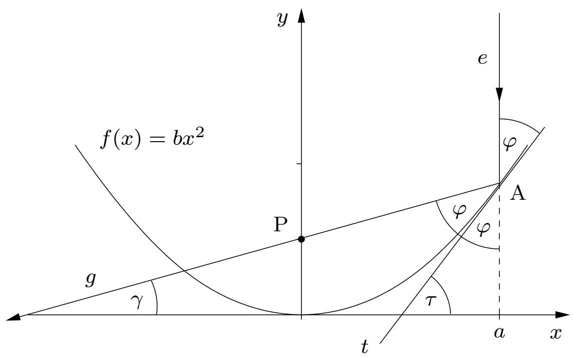
| $a$ | 0 | 0,1 | 0,3 | 0,4 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_s$ | | | | | | | | | | | | |
| $y_s$ | | | | | | | | | | | | |

Ist $s$ eine Funktion?

2.1.4. Licht fällt parallel zur $y$-Achse in einen Parabolspiegel, dessen spiegelnde Fläche durch

$$f(x) = bx^2$$

beschrieben wird. Wir betrachten einen Lichtstrahl, der den Spiegel im Punkt $\mathrm{A}\,(a|f(a))$ trifft. Nach dem Reflexionsgesetz schließen der einfallende Strahl $e$ und der reflektierte Strahl $g$ mit der Tangente $t$ an $\mathrm{G}_f$ im Punkt A den gleichen Winkel $\varphi$ ein. Beweisen Sie, dass *jeder* zur $y$-Achse parallel einfallende Strahl die $y$-Achse im selben Punkt $\mathrm{P}\,(0|p)$ (dem *Brennpunkt*) trifft und berechnen Sie $p$.




Benutzen Sie die trigonometrische Formel: $\tan 2\varphi = \dfrac{2\,\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}$.

2.1.5. (a) Schreiben Sie die Formel für die Definition der Ableitung einer Funktion $f$ an der Stelle $x$ hin. Erläutern Sie die in der Formel vorkommenden Begriffe an Hand einer beschrifteten Skizze.

(b) Verwenden Sie die Definition der Ableitung, um die Ableitung von $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ zu berechnen.

2.1.6. Wir betrachten die Funktion $f$ mit dem Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{x}$.

(a) Berechnen Sie den Funktionsterm $t(x)$ der Tangente an $G_f$ im Punkt $P\left(a\middle|f(a)\right)$. Wo schneidet die Tangente die Koordinatenachsen?

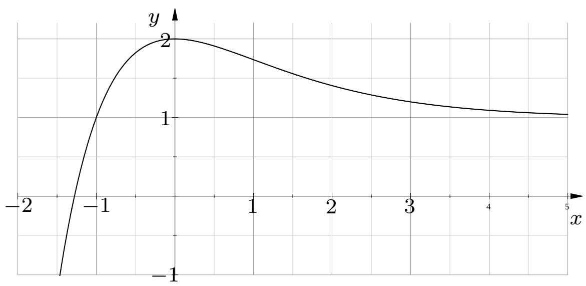
(b) $s(x)$ ist der Funktionsterm der Tangente an $G_f$ im Punkt $Q\left(\frac{1}{a}\middle|f\left(\frac{1}{a}\right)\right)$. Berechnen Sie $s(x)$ mit Hilfe des Ergebnisses von Teilaufgabe (a). Wie lauten die Koordinaten des Schnittpunktes $S(x_s|y_s)$ von $t$ und $s$?

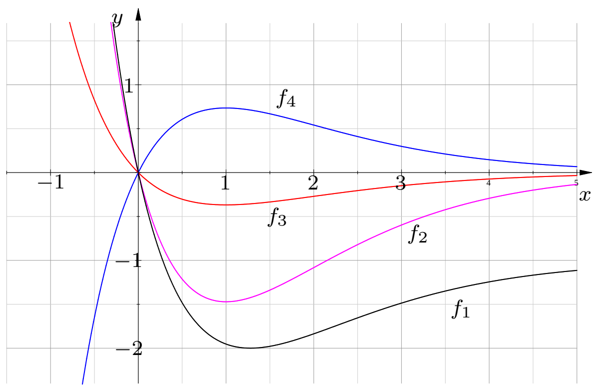
(c) Zeichnen Sie den Grafen von $f$ im $x$-Intervall $]0;4]$ mit der Einheit 2 cm und zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse die Tangenten $t$ und $s$ für $a = 2$ ein. Unter welchem Winkel $\varphi$ schneiden sich die beiden Tangenten für $a = 2$?

2.1.7. (a) Schreiben Sie die Formel für die Definition der Ableitung einer Funktion $f$ an der Stelle $x$ hin. Erläutern Sie die in der Formel vorkommenden Begriffe an Hand einer beschrifteten Skizze.

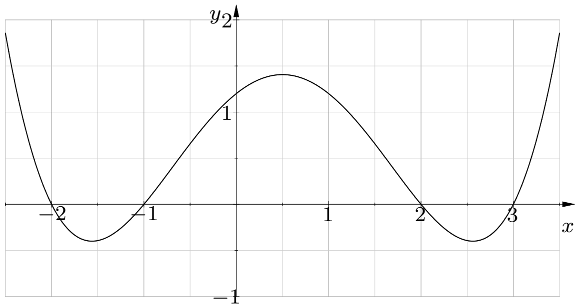
(b) Verwenden Sie die Definition der Ableitung, um die Ableitung von $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ zu berechnen.

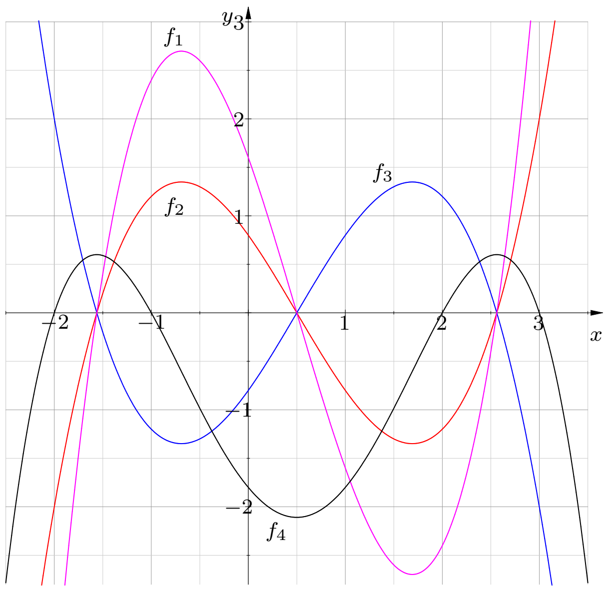
2.1.8. Nebenstehende Abbildung zeigt den Grafen der Funktion $f$. Welche der Funktionen $f_1$ bis $f_4$, deren Grafen unten abgebildet sind, ist die Ableitung von $f$? Begründe deine Antwort!



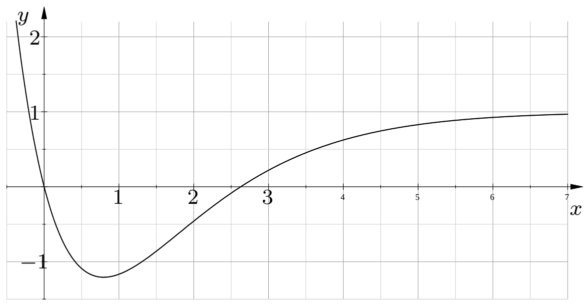



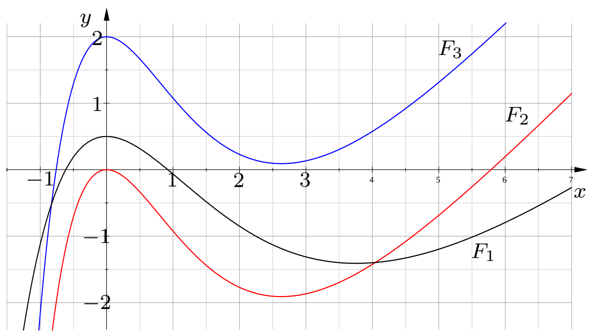
2.1.9. Nebenstehende Abbildung zeigt den Grafen der Funktion $f$. Welche der Funktionen $f_1$ bis $f_4$, deren Grafen unten abgebildet sind, ist die Ableitung von $f$?
Begründe deine Antwort!




2.1.10. Nebenstehende Abbildung zeigt den Grafen der Funktion $f$.
Eine Funktion $F$ heißt *Stammfunktin* von $f$, wenn $F' = f$. Welche der Funktionen $F_1$ bis $F_3$, deren Grafen unten abgebildet sind, kann eine Stammfunktion von $f$ sein?
Begründe deine Antwort!



## 2.2 Einfache Ableitungsregeln

2.2.1. Berechnen Sie die Ableitung: (a) $f(x)=a\,x+b$ (b) $f(x)=a\,x^2+b\,x+c+\dfrac{d}{x}$

2.2.2. Zeichnen Sie die Graphen von $f$ und $f'$ und berechnen Sie die Nullstellen von $f'$:

(a) $f(x)=-0{,}3\,x^2+1{,}5\,x+2{,}125$ (b) $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ (c) $f(x)=\dfrac{1}{8\,x}-\dfrac{x^2}{2}$

2.2.3. Unter welchen Winkeln schneiden sich die beiden Parabeln $f(x)=2\,x^2-4\,x$ und $g(x)=-\dfrac{x^2}{2}+2\,x+4$? Zeichnung!

2.2.4. Wir betrachten die Funktionen $f$ und $g$ mit den Termen

$$f(x)=\frac{x^2}{2}+x-\frac{3}{2}\quad\text{und}\quad g(x)=\frac{5}{x}$$

(a) Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$.

(b) Berechnen Sie die Scheitelkoordinaten von $\mathrm{G}_f$ und schreiben Sie $f(x)$ in der Scheitelform hin.

(c) Erstellen Sie eine Wertetabelle für $f$ und $g$ für alle ganzzahligen $x$-Werte im Intervall $[-1;4]$. In welchem Punkt S schneiden sich also $f$ und $g$? Zeichnen Sie die Grafen von $f$ und $g$ im Intervall $[-1;4]$ in ein Koordinatensystem. Ergänzen Sie die Wertetabelle in geeigneter Weise.

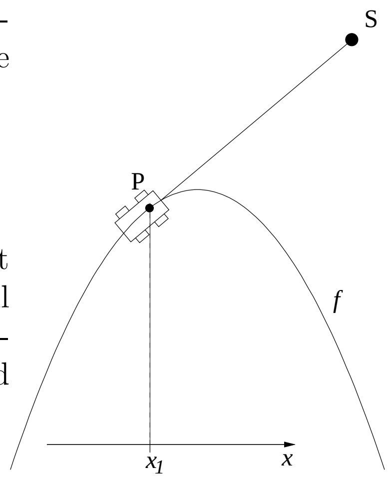
(d) Stellen Sie die Gleichung $t(x)$ der Tangente an $\mathrm{G}_g$ im Punkt S auf. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunte dieser Tangente mit den Koordinatenachsen an.

(e) Zeichnen Sie die Tangenten an die beiden Funktionsgrafen in S ein und berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Grafen.

2.2.5. Ein Auto fährt (in Richtung größer werdender $x$-Werte) entlang einer Straße, deren Verlauf durch die Funktion $f$ mit der Gleichung

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x$$

gegeben ist. Wo befindet sich der Wagen (Punkt $\mathrm{P}\,(x_1|f(x_1))$), wenn seine Scheinwerfer, deren Strahl immer tangential zur Straße verläuft, gerade das alte Schloss am Ort $\mathrm{S}\,(6|8)$ erhellen? Zeichnung und Rechnung!




2.2.6. Ein Elektron in einer Fernsehröhre bewegt sich nach folgendem Weg-Zeit-Gesetz:

$$s(t)=2\cdot 10^{14}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot t^2+3\cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot t+5\,\mathrm{cm}\quad\text{mit}\quad t\geqq 0$$

Welche Geschwindigkeit hat das Elektron beim Erreichen von $s=0{,}7\,\mathrm{m}$?

## 2.3 Die Ableitung von $x^n$

2.3.1. Berechnen Sie $f'(x)$: (a) $f(x) = a\,x^n - b\,x^m + \dfrac{c}{x} - d\sqrt{x}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^n}{n} - \dfrac{1}{x} + 2\sqrt{x}$

2.3.2. Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen $f(x) = \dfrac{16}{x}$ und $g(x) = 2\sqrt{x}$ und berechnen Sie ihren Schnittwinkel.

2.3.3. Verwenden Sie die Definition der Ableitung, um $f'$ von $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ zu berechnen.

2.3.4. (a) $\mathrm{P}\,(a|f(a))$ sei ein Punkt auf $\mathrm{G}_f$, für den $f'(a) = f(a)$ gilt. Wo schneidet die Tangente an $\mathrm{G}_f$ im Punkt P die $x$-Achse?

(b) Auf der Parabel $f(x) = x^2+2\,x-2$ gibt es zwei Punkte $\mathrm{P}_1\,(x_1|y_1)$ und $\mathrm{P}_2\,(x_2|y_2)$ mit $f'(x_1) = f(x_1)$ und $f'(x_2) = f(x_2)$. Konstruieren Sie die Tangenten an $G_f$ in $P_1$ und $P_2$ unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe (a) und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Tangenten.

2.3.5. Wir betrachten die Funktionenschar $f_a(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$. $\mathrm{P}_a$ sei ein Punkt auf $\mathrm{G}_{f_a}$ mit waagrechter Tangente. Berechnen Sie die Koordinaten von $\mathrm{P}_a$! Auf welcher Kurve liegen alle Punkte $\mathrm{P}_a$ mit $a \in \mathbb{R}$?

2.3.6. $g$ sei die Menge aller Scheitelpunkte von nach unten geöffneten und verschobenen Normalparabeln $f_a(x) = -x^2 + b\,x + c$, die **die** Normalparabel $n(x) = x^2$ im Punkt $\mathrm{P}_a\,(a|a^2)$ berühren. Berechnen Sie zuerst die Koeffizienten $b$ und $c$ in $f_a(x)$ und stellen Sie dann die Funktionsgleichung von $g$ auf.

2.3.7. Durch die Funktionenschar $f_a(x) = x^2 + b\,x + c$ wird die Menge aller verschobenen Normalparabeln beschrieben, die den Graphen der Funktion $h(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $\mathrm{P}_a\left(a\middle|\frac{1}{a}\right)$ berühren.

(a) Stellen Sie die Gleichung der Schar $f_a$ auf, d.h. drücken Sie $b$ und $c$ durch $a$ aus!

(b) Beweisen Sie, daß der Scheitel des Graphen von $f_a$ durch

$$\mathrm{S}\,(x_\mathrm{S}|y_\mathrm{S}) \quad \text{mit} \quad x_\mathrm{S} = \frac{2\,a^3+1}{2\,a^2} \quad \text{und} \quad y_\mathrm{S} = \frac{4\,a^3-1}{4\,a^4}$$

gegeben ist!

(c) Zeichnen Sie die Graphen von $h$ und $f_a$ für $a \in \{-5\,;\,-1\,;\,-0{,}5\,;\,0{,}5\,;\,1\,;\,5\}$ in **ein** Koordinatensystem!

(d) $g$ sei die Menge aller Scheitelpunkte der Parabeln $f_a$. Füllen Sie folgende Wertetabelle aus und zeichen Sie dann den Graphen von g!

| $a$ | -5,0 | -2,0 | -1,0 | -0,5 | -0,4 | 0,4 | 0,5 | 0,7 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 4,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_S$ | | | | | | | | | | | | |
| $y_S$ | | | | | | | | | | | | |

Ist $g$ eine Funktion? Die Darstellung von $g$ durch die beiden Funktionen $x_S(a)$ und $y_S(a)$ nennt man *Parameterdarstellung* von $g$ mit dem Parameter $a$.

2.3.8. Ein Zug bewegt sich im Zeitintervall $[\,0\,\mathrm{h}\,,4\,\mathrm{h}\,]$ nach dem Zeit-Weg-Gesetz

$$x(t) = 10\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^4}\cdot t^4 - 80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^3}\cdot t^3 + 160\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^2}\cdot t^2$$

Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geschwindigkeit $v(t)$! Zeichnen Sie die Graphen von $x(t)$ und $v(t)$!
Berechnen Sie die maximale Entfernung des Zuges vom Ausgangspunkt sowie seine maximale Geschwindigkeit.

## 2.4 Die Ableitung von $\sin \mathbf{x}$ und $\cos \mathbf{x}$

2.4.1. (a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{2}\cos 2x - 7\sin\dfrac{x}{7}\right)$ (b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{3}\sin 6x - 3\cos\dfrac{2x}{3}\right)$

2.4.2. Wo hat die Funktion

$$f\ :\ x \longrightarrow \frac{x}{2} + \sin x \qquad ; \qquad D_f = \mathbb{R}$$

waagrechte Tangenten? $t$ sei die Tangente an $\mathrm{G}_f$ im Punkt $\mathrm{P}\,(\pi|f(\pi))$. Wo schneidet $t$ die $x$-Achse? Zeichnen Sie die Graphen von $f$ und $t$ im Intervall $[\,0\,;\,3\pi\,]$.

2.4.3. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin 2x - \cos x$ mit $D_f = \left[\,-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\,\right]$.

Berechnen Sie die Nullstellen und die Punkte mit waagrechter Tangente. Zeichnen Sie $\mathrm{G}_f$.

2.4.4. $n_a$ sei die Normale auf $\mathrm{G}_f$ mit $f(x) = \cos x$ im Punkt $\mathrm{P}\,(a|f(a))$ und $x_a$ die Nullstelle von $n_a$. Die Funktion $g$ ist definiert durch

$$g\ :\ a \longrightarrow g(a) = x_a$$

Zeichnen Sie den Graphen von $g$ im $a$-Intervall $[\,0\,;\,2\pi\,]$. Wo hat $g$ waagrechte Tangenten? Berechnen Sie die maximale Steigung von $g$.

2.4.5. Für einen Körper, der sich entlang der $x$-Achse bewegt, gilt

$$x(t) = A\sin\omega t.$$

Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v(t) = \dot{x}(t)$ und die Beschleunigung $a(t) = \ddot{x}(t)$. Drücken Sie $a(t)$ durch $x(t)$ aus.

## 2.5 Die Produktregel

2.5.1. Leite folgende Funktionen mit der Produktregel ab!

(a) $f_1(x) = (x + 1)(x + 4)$

(b) $f_2(x) = (3x + 5)(x - 2)$

(c) $f_3(x) = (5x + 13)(4x - 17)$

(d) $f_4(x) = (35 + 12x)(1 - x)$

(e) $f_5(x) = (14 - 3x)(16 - 9x)$

(f) $f_6(x) = (x - 4)(x^2 + 3)$

(g) $f_7(x) = (x^2 + 5x)(8 + 25x)$

(h) $f_8(x) = (3x^2 + x)(13x - 9x^2)$

(i) $f_9(x) = (x - 4)(x^2 + 3)$

2.5.2. **Das Prinzip der vollständigen Induktion**

$A(n)$ sei eine beliebige Aussage (ein vollständiger *wahrer* Aussagesatz) über eine natürliche Zahl $n$, z.B. $A(n) =$ „$n$ ist eine Primzahl.“ oder $A(n) =$ „$2n$ ist gerade.“. Wenn man weiß, dass $A(1)$ richtig ist und wenn man zusätzlich weiß, dass aus der Richtigkeit von $A(n)$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ auch die Richtigkeit von $A(n + 1)$ folgt, dann kann man folgendermaßen schließen:

$A(1)$ stimmt $\Longrightarrow$ $A(1 + 1) = A(2)$ stimmt $\Longrightarrow$ $A(2 + 1) = A(3)$ stimmt usw.

Die Aussage $A(n)$ ist alle für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig.

Knapp zusammengefasst lautet das *Prinzip der vollständigen Induktion*:

$$\boxed{A(1) \text{ und } (A(n) \Longrightarrow A(n+1)) \quad \Longrightarrow \quad A(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}}$$

Beweise mit dem Prinzip der vollständigen Induktion:

(a) Die Ableitungsregel $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ ... \ + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ ... \ + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2.5.3. (a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)\right)$ (b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sin x\right)$

(c) Berechnen Sie mit der Produktregel: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

2.5.4. Überprüfen Sie die Produktregel mit der Berechnung von

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^n \cdot x^m\right) \quad , \quad n, m \in \mathbb{N}$$

auf zwei Arten (einmal mit und einmal ohne Produktregel)!

2.5.5. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen auf zwei Arten:
(i) Ausmultiplizieren und Differenzieren
(ii) mit Hilfe der Produktregel

(a) $f(x) = (5x+3)^2$

(b) $g(x) = 3(2x^2+2)^2$

(c) $h(x) = 3x(4x+5)^2$

## 2.6 Die Quotientenregel

2.6.1. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$g(x) = x^2 \sin x + \frac{\cos x}{x} \quad ; \qquad x \neq 0.$$

2.6.2. Wir betrachten $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ im Intervall $]\,0\,;\,2\,\pi\,]$. Zeichnen Sie den Graphen von $f$ und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes mit waagrechter Tangente.

2.6.3. Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^{999}}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$ (c) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{2\,x-5}$

(d) $f(x) = \dfrac{x+3}{7-x^2}$ (e) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ (f) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

(g) $f(x) = \dfrac{x^2\,\sin x}{x-\sqrt{x}}$ (h) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^{10}}$ (i) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x^2}$

2.6.4. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen mit Hilfe der Produktregel und mit Hilfe der Quotientenregel.

(a) $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^2}$

(b) $g(x) = \dfrac{3x^2+4x}{\sqrt{x}}$

(c) $h(x) = \dfrac{5x^3+6x^2}{x^7}$

2.6.5. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen:

(a) $h(x) = 5\sqrt{x} + x^5$

(b) $l(x) = \dfrac{1}{2x^2+1}$

(c) $k(x) = \dfrac{27x^7+12x^5+3x^2}{3x^2}$

2.6.6. Berechnen Sie $f'(x)$ und vereinfachen Sie: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x \cdot \cos x}$.

2.6.7. Berechnen Sie $f'(x)$ und vereinfachen Sie: $f(x) = \dfrac{\cos x}{x \cdot \sin x}$.

## 2.7 Die Kettenregel

2.7.1. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen

(a) $f_1(x) = \sqrt{1-x}$

(b) $f_2(x) = \sqrt{\sin x}$

(c) $f_3(x) = \dfrac{\cos x + x}{\sin x - x}$

(d) $f_4(x) = \sqrt{x^2+4} \cdot \dfrac{1+x}{1-x}$

2.7.2. (a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{2}\cos 2x - 7\sin\dfrac{x}{7}\right)$ (b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{3}\sin 6x - 3\cos\dfrac{2x}{3}\right)$

2.7.3. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen.

(a) $f_1(x) = (2x+3)^4(4x^2-6)^7$

(b) $f_2(x) = (2x^4-3)^5(3x-4x^5)^4$

(c) $f_3(x) = (3x+2)^4\sqrt{1+x^2}$

(d) $f_4(x) = (x+2)^2\sqrt{x+1}$

(e) $f_5(x) = (x^3-1)^3\sqrt{x^2+x+1}$

(f) $f_6(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$

(g) $f_7(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2-2}}$

(h) $f_8(x) = \dfrac{x\sqrt{1+x}}{x^2+2}$

(i) $f_9(x) = \dfrac{2x^3\sqrt{1-x}}{3x^2-4}$

2.7.4. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen mit der Kettenregel.

(a) $f(x) = \sin(x^2)$

(b) $f(x) = \cos(x^3)$

(c) $f(x) = \tan(x^4)$

(d) $f(x) = \sin(x^2+2x+2)$

(e) $f(x) = \cos(x^4+3x^2+x)$

(f) $f(x) = \tan(x^5+2x^3+3x)$

(g) $f(x) = \sin(\cos(x))$

(h) $f(x) = \cos(\sin(x))$

(i) $f(x) = \cos(\tan(x))$

(j) $f(x) = \tan(\cos(x))$

(k) $f(x) = \sin(\tan(x))$

(l) $f(x) = \tan(\sin(x))$

2.7.5. Berechnen Sie für die Funktion

$$g\,:\,x \to g(x) \quad \text{mit} \quad g(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$$

die Ableitung und den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

Tipp für den Grenzwert: Substitution!

2.7.6. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen.

(a) $f(x) = x^2 \sin x$
(b) $g(x) = (x^2 + x)\sin 2x$
(c) $h(x) = (x + 2)^2 \sin 2x$
(d) $l(x) = x^4 \cos(x^2)$
(e) $m(x) = (x^3 + 3)\cos 3x$
(f) $n(x) = (x^2 + 2)^2 \cos 3x$
(g) $p(x) = \sin x \cos x$
(h) $q(x) = \sin^2 x \cos x$
(i) $r(x) = \sin^2 x \cos^2 x$

2.7.7. Ein Hang gilt als extrem lawinengefährdet, wenn sein Steigungswinkel größer als 30° ist. Ab Lawinenwarnstufe 3 sollte der Hang dann nicht mehr befahren oder durchquert werden.

Das Profil eines Hanges, der bei einer Skitour befahren werden soll, wird durch die Funktion $f$ mit der Gleichung

$$f(x) = 150 + 150 \cdot \cos\frac{\pi x}{600}, \quad 0 \leqq x \leqq 600$$

beschrieben (die Zahlenwerte von $x$ und $y = f(x)$ verstehen sich in Metern).

(a) Zeichne das Profil des Hangs ($100\,\text{m} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{cm}$) und zeichne im gleichen Maßstab einen Kartenausschnitt, der die Höhenlinien des Hangs (Höhenabstand 50 m) wiedergibt.
(b) Ermittle rechnerisch, welche Teile des Hangs lawinengefährdet sind und kennzeichne sie im gezeichneten Hangprofil.
(c) Welche Steigung und welchen Steigungswinkel hat die steilste Stelle des Hangs?

2.7.8. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f$ mit der Gleichung

$$f(x) = \sqrt{\cos(x^2) + \sin^2(3x)}$$

ohne Berücksichtigung der Definitionsmenge.

2.7.9. Wir untersuchen die Funktion $f$ mit der Gleichung

$$f(x) = \sqrt{\sin^3\left(x^2\right)} \quad \text{mit} \quad D_f \subseteqq [0\,,\,\pi].$$

(a) Berechnen Sie die Nullstellen und die Definitionsmenge $D_f$ von $f$.

(b) Wie lauten die Koordinaten der Punkte auf $G_f$ mit waagrechten Tangenten?

(c) Zeichnen Sie den Graphen von $f$. Wählen Sie auf der $x$-Achse 2 cm und auf der $y$-Achse 5 cm als Einheit.

## 2.8 Die Ableitung von $x^p$ mit $p \in \mathbb{Q}$

2.8.1. (a) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = x^{\frac{n}{m}} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \quad \text{und} \quad x > 0$$

Potenzieren Sie die Funktionsgleichung mit $m$ und differenzieren Sie beide Gleichungsseiten (Kettenregel!). Beweisen Sie dann, dass die bekannte Ableitungsregel für die Potenzfunktion auch für rationale Exponenten gilt.

Berechnen Sie die Ableitung von $f$ und geben Sie $D_f$ an:

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (c) $f(x) = \sqrt[100]{x^{101}}$ (d) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$ (f) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}$ (g) $f(x) = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

(h) $f(x) = \sqrt[4]{\sin^3 x}$ (i) $f(x) = \sqrt[5]{\sin^2 x}$ (j) $f(x) = \sqrt[5]{\sin^3\left(x^{\frac{3}{2}}\right)}$

## 2.9 Höhere Ableitungen

2.9.1. Berechnen Sie die $m$-te Ableitung von $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

2.9.2. Berechnen Sie die ersten fünf Ableitungen von $f(x) = \sin x$.
Wie lautet die $n$-te Ableitung von $f$?

2.9.3. Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen von $f(x) = \frac{1}{x}$.
Wie lautet die $n$-te Ableitung von $f$?

2.9.4. Berechnen Sie die ersten fünf Ableitungen von $f(x) = x^4 - x^2 + \sqrt{x}$.
Wie lautet die $n$-te Ableitung von $f$ für $n \geqq 5$?

2.9.5. Nennen Sie mindestens zwei Funktionen, deren $n$-te Ableitung 1 ist.

2.9.6. Welche Kraft wirkt auf einen Körper der Masse $m$, der sich nach dem Gesetz

$$x(t) = \alpha \cdot t^3 - \beta \cdot t$$

bewegt?

## 2.10 Differenzierbarkeit

2.10.1. Untersuchen Sie ob folgende Funktionen bei $x_0$ bzw. $x_n$ differenzierbar sind.

(a) $f(x) = \sin|x|, \qquad x_0 = 0$

(b) $f(x) = |\sin x| \cdot x, \qquad x_0 = 0, x_n = n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$

(c) $f(x) = \dfrac{|x| - 2}{x^2 - x - 2}, \qquad x_0 = 0$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{|x| + 1}, \qquad x_0 = 0$

2.10.2. Wir untersuchen die Funktion $\qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(a) Welche Symmetrie hat der Graph von $f$? Berechnen Sie in $\mathbb{R}^+$ alle $x_{0k}$ mit $f(x) = 0$, alle $x_{1k}$ mit $f(x) = x^2$ sowie alle $x_{2k}$ mit $f(x) = -x^2$ und zeichnen Sie dann die Graphen von $x^2$, $-x^2$ und $f$ mit den Einheiten $0{,}1 \mathrel{\widehat{=}} 2\,\text{cm}$ auf der $x$-Achse und $0{,}1 \mathrel{\widehat{=}} 10\,\text{cm}$ auf der $y$-Achse im $x$-Intervall $[\,-0{,}35\,;0{,}35\,]$.

(b) Berechnen Sie $f'(x)$ für $x \neq 0$.

(c) Berechnen Sie $f'(0)$ mit der Definition der Ableitung.

(d) Untersuchen Sie $f$ und $f'$ auf Stetigkeit.

2.10.3. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. An nichtdifferenzierbaren Stellen sind die einseitigen Ableitungen zu berechnen. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen.

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2} \cdot \sqrt{|x|}$ (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + |x|}{2 \cdot \sqrt[3]{|x|}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

2.10.4. Ist die Funktion $k(x) = |x|(x + 1)$ in Punkt $(0|0)$ differenzierbar?

2.10.5. Wir betrachten die Funktion $\qquad f(x) = \dfrac{(x^2 - 4) \cdot |x - 1|}{2\,x - 4}.$

(a) Schreiben Sie die Definitionsmenge und eine betragsfreie, möglichst einfache Darstellung von $f$ hin. Untersuchen Sie $f$ auf Stetigkeit und geben Sie, wenn möglich, eine stetige Fortsetzung von $f$ an.

(b) Untersuchen Sie $f$ auf Differenzierbarkeit. An nichtdifferenzierbaren Stellen sind die einseitigen Ableitungen zu berechnen. Wo hat der Graph $\mathrm{G}_f$ eine waagrechte Tangente? Zeichnen Sie $\mathrm{G}_f$ in der Einheit 1 cm im Intervall $[\,-3\,;3\,]$.

(c) Die Teilaufgaben (a) und (b) sind jetzt für die Funktion

$$g(x) = \frac{(x^2 - 4) \cdot |x - 1|}{|2\,x - 4|}$$

zu lösen. Dabei ist reger Gebrauch von den Ergebnissen der Teilaufgaben (a) und (b) zu machen!

2.10.6. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \dfrac{(4-x^2)\cdot|x+1|}{2\,x+4}$.

(a) Schreiben Sie die Definitionsmenge und eine betragsfreie, möglichst einfache Darstellung von $f$ hin. Untersuchen Sie $f$ auf Stetigkeit und geben Sie, wenn möglich, eine stetige Fortsetzung von $f$ an.

(b) Untersuchen Sie $f$ auf Differenzierbarkeit. An nichtdifferenzierbaren Stellen sind die einseitigen Ableitungen zu berechnen. Wo hat der Graph $\mathrm{G}_f$ eine waagrechte Tangente? Zeichnen Sie $\mathrm{G}_f$ in der Einheit 1 cm im Intervall $[-3\,;3]$.

(c) Die Teilaufgaben (a) und (b) sind jetzt für die Funktion

$$g(x) = \frac{(4-x^2)\cdot|x+1|}{|2\,x+4|}$$

zu lösen. Dabei ist reger Gebrauch von den Ergebnissen der Teilaufgaben (a) und (b) zu machen!

2.10.7. Wir betrachten die Funktion $f$ mit der Gleichung

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + x\cdot|x-2|$$

(a) Geben Sie eine betragsfreie Darstellung von $f$ an.

(b) Untersuchen Sie $f$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

(c) Zeichnen Sie die Graphen von $f$ und von $f'$ im $x$-Intervall $[-1\,;\,4]$ in ein Diagramm.

2.10.8. Wiederlegen Sie folgende Behauptungen mit Hilfe der angegebenen Funktionen.

(a) Existiert der Grenzwert von $f$ an der Stelle $x$, so ist $f$ an der Stelle $x$ stetig.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \neq 3 \\ 2 & \text{für} \quad x = 3 \end{cases}$$

(b) Jede Unstetigkeitsstelle einer Funktion ist eine Sprungstelle.

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

(c) Ist $f$ an der Stelle $x$ stetig, so ist $f$ an der Stelle $x$ auch differenzierbar.

$$f(x) = |x|, D = \mathbb{R}$$

(d) Ist eine stetige Funktion $f$ an einer Stelle $x$ nicht differenzierbar, so hat $f$ an der Stelle $x$ eine Knickstelle.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

(e) Ist $f$ an der Stelle $x$ differenzierbar, so ist $f'$ an der Stelle $x$ stetig.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

(f) Ist die Ableitung einer reellen Funktion $f$ an einer Stelle $x_0$ positiv, so ist $f$ in einer Umgebung von $x_0$ streng monoton wachsend.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{x}{2}, & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

Quelle: Mathematik lehren, Heft 75, S. 64ff

## 2.11 Die lineare Näherung

2.11.1. (a) Wie lautet die Formel für die lineare Näherung von $f(x+h)$? Erläutern Sie das Zustandekommen dieser Formel an Hand einer vollständig beschrifteten Skizze.

(b) Eine Lichtquelle, die Licht der Frequenz $f$ aussendet, bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ ($c$ ist die Lichtgeschwindigkeit) auf einen Beobachter zu. Der Beobachter registriert dabei Licht der Frequenz

$$f^* = f \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

Weisen Sie unter Verwendung schon bekannter Näherungsformeln nach, dass unter der Voraussetzung $|\beta| \ll 1$ die Näherung $f^* \approx (1+\beta) f$ gilt.

2.11.2. (a) Zeichnen Sie die Grafen der Funktionen $f$ und $g$ mit den Gleichungen

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = 10\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

im $x$-Intervall $[0{,}45; 0{,}65]$ (Einheit: $0{,}1 \mathrel{\widehat{=}} 2\,\text{cm}$, $y$-Achse von 0,4 bis 0,7). Zeichnen Sie den Scheitel von $g$ ein.

(b) Stellen Sie die Gleichung $t(x)$ der Tangente an $f$ im Punkt $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{6} \middle| f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ auf.

(c) Neben $x_1 = \frac{\pi}{6}$ gibt es noch einen zweiten Schnittpunkt von $f$ und $g$ bei $x = x_2$. Berechnen Sie einen Näherungswert $x_2^*$ für $x_2$, indem Sie nicht $g$ mit $f$, sondern $g$ mit $t$ schneiden. Wie groß ist der prozentuale Fehler dieser Näherung, wenn auf fünf geltende Ziffern $x_2 = 0{,}60799$ gilt.

## 2.12 Das Newtonverfahren

2.12.1. (a) Die Formel für das Newtonverfahren lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Erläutern Sie die Bedeutung der einzelnen Größen in dieser Formel und leiten Sie die Formel anhand einer exakt beschrifteten Zeichnung her.

(b) Lösen Sie die Gleichung

$$\cos 2x = \sqrt{x}$$

mit dem Newtonverfahren. Bestimmen Sie dazu zeichnerisch (Einheit 5 cm auf beiden Achsen) einen Näherungswert $x_0$ für die Lösung und berechnen Sie drei Verbesserungen dieses Näherungswertes.

2.12.2. (a) Leiten Sie an Hand einer vollständig beschrifteten Skizze her, wie man aus einem Näherungswert $x_n$ für die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ einen besseren Näherungswert $x_{n+1}$ erhält (Newton-Verfahren).

(b) Gesucht ist die Lösung der Gleichung $\sin x = x^2$ mit zehn geltenden Ziffern. Zeichnen Sie dazu den Grafen der Funktion $f(x) = \sin x - x^2$ (Einheit: $1 \,\widehat{=}\, 5\,\text{cm}$) im $x$-Intervall $[0; 1{,}2]$ und entnehmen Sie dem Grafen einen geeigneten Startwert $x_1$ für das Newton-Verfahren.

2.12.3. Wir betrachten die Funktion $f$ mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{x}{2 + \sin x}$$

(a) Beweisen Sie, dass $f$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist.

(b) Erstellen Sie eine Wertetabelle in ganzzahligen Schritten und zeichnen Sie den Grafen von $f$ im $x$-Intervall $[0\,;\,10]$. Entnehmen Sie der Zeichnung, wie viele Nullstellen die Ableitungsfunktion $f'$ in diesem Intervall hat.

(c) Berechnen Sie die Ableitung $f'$ von $f$.

(d) Berechnen Sie die Nullstelle von $f'$ in der Nähe von $x_0 = 5$ mit dem Newton-Verfahren auf Taschenrechnergenauigkeit.

Unbedingt beachten: „Ein Bruch ist null, wenn ...“.

2.12.4. Suchen Sie eine Rekursionsformel zur Berechnung von $x = \sqrt[n]{a}$!
Berechnen Sie damit $x = \sqrt[7]{100}$ mit einem geeigneten ganzzahligen Startwert!

2.12.5. (a) Zeichnen Sie den Graphen und berechnen Sie dann mit dem Newtonverfahren die Nullstelle sowie die Stelle mit waagrechter Tangente der Funktion

$$f(x) = x^2 - \sqrt{x} - 1 \quad .$$

(b) Durch Umformen folgt aus $f(x) = 0$ die Gleichung $g(x) = 0$ mit

$$g(x) = x^4 - 2\,x^2 - x + 1$$

Zeichnen Sie den Graphen von $g$ in das schon vorhandene Koordinatensystem und versuchen Sie diejenige Nullstelle von $g$, die der Nullstelle von $f$ entspricht, mit dem Newtonverfahren (Startwert $x_0 = 1$) zu berechnen! Suchen Sie eine Erklärung für das Scheitern dieses Vorhabens und wenden Sie das Newtonverfahren noch einmal mit $x_0 = 1{,}5$ an!

2.12.6. Zeichnen Sie den Graphen und berechnen Sie dann die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = x^3 - 3\,x^2 + 4$$

mit dem Newtonverfahren. Warum zieht sich das Verfahren bei einer der Nullstellen sehr in die Länge?

2.12.7. Berechnen Sie die Lösung der Gleichung $\tan x = x$ im Intervall $]\,0\,;\,6\,]$!
Der Startwert für das Newtonverfahren ist grafisch zu ermitteln!

## 2.13 Die natürliche Exponentialfunktion

2.13.1. Berechne die Ableitung folgender Funktionen:

(a) $f(x) = x\mathrm{e}^x$ (b) $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ (c) $h(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$

(d) $k(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ (e) $r(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ (f) $s(x) = x^2\mathrm{e}^{-x^2}$

(g) $t(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$ (h) $u(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$ (i) $v(x) = \sin\left(\mathrm{e}^x\right)$

2.13.2. **Numerische Berechnung von** e

In manchen Schulbüchern wird zur numerischen Berechnung von e der Grenzwert

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}_n \quad \text{mit} \quad \mathrm{e}_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (1)$$

herangezogen und es werden mit dem Taschenrechner (TR) Werte von $\mathrm{e}_n$ für große $n$ als Näherungen für e berechnet.

(a) Verwende die Definition der Ableitung und die Forderung $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, um (1) herzuleiten.

(b) Um z.B. $\mathrm{e}_{100} = 1{,}01^{100}$ zu berechnen, muss man nicht 99 mal multiplizieren, sondern es genügen acht Multiplikationen, wenn man geschickt rechnet:

$$x^{100} = \left(x^{50}\right)^2 = \left(\left(x^{24}\cdot x\right)^2\right)^2 = \left(\left(\left(\left(\left(\left(x^2\cdot x\right)^2\right)^2\right)^2\cdot x\right)^2\right)^2$$

Vergleiche mit der Dualdarstellung des Exponenten ($100 = (1100100)_2$) und formuliere eine Regel, wie man daraus die schnelle Potenzberechnung erhält (QM-Algorithmus für Quadrieren-Multiplizieren).

(c) Wie viele Multiplikationen sind nötig, um $\mathrm{e}_n$ mit $n = 10^6$ zu berechnen? Berechne jetzt $\mathrm{e}_n$ für $n = 10^6$ mit unserer neuen Methode und vergleiche mit dem TR-Ergebnis bei direkter Eingabe des Terms $1{,}000\,001^{1\,000\,000}$.

(d) Intern rechnet der TR mit mehr Stellen, als er im Ergebnis anzeigt. Ermittle die interne Genauigkeit deines TRs durch die Berechnung von $\mathrm{e}_n$ für $n = 10^9$, $n = 10^{10}$ usw.

Das Ergebnis der Berechnung von $\mathrm{e}_n$ mit $n = 10^{10}$, einmal mit dem QM-Algorithmus und einmal durch Eintippen des Terms für $\mathrm{e}_n$, kann sich, abhängig von der internen Genauigkeit des Rechners, in den letzten Stellen unterscheiden. Das ist ein Hinweis darauf, dass der TR Potenzen nicht mit dem QM-Algorithmus berechnet.

(e) Zur genauen und schnellen Berechnung von e verwendet man

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} E_n \quad \text{mit} \quad E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

Für welches $n$ ist der relative Fehler

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{E_n - \mathrm{e}}{\mathrm{e}} < 10^{-9}\,?$$

## 2.14 Monotonie

2.14.1. Untersuche folgende Funktionen auf Monotonie:

(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 3$ (b) $g(x) = x + \sin x$ (c) $h(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x$

## 2.15 Die Umkehrfunktion

2.15.1. (a) $g = f^{-1}$ ist die Umkehrfunktion von $f$. Benutze die Beziehung

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = x,$$

um die Ableitungsregel für die Umkehrfunktion zu beweisen.

(b) Es sei $f(x) = \cos x$ mit $D_f = [0; \pi]$. Mit $g(x) = \arccos x$ wird die Umkehrfunktion von $f$ bezeichnet. Berechne die Ableitung von $g$.

(c) Es sei $f(x) = \tan x$ mit $D_f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Mit $g(x) = \arctan x$ wird die Umkehrfunktion von $f$ bezeichnet. Berechne die Ableitung von $g$.

## 2.16 Der natürliche Logarithmus

2.16.1. Der Graf der Funktion $f$ mit $f(x) = \ln x$ wird in einem Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm auf beiden Achsen gezeichnet.

(a) Berechne die Höhe $h$ des Grafen über der $x$-Achse, wenn wir uns in der Entfernung $a$ rechts vom Ursprung befinden:

- $a = 40\,000\,\mathrm{km}$ (Erdumfang)
- $a = 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{km}$ (Entfernung zur Sonne)
- $a = 1\,\mathrm{LJ}$ (1 LJ (Lichtjahr) ist die Strecke, die das Licht mit der Geschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in einem Jahr zurücklegt)
- $a = 3 \cdot 10^{10}\,\mathrm{LJ}$ (ungefährer Durchmesser des sichtbaren Universums)

(b) In welcher Entfernung $a$ rechts vom Ursprung hat der Graf von $f$ die Höhe $h = 1\,\mathrm{m}$? Vergleiche mit dem Durchmesser des sichtbaren Universums.

2.16.2. Wir betrachten die Funktion $f$ mit der Gleichung

$$f(x) = 1 - 3{,}3 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}.$$

Untersuche $f$ zunächst auf Symmetrie, berechne dann die Nullstellen und die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ und ermittle die Koordinaten der relativen Extremwerte und der Wendepunkte. Zeichne den Grafen von $f$ im Intervall $[-6; 6]$.

2.16.3. Berechne $x$:

(a) $\mathrm{e}^x = 100$ (b) $\mathrm{e}^{-0{,}2x} = 10^{-3}$ (c) $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-2x+1}$ (d) $\mathrm{e}^x = 3x$

2.16.4. Berechne $x$:

(a) $(\ln x)^2 = 4$ (b) $\ln x = -10^5$ (c) $\ln\sqrt{x} + \ln\sqrt[3]{x} = 2$

(d) $\ln\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{2}$ (e) $e^x = \ln x$ (f) $e^x = -\ln x$

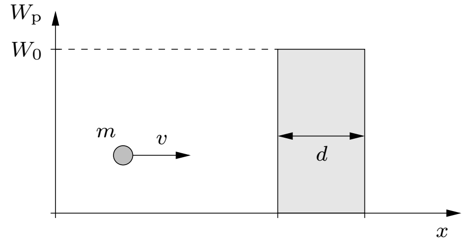
Veranschauliche das Ergebnis von (b) in der Form $0,\underbrace{0000\ldots000}_{\text{Zahl der Nullen}}$ nächste Ziffern.

2.16.5. Schreibe das Ergebnis in der Gleitkommadarstellung, d.h. in der Form

$$a\cdot 10^n \quad \text{mit} \quad 1 \leqq a < 10 \quad \text{und} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(a) $x = e^{1000}$ (b) $y = e^{-5^5}$ (c) $z = 9^{9^9}$

2.16.6. Ein Körper der Masse $m$ und der Geschwindigkeit $v$ (also mit der kinetischen Energie $W = \frac{m}{2}v^2$) bewegt sich auf eine Potentialbarriere der Breite $d$ und der Höhe $W_0$ zu. Nach der klassischen Physik kann der Körper für $W < W_0$ die Barriere nicht überwinden und wird reflektiert. Die Quantenmechanik lehrt aber, dass der Körper auch für $W < W_0$ die Barriere mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit $T$ (*Transmissionswahrscheinlichkeit*) überwinden kann (*Tunneleffekt*). Dabei gilt




$$T = \frac{\gamma}{e^{2\alpha d} + e^{-2\alpha d} + \gamma - 2}$$

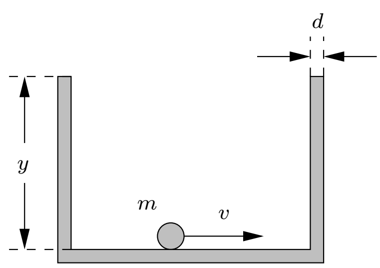
mit

$$\gamma = 16\cdot\frac{W}{W_0}\cdot\left(1-\frac{W}{W_0}\right) \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{2\pi}{h}\cdot\sqrt{2m(W_0-W)},$$

wobei $h = 6{,}626\cdot 10^{-34}$ Js die Planckkonstante ist.

(a) Berechne die Transmissionswahrscheinlichkeit für ein Elektron mit der Masse $m = 9{,}11\cdot 10^{-31}$ kg und der kinetischen Energie $W = 3\,\text{eV}$ ($1\,\text{eV} = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ J), das gegen eine Barriere der Höhe $W_0 = 5\,\text{eV}$ und der Breite $d = 10^{-10}$ m anläuft.

(b) Eine Kugel der Masse $m = 0{,}1$ g bewegt sich in einem Gefäß mit $v = 2\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ hin und her, die Höhe des Gefäßes ist $y = 2$ cm, die Wandstärke $d = 2$ mm ($W_0 = mgy$). Berechne die Transmissionswahrscheinlichkeit $T$ für die Kugel. Wie lang ist die ausgeschriebene Zahl $T$ zwischen Komma und der ersten Ziffer ungleich null, wenn pro Ziffer 0,5 cm gebraucht werden?



## 2.17 Exponentielles Wachstum

2.17.1. **Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall**

Wir betrachten eine von der Zeit $t$ abhängige Größe $B$. $\Delta B$ ist die Änderung von $B$, wenn sich $t$ um $\Delta t$ ändert. Für viele Größen gilt, dass $\Delta B$ in sehr guter Näherung proportional zum Produkt $B(t)\Delta t$ ist, wenn $\Delta t$ klein genug gewählt wird:

$$\Delta B \approx k \cdot B(t)\Delta t \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta B}{\Delta t} \approx kB(t)$$

Diese Proportionalität soll um so genauer sei, je kleiner $\Delta t$ gewählt wird. Im Grenzfall $\Delta t \to 0$ wird dann in der letzten Gleichung aus dem $\approx$ ein $=$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \dot{B}(t)$$

Der Punkt über einer Größe bedeutet die Ableitung nach der Zeit. Aus der Proportionalität von $\Delta B$ zu $B(t)\Delta t$ für kleine $\Delta t$ folgt also die *Wachstumsgleichung*

$$\boxed{\dot{B}(t) = kB(t)} \qquad (1)$$

mit einer Konstanten $k$. Die Änderungsrate $\dot{B}$ ist also proportional zu $B$.

(a) Die Differentialgleichung (1) reicht noch nicht aus, um $B(t)$ eindeutig festzulegen, man muss noch den Funktionswert zu einer bestimmten Zeit kennen. Wir wollen jetzt die Lösung von (1) mit der Anfangsbedingung $B(0) = B_0$ suchen. Zeige zunächst, dass aus (1) die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\ln B(t)\right] = k \qquad (2)$$

folgt. Bestimme aus (2) zunächst $\ln B(t)$ (Vorsicht, unendlich viele Lösungen!) und dann $B(t)$. Wähle unter den unendlich vielen Lösungen diejenige aus, die der Anfangsbedingung $B(0) = B_0$ genügt.

(b) **Bakterienwachstum**

Zur Zeit $t_0 = 0$ wird eine Bakterienkultur mit $N_0 = 10^4$ Individuen in einer Zuckerlösung angesetzt. Solange die Nährlösung reicht, ist die Änderungsrate der Bakterienzahl $N$ proportional zu $N$ (wenn doppelt so viele Bakterien vorhanden sind, ist auch der Zuwachs in der Zeit $\Delta t$ doppelt so groß), d.h. die Voraussetzungen für (1) sind erfüllt. Zur Zeit $t_1 = 8{,}00\,\mathrm{h}$ sind $N_1 = 3{,}34 \cdot 10^4$ Bakterien vorhanden, wie viele sind es zur Zeit $t_2 = 12{,}0\,\mathrm{h}$? In welcher Zeit $T$ verdoppeln sich die Bakterien?

2.17.2. **Radioaktivität**

(a) $N(t)$ bezeichnet die Zahl der Atome eines radioaktiven Elementes zur Zeit $t$. Die Zahl $|\Delta N|$ der in der Zeitspanne $\Delta t$ zerfallenden Atome ist proportional zu $N(t)\Delta t$, die Proportionalitätskonstante wird mit $\lambda$ bezeichnet (Zerfallskonstante). Wie lautet $N$ in Abhängigkeit von $t$ (Zerfallsgesetz)? Achte auf das

Vorzeichen von $\Delta N = N(t+\Delta t) - N(t)$. Die Zeitspanne $T$, in der die Hälfte der zu irgend einer Zeit $t_1$ vorhandenen Atome zerfällt, heißt *Halbwertszeit*. Zeige, dass die Halbwertszeit nicht von $t_1$ abhängt und leite einen Zusammenhang zwischen $T$ und $\lambda$ her.

(b) Die negative Ableitung von $N$ heißt *Aktivität*: $A = -\dot{N}$. Zeige den Zusammenhang $A(t) = \lambda N(t)$ und erkläre die physikalische Bedeutung der Aktivität.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P$, dass ein Atom, das zur Zeit $t$ noch nicht zerfallen ist, im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ zerfällt?

(d) Beim Reaktorunfall in Fukushima betrug die Aktivität des insgesamt freigesetzten Elements $^{137}\mathrm{Cs}$ zur Zeit der Freisetzung $A_0 = 2 \cdot 10^{17}\,\mathrm{Bq}$, wobei $1\,\mathrm{Bq} = 1\,\mathrm{Becquerel} = \frac{1}{\mathrm{s}}$ (ein Zerfall pro s), die Halbwertszeit von $^{137}\mathrm{Cs}$ ist $T_{\mathrm{Cs}} = 30{,}1\,\mathrm{a}$. In welcher Zeit sinkt die Aktivität auf ein Prozent des Ausgangswertes? Welche Masse an $^{137}\mathrm{Cs}$ wurde freigesetzt (Atommasse von $^{137}\mathrm{Cs}$: $M_{\mathrm{Cs}} = 2{,}3 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}$)?

Neben dem Cäsium wurden beim Fukushimaunfall ungefähr 800 g radioaktives $^{131}\mathrm{I}$ (Halbwertszeit: $T_{\mathrm{J}} = 8,0\,\mathrm{d}$, Atommasse: $M_{\mathrm{J}} = 2{,}2 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}$)?) freigesetzt. Berechne die Anfangsaktivität des freigesetzten Jods.

### 2.17.3. Das Wachstum der Weltbevölkerung

Gib mehrere Gründe für und gegen ein exponentielles Wachstum der Erdbevölkerung an. Die UNO geht von folgenden Daten der Weltbevölkerung aus, $N$ ist die Zahl der Menschen:

| Jahr | 0 | 1000 | 1500 | 1804 | 1927 | 1960 | 1974 | 1987 | 1999 | 2011 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{N}{10^9}$ | 0,3 | 0,31 | 0,5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Stelle die Daten der Tabelle in einem Diagramm dar und untersuche, ob ein exponentielles Wachstum vorliegt. Stelle dazu mindestens drei Exponentialfunktionen auf, die zu je zwei geeignet gewählten Wertepaaren der Tabelle passen und zeichne ihre Grafen in das Diagramm ein. Suche Gründe für das gefundene Ergebnis. Es ist sicher hilfreich, sich die „Wachstumskonstante“ $k$ näher anzuschauen.

### 2.17.4. Die „Halbwertszeit“ von Mitteleuropäern

$|\Delta N|$ sei die Zahl der Todesfälle von $N$ gleichaltrigen Menschen in der Zeit $\Delta t$. Für kleines $\Delta t$ ist $|\Delta N|$ zu $N$ und zu $\Delta t$ und damit auch zum Produkt $N\Delta t$ proportional, woraus eine exponentielle Zeitabhängigkeit von $N$ folgt. Die „Halbwertszeit“ von Mitteleuropäern beträgt ungefähr 83 Jahre.

(a) Wieviel Prozent der Mitteleuropäer müssten dann das 125-ste Jahr erleben? Das Ergebnis ist offensichtlich falsch; wo steckt der Fehler in unseren Überlegungen?

(b) Versuche, ein besseres Modell für die Lebenserwartung zu erstellen (ca. 20% erleben ihren 90sten Geburtstag). Verwende für die „Zerfallskonstante“ den Ansatz $\lambda(t) = kt^n$ und passe $k$ und $n$ an die gegebenen Werte an. Zeichne die

Grafen von $N_\mathrm{e}(t)$ und $N(t)$ mit $N_0 = 100$ in ein Diagramm ($N_\mathrm{e}$ ist der rein exponentielle Abfall).

(c) Zu welcher Zeit $t_1$ ist der Graf von $N(t)$ am steilsten? Erkläre anschaulich, was die Zeit $t_1$ genau bedeutet!

(d) Ist die Sterbewahrscheinlichkeit $P(t)$ (Wahrscheinlichkeit eines Menschen im Alter $t$, im darauf folgenden Jahr zu sterben) auch bei $t_1$ maximal?

(e) $S(t)$ bezeichne die Zahl der Menschen im Alter $t$, die im darauf folgenden Jahr sterben. Wie hängen $S(t)$, $P(t)$ und $\dot{N}(t)$ zusammen?

## 2.18 Grenzwerte

2.18.1. Berechne folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ (b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ (c) $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$ (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{100}\mathrm{e}^{-0{,}01x}$ (f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\mathrm{e}^{-x}\cdot \ln x\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-\ln x)$ (h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2}-\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}\right)$ (i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+\sin x}{2x-\sin x}$

## 2.19 Verhalten von Funktionen

2.19.1. Untersuche die Funktion $f$ mit

$$f(x) = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{2}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Nullstellen, Verhalten an den Rändern von $D_f$, Monotonie, Extremwerte und Wendepunkte. Zeichne den Grafen von $f$ im Intervall $[-2; 4{,}5]$.

Für welche $x$-Werte gilt $f(x) = -2$?

2.19.2. Untersuche die Funktion $f$ mit

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2, \quad D_f = \mathbb{R}$$

auf Symmetrie, Nullstellen, Verhalten an den Rändern von $D_f$, Extremwerte und Wendepunkte. Zeichne den Grafen von $f$ im Intervall $[-3; 3]$.

Für welche $x$-Werte gilt $f(x) = -2$?

2.19.3. Untersuche die Funktion $f$ mit

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 2x + 1, \quad D_f = \mathbb{R}$$

auf Nullstellen, Verhalten an den Rändern von $D_f$, Monotonie und Extremwerte. Zeichne den Grafen von $f$ im Intervall $[-1; 6]$.

2.19.4. Untersuche die Funktion $f$ mit

$$f(x) = \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x-1}}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

auf Symmetrie, Nullstellen, Verhalten an den Rändern von $D_f$, Monotonie und Extremwerte. Zeichne den Grafen von $f$ im Intervall $[-1; 6]$.

2.19.5. Untersuche die Funktion $f$ mit

$$f(x) = \frac{20 \ln x}{x^2}, \quad D_f = \mathbb{R}^+$$

auf Nullstellen, Verhalten an den Rändern von $D_f$, Monotonie und Extremwerte. Zeichne die Grafen von $f$ und $f'$ im Intervall $[0{,}9; 6]$ in ein Diagramm. Veranschauliche die Zusammenhänge zwischen den Nullstellen der Ableitungsfunktion und den besonderen Stellen im Grafen von $f$.

2.19.6. Untersuche die Funktion $f$ mit

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 3}$$

auf maximale Definitionsmenge, Nullstellen, Verhalten an den Rändern von $D_f$, Extremwerte und Wendepunkte. Zeichne den Grafen von $f$ und eventuelle Asymptoten im Intervall $[-1; 7]$.

2.19.7. Bestimmen Sie die Extrema der Funktion

$$f(x) = \sqrt{x}\ (1 - \frac{1}{56}x^3).$$

2.19.8. Wir betrachten $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ im Intervall $]\,0\,;\,2\,\pi\,]$. Zeichnen Sie den Graphen von $f$ und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes mit waagrechter Tangente.

2.19.9. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2$ ($D = \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$).

(a) Bestimmen Sie allgemein die Nullstellen der Funktion.

(b) Bestimmen Sie allgemein die Koordinaten der Extrema.

(c) Zeichnen Sie die Funktion für $a = 1$ und $b = 3$.

(d) Zeichnen Sie für $b = 3$ und für zehn verschiedene Werte von $a$ die Extrema in ein Koordinatensystem ein. Was fällt auf?

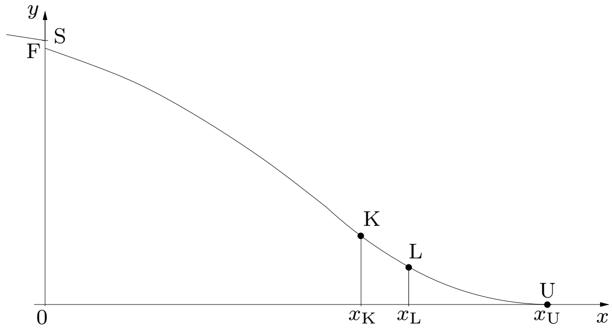
(e) Beweisen Sie, dass für festes $b$ und variables $a$ die Extrema auf einer Parabel liegen.

2.19.10. Wir betrachten die Funktionenschar $f_a(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$. $\mathrm{P}_a$ sei ein Punkt auf $\mathrm{G}_{f_a}$ mit waagrechter Tangente. Berechnen Sie die Koordinaten von $\mathrm{P}_a$! Auf welcher Kurve liegen alle Punkte $\mathrm{P}_a$ mit $a \in \mathbb{R}$?

2.19.11. Die Form der Aufsprungbahn der großen Olympiaschanze in Garmisch-Partenkirchen kann durch ein Polynom dritten Grades angenähert werden:

$$y = f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Dabei hat der Absprungpunkt S die Koordinaten S (0|88), der Schanzentisch hat die Höhe 3 (alle Angaben verstehen sich in Metern). Der kritische Punkt (auch Konstruktionspunkt genannt) liegt bei K (106|23), das Ende der Aufsprungbahn bei U (171|0). Im Konstruktionspunkt K hat die Aufsprungbahn den Neigungswinkel $\beta = -34{,}3°$ gegen die $x$-Achse.




(a) Berechne die Koeffizienten in der Funktionsgleichung von $f$ und zeichne den Grafen von $f$ im Maßstab 1:2000.

(b) Berechne die Koordinaten des Punktes P der steilsten Stelle der Aufsprungbahn.

(c) Wie groß ist der Neigungswinkel der Aufsprungbahn in P und in K?

(d) Das Ende L des Landebereichs ist der Punkt auf der Aufsprungbahn mit dem Steigungswinkel $\beta_L = -31{,}0°$, der tiefer als K liegt. Berechne seine Koordinaten.

(e) Die Größe einer Schanze wird durch HS = $\overline{\text{SL}}$ angegeben („Hillsize“). Vergleiche den HS unserer Schanze mit dem Schanzenrekord von 143,5 m (Simon Ammann, 2010).

(f) Der Konstruktionspunkt K dient als Anhaltspunkt zur Weitenmessung. Ermittle näherungsweise die Länge $w$ der Aufsprungbahn vom Fußpunkt F des Schanzentisches bis K.

2.19.12. (a) Welche Bedingung müssen die Variablen $a, b$ und $c$ erfüllen, damit der Graph der Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($D = \mathbb{R}$) drei waagrechte Tangenten hat. Zeichnen Sie mit einer geeigneten Software die Graphen von $f(x)$ für $a = c = 1$ und verschiedene Werte für $b$.

(b) Wieviele waagrechte Tangenten hat der Graph der Funktion
$f(x) = x^5 + bx^3 - x$, $b \in \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}$?
Zeichnen Sie mit einer geeigneten Software die Graphen von $f(x)$ für verschiedene Werte für $b$.

(c) Wieviele waagrechte Tangenten hat der Graph der Funktion
$f(x) = x^5 + bx^3 + x$, $b \in \mathbb{R}$ und $b^2 > \frac{20}{9}$, $D = \mathbb{R}$?
Zeichnen Sie mit einer geeigneten Software die Graphen von $f(x)$ für verschiedene Werte für $b$.

2.19.13. Suchen Sie alle Extremwerte der Funktion $f(x) = x^2 - 2 \cdot |x-2| - 3x$.

2.19.14. Die im Unterricht angegebenen **hinreichenden** Kriterien für einen Extremwert sind keine **notwendigen** Kriterien. Es gibt z.B. Funktionen mit einem relativen Minimum in $x_0$, für die es kein noch so kleines positives $h$ gibt mit $f$ monoton fallend in $]\,x_0 - h\,;x_0\,[$ und $f$ monoton steigend in $]\,x_0\,;x_0 + h\,[$. Als Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot (2 + \sin \frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie alle $x_{0k}$ mit $f(x) = 2\,x^2$, alle $x_{1k}$ mit $f(x) = 3\,x^2$ sowie alle $x_{2k}$ mit $f(x) = x^2$ und zeichnen Sie dann die Graphen von $x^2$, $2x^2$, $3x^2$ und $f$ mit den Einheiten $0{,}1 \mathrel{\widehat{=}} 4\,\text{cm}$ auf der $x$-Achse und $0{,}01 \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{cm}$ auf der $y$-Achse im Bereich $-0{,}2 < x < 0{,}2$.

(b) Zeigen Sie, dass $f$ bei $x = 0$ stetig ist und dort ein absolutes und relatives Minimum besitzt.

(c) Berechnen Sie $f'(x)$ für $x \neq 0$.

(d) Berechnen Sie $f'(0)$ mit der Definition der Ableitung.

(e) Zeigen Sie, dass $f'$ bei $x = 0$ unstetig ist und in jeder noch so kleinen Umgebung von 0 unendlich oft das Vorzeichen wechselt.

2.19.15. Wir betrachten die Funktionenschar $f_a$ mit

$$f_a(x) = \frac{ax + 2}{2\mathrm{e}^x}, \quad D_{f_a} = \mathbb{R} \text{ und } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(a) Bestimme in Anhängigkeit des Scharparameters $a$ die Nullstellen von $f_a$ und das Verhalten von $f_a$ für $x \to \pm\infty$.

(b) Zeige, dass alle Grafen der Funktionenschar genau einen Punkt gemeinsam haben und gib seine Koordinaten an.

(c) Bestimme die Koordinaten der lokalen Extrema der Funktionenschar in Abhängigkeit von $a$.

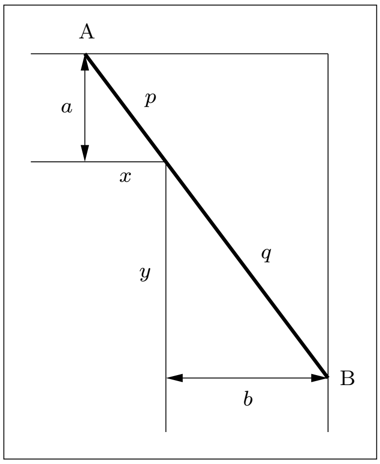
(d) Zeichne die Grafen der Funktionen $f_{0,5}$, $f_2$, $f_{20}$ und $f_{-4}$ in ein geeignetes Koordinatensystem. Stelle vorher die Nullstellen und die Koordinaten der Extremwerte in einer Tabelle zusammen.

(e) Unter welchem spitzen Winkel $\alpha$ schneiden sich die Grafen der beiden Funktionen $f_{0,5}$ und $f_{20}$?

(f) Auf welcher Kurve $y = g(x)$ liegen die Extremwerte der Scharfunktionen? Zeichne sie in das schon bestehende Koordinatensystem ein.

## 2.20 Extremwertaufgaben

2.20.1. Zwei Kanäle mit den Breiten $a$ und $b$ stoßen rechtwinklig zusammen. Wir suchen die maximale Länge $L$, die ein Baumstamm haben kann, damit er gerade noch *um die Ecke* gebracht werden kann. Wir rechnen mit einem idealisierten Stamm der Dicke null.




(a) Drücken Sie $r = \overline{\mathrm{AB}} = p + q$ durch $x$ aus und berechnen Sie $L$.

(b) Berechnen Sie $L$ speziell für die Fälle $a = b$, $a \ll b$ und $b = 2a$.

(c) Zeichnen Sie $r(x)$ für $a = 1$ und $b = 2$. Beweisen Sie für diesen Fall, dass $g(x) = x + 2$ eine Asymptote von $r(x)$ ist.

2.20.2. **Warum Lastwagenfahrer so rasen**

Die Kosten für eine Lastwagenfahrt setzen sich aus den Treibstoffkosten und dem Fahrerlohn zusammen. Der Dieselverbrauch pro km ist die Summe aus einem konstanten Term $a$ (Rollreibung) und einem zum Geschwindigkeitsquadrat proportionalen Term $bv^2$ (Luftwiderstand). Der Fahrerlohn $F$ ist natürlich zur Fahrzeit $t$ proportional, d.h. $F = ct$.

(a) Drücken Sie die Gesamtkosten $G$ für eine Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit $v$ über die Strecke $s$ durch $a$, $b$, $c$, $s$, $v$ und den Dieselpreis $B$ pro Liter aus.

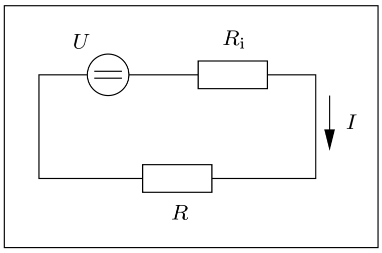
(b) Für welche Geschwindigkeit $v_0$ sind die Gesamtkosten minimal?

(c) Als konkretes Beispiel betrachten wir eine Fahrt über $s = 100\,\mathrm{km}$ mit den Daten

$$a = 0{,}04\,\frac{\mathrm{Liter}}{\mathrm{km}}, \quad b = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{Liter\,h^2}}{\mathrm{km^3}}, \quad c = 80\,\frac{€}{\mathrm{h}} \quad \text{und} \quad B = 2\,\frac{€}{\mathrm{Liter}}.$$

Berechnen Sie $v_0$ und den minimalen Gesamtpreis $G_0$. Zeichnen Sie $G(v)$ im Intervall zwischen 0 und $300\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

2.20.3. An eine Stromquelle mit dem Innenwiderstand $R_\mathrm{i}$ wird ein Verbraucher mit dem Widerstand $R$ angeschlossen. $P$ sei die im Verbraucher umgesetzte Leistung.




(a) Für welche Wahl des Widerstandes $R$ ist $P$ maximal? Wie groß ist das maximale $P$?

(b) Zeichnen Sie $P(R)$ für $U = 1\,\mathrm{V}$ und $R_\mathrm{i} = 1\,\Omega$.

2.20.4. Wie muss ein kegelförmiges Sektglas gestaltet werden, damit bei gegebenem Volumen $V$ möglichst wenig Material benötigt wird?

2.20.5. Der letzte Weg des Bären Bruno wird durch die Funktion $f$ mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{x^2}$ und $D_f = \mathbb{R}^+$ beschrieben.

(a) Zeichnen Sie den Grafen von $f$ mit der Einheit 5 cm im $x$-Intervall $[0{,}8; 2]$.

(b) Der Bär wandert gemächlich von links nach rechts auf dem Grafen von $f$. Im Ursprung O des Koordinatensystems sitzt ein feiger Jaga, der Bruno genau dann erlegt, wenn er von ihm die kleinste Entfernung hat. Drücken Sie die Entfernung $s$ zwischen dem Bären und dem Schützen durch die $x$-Koordinate des Bären aus und berechnen Sie die Koordinaten von Brunos Schicksalsort $\mathrm{B}\,(x_0|y_0)$. Nachweis nicht vergessen, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt!

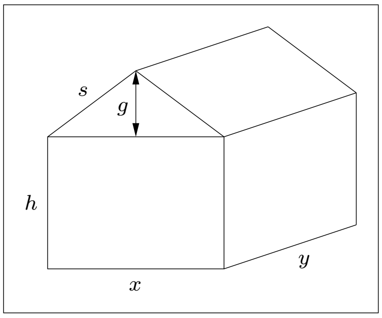
(c) Wie lang ist die tatsächliche Schussweite $s_0 = \overline{\mathrm{OB}}$, wenn der in (a) gezeichnete Weg einer Karte im Maßstab 1:2000 entspricht?

2.20.6. In einer Gemeinde gilt aus gestalterischen und wärmetechnischen Gründen für die Maße eines Hauses folgende **Verordnung** (siehe Abbildung):

**$V$ sei das Volumen des Hauses (umbauter Raum ohne Keller) und $A$ die gesamte Oberfläche einschließlich Dach aber *ohne* die Grundfläche. Die Breite $x$, die Wandhöhe $h$, die Giebelhöhe $g$ und die Länge $y$ müssen so gewählt werden, dass**

$$g = \frac{3}{8} \cdot x \quad ; \quad h = \frac{5}{8} \cdot x$$

**und $A$ bei gegebenem $V$ minimal ist.**




(a) Drücken Sie $V$ durch $x$ und $y$ aus und lösen Sie das Ergebnis nach $y$ auf. Drücken Sie $s$ durch $x$ aus und beweisen Sie dann mit einer detaillierten Rechnung folgende Beziehung:

$$A(x) = \frac{13}{8} \cdot x^2 + \frac{40\,V}{13\,x}$$

(b) Für welches $x$, ausgedrückt durch $V$, ist die Bauordnung erfüllt? Nachweis der Art des Extremums nicht vergessen! Berechnen Sie auch das Verhältnis $k = \frac{y}{x}$ für ein Haus, das den Forderungen der Bauordnung genügt.

(c) Berechnen Sie $x$, $y$, $h$ und $g$ für ein der Bauordnung genügendes Haus mit dem Volumen $V = 540{,}8\,\mathrm{m}^3$ und zeichnen Sie die Vorderfront des Hauses im Maßstab 1 : 200.

2.20.7. Beweisen Sie, dass von allen Rechtecken mit gegebener Fläche $A$ das Quadrat den kleinsten Umfang hat.

## 2.21 Vermischte Aufgaben

2.21.1. Was bedeutet die Ableitung der Funktion $f$ an der Stelle $x$, wenn

(a) $f(x)$ der Ort eines Körpers zur Zeit $x$ ist

(b) $f(x)$ die Geschwindigkeit eines Körpers zur Zeit $x$ ist

(c) $f(x)$ das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge $x$ ist

(d) $f(x)$ das Volumen einer Kugel mit dem Radius $x$ ist

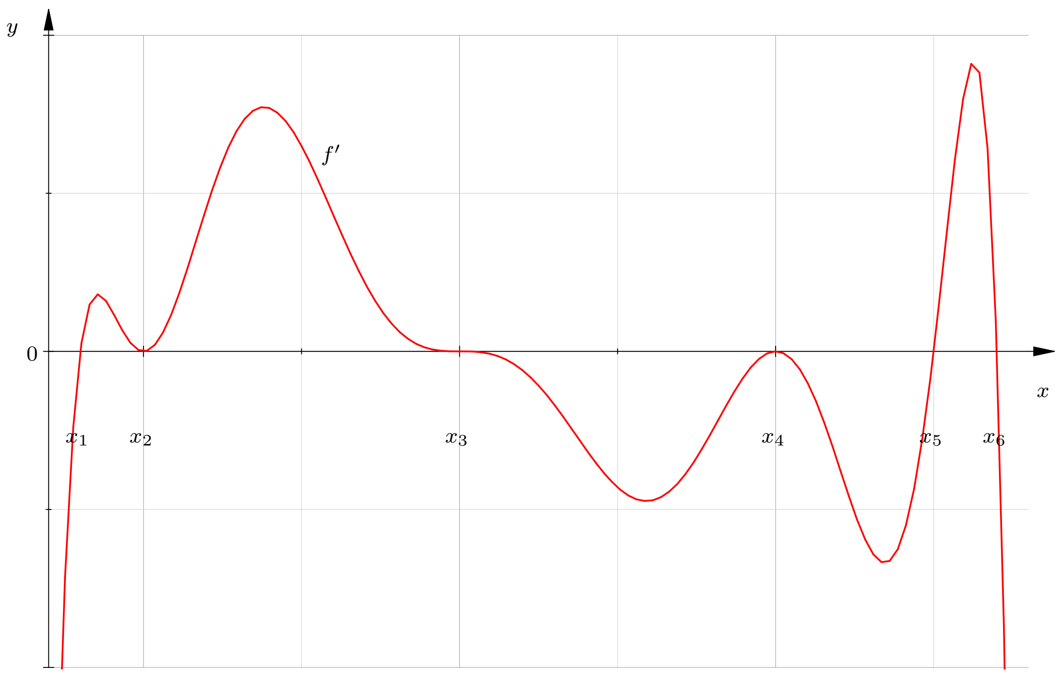
(e) $f(x)$ das Teilvolumen eines Körpers von der Höhe null bis zur Höhe $x$ ist

(f) $f(x)$ die Zahl der zur Zeit $x$ lebenden Menschen ist

(g) $f(x)$ die Ladung ist, die bis zur Zeit $x$ durch den Querschnitt eines Leiters geflossen ist

(h) $f(x)$ die Arbeit ist, die zum Bewegen eines Körpers bis an den Ort $x$ verrichtet wurde

2.21.2. Skizziere den ungefähren Verlauf von $f''$ und von $f$.



# 3 Vektorrechnung

## 3.1 Der dreidimensionale Punktraum

3.1.1. Gegeben sind die Punkte A$(4|-1|4)$, B$(-8|3|1)$ und C$(0|3|-5)$.

(a) Zeichne das Schrägbild des Dreiecks ABC.

(b) Berechne die Seitenlängen $a$, $b$ und $c$.

(c) Berechne die Innenwinkel $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ und die Fläche $A$ des Dreiecks.

## 3.2 Vektoren

3.2.1. Zeichne die Punkte A$(1|2)$, B$(4|4)$, C$(2|1)$, D$(-1|-1)$,E$(0|2)$, F$(2|5)$, G$(6|4)$ und H$(3|2)$ in ein Koordinatensystem. Zeichne die Vektoren (natürlich ist gemeint, jeweils einen Repräsentanten) $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$, $\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{FE}}$ und $\vec{e} = \overrightarrow{\mathrm{GH}}$ ein. Welche dieser Vektoren sind gleich, welche haben den gleichen Betrag? Welche Vektoren sind gleich zu $-\vec{e}$?

3.2.2. Zeichne die Punkte A$(2|2)$, B$(6|1)$, C$(5|5)$ und D$(9|2)$ in ein Koordinatensystem. Zeichne die (Repräsentanten der) Vektoren $\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ und $\vec{y} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ mit den jeweiligen Anfangspunkten A, B und C ein. Die Endpunkte der Repräsentanten von $\vec{x}$ seien A$'$, B$'$, und C$'$, die Endpunkte der Repräsentanten von $\vec{y}$ dagegen A$''$, B$''$, und C$''$. Vergleiche die Dreiecke A$'$B$'$C$'$ und A$''$B$''$C$''$ mit dem Dreieck ABC. Welche geometrische Abbildung wird also durch die Vorgabe eines Vektors beschrieben?

3.2.3. Wie viele Pfeile kann man in einen Würfel zeichnen, die jeweils zwei Ecken miteinander verbinden? Wie viele Vektoren werden dadurch festgelegt?

3.2.4. Der allseits bekannte Abenteurer Happysearch ist auf der Jagd nach dem sagenhaften Schatz des Piraten Blackmath. Blackmaths Beschreibung zur Auffindung des Schatzes, die Happysearch auf wunderbare Weise in die Hände fiel, lautet folgendermaßen:

„Vom Totenkopf aus sind $n$ Schritte in die richtige Richtung zurückzulegen, drehe dich um den richtigen Winkel und lege dann $m$ Schritte zurück. Die folgenden vier Wege ergeben sich jeweils aus der vektoriellen Differenz des letzten und des vorletzten Weges.“

Happysearch steht breitbeinig und ziemlich ratlos über dem gewissen Totenkopf und sieht seine Felle schon davonschwimmen, da er weder $n$, $m$, die Richtung noch den Drehwinkel kennt. Da kritzelt sein Schiffsjunge, ein gescheiterter Gymnasiast, der wenigstens die Vektorrechnung noch einigermaßen im Kopf hat, mit einem ausgebleichten Knochen geheimnisvolle Zeichen in den Sand. Nach einer kleinen Weile grinst er Happysearch ins Gesicht, handelt sich eine saftige Beteiligung am zu erwartenden Gewinn heraus und findet in kurzer Zeit den Schatz. Da sage noch einer, dass die Mathematik eine brotlose Kunst sei!

3.2.5. Die Komponenten der Geschwindigkeit $\vec{v}$ eines Flugzeugs sind $40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nach Norden, $30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nach Westen und $20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nach oben. Berechne den Betrag $v$ der Geschwindigkeit und den Steigungswinkel $\varphi$.

3.2.6. Gegeben sind die Punkte $\mathrm{A}(5|-2|-1)$, $\mathrm{B}(1|0|1)$ und $\mathrm{C}(-6|4|5)$.

(a) Zeige, dass die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen ($\mathrm{C} \notin \mathrm{AB}$).

(b) Welche Punkte können ABC zu einem Parallelogramm ergänzen?

3.2.7. Der Betrag der von der Masse $M$ auf die Masse $m$ ausgeübten Kraft ist

$$F = \frac{GMm}{r^2} \qquad \text{(Gravitationsgesetz)},$$

wobei $r$ die Entfernung der beiden Massen ist.

(a) Formuliere das Gravitationsgesetz vektoriell, wobei sich $M$ am Ort P und $m$ am Ort Q befindet. Verwende die Bezeichnungen $\vec{r}_1 = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ und $\vec{r}_2 = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$.

(b) $M = 2{,}0\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ ist die Masse der Sonne am Ort $\mathrm{P}(-3{,}0 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}|6{,}0 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}|0)$, $m = 80\,\mathrm{kg}$ die Masse eines Satelliten am Ort $\mathrm{Q}(9{,}0 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}|-3{,}0 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}|0)$.

$\vec{F}$ ist die Kraft von der Sonne auf den Satelliten. Berechne $\vec{F}$ und $F = |\vec{F}|$ mit $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}$ (Gravitationskonstante).

3.2.8. Der Ort eines Körpers wird durch $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ beschrieben. Die Geschwindigkeit des Körpers ist definiert durch

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

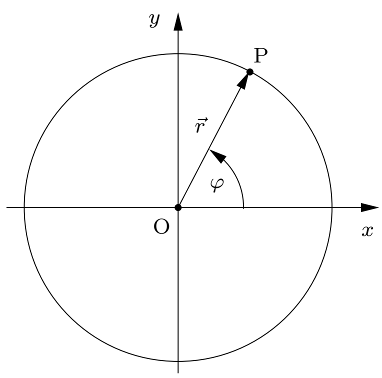
Analog definiert man $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$.

(a) Beweise: $\quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$ und $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \\ \dot{v}_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$

(b) Ein Punkt P bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega$ auf einem Kreis mit Mittelpunkt O und Radius $r$. Zur Zeit $t_0 = 0$ befindet sich P am Ort $(r|0)$. Der Winkel zwischen $\vec{r}$ und der $x$-Achse ist (siehe Abb.) $\varphi(t) = \omega t$. Drücke

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

durch $r$ und $\omega$ aus und berechne dann $\vec{v}(t)$, $v = |\vec{v}(t)|$, $\vec{a}(t)$ und $a = |\vec{a}(t)|$.



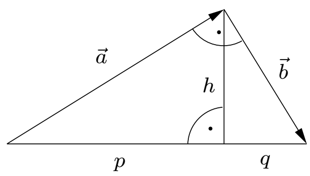
## 3.3 Das Skalarprodukt

3.3.1. (a) Beweise: Für $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{o}$ gilt: $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ stehen senkrecht auf $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

(b) Welche Einheitsvektoren sind zu $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ orthogonal?

(c) $\begin{pmatrix} x \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix}$. Bestimme fünf geeignete Wertepaare $(x, y)$ und zeichne die dazu gehörenden Vektoren.

3.3.2. Beweise mit Hilfe nebenstehender Abbildung den Höhensatz.




3.3.3. Bestimme $y$ so, dass $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} \\ y \end{pmatrix}$ einen 30°-Winkel miteinander einschließen.

3.3.4. Berechne die Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit A $(1|5|-3)$, B $(7|0|1)$ und C $(-4|-2|2)$.

3.3.5. (a) Beweise: Dreht man den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel $\varphi$, dann erhält man den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \cos\varphi - a_2 \sin\varphi \\ a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\varphi \end{pmatrix}$.

(b) Drehe den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel $\varphi = 60°$.

3.3.6. Wird ein Körper K unter dem Einfluss der Kraft $\vec{F}$ um $\vec{x}$ verschoben, dann wird an K die Arbeit $W = \vec{F} \cdot \vec{x}$ verrichtet (Definition der Arbeit).

(a) Ein Körper K bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf einer Kreisbahn. Welche Arbeit $W$ wird während eines Umlaufs von der Zentripetalkraft an K verrichtet?

(b) Ein Fußball bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$. Auf ihn wirkt die Gewichtskraft $\vec{G}$ und eine der Geschwindigkeit entgegengesetzte Reibungskraft mit dem Betrag $R = kv^2$ $(v = |\vec{v}|)$. Leite eine möglichst einfache Formel für die Leistung $P = \frac{W}{t}$ her, die am Ball verrichtet wird. Berechne $P$ dann für

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ -5 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{N}, \quad k = 5 \cdot 10^{-3} \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$$

Was bedeutet das Vorzeichen von $P$? Wie ändert sich dieses Vorzeichen während des Ballflugs?

## 3.4 Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

3.4.1. Beweise die LAGRANGEsche Identität:

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

3.4.2. Ein rechteckiges Solarpaneel ist durch die Eckpunkte A, B, C und D mit A(3|2|4), B(6|8|4) und D(1|3|6,5) gegeben. Alle Zahlenangaben verstehen sich in Metern, wir rechnen aber, wenn nicht anders angegeben, ohne Einheiten. Die $x_1$-Achse zeigt nach Süden.

(a) Berechne die Koordinaten von C und zeige, dass es sich bei dem Parallelogramm ABCD tatsächlich um ein Rechteck handelt. M sei der Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks; berechne die Koordinaten von M.

(b) Zeichne ein Schrägbild des Rechtecks ABCD (Einheit: 1 cm). Zeichne auch die senkrechte Projektion des Rechtecks in die $x_1x_2$-Ebene ein.

(c) $E$ ist die Ebene, die A, B, C und D enthält. $\vec{n}$ ist ein Normalenvektor von $E$ mit dem Betrag $n = |\vec{n}| = 6$, der nach oben und Süden zeigt. Berechne die Koordinaten von $\vec{n}$ und die Koordinaten des Punktes N mit $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \vec{n}$. Zeichne $\vec{n}$ mit dem Anfangspunkt M in das schon vorhandene Koordinatensystem.

(d) Der Vektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ zeigt von M in Richtung Sonne. Zeichne $\vec{s}$ in das Schrägbild ein und berechne den Winkel $\sigma$ zwischen $\vec{s}$ und $\vec{n}$.

(e) Die elektrische Leistung unseres Solarpaneels bei unbedecktem Himmel ist

$$P = kA_\mathrm{s} \cdot \vec{n}_0 \cdot \vec{s}_0 \quad \text{mit} \quad k = 0{,}11\,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}^2}$$

Dabei sind $\vec{n}_0$ und $\vec{s}_0$ die Einheitsvektoren von $\vec{n}$ und $\vec{s}$ und $A_\mathrm{s}$ ist die Fläche des Solarpaneels. Berechne $P$ (jetzt mit Einheiten rechnen).

3.4.3. Ein parallelogrammförmiges Hanggrundstück ist durch die Eckpunkte A, B, C und D mit A(60|50|20), B(70|110|7,5) und D(0|10|55) gegeben. Alle Zahlenangaben verstehen sich in Metern, wir rechnen aber, wenn nicht anders angegeben, ohne Einheiten. Die $x_1$-Achse zeigt nach Süden.

(a) Berechne die Koordinaten von C und zeige, dass es sich bei dem Parallelogramm ABCD nicht um ein Rechteck handelt. M sei der Diagonalenschnittpunkt des Parallelogramms; berechne die Koordinaten von M.

(b) Zeichne ein Schrägbild des Parallelogramms ABCD (Einheit: 0,1 cm). Zeichne auch die senkrechte Projektion des Rechtecks in die $x_1x_2$-Ebene ein.

(c) $E$ ist die Ebene, die A, B, C und D enthält. $\vec{n}$ ist ein Normalenvektor von $E$ mit dem Betrag $n = |\vec{n}| = 90$, der nach oben und Süden zeigt. Berechne die Koordinaten von $\vec{n}$ und die Koordinaten des Punktes N mit $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \vec{n}$. Zeichne $\vec{n}$ mit dem Anfangspunkt M in das schon vorhandene Koordinatensystem.

(d) Welchen Neigungswinkel $\varphi$ hat E gegen die $x_1x_2$-Ebene?

(e) Berechne den Flächeninhalt $F$ des Grundstücks.

(f) Das Grundstück soll in ein flächengleiches, quadratisches Grundstück umgewandelt werden (AB′C′D′), wobei die linke untere Ecke A erhalten bleiben soll und die untere Seite [AB′] horizontal verläuft, also parallel zur $x_1x_2$-Ebene ist. Berechne zuerst die Vektoren $\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{AB}'}$ und $\vec{s} = \overrightarrow{\mathrm{AD}'}$ und dann die Koordinaten von B′, C′ und D′. Zeichne das neue Grundstück in das Schrägbild ein.

3.4.4. $k$ ist die Menge aller Punkte der Kugelfläche um M$(-9|6|6)$ mit dem Radius $r = 11$. Die Schnittpunkte von $k$ mit der $x_1$-Achse sind $\mathrm{A}_1$ und $\mathrm{A}_2$, mit der $x_2$-Achse $\mathrm{B}_1$ und $\mathrm{B}_2$ und mit der $x_3$-Achse $\mathrm{C}_1$ und $\mathrm{C}_2$, wobei die Punkte mit dem Index 1 jeweils näher am Ursprung O liegen.

(a) Berechne die Koordinaten von $\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_2$, $\mathrm{B}_1$, $\mathrm{B}_2$, $\mathrm{C}_1$ und $\mathrm{C}_2$.

(b) Die Ebene $E$ ist durch die Punkte $\mathrm{A}_2$, $\mathrm{B}_2$ und M festgelegt (Äquatorebene der Kugel). N (Nordpol) und S (Südpol) sind die Punkte auf der Kugel, die von $E$ den größten Abstand haben. Berechne die Koordinaten von N und S.

(c) Stelle M, die Kugelschnittpunkte mit den Achsen und N in einem Schrägbild dar (Einheit: 1 cm). Platzbedarf: $\begin{array}{ccc} & 13 & \\ -2 & \mathrm{O} & 12 \\ & -1 & \end{array}$

(d) Berechne den Flächeninhalt des Schnittkreises $k_{12}$ der Kugel mit der $x_1x_2$-Ebene und gib die Gleichung von $k_{12}$ an.

(e) Berechne die Länge des kürzesten Weges auf der Kugelfläche von $\mathrm{C}_1$ nach $\mathrm{B}_2$.

(f) Für welche $x_3$ gilt $\mathrm{P}(-7|-3|x_3) \in k$?

(g) Liegt Q$(1|6|1)$ innerhalb der Kugel $k$?

3.4.5. Für eine Weltausstellung wird ein gigantischer Globus aufgebaut. Die folgenden Zahlenangaben verstehen sich in Metern, rechne aber ohne Einheiten. Der kugelförmige Globus hat den Mittelpunkt M$(-12|10|9)$ und den Radius $r = 17$, mit $k$ bezeichnen wir die Menge aller Punkte der Kugeloberfläche. Der Boden liegt in der $x_1x_2$-Ebene.

(a) Stelle die Gleichung für $k$ in der Koordinatenform auf und berechne die Koordinaten der Schnittpunkte A und B von $k$ mit der $x_2$-Achse (A liegt näher am Ursprung O als B).

[Zur Kontrolle: A$(0|2|0)$, B$(0|18|0)$]

(b) Der Äquator der Kugel verläuft durch die Punkte A und B, Der Nordpol N liegt oben (also nicht unter dem Boden). Verwende die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{MA}}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{MB}}$, um die Koordinaten von N zu berechnen.

(c) Wie lang ist der kürzeste Weg auf der Kugel, der von A nach B führt?

(d) Die Platzmiete für den Globus richtet sich nach seiner Standfläche. Berechne diese Schnittfläche der Kugel mit der $x_1x_2$-Ebene.

(e) Der Standort des Globusses auf der Erde ist als Punkt C auf dem Globus markiert. C liegt auf dem Meridian von N nach B und hat die nördliche Breite $\beta = 60°$. Berechne die Koordinaten von C.

Hinweis: Stelle die vor, dein Blatt Papier liegt in der durch B, N und C gegebenen Ebene. Zeichne die Vektoren $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{MB}}$, $\vec{n} = \overrightarrow{\mathrm{MN}}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{MC}}$ ein (wähle für diese Überlegungsfigur $r \mathrel{\widehat{=}} 5\,\mathrm{cm}$) und stelle $\vec{c}$ durch $\vec{b}$ und $\vec{n}$ dar.

(f) Stelle alle gegebenen und berechneten Punkte und Vektoren in einem Schrägbild mit der Einheit 0,5 cm dar.

3.4.6. Ein Gewächshaus besteht aus einer durchsichtigen Halbkugel aus Kunststoff mit dem Radius $r = 5$. Der Ursprung des Koordinatensystems ist der Mittelpunkt der Halbkugel, der Boden ist die $x_1x_2$-Ebene. Aus Gründen des Vogelschutzes sind Umrissbilder von Vögeln auf die Kuppel geklebt worden. Eines befindet sich bei $\mathrm{A}(4{,}8|0|a_3)$, ein anderes bei $\mathrm{B}(0|b_2|4)$. Alle Koordinaten verstehen sich in Metern. Rechne aber, außer in Teilaufgabe (b), ohne Einheiten.

(a) Stelle die Gleichung der Halbkugel $k$ auf und berechne die fehlenden Koordinaten von A und B. Ein weiteres Umrissbild befindet sich am Ort C, wobei $\vec{C}$ auf $\vec{A}$ und auf $\vec{B}$ senkrecht steht. Berechne die Koordinaten von $\vec{C}$.

(b) Eine Schnecke kriecht auf der Kuppel auf dem kürzesten Weg von A nach B. Wie lange braucht sie dazu, wenn sie in einer Minute 15 cm zurücklegt?

(c) Die Richtung der parallel einfallenden Sonnenstrahlen ist durch den Vektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechne die Koordinaten des Schattens von Punkt B auf dem Boden.

(d) Ein kugelförmiger Ballon mit dem Radius $r' = 4$ berührt die Gewächshauskuppel im Punkt $\mathrm{D}(-1{,}8|4|d_3)$. Mit $k'$ bezeichnen wir die Menge aller Punkte der Ballonhülle. Stelle die Gleichung für $k'$ auf.

(e) Zeichne alle gegebenen und berechneten Punkte und Vektoren in ein Schrägbild.

3.4.7. (a) Versuche, möglichst viel über die Lösungsmenge der Gleichung

$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$$

mit dem unbekannten Vektor $\vec{x}$ herauszufinden. Verwende eine sauber beschriftete Zeichnung als Überlegungsfigur und die gängigen Formeln für das Kreuzprodukt. Unterscheide die Fälle $\vec{a} \perp \vec{b}$ und $\vec{a} \not\perp \vec{b}$.

(b) Gib mindestens zwei Elemente der Lösungsmenge von

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$$

an (am besten natürlich die ganze Lösungsmenge).

3.4.8. **Flugrouten**

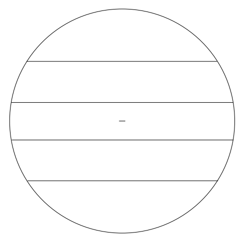
Nürnberg ($\lambda_1 = 11{,}1°$) und Vancouver (Kanada, $\lambda_2 = -123{,}0°$) liegen angenähert auf dem gleichen Breitenkreis mit $\varphi = 49{,}3°$.

(a) Berechne die Koordinaten des nördlichsten Punktes der kürzesten Flugroute von Nürnberg nach Vancouver und suche diesen Punkt auf einer Landkarte.

(b) Vergleiche die Länge des kürzesten Weges mit der Länge der der Flugroute, die entlang des Breitenkreises von Nürnberg nach Vancouver führt (Flug immer genau nach Westen).

3.4.9. **Pizzastreifen**

Eine kreisförmige Pizza mit Radius $r$ soll durch gerade, parallele Schnitte in fünf gleiche Teile zerlegt werden. In welchen Abständen vom Mittelpunkt müssen die Schnitte angebracht werden?



# 4 Stochastik

## 4.1 Wiederholungsaufgaben

4.1.1. Von 10 000 Touristen, die Transsylvanien besuchen, stecken sich im Mittel acht mit dem Draculvirus an, die Ansteckungsrate ist also $a = 8\cdot 10^{-4}$. Herr Helsing unterzieht sich nach seinem Transsyslvanien-Urlaub einem medizinischen Test. Dieser Test erkennt 98 % der Infizierten und weist somit $f_1 = 2\,\%$ der Infizierten fälschlicherweise als gesund aus. Andererseits werden $f_2 = 3\,\%$ der nichtangesteckten Untersuchten fälschlicherweise als infiziert eingestuft. Herrn Helsings Test fällt positiv aus, d.h. er zeigt an, dass er infiziert ist.

(a) Schätze zuerst, in welchem Bereich die Wahrscheinlichkeit $p$ liegt, dass Herr Helsing tatsächlich vom Draculvirus befallen ist:

kleiner als 10 %, zwischen 10% und 90 %, größer als 90 %

(b) Berechne jetzt die Wahrscheinlichkeit $p$, dass Herr Helsing tatsächlich vom Draculvirus befallen ist. Fülle zunächst folgende Vierfeldertafel aus, die von einer Million getesteter Transsylvanien-Urlauber ausgeht:

| absol. Häuf. | Gesunde | Kranke | |
|---|---|---|---|
| positiv getestet | | | |
| negativ getestet | | | |
| | | | $n = 1\,000\,000$ |

Stelle den ganzen Sachverhalt auch in einem Baumdiagramm dar.

(c) In einer anderen Urblaubssaison ist die Ansteckungsrate $a$ zunächst unbekannt. Es werden $n = 2000$ Transsylvanienurlauber gestestet und davon erweisen sich $z = 155$ Personen als positiv. Berechne zunächst $a$ und dann wieder die Wahrscheinlichkeit $p$, dass ein als positiv Getesteter tatsächlich erkrankt ist.

Stelle $p$ als Funktion von $a$ dar und zeichne den Grafen dieser Funktion. Welche Definitionsmenge ist für $a$ sinnvoll?

4.1.2. In einem Betrieb sind 60% Männer beschäftigt. Von den Betriebsangehörigen rauchen 10%. Unter den weiblichen Betriebsangehörigen rauchen 15%.

(a) Berechne den Anteil der weiblichen Raucher unter den Betriebsangehörigen.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein beliebig herausgegriffener Betriebsangehöriger

i. weiblich, falls „er“ raucht?

ii. männlich, falls „er“ raucht?

iii. Raucher, falls „er“ männlich ist?

4.1.3. Die Biathletin Kathi gewinnt 19% ihrer bestrittenen Rennen. Normalerweise wachst ihr Freund Andreas die Ski. Wenn Andreas die Ski nicht wachst, gewinnt sie nur 10% der Wettkämpfe. Andreas ist in neun von zehn Rennen ihr Servicemann.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Kathi verliert und Andreas die Ski gewachst hat?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Kathi verliert, obwohl Andreas die Ski gewachst hat?

(c) Kathi hat verloren. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war Andreas der Servicetechniker?

(d) Kathi hat gewonnen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war jetzt Andreas der Skiwachser?

(e) Die angegebenen Daten wurden einer Übersicht von hundert Rennen Kathis entnommen. Schreibe die fehlenden Zahlen in die Tabelle:

Von 100 Rennen hat Kathi

| | |
|---|---|
| mit Andreas als Techniker gewonnen: | |
| ohne Andreas als Techniker gewonnen: | |
| mit Andreas als Techniker verloren: | |
| ohne Andreas als Techniker verloren: | |

4.1.4. **Marathon**

Beim Berlinmarathon nehmen $n = 30\,000$ Sportler teil ($\Omega$), 4,5 Prozent davon schaffen den Lauf in einer Zeit unter drei Stunden ($S$ wie „Sieger“). 90 Prozent der Teilnehmer sind Amateure ($A$), der Rest ($\overline{A}$) ist in einem Verein organisiert (die „Profis“). Die Wahrscheinlichkeit $p = P_{\overline{A}}(S)$, dass ein Profi den Lauf unter 3 h beendet, ist 36-mal so groß wie die Wahrscheinlichkeit $a = P_A(S)$, dass ein Amateur die Siegerzeit von 3 h knackt.

(a) Erstelle eine Vierfeldertafel und ein Baumdiagramm ($A$ in der 1. Stufe) und trage alle gegebenen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten ein (auch diejenigen, die nur durch $a$ oder $p$ ausgedrückt werden können). Berechne dann in nachvollziehbarer Weise $a$ und $p$.

[Zur Kontrolle: $a = 1\,\%$]

(b) Vervollständige das schon erstellte Baumdiagramm und die Vierfeldertafel mit den fertigen Zahlenwerten, erstelle eine Vierfeldertafel für absolute Häufigkeiten und das inverse Baumdiagramm.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $p_1$, dass ein beliebig ausgewählter Sieger ein Amateur ist? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $p_2$, dass ein beliebig ausgewählter Teilnehmer ein „siegender Amateur“ ist?

(d) Berechne und beschreibe in Worten: $P_{\overline{S}}(\overline{A})$.

## 4.2 Ereignisalgebra

4.2.1. In dieser Aufgabe bedeutet das Wort *Schüler* Buben *und* Mädchen.

Die Befragung der Schüler eines Kurses erbrachte folgendes Ergebnis:

- 14 Schüler sind zwar vom Sport, nicht aber von der Mathematik begeistert
- Ein Mädchen liebt Mathe und Sport
- Drei Buben lieben Mathe und Sport
- Sechs Mädchen sind sportbegeistert
- Zwei Mädchen hassen Mathe und Sport
- 18 Schüler mögen keine Mathematik
- Vier Buben mögen keinen Sport
- Sieben Schüler mögen Mathe

Verwende folgende Mengensymbole:

$B$: Buben $\quad$ $M$: Mathematiker $\quad$ $S$: Sportler

(a) Wie viele Buben und Mädchen sind in dem Kurs?

(b) Beschreibe folgende Mengen in Worten und berechne ihre Mächtigkeit:

i. $B \cap \overline{M} \cap \overline{S}$

ii. $(B \cap M \cap \overline{S}) \cup (\overline{B} \cap M \cap \overline{S})$

(c) Beschreibe folgende Ereignisse mit Mengensymbolen und berechne ihre Mächtigkeit:

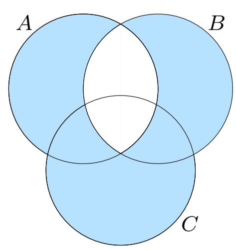
i. Alle sportlichen Buben, die Mathe nicht mögen.

ii. Alle Mädchen, die nur eins mögen, entweder Mathe oder Sport.

iii. Alle Schüler die Mathe mögen oder alle Schüler, die den Sport lieben.

4.2.2. (a) $A$ und $B$ sind Teilmengen eines Ergebnisraumes $\Omega$ mit nichtleerem Durchschnitt ($A \cap B \neq \emptyset$). Stelle $M = (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$ in einem Mengendiagramm dar. Gib noch mindestens zwei andere Schreibweisen von $M$ an.

(b) Drücke die getönt dargestellte Menge $D$ durch $A$, $B$ und $C$ aus.




4.2.3. Für das Folgende darf der Satz

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Für paarweise disjunkte Mengen } A_1, A_2, \ldots, A_n \\ \text{(d.h. } A_i \cap A_k = \emptyset \text{ für } i \neq k\text{) gilt} \\ \qquad |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|\end{array}} \qquad (1)$$

als bekannt vorausgesetzt werden. Zeige zunächst

$$\boxed{|X \setminus Y| = |X| - |X \cap Y|} \qquad (2)$$

und beweise dann den auch für $A \cap B \neq \emptyset$ gültigen Satz

$$\boxed{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|} \qquad (3)$$

Veranschauliche dir zunächst die Aussagen von (2) und (3) in Mengendiagrammen. Gilt die neue Formel (3) auch für $A \cap B = \emptyset$?

4.2.4. Ein roter und ein grüner Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wir betrachten die Ereignisse

$A =$ „Augensumme gerade“ und $B =$ „grüner Würfel zeigt ungerade Zahl“.

(a) Welcher Ergebnisraum $\Omega$ ist sinnvoll?

(b) Schreibe die Elemente von $A$ und $B$ hin.

(c) Gib eine umgangssprachliche Beschreibung der Ereignisse $C = A \cap B$ und $D = A \cup B$. Wie groß ist die Mächtigkeit von $C$, $D$ und $\mathcal{P}(\Omega)$?

(d) Gib die Mengenschreibweise folgender Ereignisse an und zeichne jeweils ein Mengendiagramm:

$E =$ „Weder $A$ noch $B$ treten ein“
$F =$ „$A$ oder $B$ treten ein (oder beide)“
$G =$ „Nur $A$ oder nur $B$ tritt ein (nicht beide)“
$H =$ „Genau eines der beiden Ereignisse $A$ oder $B$ tritt ein“
$K =$ „Höchstens eines der beiden Ereignisse $A$ oder $B$ tritt ein“
$L =$ „Mindestens eines der beiden Ereignisse $A$ oder $B$ tritt ein“

4.2.5. Bei einer Lotterie werden Reisen verlost. Die Wahrscheinlichkeit, eine Reise nach Frankreich zu gewinnen, beträgt 0,11%, für eine Reise ans Meer dagegen 0,22%. Die Wahrscheinlichkeit $p_1$, eine Reise nach Frankreich oder ans Meer zu gewinnen ist zehnmal so groß wie die Wahrscheinlichkeit $p_2$ für den Gewinn einer Reise an ein französisches Meer.

(a) Berechne $p_1$ und $p_2$.

(b) Untersuche die Ereignisse $F$: „Gewinn einer Frankreichreise“ und $M$: „Gewinn einer Reise ans Meer“ auf stochastische Unabhängigkeit.

4.2.6. Ein Würfel wird zweimal geworfen. Untersuche, ob je zwei der folgenden Ereignisse stochastisch unabhängig sind:

$G$ : „Die Summe der gewürfelten Augenzahlen ist gerade.“
$P$ : „Ein Pasch wird gewürfelt.“ (zwei gleiche Augenzahlen)
$A$ : „Beim ersten Wurf wird eine Eins gewürfelt.“
$B$ : „Die Summe der Augenzahlen ist 7.“
$C$ : „Die Summe der Augenzahlen ist 6.“

4.2.7. In einem Dorf gibt es drei Vereine, den Fußballclub (F), den Skiclub (S) und den Trachtenverein (T). ($S$ ist die Menge aller Dorfbewohner im Skiclub usw.) Ein Viertel der Dorfbewohner ist in keinem Verein aktiv, 30 % sind Mitglieder des Fußballclubs, 34 % gehören zum Skiclub und 41 % zum Trachtenverein. Eine Befragung der Dorfbewohner ergibt, dass 13 % im Fußballclub und im Trachtenverein, 17 % im Skiclub aber nicht in den beiden anderen Vereinen, 15 % nur im Fußballclub und 8 % trachtentragende, nicht Fußball spielende Skifahrer sind.

(a) Stelle $\Omega$ (Menge der Dorfbewohner) sowie $F$, $S$ und $T$ in einem Mengendiagramm dar. In diesem Diagramm sind acht disjunkte Teilmengen von $\Omega$ erkennbar. Berechne die Mächtigkeiten dieser Teilmengen als Bruchteile der Gesamtbevölkerung. Verwende

| $T$ | $F$ | $\overline{F}$ | |
|---|---|---|---|
| $S$ | | | |
| $\overline{S}$ | | | |
| | | | 41% |

$+$

| $\overline{T}$ | $F$ | $\overline{F}$ | |
|---|---|---|---|
| $S$ | | | |
| $\overline{S}$ | | | |
| | | | 59% |

$=$

| $\Omega$ | $F$ | $\overline{F}$ | |
|---|---|---|---|
| $S$ | | | |
| $\overline{S}$ | | | |
| | | | 100% |

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $p_1$, dass ein beliebig herausgegriffener Dorfbewohner bei den Trachtlern, aber in keinem Sportverein ist. Berechne die Wahrscheinlichkeit $p_2$, dass ein Nichtsportler im Trachtenverein ist und die Wahrscheinlichkeit $p_3$, dass ein Trachtler in keinem Sportverein ist.

(c) Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten für einen beliebigen Dorfbewohner:

$$p_4 = P(\text{„Mitglied in mindestens einem Verein“})$$
$$p_5 = P(\text{„Mitglied in genau einem Verein“})$$
$$p_6 = P(\text{„Mitglied in mindestens zwei Vereinen“})$$
$$p_7 = P(\text{„Mitglied in genau zwei Vereinen“})$$

Drücke die zu den Wahrscheinlichkeiten $p_4$ bis $p_7$ gehörenden Ereignisse durch $F$, $S$ und $T$ aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mitglied in mindestens einem Verein sogar allen drei Vereinen angehört?

(d) Berechne und beschreibe in Worten:

$$P(\overline{F \cup S} \cap T), \quad P((\overline{F} \cup \overline{S}) \cap T)$$

(e) Untersuche je zwei Vereinszugehörigkeiten auf stochastische Unabhängigkeit. Welches Paar ist am „unabhängigsten“?

4.2.8. Eine Olympiade ist ein Zeitraum von vier Jahren. Nebenstehende Tabelle zeigt, in welchen Olympiaden die deutsche Nationalmannschaft bei Fußball-Welt- und Europameisterschaften das Halbfinale erreichte.
Wir betrachten die Meisterschaften als Zufallsexperiment mit dem Ergebnisraum

$$\Omega = \{00, 01, 10, 11\},$$

wobei die Bedeutung der Ergebnisse aus der Tabelle hervorgeht. Untersuche die Ereignisse W: „Deutschland im Halbfinale der WM" und E: „Deutschland im Halbfinale der EM" auf stochastische Unabhängigkeit. Achte auf eine sinnvolle Genauigkeit!

| Halbfinale | WM | EM | $\omega$ |
|---|---|---|---|
| 58/60 | x | | 10 |
| 62/64 | | | 00 |
| 66/68 | x | | 10 |
| 70/72 | x | x | 11 |
| 74/76 | x | x | 11 |
| 78/80 | | x | 01 |
| 82/84 | x | | 10 |
| 86/88 | x | x | 11 |
| 90/92 | x | x | 11 |
| 94/96 | | x | 01 |
| 98/00 | | | 00 |
| 02/04 | x | | 10 |
| 06/08 | x | x | 11 |
| 10/12 | x | x | 11 |