Mathematik Q11
Lösungen zu den Aufgaben

Richard Reindl

Die aktuellste Version der Aufgaben findet man unter
`http://www.stbit.de`

4. April 2014

1 Gebrochen rationale Funktionen

1.1 Grenzwerte mit $x \to a$

1.1.1. (a) existiert nicht (b) $+\infty$

1.1.2. (a) existiert nicht (b) $\left|x^n \sin\frac{1}{x}\right| \leqq |x^n| \implies \lim\limits_{x\to 0^+} = 0$

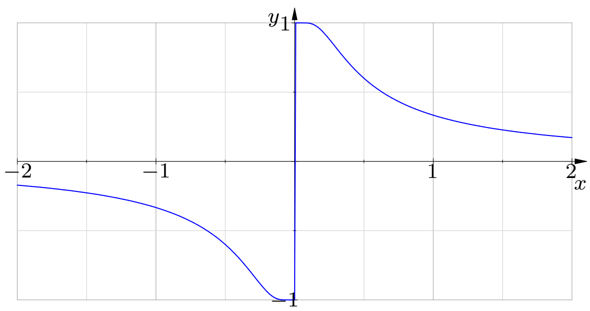
1.1.3. (a) $f(-x) = \dfrac{2^{-\frac{1}{x}}-1}{2^{-\frac{1}{x}}+1} = \dfrac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}} = -f(x) \implies$ punktsymmetrisch zum Ursprung

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-2^{-\frac{1}{x}}}{1+2^{-\frac{1}{x}}} = \left(\frac{1-2^{-\infty}}{1+2^{-\infty}}\right) = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} = \left(\frac{2^{-\infty}-1}{2^{-\infty}+1}\right) = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

(b) $|f(x)-1| = 1 - \dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} < \varepsilon \implies \delta = \dfrac{\lg 2}{\lg\left(\frac{2}{\varepsilon}-1\right)} \approx 0{,}0912$

(c)



1.1.4. (a) $D = [0;1[\cup]1;\infty[,\ f(0)=2,\ \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = -\infty,$
$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

(b) $D = [0;1[\cup]1;\infty[,\ f(0)=1,\ \lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1\pm 0}(1+\sqrt{x}) = 2,$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

1.1.5. (a) 0^+ (b) $0^\pm$ (c) $\pm\infty$

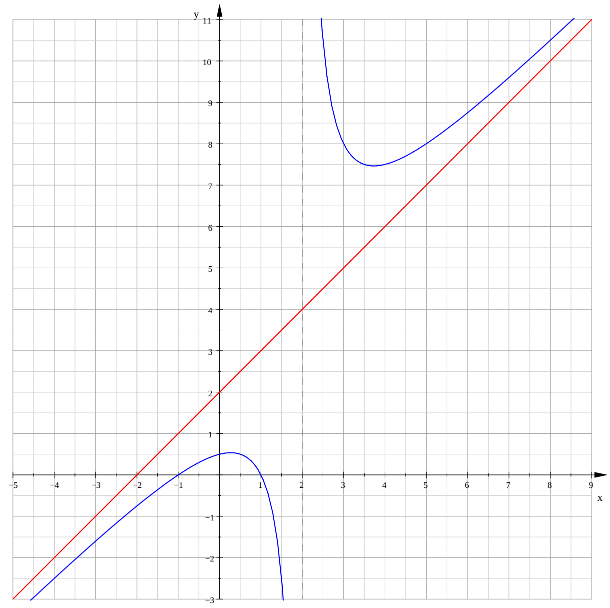
1.1.6. (a)

	$]-\infty,-1[$	$]-1,1[$	$]1,2[$	$]2,\infty[$
x^2-1	$+$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

(b) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\},\ f(x) = x+2+\dfrac{3}{x-2} \implies$ schräge Asymptote: $y = x+2$

(c)

x	$f(x)$
$-4{,}0$	$-2{,}50$
$-2{,}0$	$-0{,}75$
$-1{,}0$	$0{,}00$
$0{,}0$	$0{,}50$
$1{,}0$	$0{,}00$
$1{,}5$	$-2{,}50$
$2{,}5$	$10{,}50$
$3{,}0$	$8{,}00$
$4{,}0$	$7{,}50$
$5{,}0$	$8{,}00$
$7{,}0$	$9{,}60$



(d) $f(x) > 100$ kommt nur für $x > 2$ in Frage: $\implies$ $x - 2 > 0$ $\implies$

$$\frac{x^2-1}{x-2} > 100$$

$$\iff \quad x^2 - 1 > 100x - 200$$

$$\iff \quad x^2 - 100x + 50^2 > 2301$$

$$\iff \quad |x - 50| > \sqrt{2301}$$

$$\iff \quad x > 50 + \sqrt{2301} \lor x < 50 - \sqrt{2301}$$

oder ungefähr $\quad x > 97{,}9687 \lor x < 2{,}03126$

$$f(x) > 100 \quad \iff \quad x \in]2, 50 - \sqrt{2301}[\cup]50 + \sqrt{2301}, \infty[$$

1.2 Gebrochen rationale Funktionen

1.2.1. -4

1.2.2. (a) $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{x+3}{x-3} = 1 + \dfrac{6}{x-3}$, $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\,2\,;3\,\}$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -5, \quad \lim\limits_{x\to 3^\pm} f(x) = \pm\infty$

(b) $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-3)}$, $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\,-2\,;3\,\}$

$\lim\limits_{x\to(-2)^\pm} f(x) = \pm\infty, \quad \lim\limits_{x\to 3^\pm} f(x) = \pm\infty$

1.2.3. (a) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$, $\quad \lim\limits_{x\to 3^\pm} f(x) = \mp\infty, \quad \lim\limits_{x\to(-3)^\pm} f(x) = \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = (-1)^-$

(b) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 3\}$, $\quad \lim\limits_{x\to 3^\pm} f(x) = \mp\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to(-3)^\pm} f(x) = \mp\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0^\mp$

1.2.4. (a) z. B. $a(x) = \dfrac{2x^2+x}{x^2+1}$

(b) z. B. $b(x) = \dfrac{x^3+x^2+x}{3x^3-x^2+x}$

(c) z. B. $c(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2+2x+2}$

(d) z. B. $d(x) = \dfrac{x^4+x^3+x}{-x^2+x-6}$

(e) z. B. $e(x) = \dfrac{1}{x-2}$

(f) z. B. $f(x) = -\dfrac{1}{(x+3)^2}$

(g) z. B. $g(x) = \dfrac{x-1}{(x-2)^2}$

(h) z. B. $h(x) = \dfrac{x-5}{(x-2)^2}$

1.2.5. (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$x^2+x-2=0 \quad\Longrightarrow\quad \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \quad\Longrightarrow\quad x_{01}=-2,\ x_{02}=1$$

(b)

	$]-\infty,-2[$	$]-2,1[$	$]1,2[$	$]2,\infty[$
x^2+x-2	$+$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

(c)

$$\begin{array}{l} \big(\ \ x^2 \ \ +x-2\big) \div \big(2x-4\big) = \tfrac{1}{2}x+\tfrac{3}{2}+\dfrac{4}{2x-4} \\ \underline{\ -x^2+2x\ } \\ \qquad\quad 3x-2 \\ \qquad\ \underline{-3x+6} \\ \qquad\qquad\ \ 4 \end{array}$$

$f(x) = \dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{x-2} \quad\Longrightarrow\quad$ schräge Asymptote: $y = p(x) = \dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

Senkrechte Asymptote: $x=2$

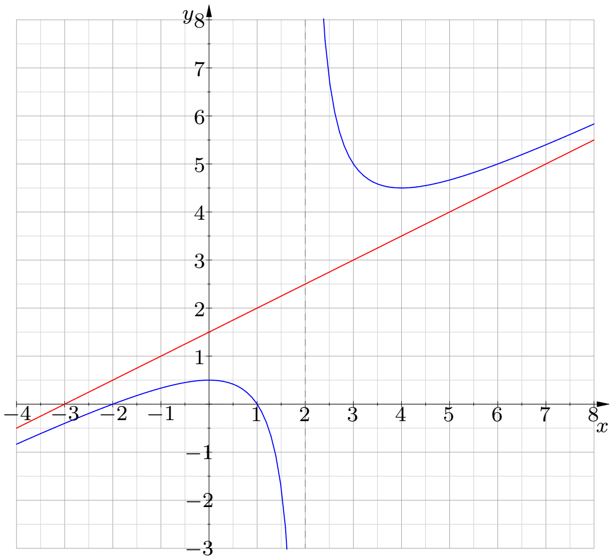
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(2-h) = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{2}(2-h)+\frac{3}{2}+\frac{2}{-h}\right) = \left(\frac{5}{2}+\frac{2}{0^-}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(2+h) = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{2}(2+h)+\frac{3}{2}+\frac{2}{h}\right) = \left(\frac{5}{2}+\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$$

(d)

x	$f(x)$
$-4{,}0$	$-0{,}83$
$-3{,}0$	$-0{,}40$
$-2{,}0$	$-0{,}00$
$-1{,}0$	$0{,}33$
$0{,}0$	$0{,}50$
$1{,}0$	$0{,}00$
$1{,}5$	$-1{,}75$
$2{,}5$	$6{,}75$
$3{,}0$	$5{,}00$
$4{,}0$	$4{,}50$
$5{,}0$	$4{,}67$
$6{,}0$	$5{,}00$
$7{,}0$	$5{,}40$
$8{,}0$	$5{,}83$



(e)

$$
\begin{aligned}
& |f(x)-p(x)| = \left|\frac{2}{x-2}\right| < 10^{-3} \\
\iff \quad & |x-2| > 2000 \\
\iff \quad & x > 2002 \vee x < -1998
\end{aligned}
$$

2 Die Ableitung

2.1 Definition der Ableitung, Tangenten

2.1.1. $t(x) = 2\,a\,x - a^2, \quad n(x) = -\frac{1}{2\,a} \cdot x + a^2 + \frac{1}{2}$

NS von t: $x_{0,t} = \frac{a}{2}$, NS von n: $x_{0,n} = 2\,a^3 + a$

Konstruktion der Tangente: A $(a|f(a))$ mit NS $\left(\frac{a}{2}\middle|0\right)$ verbinden.

2.1.2. $t(x) = 2\,a\,x - a^2, \quad n(x) = -\frac{1}{2\,a} \cdot x + a^2 + \frac{1}{2}$

P $\left(p\middle|p^2\right)$ mit $p = -a - \frac{1}{2\,a}$, $\quad h(x) = 2\,p\,x - p^2$, $\quad$ S $\left(-\frac{1}{4\,a}\middle| -\frac{1}{2} - a^2\right)$

Kurve der Schnittpunkte S: $\quad y(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{16\,x^2}$

2.1.3. $t(x) = 2\,a\,x - a^2, \quad n(x) = \frac{1}{2\,a} \cdot x + a^2 + \frac{1}{2}$

a	0	0,1	0,3	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	2,0	3,0
x_s	0	-0,11	-0,64	-1,82	3,33	2,16	1,83	1,70	1,66	1,875	2,27	3,17
y_s	0	-0,03	-0,47	-1,62	3,63	2,53	2,28	2,26	2,33	3,375	5,07	10,03

2.1.4. $\tan(90^\circ - \alpha) = -\tan(\alpha - 90^\circ) = -\dfrac{\sin(\alpha - 90^\circ)}{\cos(\alpha - 90^\circ)} = -\dfrac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

Steigung von g: $\quad m = \tan\gamma = \tan(90^\circ - 2\varphi) = \dfrac{1}{\tan 2\varphi} = \dfrac{1 - \tan^2\varphi}{2\tan\varphi}$

$\tan\varphi = \tan(90^\circ - \tau) = \dfrac{1}{\tan\tau} = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{2ba} \quad\Longrightarrow\quad m = ba - \dfrac{1}{4ba}$

Aus $g(x) = m\,x + p$ und $\mathrm{A} \in g$ folgt

$$g(a) = \left(ba - \frac{1}{4ba}\right) a + p = ba^2 \quad\Longrightarrow\quad p = \frac{1}{4b}$$

Da p nicht von a abhängt, geht jeder zur y-Achse parallel einfallende Strahl durch P.

2.1.5. (a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2xh - h^2}{h\,x^2\,(x+h)^2} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-(2x-h)}{x^2\,(x+h)^2} = -\dfrac{2}{x^3}$

2.1.6. (a) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \quad\Longrightarrow\quad f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$

$t(x) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^2}(x - a) = \dfrac{2}{a} - \dfrac{x}{a^2}$

Schnittpunkte mit den Achsen: $\left(0\middle|\frac{2}{a}\right)$ und $(2a|0)$

(b) a durch $\frac{1}{a}$ in $t(x)$ ersetzen:

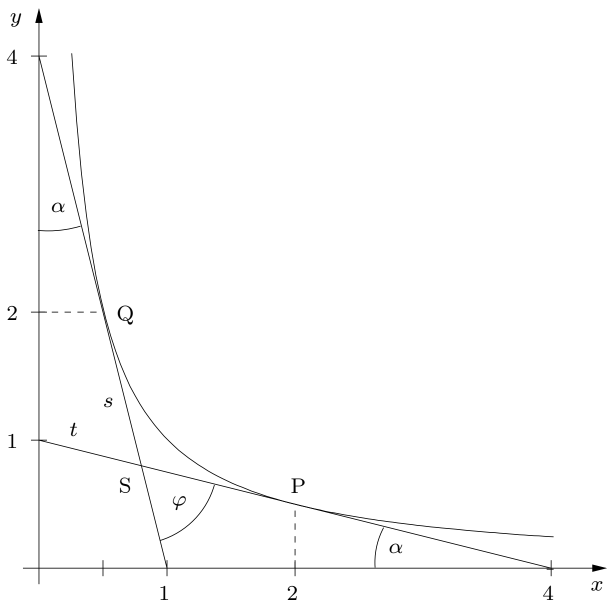
$s(x) = 2a - a^2 x$

Schnittpunkte mit den Achsen: $(0|2a)$ und $\left(\frac{2}{a}\middle|0\right)$

$t(x_\mathrm{s}) = s(x_\mathrm{s}) \quad\Longrightarrow\quad x_\mathrm{s} = 2\,\dfrac{a - \frac{1}{a}}{a^2 - \frac{1}{a^2}} = \dfrac{2a}{1 + a^2}$

$y_\mathrm{s} = 2a - a^2 x_\mathrm{s} = \dfrac{2a}{1 + a^2} = x_\mathrm{s}$

(c) $\tan\alpha = \dfrac{\frac{2}{a}}{2a} = \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{4} \quad\Longrightarrow\quad \alpha \approx 14^\circ \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 90^\circ - 2\alpha \approx 62^\circ$



2.1.7.

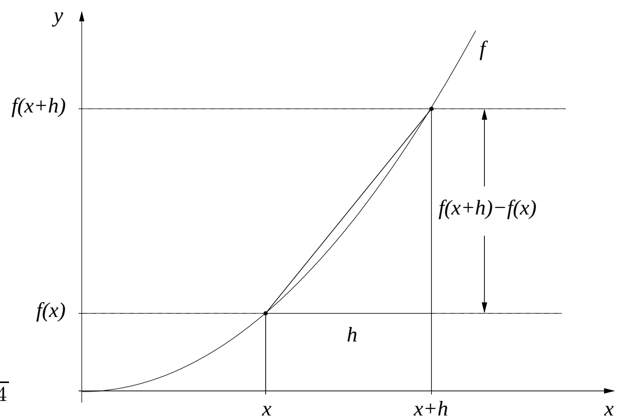
(a) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(b)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^3} - \frac{1}{x^3}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3x^2 h - 3xh^2 - h^3}{h\, x^3\, (x+h)^3} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(3x^2 + 3xh + h^2)}{x^3\, (x+h)^3} = -\frac{3}{x^4}$$



2.1.8. Für $x > 0$ ist f fallend, dort muss f' negativ sein; daher scheidet f_4 aus. Für $x \to \infty$ geht die Steigung von f und damit f' gegen null; daher scheidet f_1 aus. Die Steigung von f bei $x = 1$ ist $f'(1) \approx -0{,}5$, daher ist f_3 die gesuchte Funktion.

2.1.9. An den Stellen mit waagrechter Tangente von f muss f' eine Nullstelle besitzen, daher scheidet f_4 aus. Für $x < -1{,}6$ ist f fallend, dort muss f' negativ sein; daher scheidet f_3 aus. Die größte Steigung von f bei $x \approx -0{,}7$ ist etwas größer als eins, auf keinen Fall 2,7 (Tangente mit Steigungsdreieck zeichnen!); also ist f_2 die gesuchte Funktion.

2.1.10. An den Nullstellen von f muss F waagrechte Tangenten besitzen, daher scheidet F_1 aus. F_2 und F_3 können beide Stammfunktionen von f sein.

2.2 Einfache Ableitungsregeln

2.2.1. (a) $f'(x) = a$ (b) $f'(x) = 2\,a\,x + b - \dfrac{d}{x^2}$

2.2.2. (a) $f'(x) = -0{,}6\,x + 1{,}5$; $f'(x) = 0$ für $x = 2{,}5$

(b) $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$; $f'(x) = 0$ für $x = \pm 2$

(c) $f'(x) = -\dfrac{1}{8\,x^2} - x; \quad f'(x) = 0 \quad \text{für} \quad x = -\frac{1}{2}$

2.2.3. $f'(x) = 4\,x - 4 \quad . \quad g'(x) = -x + 2 \quad , \quad f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow$

$x_1 = \dfrac{6}{5} - \dfrac{2}{5}\sqrt{19} \approx -0{,}54 \quad x_2 = \dfrac{6}{5} + \dfrac{2}{5}\sqrt{19} \approx 2{,}94$

$\varphi_1 = 30{,}66^\circ \quad , \quad \varphi_2 = 53{,}99^\circ$

2.2.4. (a) $f'(x) = x + 1, \quad g'(x) = -\dfrac{5}{x^2}.$

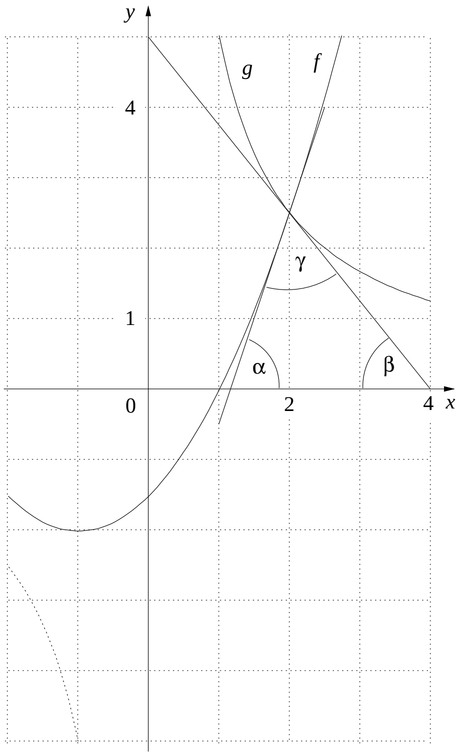
(b) $f'(x_\text{s}) = x_\text{s} + 1 = 0, \quad x_\text{s} = -1, \quad y_\text{s} = f(x_\text{s}) = -2, \quad f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$

(c)

x	-1	0	1	2	3	4
f	-2	$-1{,}5$	0	$2{,}5$	6	$10{,}5$
g	-5	$-$	5	$2{,}5$	$1{,}67$	$1{,}25$

x	$-0{,}5$	$0{,}5$	$1{,}5$	$2{,}5$
f	$-1{,}875$	$-0{,}875$	$1{,}125$	$4{,}125$
g	-10	10	$3{,}33$	2

Schnittpunkt: S $(2|2{,}5)$



(d) $g'(2) = -\frac{5}{4}, \quad t(x) = -\frac{5}{4}x + b$

$\text{S} \in t: \quad t(2) = g(2) = \frac{5}{2} = -\frac{5}{4} \cdot 2 + b$

$\Longrightarrow \quad b = 5, \quad t(x) = -\frac{5}{4}x + 5$

Schnittp. mit Achsen: $(0|5)$ und $(4|0)$

(e) $\tan\beta = |g'(2)| = 1{,}25, \quad \beta = 51{,}34^\circ$

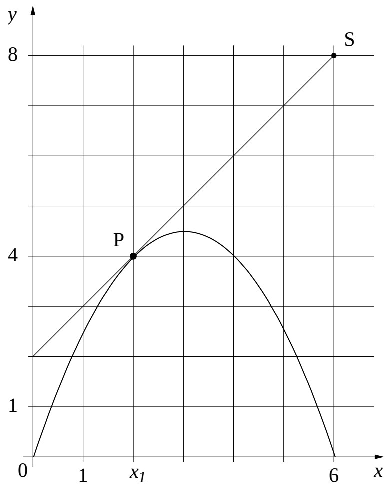
$\tan\alpha = f'(2) = 3, \quad \alpha = 71{,}57^\circ$

$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 57{,}1^\circ$

2.2.5.

$$\begin{aligned}
\frac{8 - f(x_1)}{6 - x_1} &= f'(x_1) = -x_1 + 3 \\
8 - f(x_1) &= (6 - x_1)(-x_1 + 3) \\
8 + \frac{x_1^2}{2} - 3x_1 &= 18 - 9x_1 + x_1^2 \\
\frac{x_1^2}{2} - 6x_1 &= -10 \\
x_1^2 - 2 \cdot 6x_1 + 6^2 &= 36 - 20 = 16 \\
x_1 &= 6 \pm 4
\end{aligned}$$

$x_1 = 2$ (bei $x_1 = 10$ zeigen die Rückstrahler zum Schloss), also P $(2|4)$.



2.2.6. $v = \dot{s} = 4 \cdot 10^{14}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t + 3 \cdot 10^6\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \quad , \quad s(t_1) = 0{,}7\,\text{m} \quad \Longrightarrow \quad t_1 = 5 \cdot 10^{-8}\,\text{s}$

$v(t_1) = 2{,}3 \cdot 10^7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

2.3 Die Ableitung von x^n

2.3.1. (a) $f'(x) = n\,a\,x^{n-1} - m\,b\,x^{m-1} - \frac{c}{x^2} - \frac{d}{2\,\sqrt{x}}$

(b) $f'(x) = x^{n-1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

2.3.2. $f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow \quad x = 4$

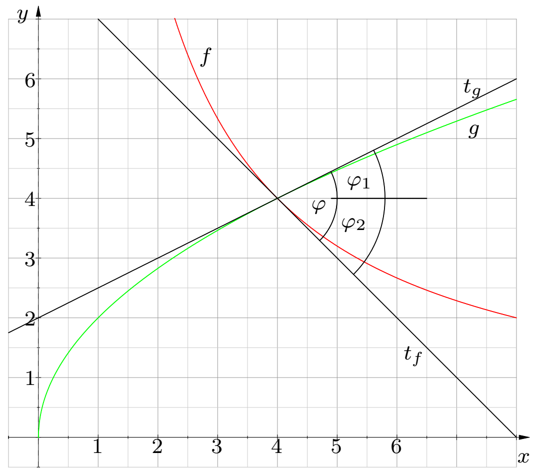
$\Longrightarrow \quad \text{S}\,(4|4)$

$f'(x) = -\frac{16}{x^2}, \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$|f'(4)| = 1 = \tan\varphi_2 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_2 = 45°$

$g'(4) = \frac{1}{4} = \tan\varphi_2 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1 = 26{,}565°$

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 71{,}565°$



2.3.3.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[(x+h)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right]\cdot\left[(x+h)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right]}{h\cdot\left[(x+h)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right]} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h\cdot\left[(x+h)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right]} = \lim_{h\to 0} \frac{3\,x^2\,h + 3\,x\,h^2 + h^3}{h\cdot\left[(x+h)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right]} = \\
&= \frac{3\,x^2}{2\,x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

2.3.4. (a) Steigung der Tangente: $m = \frac{f(a)}{\Delta x} = f'(a) = f(a)$, d.h. $\Delta x = 1$

Die Tangente geht durch den Punkt $\text{Q}\,(a-1|0)$

(b) $f(x) = f'(x) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 2$ und $x_2 = -2$

$\text{P}_1\,(2|6)$, $\text{P}_2\,(-2|-2)$

$t_1(x) = 6\,x - 6 \quad , \quad t_2(x) = -2\,x - 6 \quad , \quad \text{S}\,(0|-6)$

2.3.5. $f'(x) = 2\,x - \frac{a}{x^2} \quad , \quad f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\text{P}_\text{a}\,(x_1|y_1)$ mit $y_1 = 3\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, Kurve der Minima: $y = 3\cdot x^2$

2.3.6. $f_a'(a) = n'(a)$ und $f_a(a) = n(a) \quad \Longrightarrow \quad b = 4\,a$ und $c = -2\,a^2$

$f_a(x) = -x^2 + 4\,a\,x - 2\,a^2$, Scheitel von f_a: $\mathrm{S_a}\left(2\,a\middle|2\,a^2\right)$

Kurve der Scheitelpunkte: $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$

2.3.7. (a) $f_a'(a) = h'(a)$ und $f_a(a) = h(a)$

$$2a + b = -\frac{1}{a^2}, \qquad b = -2a - \frac{1}{a^2}$$

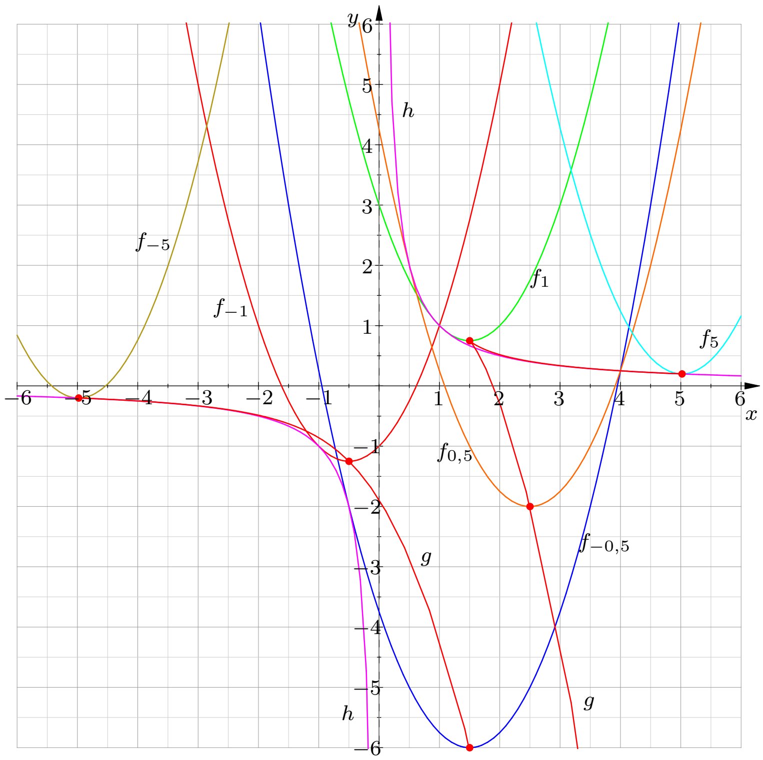
$$a^2 + b\,a + c = \frac{1}{a} \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{2}{a} + a^2$$

$$f_a(x) = x^2 + \left(-2a - \frac{1}{a^2}\right)x + \frac{2}{a} + a^2$$

(b) $f_a'(x_\mathrm{S}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_\mathrm{S} = a + \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{2a^3+1}{2a^2}$

$$\begin{aligned} y_\mathrm{S} = f(x_\mathrm{S}) &= \frac{(2a^3+1)^2}{4a^4} - \frac{(2a^3+1)^2}{2a^4} + \frac{2}{a} + a^2 = \\ &= -\frac{(2a^3+1)^2}{4a^4} + \frac{2}{a} + a^2 = \\ &= \frac{-4a^6 - 4a^3 - 1 + 8a^3 + 4a^6}{4a^4} = \frac{4a^3-1}{4a^4} \end{aligned}$$

(c)

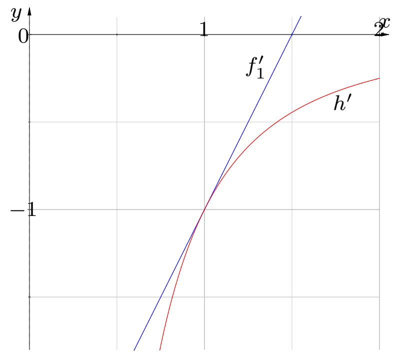


(d)

a	-5,0	-2,0	-1,0	-0,5	-0,4	0,4	0,5	0,7	1,0	1,5	2,0	4,0
x_S	-4,98	-1,88	-0,5	1,5	2,73	3,53	2,5	1,72	1,5	1,72	2,13	4,03
y_S	-0,20	-0,52	-1,25	-6,00	-12,3	-7,27	-2,00	0,39	0,75	0,62	0,48	0,25

g ist keine Funktion.

Eine genauere Untersuchung zeigt, dass f_1 von der Schar ausgeschlossen werden muss, da G_{f_1} den Grafen von h schneidet und nicht berührt. Für das Berühren ist notwendig, dass sich die Grafen von f_1' und h' bei $x = 1$ schneiden, sie berühren sich aber, da $f_1''(1) = h''(1)$.



2.3.8. $v(t) = \dot{x}(t) = 40\,\frac{\text{km}}{\text{h}^4} \cdot t^3 - 240\,\frac{\text{km}}{\text{h}^3} \cdot t^2 + 320\,\frac{\text{km}}{\text{h}^2} \cdot t$

$a(t) = \dot{v}(t) = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}^4} \cdot t^2 - 480\,\frac{\text{km}}{\text{h}^3} \cdot t + 320\,\frac{\text{km}}{\text{h}^2}$

Nullstellen von x: $t_{01} = 0,\ t_{02} = 4\,\text{h}$

Nullstellen von v: $t_{11} = 0,\ t_{12} = 2\,\text{h},\ t_{13} = 4\,\text{h}$

Nullstellen von a: $t_{21} = \left(2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\ \text{h},\ t_{22} = \left(2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\ \text{h}$

$x_{\max} = x(2\,\text{h}) = 160\,\text{km},\ v_{\max} = v(t_{21}) = \frac{640}{9}\sqrt{3}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 123\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

2.4 Die Ableitung von $\sin x$ und $\cos x$

2.4.1. (a) $f'(x) = -\sin 2x - \cos\dfrac{x}{7}$ (b) $f'(x) = 2\cos 6x + 2\sin\dfrac{2x}{3}$

2.4.2. Waagrechte Tangenten bei $x_{1n} = 2\pi \cdot \left(n + \dfrac{1}{3}\right)$ und $x_{2n} = 2\pi \cdot \left(n + \dfrac{2}{3}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. $t(x) = -\dfrac{x}{2} + \pi$. t schneidet die x-Achse bei 2π.

2.4.3. Nullstellen: $-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}$

$f'(x) = 2\cos 2x + \sin x = -4\sin^2 x + \sin x + 2 = 0 \quad \Longrightarrow$

$\sin x = \frac{1}{8} \pm \frac{\sqrt{33}}{8}$

Waagrechte Tangenten bei $-0{,}202\,\pi$, $0{,}319\,\pi$, $0{,}681\,\pi$ und $1{,}202\,\pi$.

2.4.4. Die Gleichung der Normale:

$$n_a : \begin{cases} y = n_a(x) = \dfrac{x}{\sin a} + \cos a - \dfrac{a}{\sin a} & \text{für} \quad a \neq k\cdot\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = a & \text{für} \quad a = k\cdot\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$g(a) = x_a = a - \frac{1}{2}\sin 2a \quad (\text{gilt auch für } a = k\pi)$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}a} = 1 - \cos 2a \quad \Longrightarrow \quad \text{waagrechte Tangenten bei } a = k\pi.$$

Steigung maximal, wenn $\cos 2\,a$ minimal, d.h. für $a = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$.

$$g'\left(\frac{\pi}{2} + k\,\pi\right) = 2$$

2.4.5. $v(t) = A\omega\cos\omega t,\qquad a(t) = -A\omega^2 \sin\omega t = -\omega^2 \cdot x(t)$

2.5 Die Produktregel

2.5.1. (a) $f_1'(x) = 2x + 5$

(b) $f_2'(x) = 6x - 1$

(c) $f_3'(x) = 40x - 33$

(d) $f_4'(x) = -24x - 23$

(e) $f_5'(x) = 54x - 174$

(f) $f_6'(x) = 3x^2 - 8x + 3$

(g) $f_7'(x) = 75x^2 + 266x + 40$

(h) $f_8'(x) = -108x^3 + 90x^2 + 26x$

(i) $f_9'(x) = 3x^2 - 8x + 3$

2.5.2. (a) Nachweis für $n = 1$: $(x^1)' = (x)' = 1 = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot x^{1-1}$

Schluss von n auf $n{+}1$: Wir müssen zeigen, dass aus der Gültigkeit von $(x^n)' = nx^{n-1}$ ($A(n)$) auch die Gültigkeit von $\left(x^{n+1}\right)' = (n+1)x^n$ ($A(n+1)$) folgt:

$$\begin{aligned}\left(x^{n+1}\right)' &= (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' = (\text{wegen } A(n))\\ &= nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = nx^n + x^n = (n+1)x^n = \underbrace{(n+1)x^{(n+1)-1}}_{A(n+1)}\end{aligned}$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} \quad\Longrightarrow\quad A(1)$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{A(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} =\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+2)}{2} \quad\Longrightarrow\quad A(n+1)\end{aligned}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} \quad\Longrightarrow\quad A(1)$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{A(n)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} =\\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 3n + 6)}{6} =\\ &= \frac{(n+1)\left[2n(n+2) + 3(n+2)\right]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} =\\ &= \frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]\left[2(n+1)+1\right]}{6} \quad\Longrightarrow\quad A(n+1)\end{aligned}$$

2.5.3. (a) $f'\,g\,h + f\,g'\,h + f\,g\,h'$ (b) $x\sqrt{x}\cdot\left(\frac{5}{2}\sin x + x\,\cos x\right)$

(c) $-\dfrac{2}{x^3}$

2.5.4. ohne Produktregel: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,x^{n+m} = (n+m)\,x^{n+m-1}$

mit Produktregel: $n\,x^{n-1}\,x^m + m\,x^n\,x^{m-1} = (n+m)\,x^{n+m-1}$

2.5.5. (a) $f'(x) = 50x + 30$
(b) $g'(x) = 48x^3 + 48x$
(c) $h'(x) = 144x^2 + 240x + 75$

2.6 Die Quotientenregel

2.6.1. $g'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x - \frac{x\sin x + \cos x}{x^2}$

2.6.2. $f'(x) = \dfrac{x\,\cos x - \sin x}{x^2} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \tan x = x$

Mit dem Newtonverfahren oder durch Probieren berechnet man die Koordinaten des Tiefpunktes: T(4,4934 | − 0,2172)

2.6.3. (a) $-\,999\,x^{-1000}$ (b) $-\dfrac{3}{(x-3)^2}$ (c) $\dfrac{2\,x^2 - 10\,x + 5}{(2\,x-5)^2}$

(d) $\dfrac{x^2 + 6\,x + 7}{(7-x^2)^2}$ (e) $(x-2)' = 1$ (f) $\dfrac{2\,x\,\cos x - \sin x}{2\,x\,\sqrt{x}}$

(g) $\dfrac{x\,\sin x\left(3\,x - \frac{5}{2}\sqrt{x}\right) + x^2\,(x-\sqrt{x})\cos x}{(x-\sqrt{x})^2}$ (h) $\dfrac{2\,(-5\,x^3 + x^2 + 5)}{x^{11}}$

(i) $\dfrac{x - \sin 2x}{x^3\,\cos^2 x}$

2.6.4. (a) $f'(x) = -\dfrac{6}{x^3}$
(b) $g'(x) = \dfrac{9}{2}\sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
(c) $h'(x) = -\dfrac{20}{x^5} - \dfrac{30}{x^6}$

2.6.5. (a) $h'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{x}} + 5x^4$
(b) $l'(x) = -\dfrac{4x}{(2x^2+1)^2}$
(c) $k'(x) = 45x^4 + 12x^2$

2.6.6. $\dfrac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}$

2.6.7. $-\dfrac{x + \sin x \cos x}{x^2 \sin^2 x}$

2.7 Die Kettenregel

2.7.1. (a) $f_1'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$

(b) $f_2'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

(c) $f_3'(x) = \dfrac{-1 + \sin x + x \sin x + \cos x - x \cos x}{(\sin x - x)^2}$

(d) $f_4'(x) = \dfrac{-x^3 + 2x^2 + x + 8}{\sqrt{x^2+4} \cdot (1 - x^2)}$

2.7.2. (a) $f'(x) = -\sin 2\,x - \cos \dfrac{x}{7}$ (b) $f'(x) = 2\, \cos 6\,x + 2\, \sin \dfrac{2x}{3}$

2.7.3. (a) $f_1'(x) = 24 \cdot (2x+3)^3 (4x^2-6)^6 (6x^2+7x-2)$

(b) $f_2'(x) = 4 \cdot (2x^4-3)^4 (3x-4x^5)^3 (-80x^8+96x^4-9)$

(c) $f_3'(x) = \dfrac{(3x+2)^3 (15x^2+2x+12)}{\sqrt{1+x^2}}$

(d) $f_4'(x) = \dfrac{(x+2)\,(5x+6)}{2\sqrt{x+1}}$

(e) $f_5'(x) = \dfrac{(x^3-1)^2 (20x^4+19x^3+18x^2-2x-1)}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

(f) $f_6'(x) = -\dfrac{2}{(x-2)^2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$

(g) $f_7'(x) = -\dfrac{x\sqrt{x^2-2}}{(x^2-2)^2}$

(h) $f_8'(x) = \dfrac{-x^3-2x^2+6x+4}{2\sqrt{1+x}(x^2+2)^2} = \dfrac{(2-x)(x^2+4\,x+2)}{2\sqrt{1+x}(x^2+2)^2}$

(i) $f_9'(x) = \dfrac{x^2\,(-9x^3+6x^2+28x-24)}{(3x^2-4)^2\sqrt{1-x}}$

2.7.4. (a) $f'(x) = 2x \cdot \cos(x^2)$

(b) $f'(x) = -3x^2 \cdot \sin(x^3)$

(c) $f'(x) = 4x^3 \cdot \dfrac{1}{\cos^2(x^4)}$

(d) $f'(x) = (2x+2)\cos(x^2+2x+2)$

(e) $f'(x) = -(4x^3+6x+1)\sin(x^4+3x^2+x)$

(f) $f'(x) = (5x^4+6x^2+3)\dfrac{1}{\cos^2(x^5+2x^3+3x)}$

(g) $f'(x) = -\sin(x) \cdot \cos(\cos(x))$

(h) $f'(x) = -\cos(x) \cdot \sin(\sin(x))$

(i) $f'(x) = -\dfrac{\sin(\tan(x))}{\cos^2(x)}$

(j) $f'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{\cos^2(\cos(x))}$

(k) $f'(x) = \dfrac{\cos(\tan(x))}{\cos^2(x)}$

(l) $f'(x) = \dfrac{\cos(x)}{\cos^2(\sin(x))}$

2.7.5. $g'(x) = \sin\frac{1}{x} + x\cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$

$$x = \frac{1}{u} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

2.7.6. (a) $f'(x) = x^2\cos x + 2x\sin x$

(b) $g'(x) = 2x^2\cos 2x + 2x\cos 2x + 2x\sin 2x + \sin 2x$

(c) $h'(x) = \begin{array}{l} 2x^2\cos 2x + 8x\cos 2x + 8\cos 2x \\ +2x\sin 2x + 4\sin 2x \end{array}$

(d) $l'(x) = 4x^3\cos(x^2) - 2x^5\sin(x^2)$

(e) $m'(x) = 3x^2\cos 3x - 3x^3\sin 3x - 9\sin 3x$

(f) $n'(x) = \begin{array}{l} 4x^3\cos 3x + 8x\cos 3x \\ -3x^4\sin 3x - 12x^2\sin 3x - 12\sin 3x \end{array}$

(g) $p'(x) = 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$

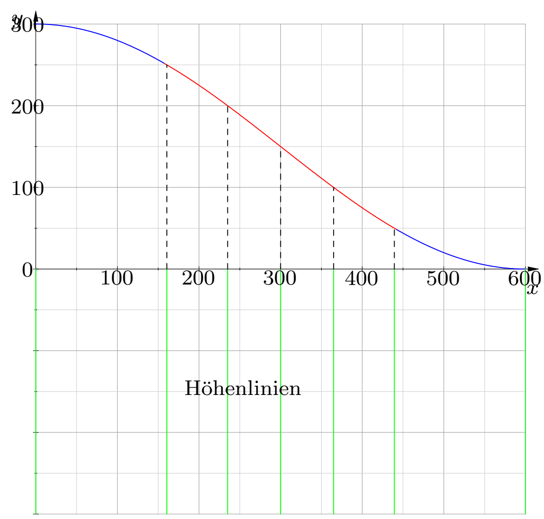
(h) $q'(x) = 2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$

(i) $r'(x) = 2\sin x\cos^3 x - 2\sin^3 x\cos x = \frac{1}{2}\sin 4x$

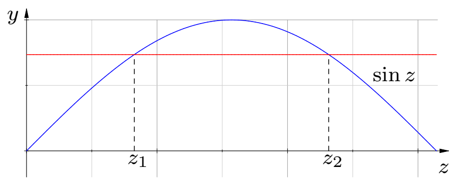
2.7.7. (a)

x	0	100	200	300
y	300	280	225	150

x	400	500	600
y	75	20	0



(b) $f'(x) = -150 \sin \frac{\pi x}{600} \cdot \frac{\pi}{600} = -\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi x}{600}$



$$|f'(x)| > \tan 30° \quad \Longrightarrow \quad \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi x}{600} > \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \sin \frac{\pi x}{600} > \frac{4\sqrt{3}}{3\pi}$$

Die Lösung von $\sin z = \frac{4\sqrt{3}}{3\pi}$ ist laut Taschenrechner $z_1 = 0{,}8258$, die zweite Lösung im Intervall $[0; \pi]$ also $z_2 = \pi - z_1 = 2{,}3158$. $|f'(x)| > \tan 30°$ gilt also für

$$\frac{600 z_1}{\pi} < x < \frac{600 z_2}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad 158 < x < 442$$

(c) $|f'(x)|$ ist maximal für $\frac{\pi x}{600} = \frac{\pi}{2}$, also für $x = 300$.

$$f'(300) = -\frac{\pi}{4} = \tan \varphi_{\max} \quad \Longrightarrow \quad |\varphi_{\max}| = 38{,}1°$$

2.7.8. $f'(x) = \dfrac{-\sin(x^2) \cdot 2x + 2\sin(3x)\cos(3x) \cdot 3}{2\sqrt{\cos(x^2) + \sin^2(3x)}} = \dfrac{-2x\sin(x^2) + 3\sin(6x)}{2\sqrt{\cos(x^2) + \sin^2(3x)}}$

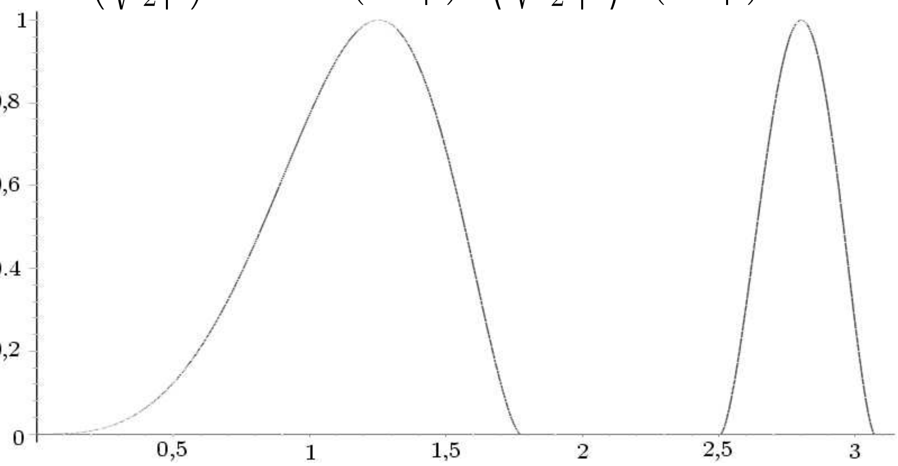
2.7.9. (a) Nullstellen: 0, $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{2\pi}$, $\sqrt{3\pi}$

$$D_f = [0\,;\, \sqrt{\pi}] \cup [\sqrt{2\pi}\,;\, \sqrt{3\pi}] \approx [0\,;\, 1{,}77] \cup [2{,}51\,;\, 3{,}07]$$

(b) $f'(x) = 3\,x\cos\left(x^2\right) \cdot \sqrt{\sin\left(x^2\right)}$

$(0\,|\,0)$, $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\middle|1\right)$, $\left(\sqrt{\pi}\middle|0\right)$, $\left(\sqrt{2\pi}\middle|0\right)$, $\left(\sqrt{\frac{5\pi}{2}}\middle|1\right)$, $\left(\sqrt{3\pi}\middle|0\right)$

(c)



2.8 Die Ableitung von x^p mit $p \in \mathbb{Q}$

2.8.1. (b) $\frac{1}{3}\, x^{-\frac{2}{3}}$ (c) $\frac{101}{100}\ \sqrt[100]{x}$ (d) $\frac{2}{3}\,(x-1)^{-\frac{1}{3}}$

(e) $\dfrac{\cos x}{3\,\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ (f) $\dfrac{-1}{3\,\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}}$ (g) $\dfrac{3\,x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$

(h) $\dfrac{3\,\cos x}{4\,\sqrt[4]{\sin x}}$ (i) $\dfrac{2\,\cos x}{5\,\sqrt[5]{\sin^3 x}}$ (j) $\dfrac{9\,\sqrt{x}\,\cos x^{\frac{3}{2}}}{10\,\sqrt[5]{\sin^2 x^{\frac{3}{2}}}}$

2.9 Höhere Ableitungen

2.9.1. $f^{(m)}(x) = \dfrac{n!}{(n-m)!} \cdot x^{n-m}$

2.9.2. $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

2.9.3. $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}$

2.9.4. $f'(x) = 4\,x^3 - 2\,x + \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}$

$$f''(x) = 12\,x^2 - 2 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\,x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = 24\,x + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\,x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^{(4)}(x) = 24 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\,x^{-\frac{7}{2}}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-3)}{2^n}\cdot x^{-\frac{2n-1}{2}} \quad \text{für } n \geqq 5$$

2.9.5. $f(x) = \dfrac{x^n}{n!} + \text{Polynom vom Grad } n-1$

2.9.6. $F(t) = m\,\ddot{x}(t) = 6\,\alpha\,m\,t$

2.10 Differenzierbarkeit

2.10.1. (a)

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für} \quad x > 0 \\ -\cos(-x) & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0+0} f'(x) = 1 \neq \lim\limits_{x\to 0-0} f'(x) = -1$, also bei $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

(b)

$$f'(x) = \begin{cases} x\cos(x) + \sin(x) & \text{für} \quad 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ -x\cos(-x) - \sin(x) & \text{für} \quad (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ bei $x_0 = 0$ differenzierbar, bei $x_n = n\pi$ nicht differenzierbar.

(c)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+4x-4}{(x^2-x-2)^2} & \text{für} \quad x > 0 \\ \frac{x^2+4x}{(x^2-x-2)^2} & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0+0} f'(x) = -1 \neq \lim\limits_{x\to 0-0} f'(x) = 0$; bei $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

(d)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{für} \quad x > 0 \\ \frac{1}{(-x+1)^2} & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

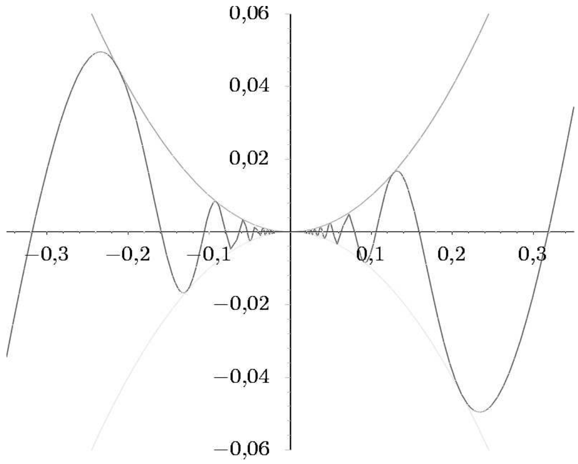
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0+0} = 1 = \lim\limits_{x\to 0-0} = 1$; bei $x_0 = 0$ differenzierbar.

2.10.2. (a) $x_{00} = 0$, $x_{0k} = \dfrac{1}{k\,\pi}$ für $k \neq 0$

$$x_{1k} = \frac{1}{(0{,}5 + 2k)\pi}$$

$$x_{2k} = \frac{1}{(1{,}5 + 2k)\pi}$$

k	x_{0k}	x_{1k}	x_{2k}
0	0,000	0,637	0,212
1	0,318	0,127	0,091
2	0,159	0,071	0,058
3	0,106	0,049	0,042
4	0,080	0,037	0,034
5	0,064	0,030	0,028
6	0,053	0,025	0,024
7	0,045	0,022	0,021



(b) $f'(x) = 2\,x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$

(c) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 \sin\frac{1}{h} - 0}{h} = 0$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$, d.h. f ist stetig bei $x = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2\,x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}, \quad \text{aber } \lim_{x\to 0} f'(x) \text{ existiert nicht.}$$

f ist in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, aber f' ist bei $x = 0$ unstetig!!

2.10.3. (a) $f(x) = |x|^{\frac{1}{3}}$ ist überall stetig. $f'(x) = \dfrac{2 \cdot \operatorname{sgn}(x)}{3 \cdot \sqrt[3]{|x|}}$

$\lim\limits_{x \to 0^\pm} f'(x) = \pm\infty$, d.h. f bei $x = 0$ nicht differenzierbar.

(b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x\sqrt{x} & \text{für } x \geqq 0 \end{cases}$, $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{3}{2}\sqrt{x} & \text{für } x \geqq 0 \end{cases}$

f stetig und differenzierbar in $\mathbb{R}$ ($f'(0) = 0$).

(c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leqq 0 \\ x^{\frac{2}{3}} & \text{für } x > 0 \end{cases}$, $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \dfrac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} & \text{für } x > 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^\pm} f(x) = f(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$

f stetig aber nicht differenzierbar bei $x = 0$.

2.10.4. $k(x)$ ist in $(0|0)$ stetig, aber nicht differenzierbar: $\lim\limits_{x \to 0 \pm 0} k'(x) = \pm 1$

2.10.5. (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 + x - 2) & \text{für } x \geqq 1,\ x \neq 2 \\ -\frac{1}{2}(x^2 + x - 2) & \text{für } x < 1 \end{cases}$

f stetig bei $x = 1$, stetig fortsetzbar bei $x = 2$: $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq 2 \\ 2 & \text{für } x = 2 \end{cases}$

(b) $f'(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{für } x > 1,\ x \neq 2 \\ -x - \frac{1}{2} & \text{für } x < 1 \end{cases}$, $f'_+(1) = \frac{3}{2}$, $f'_-(1) = -\frac{3}{2}$

f nicht differenzierbar bei $x = 1$ (bei $x = 2$ nicht def. und damit auch nicht differenzierbar).

$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$, waagrechte Tangente bei $(-0{,}5 \,|\, 1{,}125)$

(c) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 + x - 2) & \text{für } x \leqq 1 \text{ und } x > 2 \\ -\frac{1}{2}(x^2 + x - 2) & \text{für } 1 < x < 2 \end{cases}$

g stetig bei $x = 1$, nicht stetig bei $x = 2$ (Sprung).

$g'(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{für } x < 1 \text{ und } x > 2 \\ -x - \frac{1}{2} & \text{für } 1 < x < 2 \end{cases}$, $g'_+(1) = -\frac{3}{2}$, $g'_-(1) = \frac{3}{2}$

g nicht differenzierbar bei $x = 1$ (bei $x = 2$ nicht def. und damit auch nicht differenzierbar).

$g'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$, waagrechte Tangente bei $(-0{,}5 \,|\, -1{,}125)$

2.10.6. (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 - x - 2) & \text{für } x < -1,\ x \neq -2 \\ -\frac{1}{2}(x^2 - x - 2) & \text{für } x \geqq -1 \end{cases}$

f stetig bei $x = -1$, stetig fortsetzbar bei $x = -2$: $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq -2 \\ 2 & \text{für } x = -2 \end{cases}$

(b) $f'(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & \text{für } x < -1,\ x \neq -2 \\ -x + \frac{1}{2} & \text{für } x > -1 \end{cases}$, $f'_+(-1) = \frac{3}{2}$, $f'_-(-1) = -\frac{3}{2}$

f nicht differenzierbar bei $x = -1$ (bei $x = -2$ nicht def. und damit auch nicht

differenzierbar).
$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$, waagrechte Tangente bei $(0{,}5\,|\,1{,}125)$

(c) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $\quad g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\,(x^2 - x - 2) & \text{für } x \geqq -1 \text{ und } x < -2 \\ \frac{1}{2}\,(x^2 - x - 2) & \text{für } -2 < x < -1 \end{cases}$

g stetig bei $x = -1$, nicht stetig bei $x = -2$ (Sprung).

$g'(x) = \begin{cases} -x + \frac{1}{2} & \text{für } x > 1 \text{ und } x < -2 \\ x - \frac{1}{2} & \text{für } -2 < x < -1 \end{cases}, \quad g'_+(-1) = \frac{3}{2},\ g'_-(-1) = -\frac{3}{2}$

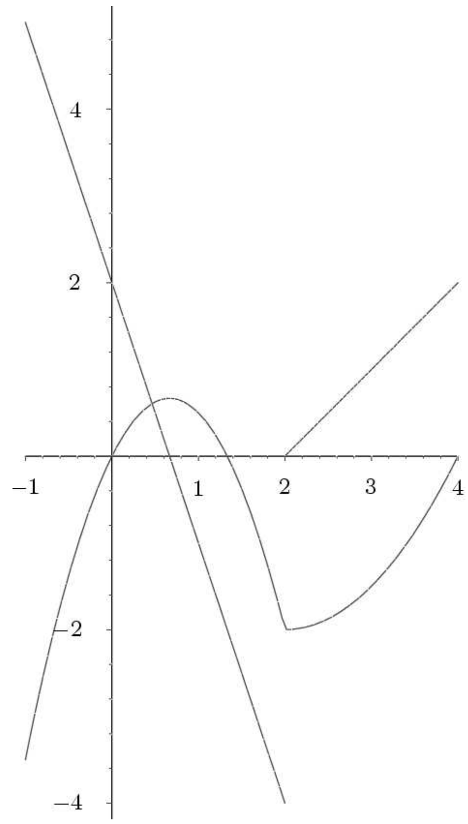
g nicht differenzierbar bei $x = -1$ (bei $x = -2$ nicht def. und damit auch nicht differenzierbar).
$g'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$, waagrechte Tangente bei $(0{,}5\,|\,1{,}125)$

2.10.7. (a) $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x^2 + 2\,x & \text{für } x \leqq 2 \\ \frac{x^2}{2} - 2\,x & \text{für } x > 2 \end{cases}$

(b) Stetig in $\mathbb{R}$, nicht differenzierbar bei $x = 2$.

$f'(x) = \begin{cases} -3\,x + 2 & \text{für } x < 2 \\ x - 2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$

(c)



2.10.8. (a) f ist an der Stelle $x = 3$ unstetig, obwohl der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$ existiert.

(b) f ist an der Stelle $x = 0$ unstetig (in jeder beliebigen Umgebung von 0 nimmt die Funktion den Wert 1 und den Wert -1 an).
$x = 0$ ist jedoch keine Sprungstelle.

(c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(x)$, also ist f bei $x = 0$ stetig.
$\lim\limits_{x\to\pm 0} f'(x) = \pm 1$, also ist f bei $x = 0$ nicht differenzierbar.

(d) $f'(0) = \lim\limits_{x\to\pm 0} \sin\dfrac{1}{x}$ Dieser Grenzwert existiert nicht, also ist f bei $x = 0$ nicht differenzierbar. Trotzdem hat f an der Stelle x keine Knickstelle.

(e) $f'(0) = \lim\limits_{x\to\pm 0} \dfrac{f(x)-0}{x-0} \lim\limits_{x\to\pm 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$,
also ist f bei $x = 0$ differenzierbar.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & \text{für } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{für } \ x = 0 \end{cases}$$

Diese Funktion ist bei $x = 0$ unstetig.

(f)

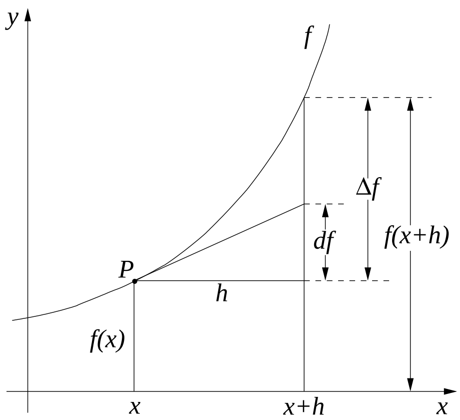
$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} + \frac{1}{2}, & \text{für } \ x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } \ x = 0 \end{cases}$$

In jeder Umgebung von $x = 0$ gibt es Stellen $x = \frac{1}{2\pi\cdot n}$, an denen $\sin\frac{1}{x} = 0$ und $\cos\frac{1}{x} = 1$ und damit $f'(x) = -\frac{1}{2}$ ist.

2.11 Die lineare Näherung

2.11.1. (a) Die Tangente an f in $\mathrm{P}\,(x|f(x))$ hat die Steigung $\dfrac{\mathrm{d}f}{h} = f'(x)$. Das Differential $\mathrm{d}f = f'(x)h$ ist für kleine $|h|$ eine gute Näherung für $\Delta f = f(x+h) - f(x)$, d.h.

$$f(x+h) = f(x) + \Delta f \approx f(x) + f'(x)h$$



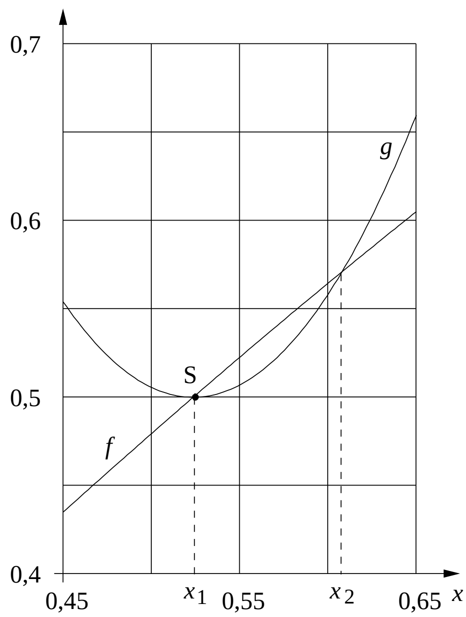
(b) Mit $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$, $(1+h)^2 \approx 1 + 2h$ und $\dfrac{1}{1+h} \approx 1 - h$ für $|h| \ll 1$ folgt

$$f^* \approx f\frac{1+\frac{\beta}{2}}{1-\frac{\beta}{2}} \approx f\left(1+\frac{\beta}{2}\right)^2 \approx f(1+\beta)$$

2.11.2. (a)

x	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
f	0,435	0,479	0,525	0,565	0,605
g	0,554	0,506	0,507	0,558	0,660

Scheitel von g: $\mathrm{S}\left(\frac{\pi}{6}\middle|\frac{1}{2}\right)$



(b) Mit $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$ und $f'(x) = \cos x$ folgt

$f(x_1) = \dfrac{1}{2}$ und $f'(x_1) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned} t(x) &= f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

(c) Aus $g(x) = t(x)$ folgt

$$10\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \quad \Longrightarrow \quad 10\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$10\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = x_2^* = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{20} = 0{,}61020$$

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{x_2^* - x_2}{x_2} = 0{,}364\%$$

2.12 Das Newtonverfahren

2.12.1. (a) x_n ist ein Näherungswert für eine Nullstelle von f, x_{n+1} ist eine bessere Näherung.

(b) $f(x) = \cos 2x - \sqrt{x} = 0, \quad f'(x) = -2\sin 2x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

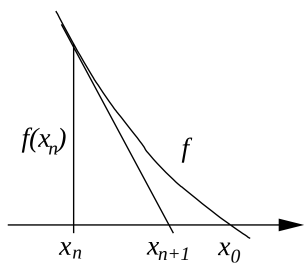
$$x_{n+1} = x_n + \frac{\cos 2x_n - \sqrt{x_n}}{2\sin 2x_n + \frac{1}{2\sqrt{x_n}}}$$

$x_0 = 0{,}4$, $x_1 = 0{,}428873279$, $x_2 = 0{,}428547914$, $x_3 = 0{,}428547874$

2.12.2. (a) x_n sei ein Näherungswert für die Nullstelle x_0 von f. Die Tangente an f in $\mathrm{P}\left(x_n|f(x_n)\right)$ hat die Steigung

$$f'(x_n) = \frac{0 - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \quad \Longrightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



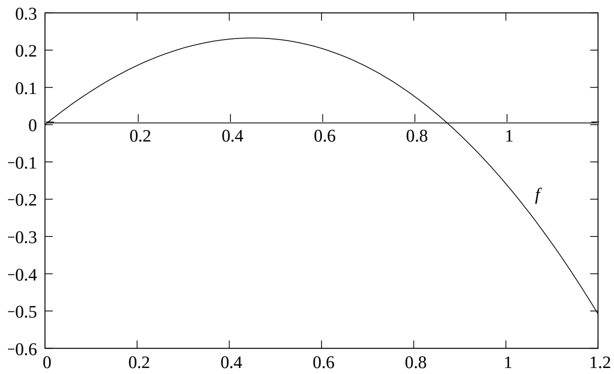
(b) Erste Nullstelle: $x_{01} = 0$

Geeignete Startwerte für die zweite Nullstelle x_{02}:

$x_1 = 1$ oder $x_1 = 0,8$

$f'(x) = \cos x - 2x$

$x_{x+1} = x_n - \dfrac{\sin x_n - x_n^2}{\cos x_n - 2x_n}$



x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$f(x)$	0	0,159	0,229	0,205	0,077	−0,159	−0,508

$x_1 = 1{,}0$	$x_1 = 0{,}8$
$x_2 = 0{,}8913959953$	$x_2 = 0{,}8856378451$
$x_3 = 0{,}8769848448$	$x_3 = 0{,}8768229140$
$x_4 = 0{,}8767262985$	$x_4 = 0{,}8767262271$
$x_5 = 0{,}8767262154$	$x_5 = 0{,}8767262153$
$x_6 = 0{,}8767262154$	$x_6 = 0{,}8767262154$
	$x_7 = 0{,}8767262154$

2.12.3. (a) $-1 \leqq \sin x \leqq 1 \implies 1 \leqq 2 + \sin x \leqq 3$, d.h. der Nenner von $f(x)$ kann nie null werden.

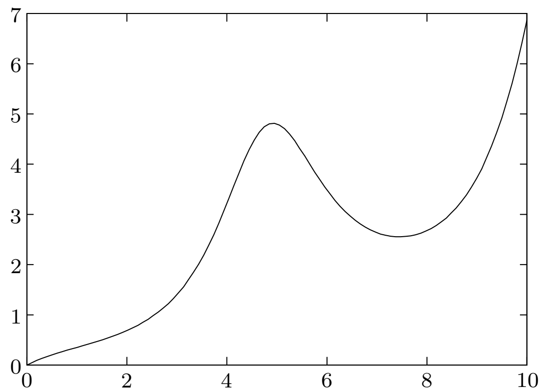
(b)

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	0,352	0,687	1,40

x	4	5	6	7
$f(x)$	3,22	4,80	3,49	2,63

x	8	9	10
$f(x)$	2,67	3,73	6,87

Zwei waagrechte Tangenten, d.h. zwei Nullstellen von f'.



(c) $f'(x) = \dfrac{2 + \sin x - x \cos x}{(2 + \sin x)^2}$

(d) $f'(x) = 0 \implies g(x) = 2 + \sin x - x \cos x = 0$

$g'(x) = \cos x - (\cos x + x(-\sin x)) = x \sin x$

$x_{k+1} = x_k - \dfrac{g(x_k)}{g'(x_k)} = x_k - \dfrac{2 + \sin x_k - x_k \cos x_k}{x_k \sin x_k}$

$x_0 = 5,\ x_1 = 4{,}921321169,\ x_2 = 4{,}921526621,\ x_3 = 4{,}921526621$

2.12.4. $x = \sqrt[n]{a} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = x^n - a = 0$

Newtonverfahren: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \dfrac{1}{n} \cdot \left[(n-1)\, x_k + \dfrac{a}{x_k^{n-1}} \right]$

Für $n = 7$ und $a = 100$: $\quad x_{k+1} = \dfrac{1}{7} \cdot \left[6\, x_k + \dfrac{100}{x_k^6} \right]$

$$\begin{array}{lcl@{\quad,\quad}lcl} x_0 & = & 2 & x_3 & = & 1{,}930697737 \\ x_1 & = & 1{,}9375 & x_4 & = & 1{,}930697729 \\ x_2 & = & 1{,}930768956 & x_5 & = & 1{,}930697729 \end{array}$$

2.12.5. Newtonverfahren für f: $\quad x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \dfrac{x_k^2 - \sqrt{x_k} - 1}{2\, x_k - \frac{1}{2\sqrt{x_k}}}$

$$\boxed{\begin{array}{lcl@{\quad,\quad}lcl} x_0 & = & 1{,}000000000 & x_3 & = & 1{,}490267918 \\ x_1 & = & 1{,}666666667 & x_4 & = & 1{,}490216121 \\ x_2 & = & 1{,}501433283 & x_5 & = & 1{,}490216120 \end{array}}$$

Newtonverfahren für f': $\quad x_{k+1} = x_k - \dfrac{f'(x_k)}{f''(x_k)} = x_k - \dfrac{2\, x_k - \frac{1}{2\sqrt{x_k}}}{2\, x_k}$

$$\boxed{\begin{array}{lcl@{\quad,\quad}lcl} x_0 & = & 1{,}000000000 & x_3 & = & 1{,}071600526 \\ x_1 & = & 1{,}125000000 & x_4 & = & 1{,}071598716 \\ x_2 & = & 1{,}075418994 & x_5 & = & 1{,}071598716 \end{array}}$$

Newtonverfahren für g: $\quad x_{k+1} = x_k - \dfrac{g(x_k)}{g'(x_k)} = x_k - \dfrac{x_k^4 - 2\, x_k^2 - x + 1}{4\, x_k^3 - 4\, x_k - 1}$

$$\boxed{\begin{array}{lcl@{\quad,\quad}lcl} x_0 & = & 1{,}000000000 & x_3 & = & 0{,}000000000 \\ x_1 & = & 0{,}000000000 & x_4 & = & 1{,}000000000 \\ x_2 & = & 1{,}000000000 & x_5 & = & 0{,}000000000 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{lcl@{\quad}c@{\quad}lcl} x_0 & = & 1{,}500000000 & , & x_3 & = & 0{,}490216120 \\ x_1 & = & 1{,}490384615 & , & x_4 & = & 1{,}490216120 \\ x_2 & = & 1{,}490216171 & & & & \end{array}}$$

2.12.6. Newtonverfahren für f: $\quad x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \dfrac{x_k^3 - 3\, x_k^2 + 4}{3\, x_k^2 - 6\, x_k}$

$$\boxed{\begin{array}{lcl@{\quad,\quad}lcl} x_0 & = & -2{,}000000000 & x_3 & = & -1{,}001949932 \\ x_1 & = & -1{,}333333333 & x_4 & = & -1{,}000002528 \\ x_2 & = & -1{,}055555556 & x_5 & = & -1{,}000000000 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{lcl@{\quad,\quad}lcl} x_0 & = & 1{,}000000000 & x_3 & = & 1{,}924408746 \\ x_1 & = & 1{,}666666667 & \ldots & = & \ldots \\ x_2 & = & 1{,}844444444 & x_{20} & = & 1{,}999999438 \end{array}}$$

Der Grund für das schlechte Funktionieren: $f'(2) = 0$!!!

2.12.7. $f(x) = \tan x - x, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f\,'(x_n)}, \quad$ Startwert: $x_0 = 4{,}5$

$x_1 = 4{,}493613934$, $x_2 = 4{,}493409656$, $x_3 = 4{,}493409458$

2.13 Die natürliche Exponentialfunktion

2.13.1. (a) $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (1+x)\mathrm{e}^x$

(b) $g'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$

(c) $h'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} - 2x^2\mathrm{e}^{-x^2} = (1-2x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$

(d) $k'(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \dfrac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$

(e) $r'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = x(2-x)\mathrm{e}^{-x}$

(f) $s'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2} - 2x^3\mathrm{e}^{-x^2} = 2x\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}$

(g) $t'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\sin x + \mathrm{e}^{-x}\cos x = (\cos x - \sin x)\mathrm{e}^{-x}$

(h) $u'(x) = \mathrm{e}^{\sin x}\cos x$

(i) $v'(x) = \mathrm{e}^x\cos\left(\mathrm{e}^x\right)$

2.13.2. (a) Definition der Ableitung:

$$(\mathrm{e}^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{\left(\mathrm{e}^h - 1\right)}{h} = \mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{e}^h-1}{h} \approx 1 \text{ für } |h| \ll 1$$

$$\mathrm{e} \approx (1+h)^{\frac{1}{h}} \text{ für } |h| \ll 1$$

Mit der Substitution $h = \dfrac{1}{n}$ folgt aus $h \to 0^+$, dass $n \to \infty$ und damit

$$\mathrm{e} = \lim_{h\to 0^+}(1+h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(b) Berechnung von x^n mit $n = (1...01...)_2$:

Erste Ziffer (immer 1)	:	x hinschreiben
Jede der folgenden Ziffern	:	(Q) Quadrieren, wenn 0
		(QM) Quadrieren und mit x Multiplizieren, wenn 1

Beginnend mit der zweiten Ziffer der Dualdarstellung des Exponenten bedeutet jede Null eine und jede Eins zwei Multiplikationen.

Für x^{100} ergibt sich: QMQQQMQQ

(c) $10^6 = (1111\,0100\,0010\,0100\,0000)_2 \quad \Longrightarrow \quad 25$ Multiplikationen

Mit $x = 1{,}000\,001$ und QMQMQMQQMQQQQQMQQQMQQQQQQ folgt

$\mathrm{e}_n = 2{,}718280469$ genauso wie bei der direkten Eingabe des Terms $1{,}000\,001^{1\,000\,000}$.

(d) Zeigt der Rechner z.B. bei $n = 10^{13}$ noch das Ergebnis 2,71828..., bei $n = 10^{14}$ aber das Ergebnis 1, dann stellt er intern $1 + 10^{-13} = 1{,}000\,000\,000\,000\,1$ noch richtig dar, $1 + 10^{-14}$ wird aber auf 1 gerundet: intern 14 geltende Ziffern.

(e) Man rechnet rekursiv:

$$E_{n+1} = E_n + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\delta_{\mathrm{rel}} = \frac{E_n}{e} - 1$$

n	E_n	δ_{rel}
0	1,0	$-6{,}321205588 \cdot 10^{-1}$
1	2,0	$-2{,}642411177 \cdot 10^{-1}$
2	2,5	$-8{,}030139707 \cdot 10^{-2}$
3	2,666666667	$-1{,}898815688 \cdot 10^{-2}$
4	2,708333333	$-3{,}659846827 \cdot 10^{-3}$
5	2,716666667	$-5{,}941848176 \cdot 10^{-4}$
6	2,718055556	$-8{,}324114929 \cdot 10^{-5}$
7	2,718253968	$-1{,}024919667 \cdot 10^{-5}$
8	2,71827877	$-1{,}125202598 \cdot 10^{-6}$
9	2,718281526	$-1{,}114254783 \cdot 10^{-7}$
10	2,718281801	$-1{,}004776638 \cdot 10^{-8}$
11	2,718281826	$-8{,}316107427 \cdot 10^{-10}$

2.14 Monotonie

2.14.1. (a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x^2 - x - 6)$ mit NS bei $x_{11} = -2$ und $x_{12} = 3$. Da der Graf von f eine nach oben geöffnete Parabel ist, gilt

$$\begin{array}{lll} f'(x) > 0 & (f \text{ streng steigend}) & \text{für } -\infty < x < -2 \text{ oder } 3 < x < \infty \\ f'(x) < 0 & (f \text{ streng fallend}) & \text{für } -2 < x < 3 \end{array}$$

(b) $g'(x) = 1 + \cos x \geqq 0$ für alle x und nur isolierte NS von g' $\implies$ f streng steigend in $\mathbb{R}$.

(c) $h'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x)$. Wegen $\mathrm{e}^{-x} > 0$ ist das Vorzeichen von $h'(x)$ gleich dem Vorzeichen von $\cos x - \sin x$:

$$h'(x) > 0 \iff \cos x - \sin x > 0 \iff \cos x > \sin x$$

$$\begin{array}{rcl} \text{streng steigend} \iff h'(x) > 0 & \iff & -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ \text{streng fallend} \iff h'(x) < 0 & \iff & \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

2.15 Die Umkehrfunktion

2.15.1. (a) $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1 \implies g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$

(b) $(\arccos x)' = \dfrac{1}{-\sin(\arccos x)} = \dfrac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \implies$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \implies \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

$$(\arctan x)' = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

2.16 Der natürliche Logarithmus

2.16.1. (a) Mit $x = \frac{a}{\text{cm}}$ folgt

- $x = \frac{40\,000\,\text{km}}{\text{cm}} = 4 \cdot 10^9 \quad\Longrightarrow\quad h = 1\,\text{cm} \cdot \ln x = 22{,}1\,\text{cm}$
- $x = \frac{1{,}5 \cdot 10^8\,\text{km}}{\text{cm}} = 1{,}5 \cdot 10^{13} \quad\Longrightarrow\quad h = 1\,\text{cm} \cdot \ln x = 30{,}3\,\text{cm}$
- $1\,\text{LJ} = 3 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s} = 9{,}47 \cdot 10^{15}\,\text{m}$

  $x = \frac{1\,\text{LJ}}{\text{cm}} = 9{,}47 \cdot 10^{17} \quad\Longrightarrow\quad h = 1\,\text{cm} \cdot \ln x = 41{,}4\,\text{cm}$
- $x = \frac{3 \cdot 10^{10}\,\text{LJ}}{\text{cm}} = 2{,}84 \cdot 10^{28} \quad\Longrightarrow\quad h = 1\,\text{cm} \cdot \ln x = 65{,}5\,\text{cm}$

(b) $x = \mathrm{e}^{100} = 2{,}69 \cdot 10^{43} \quad\Longrightarrow\quad a = 2{,}69 \cdot 10^{41}\,\text{m} = 2{,}84 \cdot 10^{25}\,\text{LJ}$

a ist ungefähr 10^{15} mal so groß wie der Durchmesser des sichtbaren Universums!

2.16.2. $f(-x) = f(x) \quad\Longrightarrow\quad$ Symmetrie zur y-Achse

$$f(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}} = \frac{1}{3{,}3} \quad\Longrightarrow\quad -\frac{x^2}{8} = \ln\frac{1}{3{,}3} = -\ln 3{,}3$$

$$x_0 = \pm 2\sqrt{2\ln 3{,}3} \approx \pm 3{,}09$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1^-$$

$$f'(x) = \frac{33}{40} \cdot x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}$$

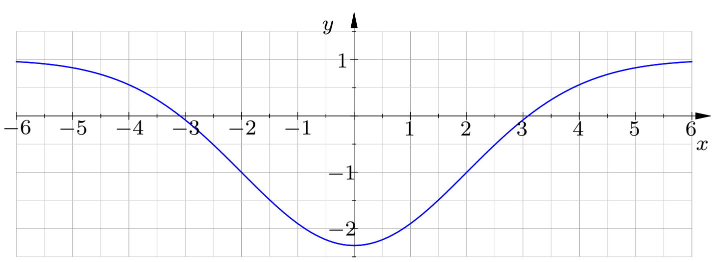
$$f''(x) = \frac{33}{40}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}$$

$f'(0) = 0$ und $f''(0) > 0 \quad\Longrightarrow\quad$ Tiefpunkt bei $\mathrm{T}\,(0| -2{,}3)$

$$f''(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_2 = \pm 2$$

$$f'''(x) = \frac{33}{40}\left(-\frac{3x}{4} + \frac{x^3}{16}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}} = \frac{33}{160}\left(-3 + \frac{x^2}{4}\right)x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}$$

$f'(\pm 2) = 0$ und $f'''(\pm 2) \neq 0 \quad\Longrightarrow\quad$ Wendepunkte bei $\mathrm{W}_{1,2}\Big(\pm 2\Big|\underbrace{1 - \frac{3{,}3}{\sqrt{e}}}_{\approx -1{,}00}\Big)$



2.16.3. (a) $x = \ln 100 = 2\ln 10 \approx$

(b) $-0{,}2x = -3\ln 10 \quad \Longrightarrow \quad x = 15\ln 10 \approx 34{,}5$

(c) $x = -2x + 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{1}{3}$

(d) Mit dem Newtonverfahren berechnet man die Nullstelle der Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x - 3x$:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 3 \quad \Longrightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 3x_n}{\mathrm{e}^{x_n} - 3} = \frac{(x_n - 1)\mathrm{e}^{x_n}}{\mathrm{e}^{x_n} - 3}$$

Mit den Startwerten $x_{01} = 0{,}6$ und $x_{02} = 1{,}5$, die man z.B. einer Grafik entnimmt, folgen die beiden Lösungen $x_1 = 0{,}6190612867$ und $x_2 = 1{,}512134552$.

2.16.4. (a) $\ln x = \pm 2 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \mathrm{e}^2, \quad x_2 = \mathrm{e}^{-2}$

(b) $x = \mathrm{e}^{-10^5} = 10^{-\frac{-10^5}{\ln 10}} = 10^{-43429{,}44819} = 10^{-0{,}44819} \cdot 10^{-43429} = 0{,}35629 \cdot 10^{-43429}$

$$x = 0{,}\underbrace{0000\ldots000}_{\text{43429 Nullen}}35629\ldots$$

(c) $\dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{3}\ln x = \dfrac{5}{6}\ln x = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = \mathrm{e}^{\frac{12}{5}} = \sqrt[5]{\mathrm{e}^{12}} \approx 11{,}023$

(d) $\dfrac{1}{2}\ln(1 - x^2) = -\dfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 1 - x^2 = \mathrm{e}^{-1} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}} \approx \pm 0{,}795$

(e) keine Lösung

(f) Wir suchen eine Nullstelle von $f(x) = \mathrm{e}^x + \ln x$ mit dem Newtonverfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} = x_n - \frac{\mathrm{e}^x + \ln x}{\mathrm{e}^x + \frac{1}{x}}$$

$$x \approx 0{,}2698741376$$

$x_0 = 0{,}5$
$x_1 = 0{,}2381071287$
$x_2 = 0{,}2684966975$
$x_3 = 0{,}2698717782$
$x_4 = 0{,}2698741376$
$x_5 = 0{,}2698741376$

2.16.5. (a) $x = \mathrm{e}^{1000} = 10^{\frac{1000}{\ln 10}} = 10^{434{,}29448} = 10^{0{,}29448} \cdot 10^{434} = 1{,}97 \cdot 10^{434}$

(b) $y = \mathrm{e}^{-5^5} = 10^{-\frac{3125}{\ln 10}} = 10^{-1357{,}170256} = 10^{0{,}829744} \cdot 10^{-1358} = 6{,}76 \cdot 10^{-1358}$

(c) $z = 9^{9^9} = 10^{387\,420\,489 \cdot \lg 9} = 10^{369\,693\,099 + 0{,}6} \approx 4 \cdot 10^{369\,693\,099}$

2.16.6. (a) $\alpha = \dfrac{2\pi}{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}} \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}} = 7{,}241 \cdot 10^9\,\dfrac{1}{\mathrm{m}}$

$$2\alpha d = 1{,}448 \text{ und } \gamma = 3{,}84 \quad \Longrightarrow \quad T = 0{,}607 = 60{,}7\%$$

(b) $W_0 = mgy = 10^{-4}\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 0{,}02\,\mathrm{m} = 1{,}962 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}$

$W = \frac{m}{2}v^2 = 5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg} \cdot \left(0{,}02\,\frac{\mathrm{m}}{2}\right)^2 = 2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{J}$

$$\alpha = \frac{2\pi}{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}} \cdot \sqrt{2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}96 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}} = 5{,}94 \cdot 10^{29}\,\frac{1}{\mathrm{m}}$$

$$k = 2\alpha d = 2{,}375 \cdot 10^{27} \text{ und } \gamma = 0{,}0163$$

Die letzten drei Summanden im Nenner von T kann man vernachlässigen:

$$T = \frac{\gamma}{\mathrm{e}^k} = \gamma \mathrm{e}^{-k}$$

Wegen

$$\mathrm{e} = \mathrm{e}^{\frac{\ln 10}{\ln 10}} = 10^{\frac{1}{\ln 10}}$$

gilt

$$T = \gamma \cdot 10^{-\frac{k}{\ln 10}} = 10^{\lg \gamma - \frac{k}{\ln 10}} = 10^{-1{,}03 \cdot 10^{27}}$$

Also $1{,}03 \cdot 10^{27}$ Nullen zwischen Komma und der ersten Ziffer ungleich null, mit der Länge

$$L = 5{,}2 \cdot 10^{26}\,\mathrm{cm} = 5{,}2 \cdot 10^{24}\,\mathrm{m} = 5{,}5 \cdot 10^{8}\,\mathrm{LJ}$$

Die Kugel müsste ungefähr $\frac{1}{T} = 10^{10^{27}}$-mal an die Gefäßwand stoßen, um einmal zu tunneln.

2.17 Exponentielles Wachstum

2.17.1. (a) Mit der Kettenregel folgt: $(2) \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\ln B(t)] = k \iff \frac{\dot{B}(t)}{B(t)} = k \iff (1)$

Aus (2) folg $\ln B(t) = kt + C$ mit einer Konstanten C. Daraus folgt

$$B(t) = \mathrm{e}^{kt+C} = \mathrm{e}^C \mathrm{e}^{kt}$$

Mit C ist auch $C_0 = \mathrm{e}^C$ eine Konstante. Aus der Anfangsbedingung folgt

$$B_0 = B(0) = C_0 \mathrm{e}^0 = C_0$$

Damit lautet die gesuchte Lösung

$$\boxed{B(t) = B_0 \mathrm{e}^{kt}}$$

(b) $N_1 = N_0 \mathrm{e}^{kt_1} \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{1}{t_1} \ln \frac{N_1}{N_0} = \frac{1}{8\,\mathrm{h}} \ln 3{,}34 = 0{,}1507\,\frac{1}{\mathrm{h}}$

$$N(t_2) = N_0 \mathrm{e}^{kt_2} = N_0 \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^{\frac{t_2}{t_1}} = 6{,}10 \cdot 10^4$$

$$N(t+T) = 2N(t) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{k(t+T)} = \mathrm{e}^{kT}\mathrm{e}^{kt} = 2\mathrm{e}^{kt} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{kT} = 2$$

$$T = \frac{\ln 2}{k} = 4{,}60\,\mathrm{h}$$

2.17.2. (a) $|\Delta N| = \lambda N(t)\Delta t$ und $\Delta N = -|\Delta N| \implies \Delta N = kN(t)\Delta t$ mit $k = -\lambda$.

Also gilt

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad \text{mit} \quad N_0 = N(0)$$

$$N(t_1 + T) = \frac{1}{2} N(t_1) \implies N_0 \mathrm{e}^{-\lambda(t_1+T)} = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t_1} \mathrm{e}^{-\lambda T} = \frac{1}{2} N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t_1} \implies$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \implies -\lambda T = -\ln 2 \implies T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

(b) $A(t) = -\dot{N}(t) = -N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}(-\lambda) = \lambda N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} = \lambda N(t)$

$$A(t) = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta N|}{\Delta t}$$

$A(t)$ ist der Betrag der momentanen Änderungsrate von N und gibt demnach an, wie viele Atome momentan pro Zeit zerfallen.

(c) $P = \dfrac{|\Delta N|}{N(t)} = \dfrac{N(t) - N(t+\Delta t)}{N(t)} = 1 - \dfrac{N(t+\Delta t)}{N(t)} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \Delta t}$

(d) $\lambda_{\mathrm{Cs}} = \dfrac{\ln 2}{T_{\mathrm{Cs}}} = 2{,}30 \cdot 10^{-2} \, \dfrac{1}{\mathrm{a}} = \dfrac{\ln 2}{30{,}1 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} = 7{,}302 \cdot 10^{-10} \, \dfrac{1}{\mathrm{s}}$

$$N_0 \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{Cs}} t} = 0{,}01 N_0 \implies -\lambda_{\mathrm{Cs}} t = \ln 0{,}01 = -\ln 100 \implies t = \frac{\ln 100}{\lambda_{\mathrm{Cs}}} = 200\,\mathrm{a}$$

$$A_0 = \lambda_{\mathrm{Cs}} N_0 \implies N_0 = \frac{A_0}{\lambda_{\mathrm{Cs}}} = 2{,}74 \cdot 10^{26} \implies m_{\mathrm{Cs}} = N_0 M_{\mathrm{Cs}} = 62{,}3\,\mathrm{kg}$$

$$\lambda_{\mathrm{J}} = \frac{\ln 2}{T_{\mathrm{J}}} = \frac{\ln 2}{8 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} = 1{,}00 \cdot 10^{-6} \, \frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$A_{0\mathrm{J}} = \lambda_{\mathrm{J}} N_{0\mathrm{J}} = \lambda_{\mathrm{J}} \frac{0{,}8\,\mathrm{kg}}{M_{\mathrm{J}}} = 3{,}6 \cdot 10^{18}\,\mathrm{Bq}$$

2.17.3. (a)
- Eine Zweimillionenstadt wird im Mittel doppelt so viele Geburten und Sterbefälle haben wie eine Einmillionenstadt
- In zwei Tagen werden im Mittel doppelt so viele Kinder geboren und doppelt so viele Menschen sterben wie an einem Tag

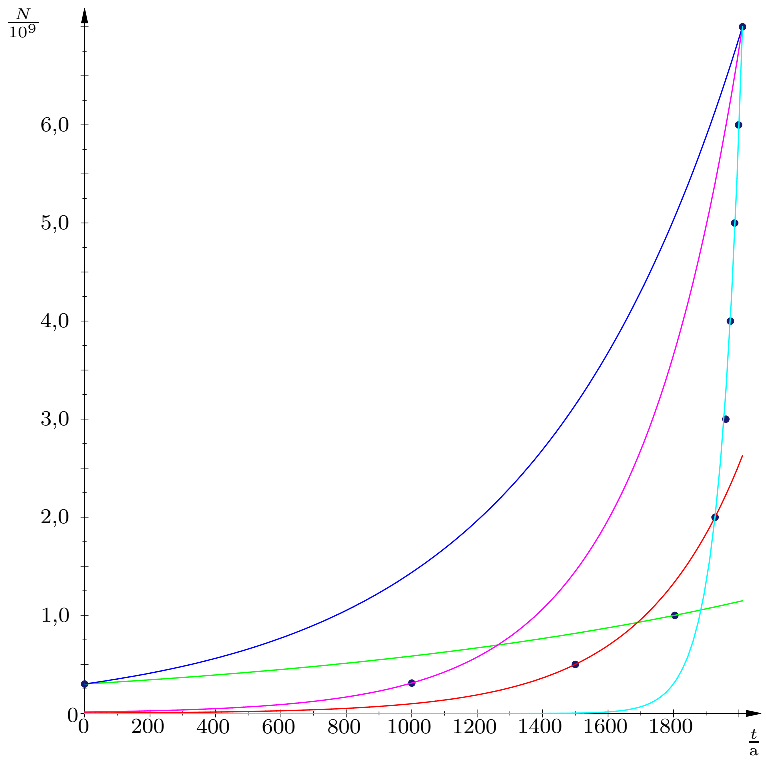
Für ein exponentielles Wachstum spricht also die Proportionalität von ΔN zu N und Δt. Die Proportionalitätskonstante k (Differenz aus Geburten- und Sterberate pro Einwohner) ist aber nicht wirklich konstant, sondern von der Zeit abhängig, es wird also kein exponentielles Wachstum vorliegen.

Mögliche Exponentialfunktionen aus zwei Wertepaaren:

$$N_1 = N_0 \mathrm{e}^{kt_1}, \quad N_2 = N_0 \mathrm{e}^{kt_2} \implies \mathrm{e}^{k(t_2 - t_1)} = \frac{N_2}{N_1} \implies k = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \frac{N_2}{N_1}$$

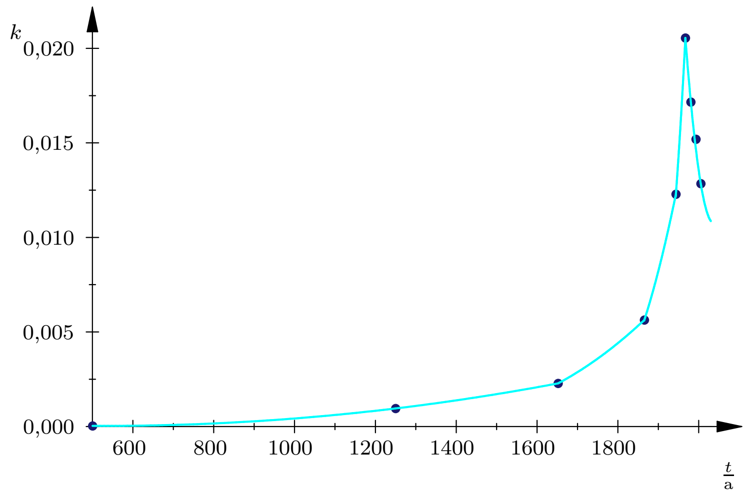
$$N_0 = N_1 \mathrm{e}^{-kt_1} = N_1 \mathrm{e}^{-\frac{t_1}{t_2 - t_1} \ln \frac{N_2}{N_1}} = N_1 \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^{\frac{t_1}{t_2 - t_1}}$$

t_1	0	1500	1000	1927	0
t_2	1804	1927	2011	2011	2011
k	$6{,}67 \cdot 10^{-4} \, \frac{1}{\mathrm{a}}$	$3{,}25 \cdot 10^{-3} \, \frac{1}{\mathrm{a}}$	$3{,}08 \cdot 10^{-3} \, \frac{1}{\mathrm{a}}$	$1{,}49 \cdot 10^{-2} \, \frac{1}{\mathrm{a}}$	$1{,}56 \cdot 10^{-3} \, \frac{1}{\mathrm{a}}$
N_0	$3{,}0 \cdot 10^{8}$	$3{,}84 \cdot 10^{6}$	$1{,}42 \cdot 10^{7}$	$6{,}6 \cdot 10^{-4}$	$3{,}0 \cdot 10^{8}$



Wachstumskonstante k aus jeweils zwei aufeinanderfolgenden Wertepaaren (t ist der Mittelwert aus den Jahreszahlen):

t	500	1250	1652	1866	1944	1967	1981	1993	2005
$k \cdot 10^4$	0,327	9,56	22,8	56,4	123	205	172	152	128



Gründe für den Anstieg von k: Medizin, Nahrungsangebot

Gründe für den Abfall von k ab ca. 1070: gesellschaftlicher Wandel, z.B. Einkindpolitik in China

2.17.4. (a) $\lambda_0 = \frac{\ln 2}{T} = 0{,}00835\,\frac{1}{\mathrm{a}} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{-\lambda_0 \cdot 125\,\mathrm{a}} = 0{,}352 = 35{,}2\%$

λ ist aber nicht konstant, sonder hängt von der Zeit ab. Da in jungen Jahren wenig Menschen sterben, muss $\lambda(t)$ für kleine t klein sein und ab $t = 80\,\mathrm{a}$ stark ansteigen.

(b)

$$\lambda(t) = kt^n \quad \Longrightarrow \quad N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} = N_0 \mathrm{e}^{-kt^{n+1}}$$

Mit der Halbwertszeit $T = 83\,\mathrm{a}$ folgt

$$\mathrm{e}^{-kT^{n+1}} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{\ln 2}{T^{n+1}}$$

Wir rechnen jetzt ohne Einheiten, die Zeiten verstehen sich in Jahren:

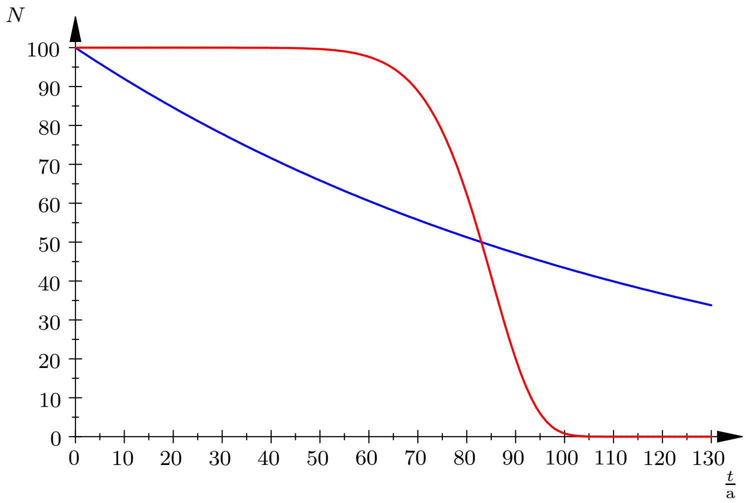
$$N(90) = N_0 \mathrm{e}^{-k \cdot 90^{n+1}} = 0{,}2 N_0 \quad \Longrightarrow \quad -k \cdot 90^{n+1} = \ln 0{,}2 = -\ln 5$$

$$\frac{\ln 2}{83^{n+1}} \cdot 90^{n+1} = \ln 5 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{90}{83}\right)^{n+1} = \frac{\ln 5}{\ln 2}$$

$$n = \frac{\ln \frac{\ln 5}{\ln 2}}{\ln \frac{90}{83}} - 1 = 9{,}4$$

$$k = \frac{\ln 2}{83^{10{,}4}} = 7{,}628 \cdot 10^{-21}$$

Die folgende Grafik zeigt $N_\mathrm{e}(t)$ und $N(t)$ (N_e ist der rein exponentielle Abfall):



(c)

$$\dot{N}(t) = -N_0 k(n+1) t^n \mathrm{e}^{-kt^{n+1}}$$

Der Graf von N ist am steilsten, wenn $\dot{N}$ extremal, die Ableitung von $\dot{N}$ also null ist:

$$\ddot{N}(t) = -N_0 k(n+1) \mathrm{e}^{-kt^{n+1}} \left[nt^{n-1} - k(n+1)t^{2n} \right] = 0$$

$$\Longrightarrow \quad t = t_1 = \left(\frac{n}{k(n+1)}\right)^{\frac{1}{n+1}} = 85{,}15$$

Die meisten Todesfälle von Mitteleuropäern treten im Alter von ungefähr 85 Jahren auf.

(d)

$$P(t) = \frac{N(t) - N(t+1)}{N(t)} = 1 - \frac{N(t+1)}{N(t)} = 1 - \mathrm{e}^{-k\left[(t+1)^{n+1} - t^{n+1}\right]}$$

$$\dot{P}(t) = k(n+1)\left[(t+1)^n - t^n\right] \mathrm{e}^{-k\left[(t+1)^{n+1} - t^{n+1}\right]}$$

Da alle auftretenden Faktoren positiv sind, ist $\dot{P}(t) > 0$ für alle t, d.h. $P(t)$ ist streng monoton steigend mit $\lim\limits_{t\to\infty} P(t) = 1$.

(e)

$$S(t) = N(t) - N(t+1) = N(t)P(t)$$

$$S(t) = -\Delta N \approx -\dot{N}(t)\Delta t = -\dot{N}(t) \cdot 1\,\mathrm{a}$$

2.18 Grenzwerte

2.18.1. (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{a\cos ax}{b\cos bx} = \frac{a}{b}$

(b) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

(c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x - a}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{a}}\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{a}}} = \lim\limits_{x\to a} \sqrt{\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}} = 0$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = \infty$

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^{100}}{\mathrm{e}^{0{,}01x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{100 mal de l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{100!}{0{,}01^{100}\mathrm{e}^{0{,}01x}} = 0$

(f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\mathrm{e}^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\mathrm{e}^x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x\mathrm{e}^x} = 0$

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - \ln x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \infty$

(h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2} - \frac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right) = (\infty \cdot \infty) = \infty$

(i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x + \sin x}{2x - \sin x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2 + \frac{\sin x}{x}}{2 - \frac{\sin x}{x}} = \frac{2}{2} = 1$

2.19 Verhalten von Funktionen

2.19.1. $f(x) = \frac{x^3}{8} \cdot (x - 4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{01} = 0, \quad x_{02} = 4$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \left[\frac{x^3}{8} \cdot (x - 4)\right] = ((-\infty)\cdot(-\infty)) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{x^3}{8} \cdot (x - 4)\right] = ((+\infty)\cdot(+\infty)) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \cdot (x - 3), \quad f''(x) = \frac{3x^2}{2} - 3x = \frac{3x}{2} \cdot (x - 2)$$

$f'(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{11} = 0, \quad x_{12} = 3, \qquad f''(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{21} = 0, \quad x_{22} = 2$

$f'(x) > 0$ für $x > 3$ und $f'(x) \leqq 0$ für $x \leqq 3 \quad\Longrightarrow$

f streng fallend in $]-\infty; 3[$ und f streng steigend in $]3; +\infty[$.

$f'(x_{12}) = 0$ und $f''(x_{12}) = \dfrac{9}{2} > 0 \quad\Longrightarrow\quad$ Tiefpunkt bei T $\left(3\middle|\frac{27}{8}\right)$

$f'''(x) = 3x - 3 = 3(x-1)$

$f'(x_{11}) = 0$ und $f''(x_{11}) = 0$ und $f''(x_{11}) = -3 \neq 0 \quad\Longrightarrow\quad$ Terrassenpunkt bei F $(0|0)$

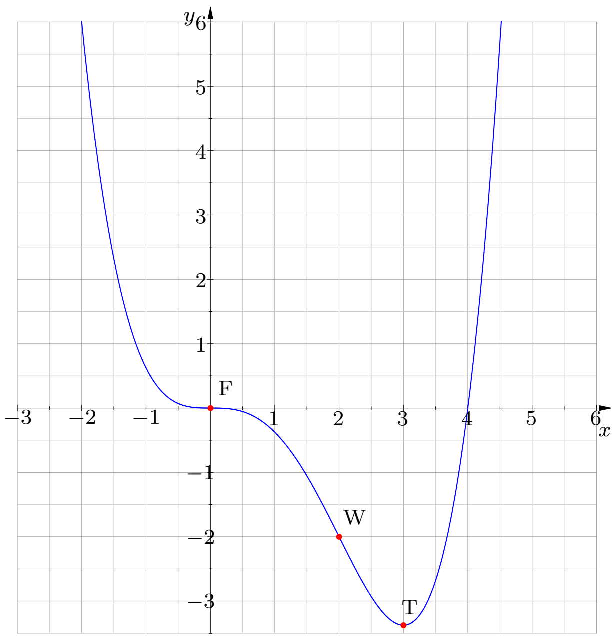
$f''(x_{22}) = 0$ und $f'''(x_{22}) = 3 \neq 0 \quad\Longrightarrow\quad$ Wendepunkt bei W $(2|-2)$

$f(x) = -2 \quad\Longrightarrow\quad g(x) = x^4 - 4x^3 + 16 = 0$, eine Lösung ist $X_1 = 2$, die zweite Lösung findet man mit dem Newtonverfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - 4x_n^3 + 16}{4x_n^3 - 12x_n^2}$$

$X_2 \approx 3{,}678573510$

$x_0 = 3{,}5$
$x_1 = 3{,}721938776$
$x_2 = 3{,}680359091$
$x_3 = 3{,}678576718$
$x_4 = 3{,}678573510$
$x_5 = 3{,}678573510$



2.19.2. $f(-x) = f(x) \quad\Longrightarrow\quad f$ symmetrisch zur y-Achse

$f(x) = \dfrac{x^2}{4} \cdot \left(x^2 - 8\right) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{01} = 0, \quad x_{02} = -2\sqrt{2}, \quad x_{03} = 2\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2}{4} \cdot \left(x^2 - 8\right)\right] = ((+\infty) \cdot (+\infty)) = +\infty$$

$f'(x) = x^3 - 4x = x \cdot \left(x^2 - 4\right), \quad f''(x) = 3x^2 - 4, \quad f'''(x) = 6x$

$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{11} = 0, \quad x_{12} = -2, \quad x_{13} = 2$

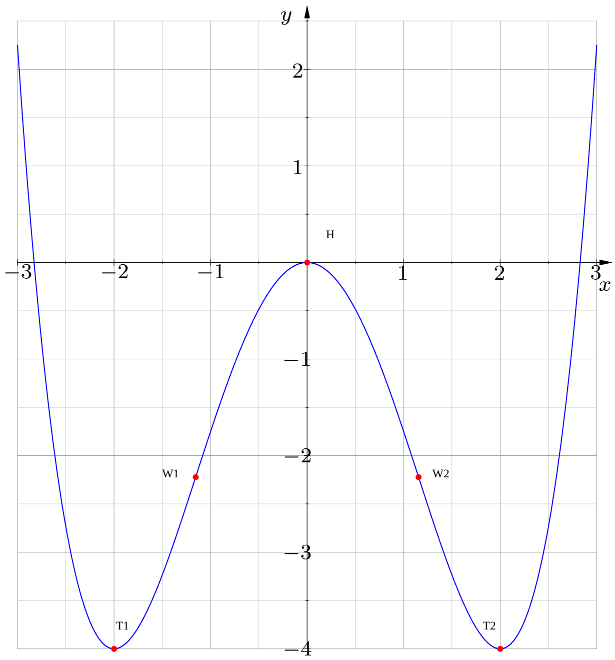
$f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{21} = 0, \quad x_{22} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}, \quad x_{23} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

$f'(x_{11}) = 0$ und $f''(x_{11}) = -4 < 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Hochpunkt bei $\mathrm{H}\,(0|0)$

$f'(x_{13}) = 0$ und $f''(x_{13}) = 8 > 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Tiefpunkte bei $\mathrm{T}_{1,2}\,(\pm 2| -4)$

$f''(x_{22}) = 0$ und $f'''(x_{22}) = 4\sqrt{3} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Wendepunkte bei $\mathrm{W}_{1,2}\,(\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}| -\frac{20}{3})$

$f(x) = -2 \quad \Longrightarrow \quad x^4 - 8x^2 = -2$ hat die vier Lösungen $x = \pm\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}}$.



2.19.3. $f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{01} = 2$ (durch Probieren)

$$f(x) : (x-2) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_{02,3} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{33}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3}{4} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)}_{\to 1} \right] = \pm\infty$$

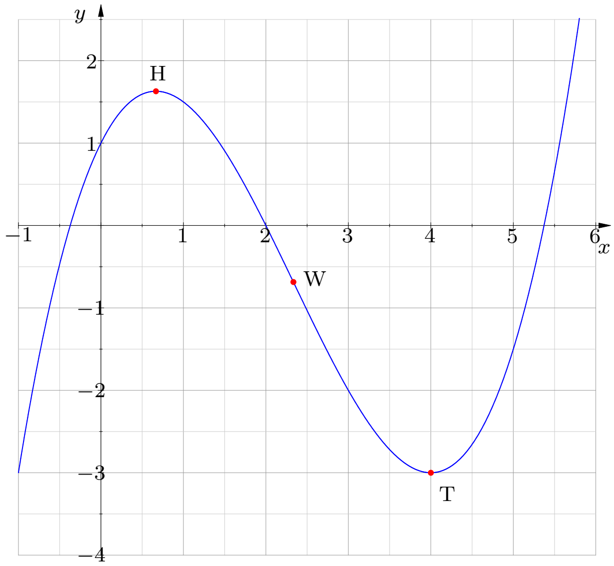
$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 2, \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}, \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{11} = \frac{2}{3}, \quad x_{12} = 4, \qquad f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{21} = \frac{7}{3}$$

Da der Graf von f' eine nach oben geöffnete Parabel ist, folgt $f'(x) > 0$ für $x < \frac{2}{3}$ und $x > 4$, $f'(x) < 0$ für $\frac{2}{3} < x < 4 \quad \Longrightarrow$

f streng steigend in $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right[$ und $]4; +\infty[$, f streng fallend in $\left]\frac{2}{3}; 4\right[\quad \Longrightarrow$

Hochpunkt bei $\mathrm{H}\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{44}{27}\right)$ und Tiefpunkt bei $\mathrm{T}\,(4| -3)$



2.19.4. Einzige Nullstelle bei $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{0^+}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\mathrm{e}^{x-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^{x-1}} = 0^+$$

$$f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{1-x}$$

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{1-x} - x^2\mathrm{e}^{1-x} = x(2-x)\mathrm{e}^{1-x}$$

$$f''(x) = 2\mathrm{e}^{1-x} - 2x\mathrm{e}^{1-x} - 2x\mathrm{e}^{1-x} + x^2\mathrm{e}^{1-x} = (2 - 4x + x^2)\mathrm{e}^{1-x}$$

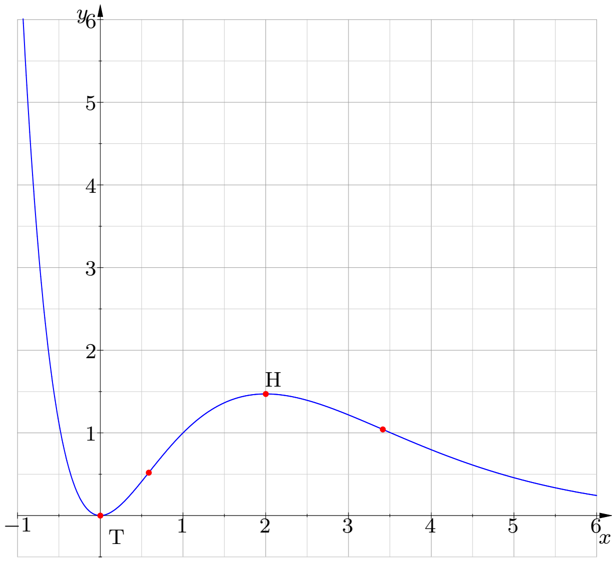
$$f'''(x) = -2\mathrm{e}^{1-x} - 4\mathrm{e}^{1-x} + 4x\mathrm{e}^{1-x} + 2x\mathrm{e}^{1-x} - x^2\mathrm{e}^{1-x} = (-x^2 + 6x - 6)\mathrm{e}^{1-x}$$

$$f'(x) = 0 \implies x_{11} = 0, \quad x_{12} = 2, \quad f''(x) = 0 \implies x_{21} = 2 - \sqrt{2}, \quad x_{22} = 2 + \sqrt{2}$$

Da der Graf von $x(2-x)$ eine nach unten geöffnete Parabel ist, folgt
$f'(x) < 0$ für $x < 0$ und $x > 2$, $f'(x) > 0$ für $0 < x < 2 \implies$

f streng fallend in $]-\infty; 0[$ und $]2; +\infty[$, f streng steigend in $]0; 2[\implies$

Tiefpunkt bei $\mathrm{T}\,(0|0)$ und Hochpunkt bei $\mathrm{T}\left(2\middle|\frac{4}{\mathrm{e}}\right)$



2.19.5. Einzige Nullstelle bei $x_0 = 1$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \left(\frac{-\infty}{0^+}\right) = -\infty$$

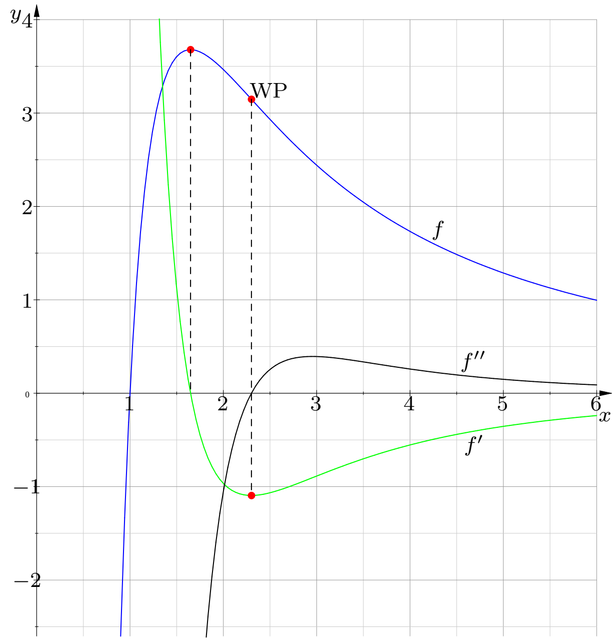
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{20}{x}}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{10}{x^2} = 0^+$$

$$f'(x) = \frac{20(1-2\ln x)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_0 = \sqrt{\mathrm{e}},\ f'(x) > 0 \quad\Longrightarrow\quad x < \sqrt{\mathrm{e}} \quad\Longrightarrow$$

f streng steigend in $]0; \sqrt{\mathrm{e}}[$ und f streng fallend in $]\sqrt{\mathrm{e}}; +\infty[\quad\Longrightarrow$

$$\text{Hochpunkt bei H}\left(\sqrt{\mathrm{e}}\,\middle|\,\frac{10}{\mathrm{e}}\right) \approx \mathrm{H}\,(1{,}65|3{,}68)$$



2.19.6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 3} = \dfrac{(x-2)^2}{x-3}$, $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $\quad$ Nullstelle bei $x_0 = 2$

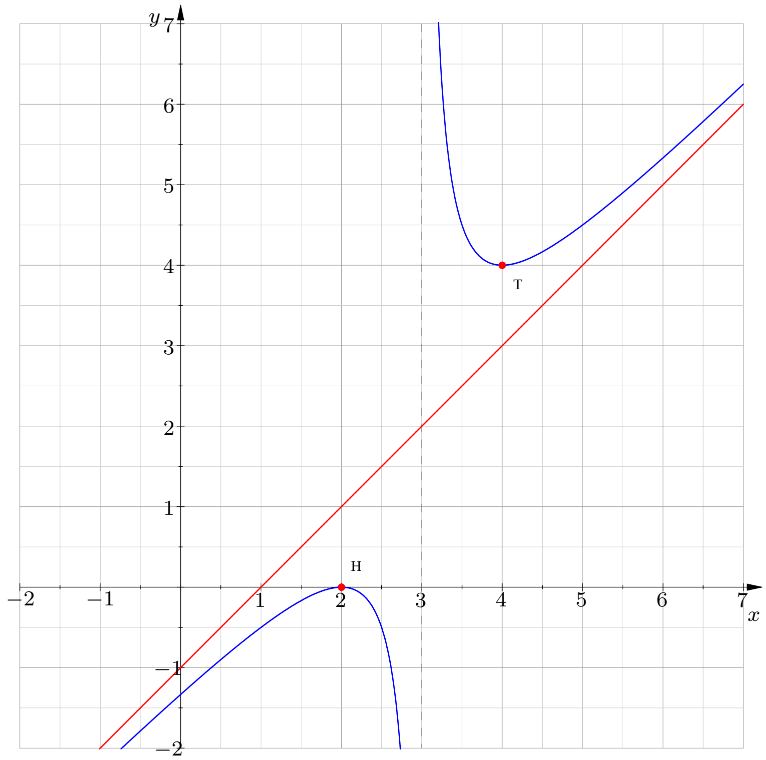
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - 4 + \frac{x}{4}}{1 - \frac{3}{x}} = \pm\infty \qquad \lim_{x\to 3^\pm} f(x) = \left(\frac{1}{0^\pm}\right) = \pm\infty$$

Polynomdivision $\Longrightarrow \quad f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-3} \quad \Longrightarrow \quad$ Asymptote: $a : x \to x - 1$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{11} = 2, \quad x_{12} = 4$

Da $x^2 - 6x + 8$ eine nach oben geöffnete Parabel ist, gilt $f'(x) > 0$ für $x < 2$ und $x > 4$ sowie $f'(x) < 0$ für $2 < x < 3$ und $3 < x < 4$. f ist also streng steigend in $]-\infty; 2[$ und in $]4; +\infty[$ und streng fallend in $]2; 3[$ und $]3; 4[$ $\quad \Longrightarrow \quad$ Hochpunkt bei H $(2|0)$ und Tiefpunkt bei T $(4|4)$.



2.19.7. Minimum bei $(0|0)$, Maximum bei $(2|\frac{6}{7}\sqrt{2})$

2.19.8. $f'(x) = \dfrac{x\,\cos x - \sin x}{x^2} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \tan x = x$

Mit dem Newtonverfahren oder durch Probieren berechnet man die Koordinaten des Tiefpunktes: $\mathrm{T}(\,4{,}4934\,|\,-0{,}2172\,)$

2.19.9. (a) $N_1(0|0)$, $N_2(-\frac{b}{a}|0)$

(b) $f'(x) = x(3ax + 2b) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $x_2 = -\frac{2b}{3a}$
$f''(x) = 6ax + 2b \neq 0$ für x_1 und x_2 (a und $b \neq 0$!).
Also Extrema bei $(0|0)$ und $(-\frac{2b}{3a}|\frac{4b^3}{27a^2})$

(c)

(d) Extrema liegen auf einer Parabel.

(e) $f(x_2) = \frac{4b^3}{27a^2} = \frac{b}{3}\cdot(-\frac{2b}{3a})^2 = \frac{b}{3}\cdot x_2^2$

2.19.10. $f'(x) = 2\,x - \dfrac{a}{x^2} \quad , \quad f'(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

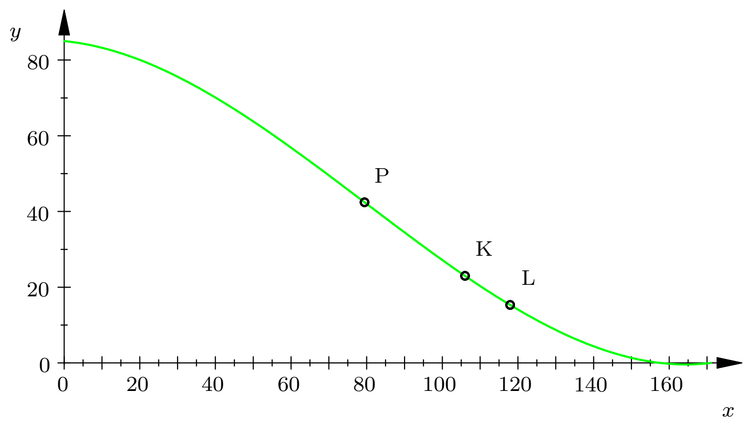
$\mathrm{P_a}\,(x_1|y_1)$ mit $y_1 = 3\cdot\left(\dfrac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, Kurve der Minima: $y = 3\cdot x^2$

2.19.11. (a) Aus $f(0) = 85$ folgt $a_0 = 85$.

$$f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

$$
\begin{aligned}
f(171) = 0 \Longrightarrow\quad & 171\,a_1 + 29241\,a_2 + 5000211\,a_3 = -85 && (1)\\
f(106) = 23 \Longrightarrow\quad & 106\,a_1 + 11236\,a_2 + 1191016\,a_3 = -62 && (2)\\
f'(106) = -\tan 34{,}3^\circ \Longrightarrow\quad & a_1 + 212\,a_2 + 33708\,a_3 = -0{,}6821537494 && (3)\\
\hline
(1) - 171\cdot(3):\quad & -7011\,a_2 - 763857\,a_3 = +31{,}64829114 && (4)\\
106\cdot(3) - (1):\quad & 11236\,a_2 + 2382032\,a_3 = -10{,}30829743 && (5)\\
\hline
11236\cdot(4) + 7011\cdot(5):\quad & 8117729100\,a_3 = 283328{,}726 && (6)\\
& a_3 = 3{,}490246\cdot 10^{-5} && (7)\\
(7) \text{ in } (5) \Longrightarrow\quad & a_2 = -8{,}3167566\cdot 10^{-3} && (8)\\
(7) \text{ und } (8) \text{ in } (1) \Longrightarrow\quad & a_1 = -0{,}0954935 && (9)
\end{aligned}
$$

$$f(x) = 3{,}490246\cdot 10^{-5}x^3 - 8{,}3167566\cdot 10^{-3}x^2 - 0{,}0954935x + 85$$



(b) Die steilste Stelle ist der Wendepunkt:

$$f''(x) = 6a_3x + 2a_2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = x_{\mathrm{P}} = -\frac{a_2}{3a_3} = 79{,}4, \quad y_{\mathrm{P}} = 42{,}4$$

(c) $\tan\beta_{\mathrm{P}} = f'(x_{\mathrm{K}}) = -0{,}756 \quad\Longrightarrow\quad \beta_{\mathrm{P}} = -37{,}1^\circ$

(d) Die Gleichung

$$f'(x_{\mathrm{L}}) = 3a_3x_{\mathrm{L}}^2 + 2a_2x_{\mathrm{L}} + a_1 = \tan(\beta_{\mathrm{L}}) = 0{,}60086$$

hat die Lösungen

$$x_{\mathrm{L1}} = 40{,}93 \text{ und } x_{\mathrm{L2}} = 117{,}93$$

Wegen L tiefer als K folgt $x_{\mathrm{L}} = 117{,}93$ und $y_{\mathrm{L}} = f(x_{\mathrm{L}}) = 15{,}3$.

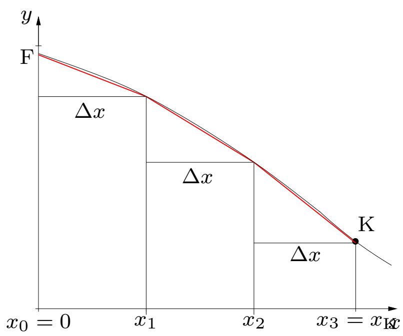
(e)

$$\mathrm{HS} = \sqrt{x_{\mathrm{L}}^2 + (88 - y_{\mathrm{L}})^2} = 138{,}5$$

(f) Annäherung durch einen Polygonzug (Zerlegung des Intervalls $[0, x_{\mathrm{K}}]$ in n gleich lange Teile:

$$x_i = i \cdot \Delta x \text{ mit } \Delta x = \frac{x_{\mathrm{K}}}{n}$$

$$w_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$



$$w_1 = \overline{FK} = \sqrt{x_{\mathrm{K}}^2 + (85 - y_{\mathrm{K}})^2} = 122{,}8$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{x_{\mathrm{K}}^2}{4} + \left(85 - f\left(\frac{x_{\mathrm{K}}}{2}\right)\right)^2} + \sqrt{\frac{x_{\mathrm{K}}^2}{4} + \left(f\left(\frac{x_{\mathrm{K}}}{2}\right) - y_{\mathrm{K}}\right)^2} = 123{,}5$$

$$w_3 = 123{,}8 \qquad w_{10} = 124{,}1$$

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 124{,}147$. Auf der realen Schanze ist $w = 125\,\mathrm{m}$, d.h. unser Modell der Aufsprungbahn ist nicht schlecht.

2.19.12. (a) $f'(x) = 4ax^3 + 2bx = 2x \cdot (2ax^2 + b) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_{2/3} = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.
Also: drei waagrechte Tangenten, wenn a und b verschiedene Vorzeichen haben.

(b) $f'(x) = 5x^4 + 3bx^2 - 1 = 5q^2 + 3bq - 1 = 0$
(Substitution: $q = x^2$)$\Rightarrow$
$q_1 = \frac{-3b+\sqrt{9b^2+20}}{10} > 0$. Da $\sqrt{9b^2 + 20} > |3b| \geq 3b \Rightarrow$
$x_1 = \sqrt{\frac{1}{10}(-3b + \sqrt{9b^2 + 20})}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{10}(-3b + \sqrt{9b^2 + 20})}$
$q_2 = \frac{-3b-\sqrt{9b^2+20}}{10} < 0$. Da $\sqrt{9b^2 + 20} > |3b| \geq 3b$.
Also: Der Graph von $f(x)$ hat zwei waagrechte Tangenten.

(c) $f'(x) = 5x^4 + 3bx^2 + 1 = 5q^2 + 3bq + 1 = 0$
(Substitution: $q = x^2$)$\Rightarrow$
$q_1 = \frac{-3b+\sqrt{9b^2-20}}{10}$. Da $\sqrt{9b^2 - 20} < |3b|$ folgt: $q_1 > 0$ für $b < 0$ und $q_1 < 0$ für $b > 0$.
$q_2 = \frac{-3b-\sqrt{9b^2-20}}{10}$. Da $\sqrt{9b^2 - 20} < |3b|$ folgt: $q_2 > 0$ für $b < 0$ und $q_2 < 0$ für $b > 0$.
Also:
Der Graph von $f(x)$ hat vier waagrechte Tangenten wenn $b < -\frac{\sqrt{20}}{3}$ (q_1 und q_2 positiv; Voraussetzung für b beachten).
Der Graph von $f(x)$ hat keine waagrechte Tangenten wenn $b > -\frac{\sqrt{20}}{3}$ (q_1 und q_2 negativ; Voraussetzung für b beachten)).

2.19.13. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 4 & \text{für } x < 2 \\ x^2 - 5\,x + 4 & \text{für } x \geqq 2 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 2\,x - 1 & \text{für } x < 2 \\ 2\,x - 5 & \text{für } x > 2 \end{cases}$

rel. Minimum bei $(\,0{,}5\,|\,-4{,}25\,)$ und $(\,2{,}5\,|\,-2{,}25\,)$.

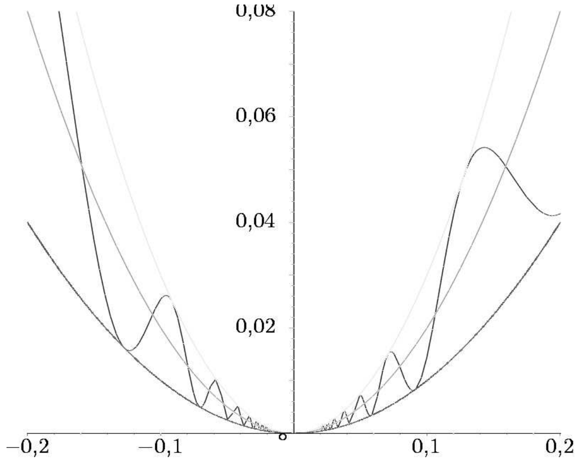
$f'_-(2) = 3$ und $f'_+(2) = -1$, d.h. rel. Maximum bei $(\,2\,|\,-2\,)$.

2.19.14. (a) $x_{00} = 0$, $x_{0k} = \dfrac{1}{k\,\pi}$ für $k \neq 0$

$$x_{1k} = \frac{1}{(0{,}5 + 2k)\pi}$$

$$x_{2k} = \frac{1}{(1{,}5 + 2k)\pi}$$

k	x_{0k}	x_{1k}	x_{2k}
0	0,000	0,637	0,212
1	0,318	0,127	0,091
2	0,159	0,071	0,058
3	0,106	0,049	0,042
4	0,080	0,037	0,034
5	0,064	0,030	0,028
6	0,053	0,025	0,024
7	0,045	0,022	0,021



(b) $x^2 \leqq f(x) \leqq 3\,x^2 \implies \lim\limits_{x\to 0} x^2 \leqq \lim\limits_{x\to 0} f(x) \leqq \lim\limits_{x\to 0} 3\,x^2 \implies$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, d.h. f ist stetig bei $x = 0$.

$f(x) > 0$ für alle $x \neq 0$ und $f(0) = 0 \implies$ absol. und rel. Min. bei $(0|0)$.

(c) $f'(x) = 4\,x + 2\,x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$

(d) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2\left(2 + \sin\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = 0$

(e) $f'(x) = \begin{cases} 4\,x + 2\,x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$, aber $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ existiert nicht.

f ist in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, aber f' ist bei $x = 0$ unstetig!

Da $x\sin\dfrac{1}{x}$ für $|x| \ll 1$ gegen $\cos\dfrac{1}{x}$ vernachlässigt werden kann, wechselt f' in jeder noch so kleinen Umgebung von 0 unendlich oft das Vorzeichen!

2.19.15. (a) Nullstellen: $x_{a0} = -\dfrac{2}{a}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \left(\frac{-\operatorname{sgn}(a)\cdot\infty}{0^+}\right) = -\operatorname{sgn}(a)\cdot\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \left(\frac{\operatorname{sgn}(a)\cdot\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{a}{2\mathrm{e}^x} = \left(\frac{a}{+\infty}\right) = 0^{\pm}$$

(b) $f_a(x) = f_b(x) \quad \Longrightarrow \quad ax = bx \quad \Longrightarrow \quad (a-b)x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0\ (a \neq b)$

Der gemeinsame Punkt aller Grafen ist also $(0|1)$.

(c) $f_a'(x) = \dfrac{-ax + a - 2}{2\mathrm{e}^x}$

$f_a'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{a1} = \dfrac{a-2}{a} = 1 - \dfrac{2}{a}, \quad f_a(x_{a1}) = \dfrac{a}{2}\mathrm{e}^{\frac{2-a}{a}}$

$f_a'(x) > 0 \iff x < \dfrac{a-2}{a}$ für $a > 0$ oder $x > \dfrac{a-2}{a}$ für $a < 0$.

$a > 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ steigend in $]-\infty; \frac{a-2}{a}[$ und fallend in $]\frac{a-2}{a}; \infty[\quad \Longrightarrow$

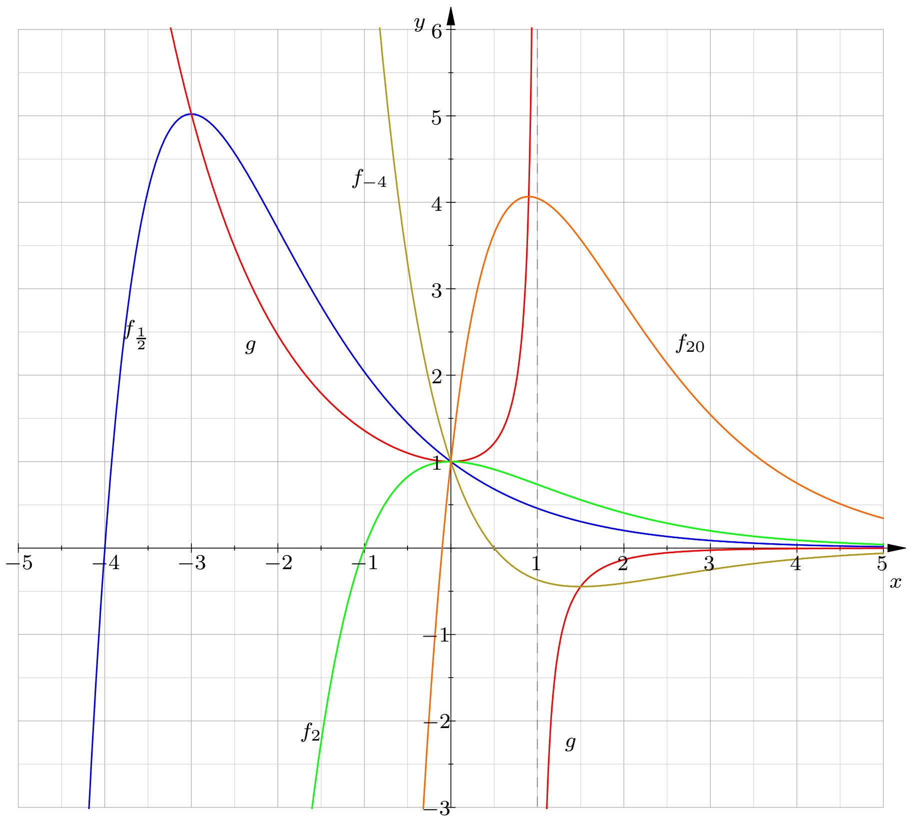
Hochpunkt bei H $\left(\frac{a-2}{a} \middle| \frac{a}{2}\mathrm{e}^{\frac{2-a}{a}}\right)$

$a < 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ fallend in $]-\infty; \frac{a-2}{a}[$ und steigend in $]\frac{a-2}{a}; \infty[\quad \Longrightarrow$

Tiefpunkt bei H $\left(\frac{a-2}{a} \middle| \frac{a}{2}\mathrm{e}^{\frac{2-a}{a}}\right)$

(d)

a	0,5	2	20	-4
x_{a0}	-4	-1	$-0{,}1$	0,5
x_{a1}	-3	0	0,9	1,5
$f(x_{a1})$	$\frac{\mathrm{e}^3}{4} \approx 5{,}02$	1	$\frac{10}{\mathrm{e}^{0,9}} \approx 4{,}07$	$-\frac{2}{\mathrm{e}^{1,5}} \approx -0{,}446$



(e) $f_{0,5}'(0) = -0{,}75 = \tan\alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = -36{,}87°$

$f_{20}'(0) = 9 = \tan\beta \quad \Longrightarrow \quad \beta = 83{,}66°$

Schnittwinkel: $\varphi = 180^\circ - (\beta + |\alpha|) = 59{,}47^\circ$

(f) $x_1 = 1 - \dfrac{2}{a} \implies \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{1-x_1} \implies y_1 = \dfrac{a}{2}\mathrm{e}^{\frac{2-a}{a}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x_1}}{1-x_1} \implies$

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$$

2.20 Extremwertaufgaben

2.20.1. (a) $r(x) = \left(1 + \dfrac{b}{x}\right)\sqrt{a^2+x^2}$, $r'(x) = \dfrac{x^3 - b\,a^2}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$

$r'(x) = 0 \implies x = x_0 = a^{\frac{2}{3}}\, b^{\frac{1}{3}}$

$r'(x) < 0$ für $x < x_0$ und $r'(x) > 0$ für $x > x_0 \implies$ rel. Min. von r bei x_0.

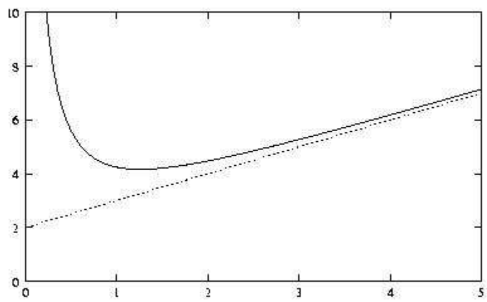
$L = r(x_0) = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

(b)
$$\begin{aligned} a = b &\implies L = 2\,a\sqrt{2} \\ a \ll b &\implies L \approx b \\ b = 2\,a &\implies L \approx 4{,}16\,a \end{aligned}$$

(c) $r(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)\sqrt{1+x^2} = (x+2)\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x\to\infty}[r(x) - (x+2)] = \lim_{x\to\infty}\left[(x+2)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x+2}} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 0$$



2.20.2.

(a) $G(v) = a\,s\,B + b\,s\,B\,v^2 + \dfrac{c\,s}{v}$

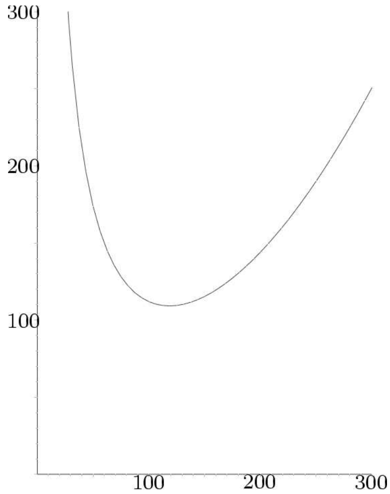
(b) $G'(v) = 2\,b\,s\,B\,v - \dfrac{c\,s}{v^2}$

$G'(v) = 0 \quad \Longrightarrow$

$v = v_0 = \sqrt[3]{\dfrac{c}{2\,b\,B}}$

(c) $v_0 = 118{,}6\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$

$G_0 = G(v_0) = 109{,}21$ €



2.20.3. (a) $P(R) = R\,I^2 = U^2 \cdot \dfrac{R}{(R+R_\mathrm{i})^2}$

$$P'(R) = U^2 \cdot \frac{R_\mathrm{i} - R}{(R+R_\mathrm{i})^3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad R = R_\mathrm{i}$$

$$P''(R) = U^2 \cdot \frac{2\,R - 4\,R_\mathrm{i}}{(R+R_\mathrm{i})^4} \quad \Longrightarrow \quad P''(R_\mathrm{i}) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Maximum}$$

$$P_\mathrm{max} = P(R_\mathrm{i}) = \frac{U^2}{4\,R_\mathrm{i}}$$

2.20.4. Mantelfläche: $A(r) = r\,s\,\pi = \sqrt{r^4\,\pi^2 + \dfrac{9\,V^2}{r^2}}$

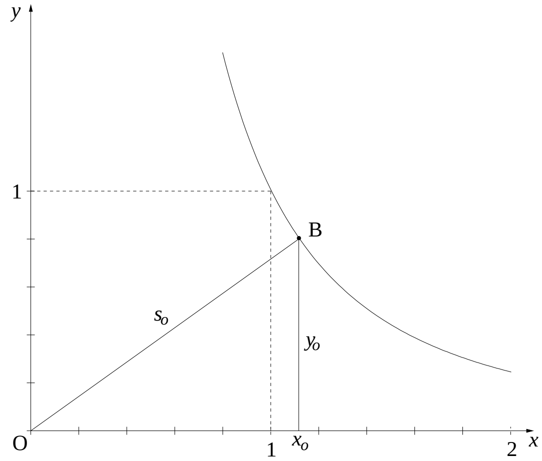
$$A(r) \text{ minimal} \Longleftrightarrow g(r) = r^4\,\pi^2 + \frac{9\,V^2}{r^2} \text{ minimal}$$

$$g'(r) = 4\,\pi^2\,r^3 - \frac{18\,V^2}{r^3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = r_0 = \sqrt[3]{\frac{3\,V}{\pi\sqrt{2}}}$$

$$g''(r) = 12\,\pi^2\,r^2 + \frac{54\,V^2}{r^4} > 0 \quad \Longrightarrow \quad A \text{ hat bei } r_0 \text{ ein Minimum.}$$

$$h_0 = \frac{3\,V}{r_0^2\,\pi} = r_0\,\sqrt{2}$$

2.20.5. (a)



(b) $s(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2} = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^4}}$

$$s'(x) = \frac{2x - \frac{4}{x^5}}{2\sqrt{x^2 + f(x)^2}}$$

$s'(x_0) = 0 \implies x_0 = 2^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}122$

$y_0 = f(x_0) = 2^{-\frac{1}{3}} \approx 0{,}7937$

$\lim\limits_{x\to 0^+} s(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} s(x) = +\infty$ und nur eine Nullstelle von s' $\implies$ relatives Minimum bei B $(x_0|y_0)$

(c) $s_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2} \approx 1{,}375$

In der Zeichnung hat s_0 die Länge $5 \cdot 1{,}375\,\text{cm} = 6{,}875\,\text{cm}$, in der Wirklichkeit also $2000 \cdot 6{,}875\,\text{cm} = 137{,}5\,\text{m}$.

2.20.6. (a) $V = \dfrac{13}{16}\,x^2 y, \quad y = \dfrac{16\,V}{13\,x^2}, \quad s = \dfrac{5}{8}\,x$

(b) $A'(x) = \dfrac{13}{4}\,x - \dfrac{40\,V}{13\,x^2}$

$$A'(x) = 0 \quad\implies\quad x = \sqrt[3]{\frac{160\,V}{169}}, \quad k = \frac{y}{x} = \frac{13}{10}$$

(c) $x = 8\,\text{m}$, $y = 10{,}4\,\text{m}$, $h = 5\,\text{m}$ und $g = 3\,\text{m}$

2.20.7. $U(x) = 2\,x + \dfrac{2\,A}{x}, \quad U'(x) = 2 - \dfrac{2\,A}{x^2} = 0 \quad\implies\quad x = y = \sqrt{A}$

2.21 Vermischte Aufgaben

2.21.1. (a) $f'(x)$ ist die Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit x.

(b) $f'(x)$ ist die Beschleunigung des Körpers zur Zeit x.

(c) $f(x) = x^3 \implies f'(x) = 3x^2$ (halbe Oberfläche). Vergrößert man x um Δx, dann kommt zu jeder Würfelfläche eine Schicht der Dicke $\frac{\Delta x}{2}$ dazu.

(d) $f(x) = \frac{4\pi}{3}x^3 \implies f'(x) = 4\pi x^2$ (Oberfläche). Vergrößert man x um Δx, dann kommt eine Schicht der Dicke Δx dazu.

(e) $A(x)$ sei die Querschnittsfläche des Körpers an der Stelle x (x-Achse senkrecht auf der Fläche). Vergrößert man x um Δx, wächst das Volumen um $\Delta f \approx A(x)\Delta x$ (umso genauer, je kleiner Δx ist):

$$A(x) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad\implies\quad A(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$$

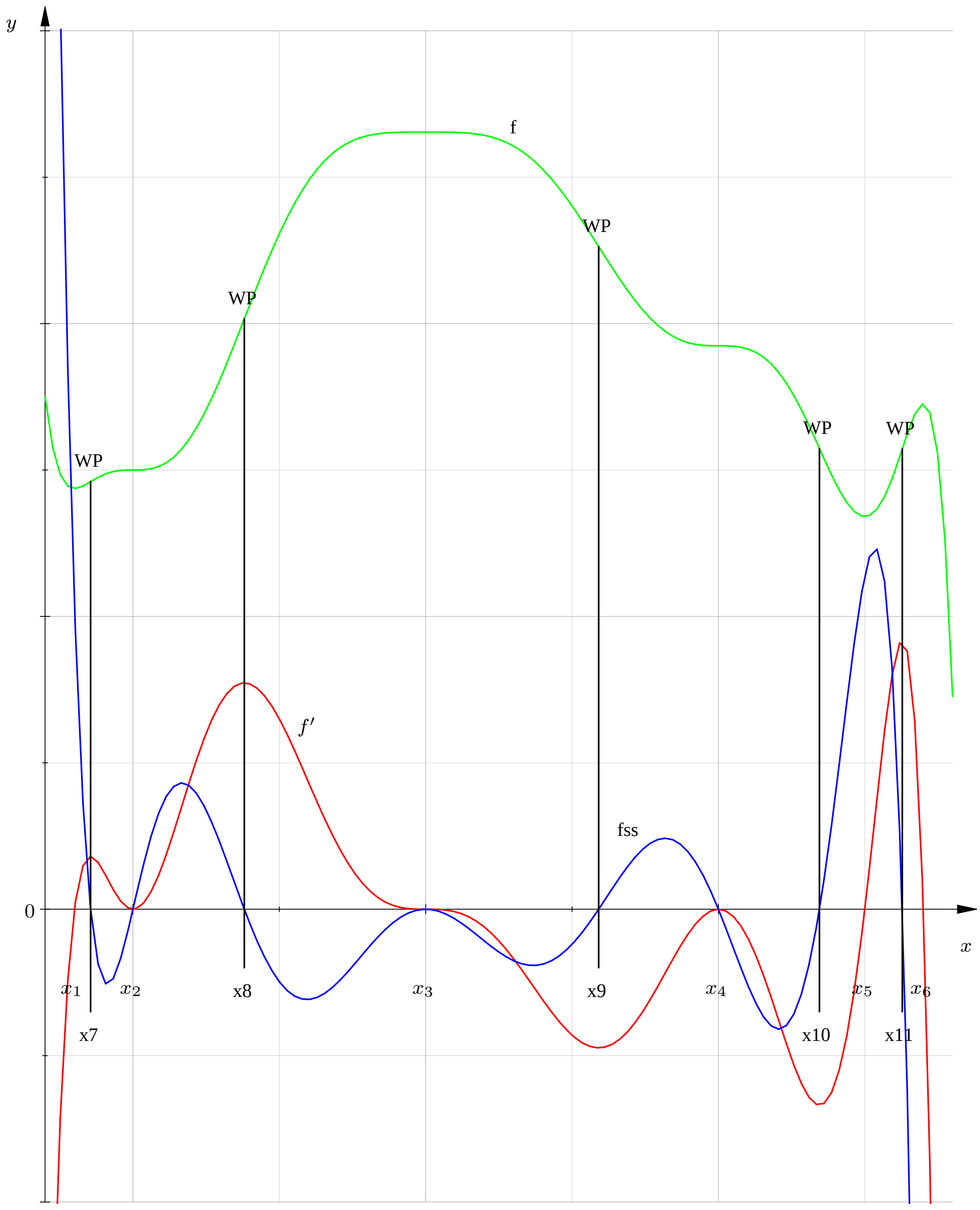
(f) $f'(x)$ ist die Änderungsrate der zur Zeit x lebenden Menschen, das ist die Differenz aus Geburtenrate und Sterberate.

(g) $f'(x)$ ist die Stromstärke im Leiter.

(h) Ist $F(x)$ die Kraft auf den Körper, dann ist die Arbeit bei der Bewegung um Δx durch $f(x) \approx F(x)\Delta x$ gegeben (umso genauer, je kleiner Δx ist):

$$F(x) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$$

2.21.2.



2.21.3. Da $x^2 \geqq 0$ und $e^{-x} > 0$ folgt $f(x) \geqq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da f nur eine Nullstelle besitzt muss diese ein relatives Minimum sein.

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}, \quad f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{11} = 0 \text{ und } x_{12} = 2$$

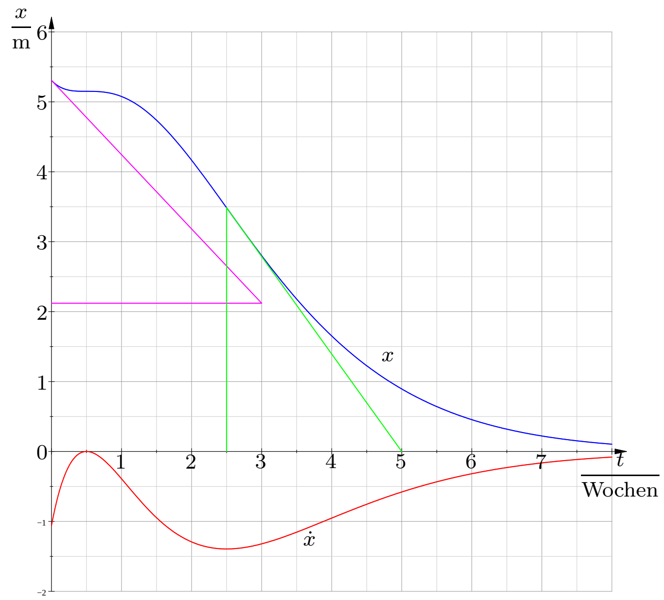
Das Vorzeichen von $f'(x)$ ist gleich dem Vorzeichen von $2x - x^2$ (nach unten geöffnete Parabel) $\Longrightarrow$

	$x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
f	fallend	steigend	fallend

$\Longrightarrow$ HP bei $(2\vert 4e^{-2}) \approx (2\vert 0{,}54)$

2.21.4. (a) Z.B. „Geschwindigkeit, mit der sich die Schneehöhe ändert.“

$$\dot{x}(0) \approx \frac{-3\,\mathrm{m}}{3\,\text{Wochen}} = -1{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\text{Woche}}, \quad \dot{x}(2{,}5) \approx \frac{-3{,}5\,\mathrm{m}}{2{,}5\,\text{Wochen}} = -1{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\text{Woche}}$$



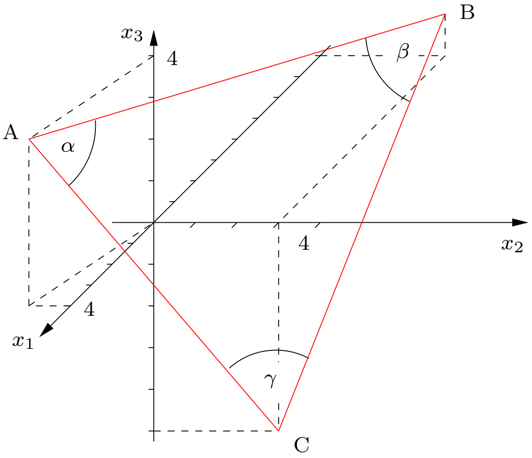
(b) Der Abfluss ist $-\dot{V} = -ab\dot{x}$, der maximale Abfluss also

$$200\,\mathrm{m} \cdot 100\,\mathrm{m} \cdot 1{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\text{Woche}} = 2{,}8 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}^3}{\text{Woche}} = 46\,\frac{\text{Liter}}{\mathrm{s}}$$

3 Vektorrechnung

3.1 Der dreidimensionale Punktraum

3.1.1. (a)



(b) $a = \sqrt{(0-(-8))^2+(3-3)^2+(-5-1)^2} = \sqrt{8^2+0^2+6^2} = 10$

$b = \sqrt{(4-0)^2+(-1-3)^2+(4-(-5))^2} = \sqrt{4^2+4^2+9^2} = \sqrt{113}$

$c = \sqrt{(4-(-8))^2+(-1-3)^2+(4-1)^2} = \sqrt{12^2+4^2+3^2} = 13$

(c) $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{7\sqrt{113}}{113} \implies \alpha = 48{,}8°$

$\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{3}{5} \implies \beta = 53{,}1°$

$\cos\gamma = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{11\sqrt{113}}{565} \implies \gamma = 78{,}1°$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{8}{\sqrt{113}} \implies A = \dfrac{1}{2}cb\sin\alpha = 52$

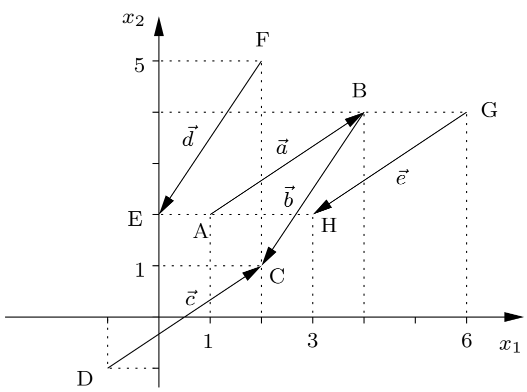
3.2 Vektoren

3.2.1. $\vec{a} = \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -\vec{e}$

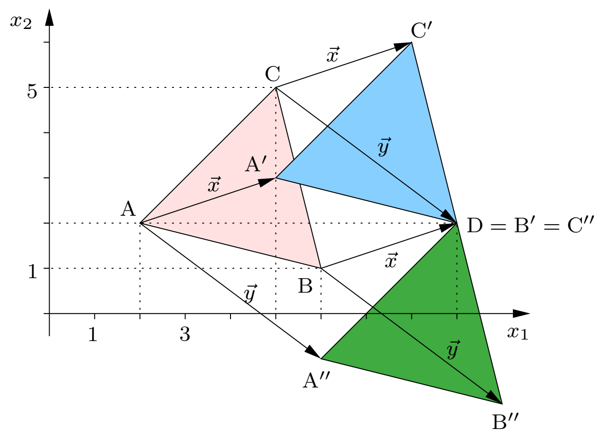
$\vec{b} = \vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Alle Vektoren haben den Betrag

$$\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$$



3.2.2. Die Dreiecke $\triangle A'B'C'$ und $\triangle A''B''C''$ sind kongruent zu $\triangle ABC$ und entsprechende Seiten sind parallel, d.h. durch einen Vektor wird eine Parallelverschiebung beschrieben.



3.2.3. Von jeder der acht Ecken kann man zu den restlichen sieben Ecken je einen Pfeil zeichnen, d.h. es können $7 \cdot 8 = 56$ Pfeile gezeichnet werden.

	Vektoren	Vielfachheit	Pfeile
Kanten	6	4	24
Flächendiag.	12	2	24
Raumdiag.	8	1	
	26		56

3.2.4.

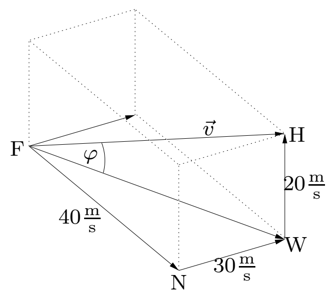
n	Wegdifferenz	neuer Ort
1	$\vec{w}_1 = \vec{x}$	$\vec{s}_1 = \vec{x}$
2	$\vec{w}_2 = \vec{y}$	$\vec{s}_2 = \vec{s}_1 + \vec{w}_2 = \vec{x} + \vec{y}$
3	$\vec{w}_3 = \vec{w}_2 - \vec{w}_1 = \vec{y} - \vec{x}$	$\vec{s}_3 = \vec{s}_2 + \vec{w}_3 = \vec{x} + \vec{y} + \vec{y} - \vec{x} = 2\vec{y}$
4	$\vec{w}_4 = \vec{w}_3 - \vec{w}_2 = -\vec{x}$	$\vec{s}_4 = \vec{s}_3 + \vec{w}_4 = 2\vec{y} - \vec{x}$
5	$\vec{w}_5 = \vec{w}_4 - \vec{w}_3 = -\vec{y}$	$\vec{s}_5 = \vec{s}_4 + \vec{w}_5 = 2\vec{y} - \vec{x} - \vec{y} = \vec{y} - \vec{x}$
6	$\vec{w}_6 = \vec{w}_5 - \vec{w}_4 = -\vec{y} + \vec{x}$	$\vec{s}_6 = \vec{s}_5 + \vec{w}_6 = \vec{y} - \vec{x} - \vec{y} + \vec{x} = \vec{o}$

Der Schatz liegt also genau unter dem Totenkopf!

3.2.5. $\left|\overrightarrow{FW}\right| = \sqrt{40^2\,\frac{m^2}{s^2} + 30^2\,\frac{m^2}{s^2}} = 50\,\frac{m}{s}$

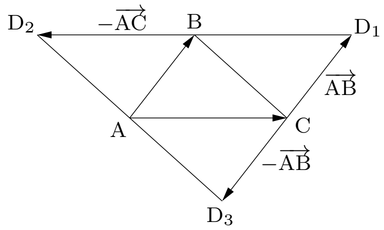
$|\vec{v}| = \sqrt{50^2\,\frac{m^2}{s^2} + 20^2\,\frac{m^2}{s^2}} = \sqrt{2900}\,\frac{m}{s} \approx 53{,}9\,\frac{m}{s}$

$\tan\varphi = \frac{20}{50} = 0{,}4 \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 21{,}8^\circ$



3.2.6. (a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\frac{-11}{-4} \neq \frac{6}{2} \Longrightarrow \overrightarrow{AB}$ nicht parallel $\overrightarrow{AC} \Longrightarrow$ die Beh.

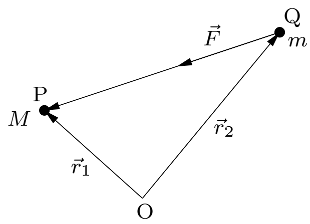
(b) $\overrightarrow{\mathrm{OD_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \implies \mathrm{D_1}(-10|6|7)$



$\overrightarrow{\mathrm{OD_2}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix} \implies \mathrm{D_2}(12|-6|-5)$

$\overrightarrow{\mathrm{OD_3}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \implies \mathrm{D_3}(-2|2|3)$

3.2.7. (a) Mit $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ist $r = |\vec{r}|$ und damit



$$\vec{F} = |\vec{F}| \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{GMm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{GMm}{r^3} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{F} = \frac{GMm}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

(b) $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3-9 \\ 6-(-3) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{10}\,\mathrm{m} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{10}\,\mathrm{m} \implies r = |\vec{r}| = 15 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$

Der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{r}$ ist $\vec{r}_0 = \dfrac{\vec{r}}{r} = \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ 0{,}6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$F = \frac{GMm}{r^2} = 0{,}47\,\mathrm{N} \implies \vec{F} = F\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} -0{,}38 \\ 0{,}28 \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{N}$$

3.2.8. (a) $\vec{v}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left(\dfrac{1}{\Delta t} \left[\begin{pmatrix} x(t+\Delta t) \\ y(t)+\Delta t \\ z(t+\Delta t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \right] \right) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$

Analog beweist man die Aussage über $\dot{\vec{a}}(t)$.

(b) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix}$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega\sin\omega t \\ r\omega\cos\omega t \end{pmatrix} = r\omega \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix}$$

$$v = |\vec{v}(t)| = r\omega\sqrt{(-\sin\omega t)^2 + (\cos\omega t)^2} = r\omega$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega^2\cos\omega t \\ -r\omega^2\sin\omega t \end{pmatrix} = -r\omega^2 \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} = -\omega^2\vec{r}(t)$$

$$a = |\vec{a}(t)| = \omega^2 r = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \frac{v^2}{r}$$

3.3 Das Skalarprodukt

3.3.1. (a) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = ab - ba = 0, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = -ab + ba = 0$

(b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}_{10} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_{20} = -\vec{a}_{10}$

(c) $\begin{pmatrix} x \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x - 2y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{3x}{2}$

z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

3.3.2. $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ h \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} q \\ -h \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = pq - h^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad h^2 = pq$

3.3.3. Aus $\cos 30° = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{108 + 2y}{\sqrt{108+4} \cdot \sqrt{108+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ folgt durch Quadrieren

$$\begin{aligned} (108+2y)^2 &= \frac{3}{4} \cdot 112 \cdot (108 + y^2) \\ 80\,y^2 - 432\,y &= 2592 \\ y^2 - 2 \cdot \frac{27}{10}\,y + \left(\frac{27}{10}\right)^2 &= \frac{162}{5} + \frac{729}{100} = \frac{3969}{100} \\ y &= \frac{27}{10} \pm \frac{63}{10} \\ y_1 = 9 \qquad & y_2 = -3{,}6 \end{aligned}$$

3.3.4. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}, \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \frac{25\sqrt{7}}{231} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 73{,}361°$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \cos\beta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|} = \frac{26\sqrt{22}}{231} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 58{,}135°$

$$\begin{aligned} \gamma &= 180° - \alpha - \beta = 48{,}504° \\ A &= \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}} \cdot \underbrace{\overline{\mathrm{AC}} \sin\alpha}_{h_c} = 41{,}83 \end{aligned}$$

3.3.5. (a) Zunächst zeigen wir, dass $|\vec{b}| = |\vec{a}|$:

$$\begin{aligned} |\vec{b}|^2 &= (a_1 \cos\varphi - a_2 \sin\varphi)^2 + (a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\varphi)^2 = \\ &= a_1^2 \cos^2\varphi - 2a_1a_2 \sin\varphi\cos\varphi + a_2^2 \sin^2\varphi + \\ &\qquad + a_1^2 \sin^2\varphi + 2a_1a_2 \sin\varphi\cos\varphi + a_2^2 \cos^2\varphi = \\ &= a_1^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + a_2^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = a_1^2 + a_2^2 = |\vec{a}|^2 \end{aligned}$$

Wegen $|\vec{x}| \geqq 0$ folgt daraus $|\vec{b}| = |\vec{a}|$.

Aus
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1^2 \cos\varphi - a_1 a_2 \sin\varphi + a_2 a_1 \sin\varphi + a_2^2 \cos\varphi = (a_1^2 + a_2^2)\cos\varphi$$
folgt mit $\varphi' = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$:
$$\cos\varphi' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} = \frac{(a_1^2 + a_2^2)\cos\varphi}{a_1^2 + a_2^2} = \cos\varphi \quad \Longrightarrow \quad \varphi' = \pm\varphi$$

$\vec{b}$ entsteht also tatsächlich durch eine Drehung um φ aus $\vec{a}$. Wir müssen noch zeigen, dass es eine Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn ist. Dazu wählen wir $\vec{a}$ parallel zur x_1-Achse:
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \cos\varphi \\ a_1 \sin\varphi \end{pmatrix}$$
Da für $0 < \varphi < 90°$ beide Koordinaten vob $\vec{b}$ positiv sind, handelt es sich tatsächlich um eine Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn.

(b)
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4\cos 60° - 3\sin 60° \\ 4\sin 60° + 3\cos 60° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} + \frac{3}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0{,}60 \\ 4{,}96 \end{pmatrix}$$

3.3.6. (a) In einer kleinen Zeitspanne $\mathrm{d}t$ ist die Ortsänderung von K durch $\mathrm{d}\vec{s} = \vec{v}\,\mathrm{d}t$ gegeben. In dieser Zeitspanne verrichtet die Zentripetalkraft $\vec{F_\mathrm{z}}$ an K die Arbeit
$$\mathrm{d}W = \vec{F_\mathrm{z}}\mathrm{d}\vec{s} = \vec{F_\mathrm{z}}\vec{v}\,\mathrm{d}t$$
Wegen $\vec{F_\mathrm{z}} \perp \vec{v}$ ist aber $\vec{F_\mathrm{z}}\vec{v} = 0$, d.h. $\mathrm{d}W = 0$ und damit auch $W = 0$.

(b) Aus $\mathrm{d}W = \vec{F}\mathrm{d}\vec{s}$ folgt
$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\dot{\vec{s}} = \vec{F}\vec{v}$$
Die Reibungskraft zeigt in die Richtung von $-\vec{v}$ und hat den Betrag R:
$$\vec{R} = -\frac{\vec{v}}{v} \cdot R \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = \vec{G} + \vec{R} = \vec{G} - \frac{\vec{v}}{v} \cdot R = \vec{G} - kv\vec{v}$$
$$P = \vec{F}\vec{v} = \vec{G}\vec{v} - kv\vec{v}^2 = \vec{G}\vec{v} - kv^3$$
Mit
$$v = \sqrt{4^2 + 20^2 + 5^2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 21\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
folgt
$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{N} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ -5 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 5 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}} \cdot 21^3\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^3} = -26{,}3\,\mathrm{W}$$

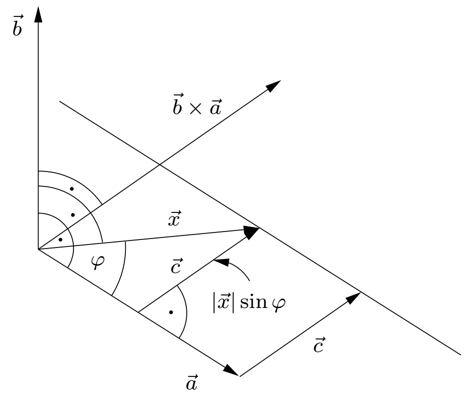
3.4 Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

3.4.1. Mit $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$, $\vec{b}^{\,2} = |\vec{b}|^2$, $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ und $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$ folgt

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b})^2 &= |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^{\,2} \cdot |\vec{b}|^2 \sin^2\varphi = |\vec{a}|^{\,2} \cdot |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2\varphi) = \\ &= |\vec{a}|^{\,2} \cdot |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi)^2 = \vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2\end{aligned}$$

3.4.2. (a) Fall 1 ($\vec{a} \not\perp \vec{b}$):

Da $\vec{a} \times \vec{x}$ immer senkrecht auf $\vec{a}$ steht, ist $L = \emptyset$.



Fall 2 ($\vec{a} \perp \vec{b}$):

$$\vec{x} \perp \vec{b} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} \| E \text{ mit } E: \ \vec{b}\vec{x} = 0$$

$$|\vec{a} \times \vec{x}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{x}| \sin\varphi = |\vec{b}| \quad \Longrightarrow$$

$$|\vec{c}| = |\vec{x}| \sin\varphi = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

$$\vec{x} = \lambda\vec{a} + \vec{c} = \lambda\vec{a} + \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{b} \times \vec{a}|} \cdot \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

$$L = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, \vec{x} = \lambda\vec{a} + \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \wedge \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad (1)$$

Oder: $$\vec{a} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$x_2 = \frac{a_2x_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_3}, \quad x_1 = \frac{a_1x_3}{a_3} + \frac{b_2}{a_3} \quad \Longrightarrow$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1x_3}{a_3} + \frac{b_2}{a_3} \\ \frac{a_2x_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_3} \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_3}{a_3} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b_2}{a_3} \\ -\frac{b_1}{a_3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit $\lambda = \dfrac{x_3}{a_3}$ folgt

$$\vec{x} = \lambda\vec{a} + \frac{1}{a_3} \cdot \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

(äquivalent zur obigen Lösung, nur anderer Aufpunkt)

(b) Mit (1): $$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 11 & 10 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 52 \\ -55 \end{pmatrix}, \quad |\vec{a}|^2 = 26$$

$$L = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{26} \begin{pmatrix} -11 \\ 52 \\ -55 \end{pmatrix} \wedge \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Mit (2):

$$L = \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

z.B.

λ	0	1	2
$\vec{x}$	$\begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Oder:

$$\vec{a} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 5 & 0 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - 5x_3 \\ 5x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix} \implies$$

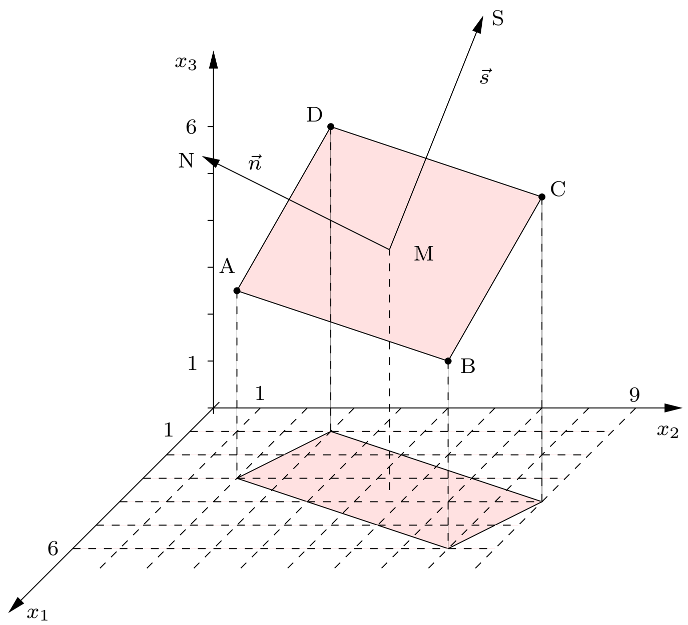
$$x_2 = 2 \text{ und } x_1 = -5x_3 - 11$$

3.4.3. (a) $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{C}} = \overrightarrow{\mathrm{B}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 6{,}5 \end{pmatrix} \implies$ C(4|9|6,5)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 3 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 + 0 \cdot 2{,}5 = 0 \implies \sphericalangle \mathrm{BAD} = 90^\circ$, also Rechteck.

$\overrightarrow{\mathrm{M}} = \overrightarrow{\mathrm{A}} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 5{,}5 \\ 5{,}25 \end{pmatrix} \implies$ M(3,5|5,5|5,25)

(b)



(c) $\vec{n}' = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 2{,}5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 2{,}5 - 0 \\ 0 - 3 \cdot 2{,}5 \\ 3 \cdot 1 - 6 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -7{,}5 \\ 15 \end{pmatrix} = 7{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$|\vec{n}'| = 7{,}5 \cdot \sqrt{2^2+1^2+2^2} = 7{,}5 \cdot 3 = 22{,}5, \quad \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = 6\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{N}} = \overrightarrow{\mathrm{M}} + \vec{n} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 5{,}5 \\ 5{,}25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 3{,}5 \\ 9{,}25 \end{pmatrix}$$

(d) $\overrightarrow{\mathrm{S}} = \overrightarrow{\mathrm{M}} + \vec{s} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 5{,}5 \\ 5{,}25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 8{,}5 \\ 11{,}25 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{S}(5{,}5|8{,}5|11{,}25)$

$$\vec{s}_0 = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \cos\sigma = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \vec{n}_0 \cdot \vec{s}_0 = \frac{2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 6}{21} = \frac{13}{21}$$

$$\sigma = 51{,}75^\circ$$

(e) $\frac{A_\mathrm{s}}{\mathrm{m}^2} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = 3\sqrt{5} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5} = 22{,}5 \quad \Longrightarrow$

$$P = 0{,}11\,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}^2} \cdot 22{,}5\,\mathrm{m}^2 \cdot \frac{13}{21} = \frac{429}{280}\,\mathrm{kW} = 1{,}53\,\mathrm{kW}$$

3.4.4. (a) Kugelgleichung: $k: \quad (x_1+12)^2 + (x_2-10)^2 + (x_3-9)^2 = 17^2$

$k \cap x_2$-Achse: $x_1 = x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 12^2 + (x_2-10)^2 + 9^2 = 17^2$

$$x_2 = 10 \pm 8 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{A}(0|2|0) \text{ und } \mathrm{B}(0|18|0)$$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{MA}} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$

$$\vec{n}' = \overrightarrow{\mathrm{MA}} \times \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 9 + 8 \cdot 9 \\ -9 \cdot 12 + 9 \cdot 12 \\ 8 \cdot 12 + 8 \cdot 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 \\ 0 \\ 192 \end{pmatrix} = 48 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = 17\vec{n}_0 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 51 \\ 0 \\ 68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10{,}2 \\ 0 \\ 13{,}6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{N} = \vec{M} + \vec{n} = \begin{pmatrix} -1{,}8 \\ 10{,}0 \\ 22{,}6 \end{pmatrix}$$

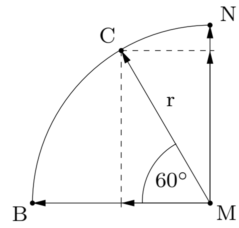
(c) $\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{161}{289} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 0{,}9799 = 56{,}14^\circ \quad \Longrightarrow \quad s = r\alpha = 16{,}66$

(d) $\mathrm{M}'(-12|10|0) \quad \Longrightarrow \quad r'^{\,2} = \overline{\mathrm{M'B}}^2 = 12^2 + 8^2 = 208 \quad \Longrightarrow \quad A = r'^{\,2}\pi = 653{,}5$

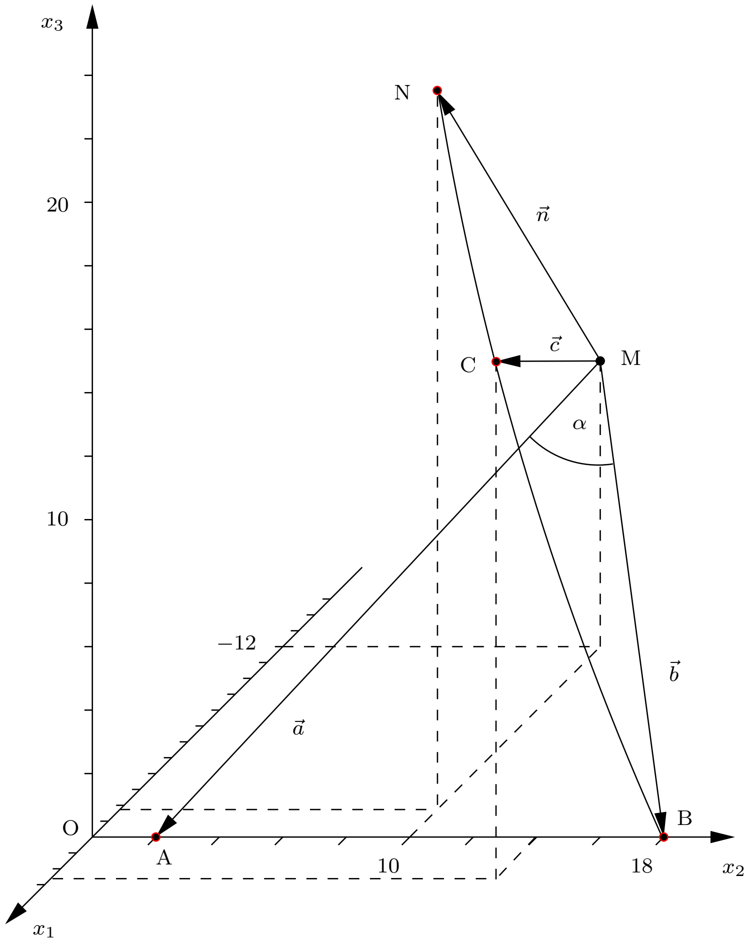
(e) $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{MC}} = r\cos 60° \cdot \frac{\vec{b}}{r} + r\sin 60° \cdot \frac{\vec{n}}{r}$

$$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4{,}5 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{10}\begin{pmatrix} 51 \\ 0 \\ 68 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 14{,}8 \\ 4 \\ 7{,}3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = \vec{M} + \vec{c} \approx \begin{pmatrix} 2{,}8 \\ 14{,}0 \\ 16{,}3 \end{pmatrix}$$



(f)



3.4.5. (a) Kugelgleichung: $k: \quad (x_1+9)^2 + (x_2-6)^2 + (x_3-6)^2 = 11^2$

$k \cap x_1$-Achse: $x_2 = x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x_1+9)^2 + 6^2 + 6^2 = 11^2$

$x_1 = -9 \pm 7 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{A}_1(-2|0|0)$ und $\mathrm{A}_2(-16|0|0)$

$k \cap x_2$-Achse: $x_1 = x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 9^2 + (x_2-6)^2 + 6^2 = 11^2$

$x_2 = 6 \pm 2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{B}_1(0|4|0)$ und $\mathrm{B}_2(0|8|0)$

$k \cap x_3$-Achse: $x_1 = x_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 9^2 + 6^2 + (x_3-6)^2 = 11^2$

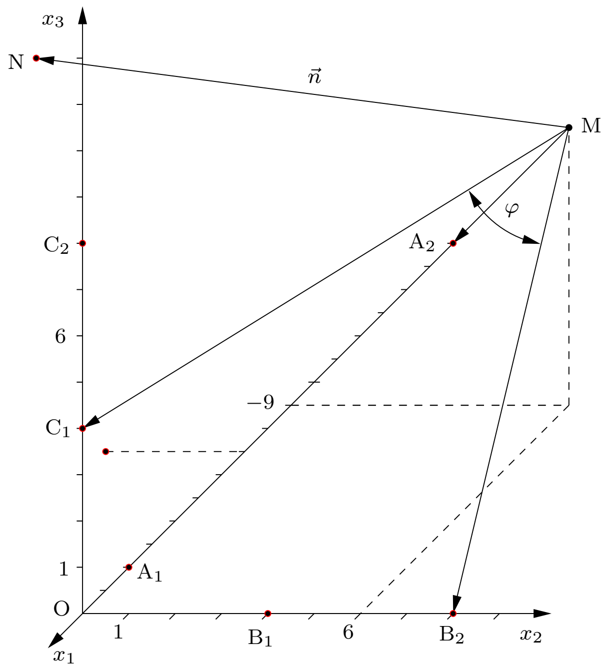
$x_3 = 6 \pm 2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{C}_1(0|0|4)$ und $\mathrm{C}_2(0|0|8)$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{MA}_2} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{MB}_2} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}\,' = \overrightarrow{\mathrm{MA}_2} \times \overrightarrow{\mathrm{MB}_2} = \begin{pmatrix} 48 \\ -96 \\ 40 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}\,'}{|\vec{n}\,'|} = \frac{1}{\sqrt{205}} \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{n} = 11\vec{n}_0 = \frac{11}{\sqrt{205}} \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4{,}61 \\ -9{,}22 \\ 3{,}84 \end{pmatrix}$$

$$\vec{N} = \vec{M} + \vec{n} \approx \begin{pmatrix} -4{,}39 \\ -3{,}22 \\ 9{,}84 \end{pmatrix}, \quad \vec{S} = \vec{M} - \vec{n} \approx \begin{pmatrix} -13{,}6 \\ 15{,}2 \\ 2{,}16 \end{pmatrix}$$

(c)



(d) $\mathrm{M}_{12}(-9|6|0)$ ist der Fußpunkt des Lotes von M auf die x_1x_2-Ebene und der Mittelpunkt von k_{12}.

$\overrightarrow{\mathrm{M}_{12}\mathrm{B}_2} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{12} = \overline{\mathrm{M}_{12}\mathrm{B}_2} = \sqrt{85}, \quad A_{12} = r_{12}^2\pi = 85\pi$

$k_2 : \quad (x_1 + 9)^2 + (x_2 - 6)^2 = 85$

(e) $\overrightarrow{\mathrm{MC}_1} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \cos\varphi = \frac{\overrightarrow{\mathrm{MC}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}_2}}{|\overrightarrow{\mathrm{MC}_1}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{MB}_2}|} = \frac{81}{121} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 0{,}8374 = 47{,}98°$

$$s = r\varphi = 9{,}211$$

(f) $\mathrm{P}(-7|-3|x_3) \in k \quad \Longrightarrow \quad 2^2 + 9^2 + (x_3 - 6)^2 = 11^2 \quad \Longrightarrow \quad x_3 \in \{0;\ 12\}$

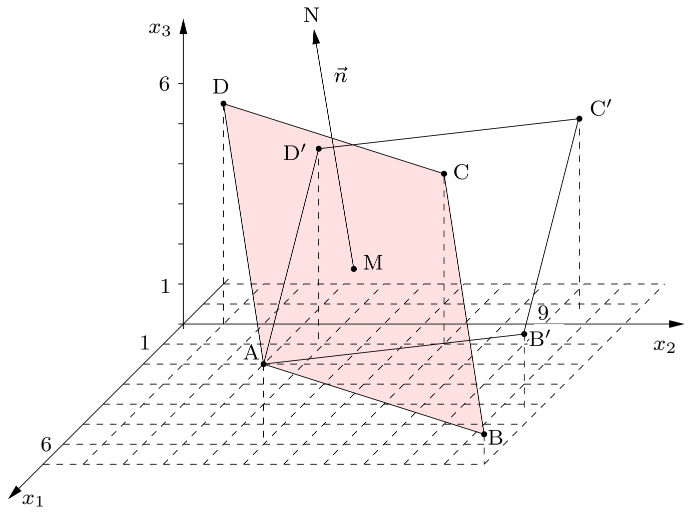
(g) $\overrightarrow{\mathrm{MQ}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \overline{\mathrm{MQ}} = 5\sqrt{5} \approx 11{,}18 > r \quad \Longrightarrow \quad$ nein

3.4.6. (a) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -60 \\ -40 \\ 35 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 60 \\ -12{,}5 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \vec{B} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \\ 42{,}5 \end{pmatrix} \implies$ C(10|70|42,5)

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -600 + 2400 - 437{,}5 = 1362{,}5 \neq 0 \implies \sphericalangle BAD \neq 90°$, also kein Rechteck.

$$\vec{M} = \vec{A} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 60 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -50 \\ 20 \\ 22{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 60 \\ 31{,}25 \end{pmatrix} \implies \mathrm{M}(35|60|31{,}25)$$

(b)



(c) $$\vec{n}' = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 10 & 60 & -12{,}5 \\ -60 & -40 & 35 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \cdot 35 - 12{,}5 \cdot 40 \\ 12{,}5 \cdot 60 - 10 \cdot 35 \\ -10 \cdot 40 + 60 \cdot 60 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 1600 \\ 400 \\ 3200 \end{pmatrix} = 400 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}'| = 400 \cdot \sqrt{4^2 + 1^2 + 8^2} = 400 \cdot 9 = 3600, \quad \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = 90 \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 80 \end{pmatrix}, \quad \vec{N} = \vec{M} + \vec{n} = \begin{pmatrix} 35 \\ 60 \\ 31{,}25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 70 \\ 111{,}25 \end{pmatrix}$$

(d) φ ist der Winkel, um den $\vec{n}$ von der Vertikalen abweicht, also der Winkel zwischen $\vec{n}$ und $\vec{e}_3$:

$$\cos\varphi = \vec{n}_0 \cdot \vec{e}_3 = \frac{8}{9} \implies \varphi = 27{,}27°$$

(e) $F = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \sin\alpha = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |\vec{n}'| = 3600$

(f) Aus $F = 3600$ folgt $|\vec{p}| = |\vec{s}| = 60$. Aus $\vec{p} \perp \vec{n}$ und $p_3 = 0$ folgt

$$\vec{p} \cdot \vec{n} = 40p_1 + 10p_2 = 0 \implies p_2 = -4p_1 \implies \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ -4p_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{p}|^2 = p_1^2 + 16p_1^2 = 3600 \quad \Longrightarrow \quad p_1 = \pm\frac{60}{\sqrt{17}}$$

Aus den Zusatzbedingungen folgt:

$$\vec{p} = \frac{60}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wegen der Forderung „Quadrat“ muss $\vec{s}$ auf $\vec{p}$ senkrecht stehen und wegen $\vec{s}$ parallel zur Ebene E muss $\vec{s}$ auf $\vec{n}$ senkrecht stehen:

$$\vec{s} = 60 \cdot \vec{n}_0 \times \vec{p}_0 = \frac{60}{9\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{20}{3\sqrt{17}} \begin{pmatrix} -32 \\ -8 \\ 17 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -51{,}74 \\ -12{,}94 \\ 27{,}49 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{B}}' = \overrightarrow{\mathrm{A}} + \vec{p} = \begin{pmatrix} 45{,}45 \\ 108{,}21 \\ 20{,}00 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{C}}' = \overrightarrow{\mathrm{B}}' + \vec{s} = \begin{pmatrix} -6{,}29 \\ 95{,}27 \\ 47{,}49 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{D}}' = \overrightarrow{\mathrm{A}} + \vec{s} = \begin{pmatrix} 8{,}26 \\ 37{,}06 \\ 47{,}49 \end{pmatrix}$$

3.4.7. (a) $k: \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5^2$ und $x_3 \geqq 0$

$$\mathrm{A} \in k \quad \Longrightarrow \quad 4{,}8^2 + 0^2 + a_3^2 = 25 \quad \Longrightarrow \quad a_3 = \sqrt{1{,}96} = 1{,}4$$

$$\mathrm{B} \in k \quad \Longrightarrow \quad 0^2 + b_2^2 + 4^2 = 25 \quad \Longrightarrow \quad b_2 = 3$$

$$\vec{C}' = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} -1{,}4 \cdot 3 \\ -4{,}8 \cdot 4 \\ 4{,}8 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}2 \\ -19{,}2 \\ 14{,}4 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} -7 \\ -32 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{C}'| = \frac{3}{5}\sqrt{7^2 + 32^2 + 24^2} = \frac{3}{5}\sqrt{1649}$$

$$\vec{C} = \frac{5}{|\vec{C}'|} \cdot \frac{3}{5} \begin{pmatrix} -7 \\ -32 \\ 24 \end{pmatrix} = \frac{5}{\sqrt{1649}} \begin{pmatrix} -7 \\ -32 \\ 24 \end{pmatrix} = \frac{5\sqrt{1649}}{1649} \begin{pmatrix} -7 \\ -32 \\ 24 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0{,}862 \\ -3{,}94 \\ 2{,}96 \end{pmatrix}$$

(b) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \dfrac{28}{125} = 0{,}224 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 1{,}3449 = 77{,}056^\circ \quad \Longrightarrow$

$$s = r\alpha = 6{,}72\,\mathrm{m} = 672\,\mathrm{cm} \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{672\,\mathrm{cm}}{15\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}}} = 44{,}8\mathrm{min}$$

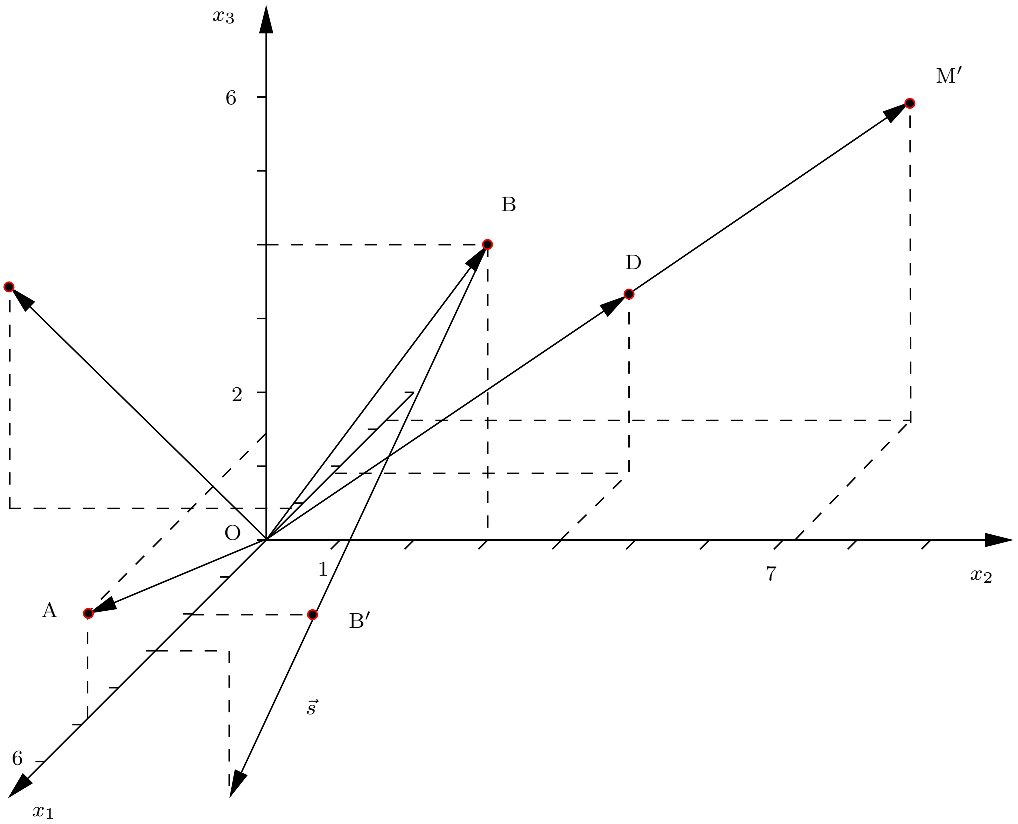
(c) $\vec{b} + \lambda\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 + 3\lambda \\ 3 - 2\lambda \\ 4 - 6\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \dfrac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad \vec{b}' = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

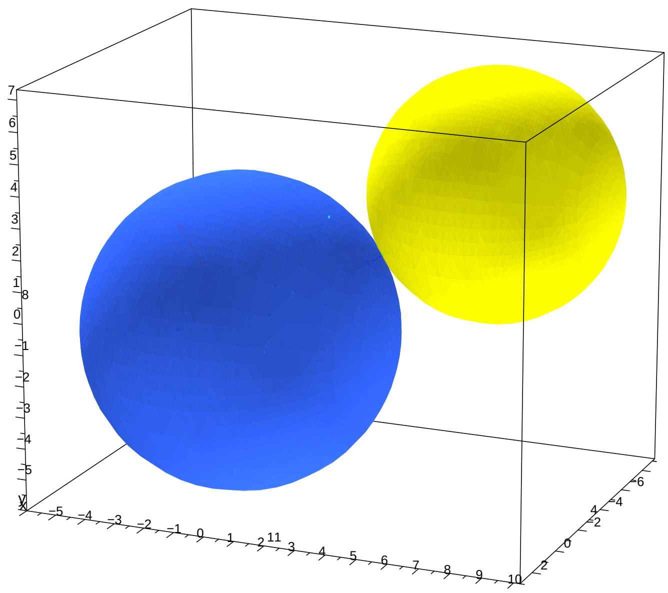
(d) $\mathrm{D} \in k \quad \Longrightarrow \quad 1{,}8^2 + 4^2 + d_3^2 = 25 \quad \Longrightarrow \quad d_3 = 2{,}4$

$$\vec{M}' = \vec{D} + \frac{4}{5}\vec{D} = \frac{9}{25} \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}24 \\ 7{,}2 \\ 4{,}32 \end{pmatrix}$$

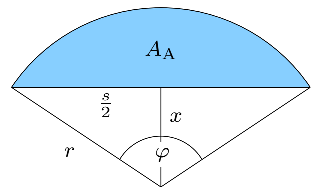
$$k': \quad (x_1 + 3{,}24)^2 + (x_2 - 7{,}2)^2 + (x_3 - 4{,}32)^2 = 4^2$$

(e)





3.4.8.



3.4.9. (a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \implies \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AD}} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 8 - 16 + 8 = 0 \implies \overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$$\vec{\mathrm{C}} = \vec{\mathrm{B}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \implies \mathrm{C}\,(1|5|8)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \implies \vec{\mathrm{H}} = \vec{\mathrm{A}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \implies \mathrm{H}\,(4|5|5)$$

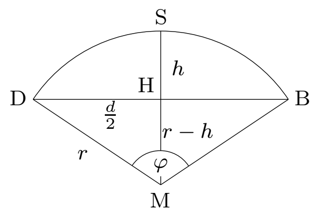
$$d = \overline{\mathrm{AB}} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

(b) $\vec{n}' = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 - 2 \cdot (-4) \\ 2 \cdot (-2) - (-4) \cdot 4 \\ (-4) \cdot (-4) - 4 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3 \implies \overrightarrow{\mathrm{HS}} = h \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \vec{n}$$

$$\vec{\mathrm{S}} = \vec{\mathrm{H}} + \vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \implies \mathrm{S}\,(6|6|7)$$

(c) $r^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + (r-h)^2 = \frac{d^2}{4} + r^2 - 2rh + h^2 \implies$



$$r = \frac{\frac{d^2}{4} + h^2}{2h} = \frac{d^2 + 4h^2}{8h} = \frac{72 + 36}{24} = \frac{9}{2}$$

$$\vec{\mathrm{M}} = \vec{\mathrm{S}} - r \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(d) $\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{\mathrm{MD}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \cos\varphi = \frac{\overrightarrow{\mathrm{MB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MD}}}{r^2} = -\frac{\frac{63}{4}}{\frac{9^2}{4}} = -\frac{7}{9}$

$$\varphi = 141{,}06^\circ = 2{,}4619 \implies s = r\varphi = 11{,}079$$

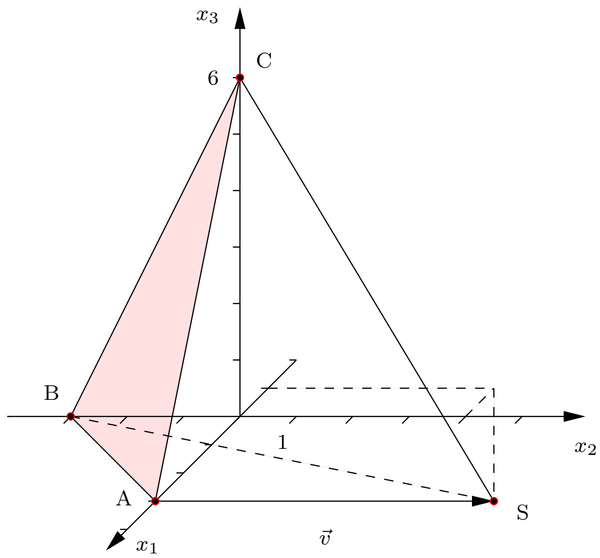
3.4.10. (a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -18 \\ 18 \\ -9 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 9\vec{n}$

$$\vec{v} = 6 \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{6}{3}\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathrm{S}} = \vec{\mathrm{A}} + \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

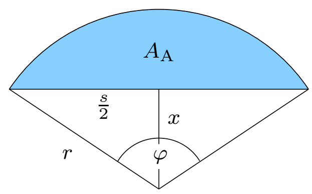
(b) $A_\triangle = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \frac{9}{2} \cdot 3 = \frac{27}{2}, \quad V = \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{2} \cdot 6 = 27$

(c) $\cos\varphi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}_3}{|\vec{v}|} = -\frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 109{,}47°$

(d)



3.4.11. Die Fläche A_A eines Kreisabschnitts mit dem Mittelpunktswinkel φ und der Sehnenlänge s ist



$$\begin{aligned} A_\mathrm{A} &= A_\mathrm{Sektor} - A_\mathrm{Dreieck} = \\ &= \frac{1}{2}\varphi r^2 - \frac{1}{2}sx = \frac{1}{2}\varphi r^2 - r\sin\frac{\varphi}{2} \cdot r\cos\frac{\varphi}{2} = \\ &= \frac{r^2}{2}\left(\varphi - 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{r^2}{2}\left(\varphi - \sin\varphi\right) \end{aligned}$$

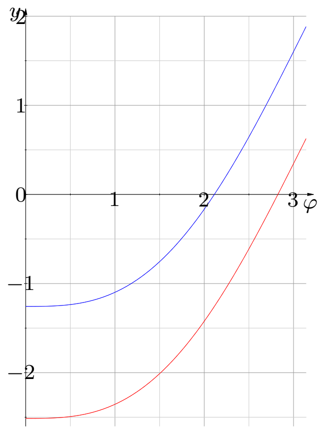
Für unsere Schnitte gilt $A_\mathrm{A1} = \frac{1}{5}r^2\pi$ und $A_\mathrm{A2} = \frac{2}{5}r^2\pi$, woraus die Gleichungen

$$\varphi - \sin\varphi = \frac{2\pi}{5} \text{ und } \varphi - \sin\varphi = \frac{4\pi}{5}$$

folgen. Die Lösungen dieser Gleichungen sind die Nullstellen von

$$f(\varphi) = \varphi - \sin\varphi - \frac{2\pi}{5} \text{ und } g(\varphi) = \varphi - \sin\varphi - \frac{4\pi}{5}$$

Den Grafen von f und g entnimmt man die Startwerte für das Newtonverfahren:



$$\varphi_{10} = 2{,}1 \text{ und } \varphi_{20} = 2{,}8$$

Mit den Rekursionsformeln

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \frac{\varphi_n - \sin\varphi_n - \frac{2\pi}{5}}{1 - \cos\varphi_n}$$

und

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \frac{\varphi_n - \sin\varphi_n - \frac{4\pi}{5}}{1 - \cos\varphi_n}$$

folgt in jeweils drei Schritten

$$\varphi_1 = 2{,}113138959 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = r\cos\frac{\varphi_1}{2} = 0{,}4919r$$

und

$$\varphi_2 = 2{,}824797202 \quad\Longrightarrow\quad x_2 = r\cos\frac{\varphi_2}{2} = 0{,}1577r$$