1 Integralrechnung

1.1 Stammfunktionen und unbestimmtes Integral

1.1.1. (a) $\int x^{999}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \sqrt[n]{x^m}\,\mathrm{d}x$ (d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$

(e) $\int \cos 3x\,\mathrm{d}x$ (f) $\int A\sin\omega t\,\mathrm{d}t$ (g) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2}$ (h) $\int \frac{\mathrm{d}a}{a^2}$

1.1.2. (a) $\int nx^{n-1}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int t^{10}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int t^{10}\,\mathrm{d}t$

(d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n}$ (e) $\int |x|\,\mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{2x^6+3x^5+3x^3+1}{x^5}\,\mathrm{d}x$

(g) $\int (ax+a)\,\mathrm{d}x$ (h) $\int (ax+a)\,\mathrm{d}a$ (i) $\int (ax+a)\,\mathrm{d}t$

1.1.3. (a) $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ (b) $\int \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \sqrt{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ (d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x}$

(e) $\int a\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$ (f) $\int A\mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t$ (g) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x}}$ (h) $\int \left(2x^2+3\mathrm{e}^{-3x}\right)\,\mathrm{d}x$

1.1.4. (a) $\int \mathrm{e}^{\frac{x}{8}-3}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{3x+1}}$ (d) $\int \mathrm{e}^{5x+7}\,\mathrm{d}x$

(e) $\int a\mathrm{e}^{bx+c}\,\mathrm{d}x$ (f) $\int 5\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}t$ (g) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2}$ (h) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{x}{2}-1}}$

1.1.5. (a) $\int (ax+b)^n\,\mathrm{d}x$ (b) $\int \sqrt[3]{7-x}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \sqrt[n]{(a-bx)^m}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5x-3}}$ (e) $\int \cos(3x-4)\,\mathrm{d}x$ (f) $\int A\sin(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t$

(g) $\int \mathrm{e}^{2x-3}\mathrm{d}x$ (h) $\int \frac{\mathrm{d}t}{8-2t}$ (i) $\int \mathrm{e}^{\frac{x}{2}-1}\mathrm{d}x$

1.1.6. (a) $\int \frac{x^3}{5x^4+3}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{x^{n-1}}{x^n+a}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ (e) $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{\sin x+x\cos x}{x\sin x}\,\mathrm{d}x$

1.1.7. (a) $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int x^2\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int x^n\mathrm{e}^{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x$

1.1.8. Beweise: F und G mit $F(x)=\sqrt{x+1}$ und $G(x)=\frac{x}{1+\sqrt{x+1}}$ sind Stammfunktionen der gleichen Funktion f.

1.1.9. Beweise: $\int x^2\cos ax\,\mathrm{d}x=\frac{2x}{a^2}\cos ax+\left(\frac{x^2}{a}-\frac{2}{a^3}\right)\sin ax+C$

1.1.10. Beweise: (a) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x-1)\mathrm{e}^x + C$

(b) $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x^2-2x+2)\mathrm{e}^x + C$

(c) $\displaystyle\int x^3\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{a^3x^3-3a^2x^2+6ax-6}{a^4}\cdot\mathrm{e}^{ax} + C$

1.2 Das Anfangswertproblem

1.2.1. Der Graf von F mit $F'(x) = f(x)$ enthält den Punkt P. Wie lautet $F(x)$ für

(a) $f(x) = \cos x + 1$, $\mathrm{P}(\pi|\pi)$ (b) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$, $\mathrm{P}(8|0)$

1.2.2. Löse folgende Anfangswertprobleme:

(a) $F'(x) = \dfrac{3}{8}x(4-x)$, $F(4) = 4$ (b) $\dot{x} = \dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{t^2}$, $x(2) = 0$

1.2.3. Von der Funktion f kennt man die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ und den Funktionswert $f(3) = 1$. Ermittle die Gleichung, berechne die Nullstelle und zeichne den Grafen von f.

1.2.4. (a) Von der Funktion f kennt man die Ableitung

$$f'(x) = 9 - x^2$$

und den Funktionswert $f(3) = 10$. Berechne $f(1)$.

(b) Von der Funktion g kennt man die Ableitung

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

und den Funktionswert $g(1) = 1$. Berechne die Gleichung von g und stelle sie in der Wurzelschreibweise dar.

1.2.5. Beweise mittels einer sehr ausführlichen Rechnung:

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin x\cos x}{2} + C$$

1.2.6. Von der Funktion f ist bekannt:

$$f'(x) = \frac{x^2}{x^3+1} \quad \text{und} \quad f(0) = 1$$

(a) Diskutiere f (Nullstellen, Grenzwerte, Extremwerte, Wendepunkte, Graf).

(b) Zeige, dass sich der Graf von f für große x beliebig nahe an den Grafen von g mit $g(x) = 1 + \ln x$ annähert. Zeichne den Grafen von g in das schon vorhandene Diagramm ein.

(c) Für welche x unterscheidet sich $g(x)$ um weniger als ein Hundertstel von $f(x)$?

1.3 Das bestimmte Integral

1.3.1. (a) $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} A\sin\omega t\,\mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$ (d) $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \left(\frac{x^5}{3}-\frac{3}{x^7}\right)\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_0^3 (x^2+1)(2x^2-x)\,\mathrm{d}x$ (g) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2+2x+1}{x^4+x^3}\,\mathrm{d}x$

1.3.2. (a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ (b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} 5\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}+1}^{\mathrm{e}^2-1} \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$ (d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{-3x+1}$

(e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_4^5 (4x+5)^n\,\mathrm{d}x$ (g) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4-x^2+1}{x+1}\,\mathrm{d}x$

1.3.3. Zeichne die Grafen der Funktionen f und g mit

$$f(x)=\sin x \quad \text{und} \quad g(x)=1-\sin x$$

im Intervall $[0,\frac{7\pi}{3}]$ in ein Koordinatensystem (Einheit 2 cm). Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionen im angegebenen Intervall. Die beiden Grafen schließen, jeweils zwischen einem Schnittpunkt und dem darauf folgenden Schnittpunkt, zwei verschieden große Flächenstücke ein. Berechne ihre Inhalte A_1 und A_2.

1.3.4. Berechne die Fläche A, die von G_f, der x-Achse und den Geraden $x=a$ und $x=b$ eingeschlossen wird. Zeichne den Grafen und veranschauliche A.

(a) $f(x)=2x+1$, $a=-2$, $b=1$ (b) $f(x)=x^2-4$, $a=-3$, $b=0$
(c) $f(x)=\left|x^3+1\right|$, $a=-2$, $b=1$ (d) $f(x)=x^{-2}+x^{-3}$, $a=-2$, $b=-0{,}5$

1.3.5. Die Funktionen f und g mit $f(x)=\frac{4}{x}$ und $g(x)=5-x$ schließen ein endliches Flächenstück mit dem Inhalt A ein. Zeichne die Grafen der beiden Funktionen und berechne A.

1.3.6. Gegeben sind die Funktionen f, g und h mit $f(x)=x^2$, $g(x)=\frac{4}{3}(x+1)$ und $h(x)=\frac{1}{x}$.

(a) Berechne die Koordinaten aller Schnittpunkte der drei Funktionen und zeichne die Grafen der Funktionen in ein Koordinatensystem ($-2\leqq x\leqq 2{,}5$).

(b) Die Grafen von f und g schließen ein endliches Flächenstück mit dem Inhalt A ein. Berechne A.

(c) In welchem Verhältnis teilt der Graf von h das in Teilaufgabe (b) behandelte Flächenstück?

1.3.7. (a) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax+b}\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{7}} \frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$

(c) Berechne numerisch (3 Intervalle): $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

1.3.8. Ein Stein wird vom Boden aus ($y = 0$) mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen. Für seine Höhe y in Abhängigkeit von der Zeit t gilt

$$y(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$$

Berechne die mittlere Höhe $\overline{h}$ während der Flugphase, ausgedrückt durch die maximale Höhe h.

1.3.9. Wird ein Körper unter dem Einfluss der konstanten Kraft F parallel zur Kraftrichtung um die Strecke Δx verschoben, dann wird die Arbeit $\Delta W = F \cdot \Delta x$ verrichtet. Für eine konstante Kraft gilt also

$$\frac{\Delta W}{\Delta x} = F\,.$$

Ist F nicht konstant sondern eine Funktion von x, dann gilt diese Beziehung nur noch im Grenzfall $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = W'(x) = F$$

Bei bekannter Kraftfunktion $F(x)$ ist also die Arbeit, um den Körper von x_1 nach x_2 zu bringen:

$$\Delta W = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x$$

(a) x bezeichne die Dehnung einer Feder mit der Federkonstanten D. Berechne die Arbeit ΔW, um die Dehnung der Feder von x_1 auf x_2 zu erhöhen.

(b) Für ein Gummiseil gilt im x-Intervall $[0; 1{,}2\,\mathrm{m}]$ der Kraft-Weg-Zusammenhang

$$F(x) = Dx + Cx^{20} \quad \text{mit} \quad D = 50\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \quad \text{und} \quad C = 105\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^{20}}.$$

Zeichne den Grafen von F im Intervall $[0; 1{,}0\,\mathrm{m}]$. Berechne die Arbeit $W(x)$, um das Gummiband von null bis x zu dehnen. Berechne speziell $W(1{,}0\,\mathrm{m})$ und $W(1{,}2\,\mathrm{m})$.

(c) Die Gravitationskraft auf einen Körper der Masse m in der Entfernung r zum Erdmittelpunkt ist für $r \geqq R$ ($R = 6380\,\mathrm{km}$ ist der Erdradius)

$$F(r) = \frac{GMm}{r^2}$$

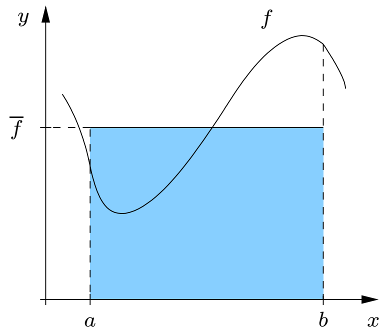
mit $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^2}$ (Gravitationskonstante) und $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ (Erdmasse). Berechne die Arbeit $W(r)$, um die Masse m von der Erdoberfläche bis in die Entfernung r vom Erdmittelpunkt zu befördern. Wie groß ist $W(r)$ für $r \to \infty$? Mit welcher Mindestgeschwindigkeit v_0 müsste man einen Körper an der Erdoberfläche senkrecht nach oben abschießen (keine Luftreibung), damit er die Erde endgültig verlassen kann?

1.3.10. **Mittelwerte von Funktionen**

Der Mittelwert einer Funktion f im Intervall $[a, b]$ ist definiert als

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Berechne die Mittelwerte folgender Funktionen im Intervall $[a, b]$ und veranschauliche das Ergebnis am Grafen der Funktion:



(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad a = \dfrac{1}{2}$, $b = 4$ (b) $f(x) = 4 - \dfrac{x^4}{4}$, $\quad a = -2$, $b = 2$

(c) $f(x) = \sin x$, $\quad a = 0$, $b = 2\pi$ (d) $f(x) = \sin x$, $\quad a = 0$, $b = \pi$

(e) $f(x) = \cos x$, $\quad a = 0$; für welches b ist $\overline{f} = \dfrac{1}{2}$?

1.3.11. Wir betrachten die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$$

(a) Berechne $f(x)$ für $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ und zeichne den Grafen von f im x-Intervall $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$. Einheiten: 2 cm auf der y-Achse, $\pi \mathrel{\widehat{=}} 6$ cm auf der x-Achse.

(b) Beweise: $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x - \frac{1}{\sin x} + C$

(c) Berechne die Fläche, die von G_f, der x-Achse und den beiden Geraden $x = \frac{\pi}{6}$ und $x = \frac{5\pi}{6}$ eingeschlossen wird.

1.3.12. Gegeben sind die Funktionen f, g und h mit $f(x) = \frac{x^2}{8}$, $g(x) = \sqrt{x}$ und $h(x) = \frac{1}{x}$ mit den Definitionsmengen $\mathbb{R}_0^+$ (f und g) bzw. $\mathbb{R}^+$.

(a) Berechne die Koordinaten aller Schnittpunkte der drei Funktionen und zeichne die Grafen der Funktionen in ein Koordinatensystem ($0 \leqq x \leqq 5$, Einheit 2 cm).

(b) Die Grafen aller drei Funktionen schließen für $x \geqq 1$ ein endliches Flächenstück ein. Berechne seinen Inhalt A.

1.3.13. Die Grafen der beiden Funktionen f und g mit

$$f(x) = \frac{4}{x} - 1 \quad \text{und} \quad g(x) = 4x - x^2$$

schließen für $x > 0$ ein Flächenstück mit endlichem Inhalt A ein. Berechne die Nullstellen der beiden Funktionen und zeichne ihre Grafen im x-Intervall $]0; 5]$. Weise nach, dass die der Zeichnung entnommenen Schnittpunkte tatsächlich die gemeinsamen Punkte der beiden Funktionsgrafen sind und berechne dann A.

1.3.14. Wir betrachten die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x, \quad D = \mathbb{R}^+$$

(a) Berechne $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ darf für das Weitere vorausgesetzt werden.

(b) Untersuche f auf Extremwerte und Wendepunkte und zeichne den Grafen von f im x-Intervall $]0;5]$ (Einheit 2 cm).

(c) Eine weitere Funktion ist g mit

$$g(x) = \int\limits_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Schreibe $g(x)$ in einer integralfreien Darstellung. Welche Nullstelle hat g?

(d) A_1 ist der Inhalt der Fläche, die von G_f, der x-Achse und den Geraden $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$ eingeschlossen wird, A_2 dagegen wird von G_f, der x-Achse und den Geraden $x = 1$ und $x = 2$ eingeschlossen. Berechne A_1 und A_2 mit Hilfe der Funktion g und berechne exakt das Verhältnis der beiden Flächeninhalte.

1.4 Integralfunktionen

1.4.1. (a) Warum sind alle Stammfunktionen von f mit $f(x) = x^2$ auch Integralfunktionen von f?

(b) Welche Stammfunktionen von f mit $f(x) = x^3$ sind keine Integralfunktionen von f?

1.4.2. Schreibe folgende Funktionen als Integralfunktion. Achte auch auf die Definitionsmenge!

(a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 6$ (b) $g(x) = \cos x$ (c) $h(x) = \tan x$

1.4.3. Schreibe $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1$ als Integralfunktion. Achtung, Fallunterscheidung!

1.4.4. Wie unterscheiden sich folgende Integralfunktionen.

(a) $f(x) = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^x \cos t\,\mathrm{d}t$ und $g(x) = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^x \cos t\,\mathrm{d}t$

(b) $f(x) = \int\limits_2^x h(t)\,\mathrm{d}t$ und $g(x) = \int\limits_{-2}^x h(t)\,\mathrm{d}t$ mit $h(t) = \dfrac{1}{t^2} + t.$

Zeichne die Grafen von h, f und g.

1.4.5. $x(t)$ ist der Ort eines Körpers zur Zeit t. Seine Geschwindigkeit ist definiert durch $v(t) = \dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ und seine Beschleunigung durch $a(t) = \dot{v}(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

(a) Die Beschleunigung a ist eine bekannte Funktion von t. Drücke $v(t)$ und $x(t)$ durch Integralfunktionen mit der unteren Grenze t_0 aus.

(b) a ist jetzt konstant. Drücke $v(t)$ und $x(t)$ durch die Anfangswerte $v_0 = v(t_0)$ und $x_0 = x(t_0)$ aus.

(c) Die Masse eines Lastwagens, der stetig Sand verliert, ist $m(t) = m_0 - \alpha t$ für $0 \leqq t \leqq t_1$ mit $m(t_1) = \frac{m_0}{2}$. Für $0 \leqq t \leqq t_1$ wirkt die konstante Antriebskraft F auf den LKW. Berechne $v(t)$ und $x(t)$.

Zeichne für $F = 10^4\,\mathrm{N}$, $\alpha = 100\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$, $v(0) = 0$, $x(0) = 0$ und $m_0 = 10^4\,\mathrm{kg}$ die Grafen von v und x im Intervall $0 \leqq t \leqq t_1$. Zeichne zum Vergleich die Grafen der Geschwindigkeit und des Ortes eines gleichartigen LKWs, der keinen Sand verliert.

1.5 Uneigentliche Integrale

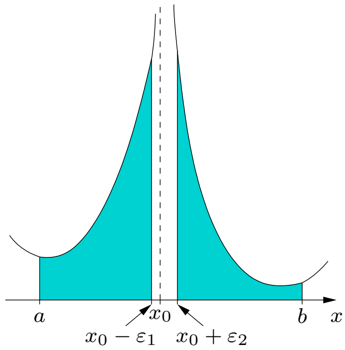
1.5.1. Berechne folgende Integrale und veranschauliche sie als Flächeninhalte:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ (d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

1.5.2. Für welche n ist $I_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n}$ bzw. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^n}$ endlich?

1.5.3. Enthält das Integrationsintervall $[a, b]$ des bestimmten Integrals $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ eine Polstelle bei x_0, dann definiert man (uneigentliches Integral):

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{x_0-\varepsilon_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{x_0+\varepsilon_2}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



(a) Berechne $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

(b) Der Wert von $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$ hängt davon ab, wie ε_1 und ε_2 zusammenhängen.

Berechne I für

- $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ (Cauchyscher Hauptwert)
- $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$

Gib ein Beispiel für die Wahl von ε_1 und ε_2 an, für das $I = +\infty$ ist.

1.5.4. Schreibe $f(x) = \dfrac{1}{x}$ als Integralfunktion.

1.5.5. (a) $\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int\limits_R^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

(c) Berechne den Mittelwert von $f(x) = x^n$ $(n > 0)$ im Intervall $[0, a]$.

1.6 Numerische Berechnung von Integralen

1.6.1. Berechne numerisch mit Untersummen (S_u), mit Obersummen (S_o) und mit der Midpoint-Rule (S_m) (n Teilintervalle). Berechne den relativen Fehler der drei Ergebnisse und des Mittelwertes $\overline{S}$ von S_u und S_o (genaue Ergebnisse in Klammern).

(a) $\int\limits_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad n = 4 \quad (1{,}609437912)$ (b) $\int\limits_0^2 2^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad n = 4 \quad (1{,}04474066)$

(c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x,\ n = 4\ (0{,}3465735903)$ (d) $\int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,\ n = 5\ (1{,}851937052)$

1.7 Vermischte Aufgaben

1.7.1. Wir betrachten die Funktionenschar f_a mit

$$f_a(x) = -(a+1)^4x^2 + a$$

(a) Zeichne die Grafen der Scharfunktionen für $a = 0{,}25$, $a = 0{,}5$ und $a = 1$ (Einheit 5 cm).

(b) Für $a > 0$ schließt der Graf von f_a mit der x-Achse ein endliches Flächenstück ein, dessen Inhalt wir mit $A(a)$ bezeichnen. Berechne $A(a)$.

(c) Für welches a ist $A(a)$ maximal? Wie groß ist A_max?

1.7.2. Schreibe die Funktion f mit $f(x) = 5 - \sqrt{9 + x^2}$ als Integralfunktion:

$$f(x) = 5 - \sqrt{9 + x^2} = \int\limits_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

(2 Lösungen). Zeichne den Grafen der Integrandenfunktion g im Intervall $[-5, 5]$ (Einheiten: 1 cm auf der x-Achse, 2 cm auf der y-Achse) und veranschauliche am Beispiel $f(5)$ mit Hilfe des Grafen, warum beide Lösungen gleichwertig sind.

1.7.3. Wir betrachten die Funktionenschar

$$f_s: \quad x \to f_s(x) = -x^3 + sx^2$$

(a) Berechne die Nullstellen und die relativen Extrema der Scharfunktionen f_s. Auf welcher Kurve K_f liegen alle Extrempunkte? Zeichne K_f und die Grafen von f_{-2}, f_1, f_2 und f_3 in ein Koordinatensystem.

(b) Eine weitere Funktionenschar ist durch

$$F_s: \quad x \to F_s(x) = \int\limits_0^x f_s(t)\,\mathrm{d}t$$

gegeben. Berechne die Nullstellen und die relativen Extrema der Scharfunktionen F_s. Auf welcher Kurve K_F liegen alle Extrempunkte? Zeichne K_F und die Grafen von F_{-2}, F_1, F_2 und F_3 in ein Koordinatensystem.

(c) Die Grafen von f_s schließen mit der x-Achse ein endliches Flächenstück mit dem Inhalt A_s ein. Berechne A_s.

1.7.4. Die beiden Funktionen f und g mit

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \quad \text{und} \quad g(x) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad D_f = D_g = \mathbb{R}^+$$

schließen ein endliches Flächenstück mit dem Inhalt A ein. Diskutiere die beiden Funktionen, zeichne ihre Grafen und berechne A.

1.7.5. Wir betrachten die drei Funktionen f_1, f_2 und f_3 mit den Gleichungen

$$f_1(x) = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad f_3(x) = \frac{1}{x^{1-\varepsilon}}$$

mit $0 < \varepsilon < 1$.

(a) Zeichne die Grafen von f_1, f_2 und f_3 im Intervall $[0{,}1; 10]$ für $\varepsilon = 0{,}01$. Was fällt auf?

(b) Welche Ungleichungen verbinden $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_3(x)$? Untersuche das Verhalten der drei Funktionen am Rand ihres Definitionsbereichs.

(c) Berechne die Stammfunktionen F_1, F_2 und F_3 der Funktionen f_1, f_2 und f_3 mit

$$F_1(1) = F_2(1) = F_3(1) = 0.$$

Welche geometrische Bedeutung haben $F_1(x)$, $F_2(x)$ und $F_3(x)$?

Untersuche das Verhalten von F_1, F_2 und F_3 für $x \to 0^+$ und $x \to +\infty$.

(d) Zeichne die Grafen von F_1, F_2 und F_3 im Intervall $[1; 10^{80}]$ mit einem logarithmischen Maßstab auf der x-Achse (statt x wird $0{,}1 \lg x$ angetragen, d.h. bei 3 cm z.B. ist $x = 10^{30}$, bei 6 cm $x = 10^{60}$).

Warum ist der Graf von F_2 in dieser Darstellung eine Gerade?

1.7.6. (a) $\displaystyle\int\limits_0^3 \mathrm{e}^{2x-3}\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int\limits_0^2 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}-1}\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{\mathrm{d}t}{8-2t}$ (d) $\displaystyle\int\limits_6^8 \frac{\mathrm{d}t}{8-2t}$ (e) $\displaystyle\int\limits_0^8 \frac{\mathrm{d}t}{8-2t}$

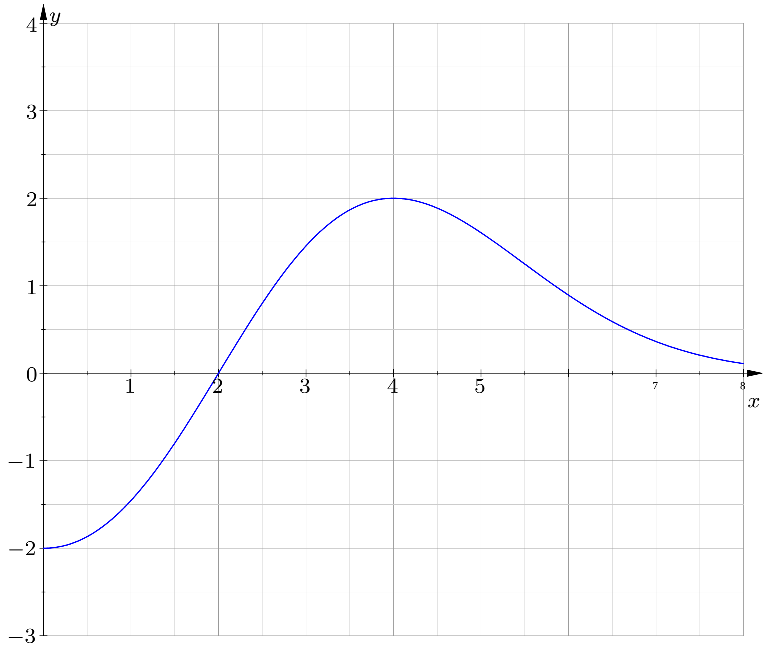
1.7.7. (a) $\displaystyle\int\limits_1^3 \frac{x^3}{5x^4+3}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int\limits_0^a \frac{x^{n-1}}{x^n+a}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int\limits_2^3 \frac{x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ (e) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$

1.7.8. Folgende Abbildung zeigt den Grafen der Funktion f. Zeichne in dieses Diagramm möglichst genau den Grafen der Funktion g mit

$$g(x)=\int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

im Intervall $[0;8]$ und erläutere das Zustandekommen der wichtigsten Eigenschaften von G_g.



1.7.9. Wir betrachten die Funktion f mit

$$f(x)=x\mathrm{e}^{-x},\quad D=\mathbb{R}$$

(a) Berechne die Nullstelle von f und untersuche das Verhalten von f an den Rändern von D.

(b) Untersuche f auf Extremwerte und Wendepunkte und zeichne den Grafen von f im x-Intervall $]-1;5]$ (Einheit 2 cm).

[Nur zur Kontrolle: $f'(x)=(1-x)\mathrm{e}^{-x}$, $f''(x)=(x-2)\mathrm{e}^{-x}$]

(c) Eine weitere Funktion ist g mit

$$g(x)=\int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Beweise:

$$g(x) = 1 - (x+1)\mathrm{e}^{-x}$$

Welche Nullstelle hat g?

(d) Verwende bereits vorhandene Ergebnisse, um die Extremwerte und Wendepunkte von g zu bestimmen. Zeichne den Grafen von g im x-Intervall $]-1;5]$ (Einheit 2 cm).

(e) Berechne $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Interpretiere das Ergebnis geometrisch, einmal bezüglich des Grafen von f und einmal bezüglich des Grafen von g.

1.7.10. Die harmonische Reihe

Die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \ldots$$

heißt *harmonische* Reihe, die Teilsummen bezeichnen wir mit

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

(a) Berechne H_n für alle n mit $1 \leqq n \leqq 20$.

(b) Veranschauliche H_n durch die Fläche unter einer Treppenfunktion und zeichne auch die Grafen von $f(x) = \dfrac{1}{x}$ und $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ein. Zeige durch den Vergleich mit einem geeignet gewählten Integral, dass die harmonische Reihe divergiert, d.h. dass

$$\lim_{n\to\infty} H_n = \infty$$

gilt.

(c) Beweise mit Hilfe des schon erstellten Grafen:

$$\boxed{\ln(1+n) < H_n < 1 + \ln n}$$

Zeige, dass die Breite b des Intervalls, in dem H_n liegt, kleiner als eins ist. Wie groß ist b für $n \gg 1$? Zeichne die Punkte $(n|H_n)$ und die Grafen von $r(x) = \ln(1+x)$ und $s(x) = 1 + \ln x$ für $1 \leqq x \leqq 20$ in ein Koordinatensystem.

(d) In welchem Intervall liegt n, wenn H_n gegeben ist? Berechne dieses Intervall konkret für $H_n \approx 100$.

2 Geometrie

2.1 Lineare Abhängigkeit

2.1.1. Untersuche auf lineare Abhängigkeit:

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1{,}6 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ -2{,}1 \end{pmatrix}$,

(b) $\vec{e} = \begin{pmatrix} -1{,}6 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$ und $\vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3{,}6 \end{pmatrix}$

(c) Stelle, wenn möglich, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8{,}8 \\ -8 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $\vec{e}$ und $\vec{f}$ dar.

2.1.2. Untersuche auf lineare Abhängigkeit:

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 21 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{g} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$

(c) Stelle, wenn möglich, $\vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bzw. $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$ dar.

2.2 Geradengleichungen

2.2.1. (a) Stelle die Gleichung der Geraden $g = \mathrm{AB}$ mit $\mathrm{A}(7|-1|2)$ und $\mathrm{B}(3|4|5)$ auf.

(b) Bestimme die Koordinaten von drei Punkten R, S und T auf der Geraden g so, dass R zwischen A und B, S auf der Halbgeraden [AB mit $\overline{\mathrm{AS}} > \overline{\mathrm{AB}}$ und T auf der Halbgeraden [BA mit $\overline{\mathrm{BT}} > \overline{\mathrm{AB}}$ liegt.

(c) Bestimme die restlichen Koordinaten von $\mathrm{C}(-3|c_2|c_3)$ so, dass $\mathrm{C} \in g$ gilt.

(d) s_1, s_2 und s_3 sind die senkrechten Projektionen von g auf die x_2x_3-, x_1x_3- und x_1x_2-Ebene. Stelle die Gleichungen der drei Geraden s_1, s_2 und s_3 in der Parameterform auf.

(e) Schreibe die Gleichung von s_3 in der Form $x_2 = f(x_1)$.

(f) Veranschauliche alle gegebenen und berechneten Größen in einem Schrägbild.

2.2.2. Bestimme k so, dass sich die Geraden

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schneiden und berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S.

2.2.3. Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g_1: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad g_2: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 20 \\ -25 \\ 30 \end{pmatrix},$$

$$g_3: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -12 \\ 15 \\ -18 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_4: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 3{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Fertige ein Schrägbild des Sachverhalts.

2.2.4. **Auf Kollisionskurs**

Ein Körper K bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$, zur Zeit t_1 befindet er sich am Ort $\vec{x}_1$. Der Ort von K zur Zeit t ist dann

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_1 + (t - t_1)\vec{v},$$

die Gleichung der Bahnkurve (Gerade g) von K lautet:

$$g: \quad \vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda\vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Aus dem Protokoll einer Flugüberwachung:

Flugzeug	Zeit	x in m	y in m	z in m	v_x in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	v_y in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	v_z in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
Airbus	00:00:00	10000	2000	3000	-50	-100	20
Kampfjet	00:00:39	9500	1000	1600	-100	-200	120

(a) Berechne die Beträge der Flugzeuggeschwindigkeiten.

(b) Unter welchem Winkel, gegebenenfalls nach einer Parallelverschiebung, schneiden sich die Flugbahnen?

(c) Wo sind die beiden Flugzeuge, gerade Flugbahnen vorausgesetzt, auf der Höhe null gestartet?

(d) Untersuche, ob sich die Flugbahnen der beiden Maschinen schneiden und ob es zu einer Kollision kommt.

(e) Berechne die minimale Entfernung der beiden Flugzeuge.

2.3 Ebenengleichungen in Parameterform

2.3.1. Die Ebene E enthält die Punkte A (3|3|3), B (7|6|2) und C (2|7|4), die Gerade g geht durch die Punkte F (14|15|8) und G (13|10|4).

(a) Stelle die Gleichungen von E und g in der Parameterform auf.

(b) Berechne die Koordinaten der Achsenpunkte von E.

(c) Berechne die Koordinaten der Spurpunkte von g.

(d) Berechne die Schnittmenge von E und g.

(e) Stelle die Gleichung einer Ebene E' auf, die parallel zu g ist, den Punkt A enthält und deren Spurgerade in der x_1x_2-Ebene parallel zur x_2-Achse verläuft.

Veranschauliche den ganzen Sachverhalt in einem Schrägbild.

2.4 Ebenengleichungen in Normalenform

2.4.1. Gegeben sind die Ebene

$$E: \quad 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 20 = 0$$

und die Gerade

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Koordinaten der Achsenpunkte A_1, A_2 und A_3 von E sowie der Durchstoßpunkte D_1, D_2 und D_3 der Geraden g durch die Koordinatenebenen.

(b) Veranschauliche E und g in einem Schrägbild.

(c) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S von g mit E und zeichne S in das Schrägbild ein.

2.4.2. Gegeben sind die Punkte A$(5|-3|-2)$, B$(-3|2|4)$, C$(1|6|2)$ und D$(4|1|4)$. Durch A, B und C ist die Ebene E_1, durch A, B und D die Ebene E_2 festgelegt. Mit E_{ik} wird die x_ix_k-Ebene bezeichnet.

(a) Stelle die Gleichungen der beiden Ebenen E_1 und E_2 in Normalenform auf.

(b) Berechne die Achsenpunkte der Ebenen E_1 und E_2 (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen).

(c) Die Schnittgeraden der Ebenen E_1 und E_2 mit der x_1x_2-Ebene (Spurgeraden) sind $g_1 = E_1 \cap E_{12}$ und $g_2 = E_2 \cap E_{12}$. Stelle die Gleichungen dieser Geraden in der Form $x_2 = f(x_1)$ auf.

(d) F$(5|4|f_3) \in E_1$ und G$(1|g_2|3) \in E_2$. Berechne die fehlenden Koordinaten.

(e) Veranschauliche die Lage der Ebenen in einem Schrägbild. Zeichne alle beschriebenen Punkte ein.

(f) Berechne den (spitzen) Schnittwinkel der Ebenen E_1 und E_2.

2.4.3. Von einem brettebenen Slalomhang (Ebene E) sind die Punkte A$(0|0|40)$, B$(50|20|0)$ und C$(-20|55|20)$ bekannt (alle Koordinaten verstehen sich in Metern).

(a) Stelle die Gleichung von E in der vektorfreien Normalenform mit möglichst kleinen ganzen Zahlen auf.

(b) Berechne die fehlende Koordinate des Startpunktes S$(-10|s_2|60)$ auf dem Hang.

(c) Berechne die Koordinaten der Achsenpunkte A_1 und A_2 von E (Schnittpunkte von E mit der x_1- und x_2-Achse). Zeichne alle bisher behandelten Punkte und die Spurgeraden der Ebene E in ein Schrägbild (Einheit: $10\,\mathrm{m} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$).

(d) Welchen spitzen Winkel φ schließt E mit der x_1x_2-Ebene (Talboden) ein? Welche Steigung (in Prozent) hat demnach der Slalomhang?

(e) Zeige, dass die Spurgerade t von E in der x_1x_2-Ebene (wir nennen sie die *Tallinie*) durch die Gleichung

$$t: \quad x_2 = 70 - x_1$$

beschrieben wird.

(f) Ein Abfahrer fährt geradlinig und auf dem kürzesten Weg vom Start S ins Tal und erreicht die Tallinie im Punkt $\mathrm{Y}(y_1|y_2|0)$. Berechne die Koordinaten von Y und die Länge $\overline{\mathrm{SY}}$.

Tipp: Verwende den Vektor $\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}$.

(g) Ein Bauer, dem das viereckige Grundstück $\mathrm{A_1A_2CS}$ gehört, möchte es als Baugrund für 400 € pro m^2 verkaufen. Welchen Preis würde er dabei erzielen?

2.4.4. Die Ebene E_1 enthält die Punkte $\mathrm{A}\,(3|6|1)$, $\mathrm{B}\,(-3|6|5)$ und $\mathrm{C}\,(-3|-3|3)$.

(a) Stelle die Gleichung von E_1 in der vektorfreien Normalenform mit möglichst kleinen ganzen Zahlen auf.

(b) Eine weitere Ebene E_2 ist durch die Gleichung

$$E_2: \quad 6x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 15 = 0$$

gegeben. Berechne den (spitzen) Schnittwinkel der Ebenen E_1 und E_2.

(c) Untersuche, ob $\mathrm{C} \in E_2$ gilt.

(d) s_1 und s_2 sind die Spurgeraden von E_1 und E_2 in der x_1x_2-Ebene. Schreibe die Gleichungen von s_1 und s_2 in der Form $x_2 = f(x_1)$ und berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Spurgeraden.

(e) Zeichne alle bisher gegebenen und berechneten Größen in ein Schrägbild. Zeichne auch die noch fehlenden Spurgeraden von E_2 ein.

(f) Zeichne die Schnittmenge $E_1 \cap E_2$ in das Schrägbild ein. Gib eine kurze Begründung deines Vorgehens.

2.4.5. (a) Verwandle in die Normalenform: $E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) Verwandle in die Parameterform: $E: \quad -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 20 = 0$

2.4.6. (a) Versuche, möglichst viel über die Lösungsmenge der Gleichung

$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$$

mit dem unbekannten Vektor $\vec{x}$ herauszufinden. Verwende eine sauber beschriftete Zeichnung als Überlegungsfigur und die gängigen Formeln für das Kreuzprodukt. Unterscheide die Fälle $\vec{a}\perp\vec{b}$ und $\vec{a} \not\perp \vec{b}$.

(b) Gib mindestens zwei Elemente der Lösungsmenge von

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$$

an (am besten natürlich die ganze Lösungsmenge).

2.5 Schnittmengen

2.5.1. Berechne die Schnittmenge der Geraden

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit den Ebenen

(a) x_1x_2-Ebene

(b) x_1x_3-Ebene

(c) x_2x_3-Ebene

(d) $E_1: \quad 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 20 = 0$

(e) $E_2:$ Ebene durch A$(-1\,|\,0\,|{-3})$, B$(-5\,|\,2\,|\,1)$ und C$(-1\,|\,4\,|{-3})$

(f) $E_3:$ Ebene durch F$(5{,}8\,|\,0\,|\,0)$, G$(0\,|\,\frac{29}{8}\,|\,0)$ und H$(0\,|\,0\,|{-5{,}8})$

Veranschauliche den ganzen Sachverhalt in einem Schrägbild.

2.5.2. Gegeben sind die Ebenen

$$E_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E_4: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Berechne alle Schnittmengen zwischen jeweils zwei der gegebenen Ebenen.

2.5.3. Gegeben sind die Punkte A$\,(3|-2|1)$, B$\,(1|4|4)$ und C$\,(5|6|2)$ sowie der Vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}.$$

Die Gerade g enthält die Punkte A und B, die Gerade h enthält den Punkt C und ist parallel zu $\vec{u}$.

(a) Stelle die Gleichungen von g und h auf.

(b) Berechne die Koordinaten des Spurpunktes G von g in der x_1x_2-Ebene. g' und h' sind die Projektionen von g und h, parallel zur x_3-Achse, in die x_1x_2-Ebene. Stelle die Gleichungen von g' und h' in der Parameterform auf.

(c) z wird so gewählt, dass sich g und h schneiden. Berechne z und die Koordinaten des Schnittpunktes S.

(d) Erstelle ein Schrägbild mit allen gegebenen und berechneten geometrischen Größen.

(e) Berechne die Koordinaten des Spurpunktes H von h in der x_1x_2-Ebene. F ist der Fußpunkt des Lotes von S auf die x_1x_2-Ebene. Berechne das Volumen der Pyramide GHFS.

2.5.4. Gegeben sind die Ebenen E_1 und E_2 durch die Gleichungen

$$E_1: \quad 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 20 = 0$$
$$E_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Koordinaten der Achsenpunkte A_1, A_2 und A_3 von E_1 und gib eine Gleichung von E_1 in der Parameterform an.

(b) Gib eine Gleichung von E_2 in der Normalenform an.

[Ein mögliches Ergebnis: $-3x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 12 = 0$]

(c) Die Achsenpunkte von E_2 seien B_1, B_2 und B_3. Wie lauten ihre Koordinaten?

[Zur Kontrolle: $B_2\,(0|4|0)$]

(d) Die Gerade g ist das Lot auf E_2 in B_2. Schreibe die Gleichung von g hin und Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S von g mit E_1.

(e) Zeichne die Spurgeraden der beiden Ebenen sowie und S und g in ein Schrägbild.

(f) Berechne das Volumen der Pyramide $B_1B_2B_3S$.

2.5.5. Berechne die Schnittmengen der Ebene $E: \; 4x_1+7x_2+4x_3-20 = 0$ mit den Ebenen

$$E_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E_2: \quad -x_1 + 5x_2 - x_3 - 22 = 0$$

2.6 Die HNF – Abstände von Ebenen

2.6.1. F ist der Fußpunkt des Lotes von P auf E, P$'$ ist der an E gespiegelte Punkt P. Bestimme die HNF von E und berechne den Abstand $d(\mathrm{P}, E)$ und die Koordinaten von F und P$'$.

(a) $E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, P $(-4|5|-2)$

(b) $E: \quad 9x_1 + 12x_2 + 20x_3 - 205 = 0$, P $(-6|22|31)$

(c) E enthält die parallelen Geraden

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{und } h: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{P}\,(5|4|-3)$$

2.7 Abstände von Geraden

2.7.1. Gegeben sind die beiden Geraden

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{und } h: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und der Punkt P $(5|4|-3)$.

(a) Berechne den Abstand $d(g,h)$ der beiden Geraden.

(b) Berechne die Abstände $d(\mathrm{P},g)$ und $d(\mathrm{P},h)$.

(c) Wie lauten die Koordinaten der Fußpunkte F_g und F_h der Lote von P auf g und h?

(d) Spiegelt man P einmal an g und einmal an h, erhält man P_g und P_h . Berechne die Koordinaten dieser Spiegelpunkte. Schrägbild!

2.7.2. Gegeben sind die Punkte A $(5|-2|1)$ und P $(2|3|0)$, der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Gerade

$$g: \ \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(a) Berechne den Abstand $d(\mathrm{P},g)$ des Punktes P von der Geraden g.

(b) Berechne die Koordinaten des Fußpunktes F des Lotes von P auf g.

(c) Spiegelt man P an g, dann erhält man den Spiegelpunkt P′. Berechne seine Koordinaten.

(d) Stelle den ganzen Sachverhalt in einem Schrägbild dar.

2.7.3. Gegeben sind die Geraden

$$g: \quad \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}, \ \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h: \quad \vec{x} = \vec{b} + \mu\vec{v}, \ \mu \in \mathbb{R}$$

mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Koordinaten der Spurpunkte der beiden Geraden und zeichne die Geraden mit Spurpunkten in ein Schrägbild (verwende für die Zeichnung eine ganze Seite im Hochformat). Zeichne auch die Projektionen g' und h' der beiden Geraden in die x_1x_2-Ebene ein. Wo schneiden sich g' und h'?

(b) Zeige, dass die Geraden windschief sind und berechne ihren Abstand d.

(c) Berechne die Koordinaten der Punkte $\mathrm{P} \in g$ und $\mathrm{Q} \in h$ mit $\overline{\mathrm{PQ}} = d$ und zeichne sie in das Schrägbild ein.

(d) Wir stellen uns g und h als straff gespannte Stahlseile vor. An h ist ein weiteres Seil der Länge s befestigt, das senkrecht nach unten hängt (parallel zur x_3-Achse) und dessen Aufhängepunkt frei auf h gleitet. Wie groß darf s höchstens sein, damit das untere Ende des gleitenden Seils die Gerade g niemals berührt?

2.7.4. Vom Quader ABCDPQRS kennt man A $(0|0|0)$, B $(6|0|0)$, C $(6|10|0)$ und S $(0|10|4{,}5)$.

(a) Wie lauten die Koordinaten der anderen Punkte des Quaders?

(b) Gib eine Gleichung für die Gerade $g = \mathrm{PC}$ in der Parameterform an.

Zeichne ein Schrägbild des Quaders und zeichne g ein.

(c) Die Ebene E_1 enthält den Punkt S und steht senkrecht auf g. Stelle in nachvollziehbarer Weise eine Gleichung von E_1 in der (vektorfreien) Normalenform auf, deren Koeffizienten möglichst kleine ganze Zahlen sind.

[Zur Kontrolle: $E_1: \quad 24x_1 + 40x_2 - 18x_3 - 319 = 0$]

(d) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes F von E_1 mit g und berechne damit den Abstand $d(\mathrm{S}, g)$ des Punktes S von der Geraden g. Zeichne F in das Schrägbild ein.

(e) Berechne den Abstand $d(\mathrm{B}, E_1)$ des Punktes B von der Ebene E_1.

(f) In welcher Beziehung steht die Ebene

$$E_2: \quad -3x_1 + 4x_3 = 0$$

zu unserem Quader?

(g) Wir betrachten die Geraden $a = \mathrm{AD}$ (x_2-Achse) und $h = \mathrm{QR}$. Berechne die Koordinaten der Punkte A_2 und T mit $\{\mathrm{A}_2\} = E_1 \cap a$ und $\{\mathrm{T}\} = E_1 \cap h$. Weiter gilt $\{\mathrm{Y}\} = E_1 \cap \mathrm{BC}$ mit Y $\left(6\middle|\frac{35}{8}\middle|0\right)$ (Beweis nicht erforderlich). Veranschauliche die Ebenen E_1 und E_2, indem du die Schnittmengen dieser Ebenen mit unserem Quader (Parallelogramme) mit verschiedenen Farben in das Schrägbild einzeichnest.

(h) Stelle eine Gleichung der Schnittgeraden $s = E_1 \cap E_2$ mit möglichst einfachen Zahlenwerten auf. Zeichne s in das Schrägbild ein.

2.7.5. Das Quadrat ABCD mit A $(0|0|0)$, B $(76|0|0)$, C $(76|76|0)$ und D $(0|76|0)$ ist die Grundfläche einer geraden Pyramide mit der Spitze S $(38|38|56)$ (die Zahlenwerte verstehen sich in Metern). Weiter sind folgende Punkte gegeben:

M_1 : Mittelpunkt von [AC]
M_2 : Mittelpunkt von [CD]
M_3 : Mittelpunkt von [DS]
M_4 : Mittelpunkt von $[\mathrm{M}_2\mathrm{S}]$

(a) Zeige durch Rechnung: $M_3\,(19|57|28)$ und $M_4\,(38|57|28)$.

(b) Entlang der Geraden $g = M_1M_3$ und $h = BM_4$ verlaufen zwei Gänge durch die Pyramide. Stelle die Gleichungen von g und h auf und erstelle ein Schrägbild der Pyramide mit den Gängen (Einheit: $10\,\mathrm{m} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$).

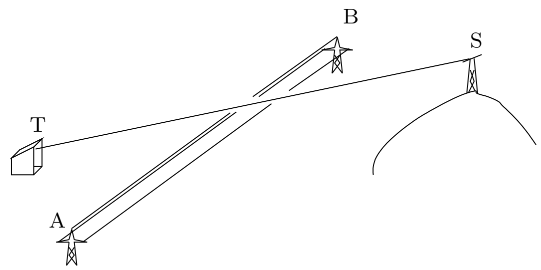
(c) Die Ebene E_1 enthält den Punkt S und steht senkrecht auf h. Stelle in nachvollziehbarer Weise eine Gleichung von E_1 in der (vektorfreien) Normalenform auf, deren Koeffizienten möglichst kleine ganze Zahlen sind.

[Zur Kontrolle: $E_1: \quad -38x_1 + 57x_2 + 28x_3 - 2290 = 0$]

(d) Eine Grabkammer G befindet an der Stelle im Gang h, die von der Spitze S die kleinste Entfernung hat. Berechne diese kleinste Entfernung d und die Koordinaten von G. Zeichne G in das Schrägbild ein.

(e) Eine Ratte lebt im Gang g, eine Maus im Gang h. Wie nah können sich die beiden Tiere kommen?

2.7.6. Eine straff gespannte Überlandleitung führt von $A\,(120|40|20)$ nach $B\,(40|100|30)$, das ebenfalls (idealisierterweise) als geradlinig verlaufende Seil einer Bergbahn von der Talstation $T\,(78|-5|14)$ zur Spitze $S\,(78|135|s)$ des ersten Mastens. Alle Koordinaten verstehen sich in Metern.



(a) Stelle die Gleichungen der Geraden $g = AB$ und $h = TS$ auf.

(b) Für welches $s = s_1$ schneiden sich g und h?

(c) Stelle den Abstand d der Geraden g und h als Funktion von s dar.

(d) Eine Vorschrift besagt, dass d mindestens $15\,\mathrm{m}$ betragen muss. Für welches $s = s_2$ ist d genau $15\,\mathrm{m}$?

(e) Es gilt jetzt $s = s_2$. Für welches $P \in g$ und $Q \in h$ gilt $\overline{PQ} = d$?

(f) Stelle den ganzen Sachverhalt in einem Schrägbild dar.

2.7.7. Ein Gebäude mit zum Boden (x_1x_2-Ebene) senkrechten Wänden hat die Eckpunkte A(5|0|0), B(5|4|0), C(0|7|0), D(0|0|0), E(5|0|4), F(5|4|4), G(0|7|8) und H(0|0|8).

(a) Handelt es sich bei dem Gebäude um einen Pyramidenstumpf?

(b) Zeichne ein Schrägbild des Gebäudes und berechne das Volumen des von ihm eingeschlossenen Raums.

3 Stochastik

3.1 Ereignisalgebra

3.1.1. In dieser Aufgabe bedeutet das Wort *Schüler* Buben *und* Mädchen.

Die Befragung der Schüler eines Kurses erbrachte folgendes Ergebnis:

- 14 Schüler sind zwar vom Sport, nicht aber von der Mathematik begeistert
- Ein Mädchen liebt Mathe und Sport
- Drei Buben lieben Mathe und Sport
- Sechs Mädchen sind sportbegeistert
- Zwei Mädchen hassen Mathe und Sport
- 18 Schüler mögen keine Mathematik
- Vier Buben mögen keinen Sport
- Sieben Schüler mögen Mathe

Verwende folgende Mengensymbole:

B: Buben $\quad$ M: Mathematiker $\quad$ S: Sportler

(a) Wie viele Buben und Mädchen sind in dem Kurs?

(b) Beschreibe folgende Mengen in Worten und berechne ihre Mächtigkeit:

i. $B \cap \overline{M} \cap \overline{S}$

ii. $(B \cap M \cap \overline{S}) \cup (\overline{B} \cap M \cap \overline{S})$

(c) Beschreibe folgende Ereignisse mit Mengensymbolen und berechne ihre Mächtigkeit:

i. Alle sportlichen Buben, die Mathe nicht mögen.

ii. Alle Mädchen, die nur eins mögen, entweder Mathe oder Sport.

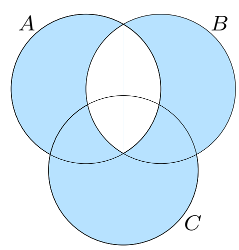
iii. Alle Schüler die Mathe mögen oder alle Schüler, die den Sport lieben.

3.1.2. $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ und $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, d.h. A und B sind Ereignisse. Drücke die folgenden Wahrscheinlichkeiten durch $P(A)$, $P(B)$ und $P(A \cap B)$ aus:

(a) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ $\quad$ (b) $P(A \cap \overline{B})$ $\quad$ (b) $P(A \cup \overline{B})$ $\quad$ (c) $P(\overline{A} \cup B)$

3.1.3. (a) A und B sind Teilmengen eines Ergebnisraumes Ω mit nichtleerem Durchschnitt ($A \cap B \neq \emptyset$). Stelle $M = (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$ in einem Mengendiagramm dar. Gib noch mindestens zwei andere Schreibweisen von M an.

(b) Drücke die getönt dargestellte Menge D durch A, B und C aus.



3.1.4. Für das Folgende darf der Satz

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Für paarweise disjunkte Mengen } A_1, A_2, \ldots, A_n \\ \text{(d.h. } A_i \cap A_k = \emptyset \text{ für } i \neq k\text{) gilt} \\ \qquad |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| \end{array}} \quad (1)$$

als bekannt vorausgesetzt werden. Zeige zunächst

$$\boxed{|X \setminus Y| = |X| - |X \cap Y|} \quad (2)$$

und beweise dann den auch für $A \cap B \neq \emptyset$ gültigen Satz

$$\boxed{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|} \quad (3)$$

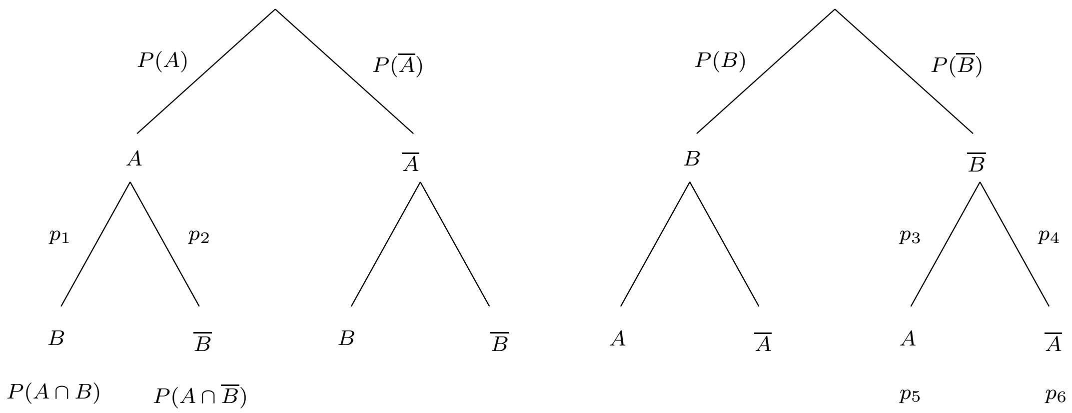
Veranschauliche dir zunächst die Aussagen von (2) und (3) in Mengendiagrammen.

Gilt die neue Formel (3) auch für $A \cap B = \emptyset$?

3.1.5. In einem Dorf gibt es zwei Vereine, den Trachtenverein (T) und den Sportverein (S). Für die Wahrscheinlichkeiten der Vereinszugehörigkeit eines beliebig ausgesuchten Dorfbewohners gilt: $P(T) = 40\,\%$, $P(S) = 32\,\%$, $P(T \cap S) = 8\,\%$. 180 Dorfbewohner gehören zu keinem Verein. Wie viele Dorfbewohner gibt es?

3.2 Stochastische Unabhängigkeit

3.2.1. Die Ereignisse A und B eines Zufallsexperiments sind stochastisch unabhängig. Verwende die Bezeichnungen der beiden Baumdiagramme und untersuche $\overline{A}$ und $\overline{B}$ auf stochastische Unabhängigkeit. Jeder Schritt ist stichwortartig zu begründen.



3.2.2. Welche Zusammenhänge gelten für die Größen der folgenden Vierfeldertafel, wenn die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind:

P	A	$\overline{A}$	
B	a	b	c
$\overline{B}$	d	e	f
	g	h	1

3.2.3. Eine Urne enthält n Kugeln, z davon sind weiß, der Rest ist schwarz. Es werden hintereinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wir betrachten die Ereignisse $A :=$„Die erste gezogene Kugel ist weiß“ und $B :=$„Die zweite gezogene Kugel ist weiß“. Untersuche A und B auf stochastische Unabhängigkeit.

3.2.4. Von einer Bergstation führen zwei Abfahrten ins Tal, eine einfache „blaue“ und eine anspruchsvolle „schwarze“. Im Auftrag der ortsansässigen Skischule wird untersucht, ob die Wahl der Abfahrt geschlechtsabhängig ist. Eine ber mehrere Wochen erstellte Statistik über die von der Bergstation abfahrenden Personen zeigt, dass 45 % unter ihnen weiblich sind; 22 % unter ihnen sind männlich und entscheiden sich für die schwarze Abfahrt, 27 % unter ihnen sind weiblich und wählen die blaue Abfahrt.

(a) Eine in der Statistik erfasste Person wird zufällig ausgewählt. Untersuche die beiden Ereignisse $M =$„Die ausgewählte Person ist männlich“ und $B =$„Die ausgewählte Person entscheidet sich für die blaue Abfahrt“ auf stochastische Unabhängigkeit. [Grundkursabitur Bayern, 2010]

(b) Unter den von der Statistik erfassten Männern wird einer beliebig ausgewählt; mit welcher Wahrscheinlichkeit war er auf der schwarzen Abfahrt unterwegs?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine beliebige auf der blauen Abfahrt befragte Person weiblich?

3.2.5. Ein kleines Gebirgsdorf am Rande der Alpen bewirbt sich für Olympia. Im Dorf leben 4000 Einheimische (E) und es gibt auch Zugereiste ($\overline{E}$). Das Dorf spaltet sich in Olympiabefürworter (B) und Olympiagegner ($\overline{B}$). $63\frac{1}{3}\%$ der Befürworter sind Einheimische, 38% der Einheimischen sind Befürworter. Weiter gibt es 120 zugereiste Gegner.

(a) Berechne die fehlenden absoluten Häufigkeiten und trage sie in eine Vierfeldertafel ein.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Zugereister ein Gegner?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Gegner ein Zugereister?

(d) Ein Dorfbewohner wird zufällig ausgewählt. Untersuche die Ereignisse E: „Der Ausgewählte ist Einheimischer“ und B: „Der Ausgewählte ist Befürworter“ auf stochastische Unabhängigkeit.

3.2.6. Entscheide anhand der folgenden Vierfeldertafeln, ob die dadurch beschriebenen Ereignisse stochastisch unabhängig sind:

(a)

P	M	$\overline{M}$	
S	22 %		
$\overline{S}$		27 %	
		45 %	100 %

(b)

P	A	$\overline{A}$	
B		25 %	53 %
$\overline{B}$		15 %	
			100 %

(c)

P	E	$\overline{E}$	
F			
$\overline{F}$	8 %	82 %	
	10 %		100 %

(d)

P	C	$\overline{C}$	
H			
$\overline{H}$		7,5 %	30 %
		25 %	100 %

3.3 Zufallsgrößen

3.3.1. Ein Würfel wird einmal geworfen, ω ist die Augenzahl. Wir betrachten die Zufallsgrößen

$$X: \quad \omega \to \omega, \qquad Y: \quad \omega \to \omega^2, \qquad Z = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,4),(6,4)\}$$

Berechne für alle drei Zufallsgrößen den Erwartungswert μ, die Varianz und die Standardabweichung σ. Veranschauliche μ und σ jeweils in einem Histogramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

3.3.2. Eine Würfelbude bietet folgendes Spiel an:

Gewürfelt wird mit zwei Würfeln. Es wird kein Einsatz bezahlt.

Augensumme	Sie gewinnen
2 oder 12	19 €
3 oder 11	10 €
4 oder 10	3 €

Augensumme	Sie bezahlen
5 oder 9	2 €
6 oder 8	5 €
7	6 €

Auf den ersten Blick scheint das Spiel vorteilhaft für den Spieler zu sein.

(a) Als Ergebnisraum des Zufallsexperiments wählen wir die Augensummen, also $\Omega = \{2, 3, \dots, 12\}$. Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P: \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ für die Elementarereignisse ($P: \{\omega\} \to P(\omega)$) als Wertetabelle und als Histogramm dar. Versuche auch, eine Gleichung für $P(\omega)$ zu finden.

(b) Die Zufallsgröße $X: \omega \to X(\omega)$ beschreibt den Gewinn des Spieleanbieters. Stelle X als Wertetabelle und als Histogramm dar. Versuche auch, eine Gleichung für $X(\omega)$ zu finden.

(c) Die Elemente der Wertemenge W_X bezeicnen wir in aufsteigender Reihenfolge mit $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit $n = |W_X|$. Schreibe W_X explizit hin und erstelle eine Tabelle, die den Variablen x_k ihre Werte zuordnet.
Stelle die Zuordnung $k \to x_k$ in einem Histogramm dar. Schreibe auch die Ereignisse A_k hin, die durch $X = x_k$ beschrieben werden.

(d) Berechne die Werte $W(x_k)$ der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und zeichne das Histogramm der Zuordnung $k \to W(x_k)$. Zeichne auch das Histogramm der Zuordnung $k \to F(x_k)$, wobei F die kumulative Verteilung von X bedeutet.

(e) Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse, die sich alle auf *ein* Spiel beziehen:

S_1: „Der Gewinn des Betreibers ist positiv."
S_2: „Der Gewinn des Spielers ist positiv."
S_3: „Der Gewinn des Betreibers ist größer als -19 €."
S_4: „Der Gewinn des Betreibers liegt zwischen -5 €und 6€."

(f) Zeichne das Histogramm der Zuordnung $k \to G(x_k)$ mit $G(x_k) = x_k \cdot W(x_k)$. Was bedeutet die Größe $G(x_k)$?

(g) Berechne den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von X. Zeichne ein Histogramm von $W(x_k)$ und veranschauliche darin $\mu = E(X)$ und σ.

(h) Lohnt sich das Spiel für den Betreiber, wenn er wöchentlich einen Ruhetag hat und im Mittel täglich 270 Spiele stattfinden?

3.4 Kombinatorik – Urnenmodell

3.4.1. Vier Kochbücher, neun Physikbücher und zehn Krimis sollen nebeneinander auf ein Regal gestellt werden. Auf wie viele Arten ist dies möglich, wenn Bücher des gleichen Stoffgebietes nebeneinander stehen müssen (alle Bücher sind verschieden)?

3.4.2. Ein Würfel wird dreimal und anschließend eine Münze zweimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

(a) $A = \{342ZK\}$

(b) $B =$ „Dreimal die gleiche Zahl und zweimal das gleiche Münzsymbol“

(c) $C =$ „Drei verschiedene Augenzahlen und zwei verschiedene Münzsymbole“

3.4.3. Aus einem Kartenspiel (52 Blatt) werden nacheinander mit Zurücklegen k Karten ausgewählt. Für jede Wahl wird ein Zeitbedarf von einer Minute veranschlagt. Wie groß darf k höchstens gewählt werden, damit im Zeitraum von

(a) einem Jahr (b) 1000 Jahren (c) 13,7 Milliarden Jahren

alle Möglichkeiten durchgespielt werden können?

3.4.4. Ordne folgenden Problemen die richtige Grundaufgabe der Kombinatorik zu und berechne dann die Anzahl der Möglichkeiten:

(a) Aus den 26 Buchstaben des Alphabets werden beliebige Wörter der Länge fünf gebildet.

(b) Wie (a), jedoch jeder Buchstabe höchstens einmal.

(c) Lotto „6 aus 49“.

(d) Zehn Personen stellen sich in einer Reihe auf.

(e) Zehn Kugeln mit den Ziffern 0 bis 9 auf drei Urnen verteilen.

(f) Zehn Elektronen (ununterscheidbar) auf drei verschiedene Atome verteilen.

(g) Zehn Elektronen (ununterscheidbar) auf drei gleiche Atome verteilen.

3.4.5. **Schafkopf**

Beim Schafkopfen wird ein Kartenspiel mit 32 Blatt verwendet. Es gibt die acht Kartenwerte 7,8,9,10,U,O,K,A und die Farben Gras, Eichel, Schell und Herz. Jeder Spieler erhält acht Karten. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Schafkopfblätter:

(a) Buam-Solo-Du („du“ entspricht „tout“): alle Ober und alle Unter

(b) Vier Ober und zusätzlich vier Herzkarten

(c) Keinen Ober und keinen Unter

(d) Acht Trümpfe für ein Herz-Solo (es gibt 14 Trümpfe: 4O, 4U, Herzkarten)

(e) Ein Spieler hat folgendes Blatt: O_E,O_G,O_S,U_E,U_G, U_H,U_S,A_H. Der Spieler gewinnt das „Solo-Du“, wenn die Gegner keinen Stich machen, d.h. wenn der Gegner, der den Herzober hat, höchstens noch einen weiteren Trumpf besitzt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der „Du“ zu gewinnen?

3.4.6. **Pokern**

Beim Pokern wird ein Kartenspiel mit 52 Blatt verwendet. Es gibt die 13 Kartenwerte 2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K,A und die Farben Pik, Kreuz, Karo und Herz. Jeder Spieler erhält fünf Karten. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Pokerblätter:

(a) Royal Flush: 10,J,Q,K,A in einer Farbe

(b) Straight Flush: A,2,3,4,5 oder 2,3,4,5,6 oder 3,4,5,6,7 oder ... oder 9,10,J,Q,K, alle in einer Farbe

(c) Vierer: vier gleiche Werte

(d) Full House: Dreier und Paar, z.B. K,K,K,3,3

(e) Flush: Alle Karten von der gleichen Farbe

(f) Straight: A,2,3,4,5 oder 2,3,4,5,6 oder 3,4,5,6,7 oder ... oder 10,J,Q,K,A, nicht alle in einer Farbe

(g) Dreier: drei gleiche Werte aber kein Full House

(h) Zwei Paare: z.B. A,A,3,3,7

(i) Ein Paar: zwei gleiche Werte, die restlichen Karten verschiedene Werte

3.4.7. Aus einem Kartenspiel (52 Blatt) werden solange Kartenpaare gezogen und beiseite gelegt, bis das Spiel aufgebraucht ist.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jedes gezogene Paar genau aus einer roten und einer schwarzen Karte besteht?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei jedem gezogenen Paar die erste Karte rot und die zweite Karte schwarz ist?

(c) Die erste gezogene Kartes eines jeden Paares wird auf Stapel 1, die zweite auf Stapel 2 gelegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Spiel so in einen roten und in einen schwarzen Stapel getrennt?

3.4.8. **Das Geburtstagsparadoxon**

(a) Berechne die Wahrscheinlichkeit $p(n)$, dass unter n zufällig ausgesuchten Personen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben. Es darf angenommen werden, dass das Jahr 365 Tage hat und jeder Tag als Geburtstag gleichwahrscheinlich ist. Berechne speziell $p(2)$ bis $p(10)$, $p(20)$, $p(40)$ und $p(60)$.

(b) Ab welcher Personenanzahl ist es bei einer Party günstig darauf zu wetten, dass mindestens zwei der Gäste am gleichen Tag Geburtstag haben?

3.4.9. n ununterscheidbare Würfel werden einmal geworfen. Wie groß muss n mindestens sein, damit die Zahl der verschiedenen Ausgänge dieses Experiments größer als eine Million ist?

3.4.10. Eine Klasse mit 15 Buben und 5 Mädchen soll auf einer Exkursion in drei Hotels (A, B und C) untergebracht werden. Wie viele Möglichkeiten der Hotelbelegungen gibt es, wenn

(a) in jedem Hotel beliebig viele Schüler übernachten können?

(b) 8 Schüler in A, 7 in B und 5 in C schlafen sollen?

(c) 8 Buben in A, 7 Buben in B und die Mädchen in C wohnen müssen?

3.4.11. Bei einem Volksfest werden Lose verkauft. In der Lostrommel befinden sich 500 Lose, davon 460 Nieten.

(a) Wie viele Lose muss man kaufen, um mit mehr als 40%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Treffer zu haben?

(b) Der Bürgermeister kauft zehn Lose. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er mindestens bzw. genau zwei Treffer?

3.4.12. Ein Schachbrett besteht aus 32 weißen und 32 schwarzen Feldern.

(a) Auf wie viele Arten kann man einen Bauern, einen Läufer, einen Springer, einen Turm und die Dame auf den 64 Feldern verteilen (eine Figur pro Feld)?

(b) Auf wie viele Arten kann man einen Bauern, einen Läufer, einen Springer, einen Turm und die Dame auf den 64 Feldern verteilen, wenn mehrere Figuren auf einem Feld stehen dürfen?

(c) Auf wie viele Arten kann man fünf Bauern auf den 64 Feldern verteilen?

(d) Auf wie viele Arten kann man fünf Euromünzen auf den 64 Feldern verteilen, wenn jedes Feld beliebig viele Münzen enthalten darf?

3.5 Die Bernoullikette

3.5.1. Ein Laplace-Würfel wird n-mal geworfen, eine Sechs ist ein Treffer, alles andere eine Niete.

(a) Zeichne ein Histogramm von $B(n, p, k)$ für $n = 10$.

(b) Wie oft muss der Würfel mindestens geworfen werden, damit mit mindestens 90%-er Sicherheit mindestens ein Treffer erzielt wird? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für „mindestens ein Treffer“ dann genau?

3.5.2. Eine Laplace-Münze wird n-mal geworfen, „Kopf“ ist ein Treffer, „Zahl“ eine Niete.

(a) Zeichne ein Histogramm von $B(n, p, k)$ für $n = 10$. Zeige, dass das Histogramm für beliebiges n symmetrisch ist.

(b) Wir betrachten das Histogramm für ein gerades n. Zeige, dass die Nachbarsäulen der mittleren Säule weniger hoch sind als die mittlere Säule.

(c) Wie oft muss die Münze mindestens geworfen werden, damit mit mindestens 90%-er Sicherheit mindestens einmal „Kopf“ geworfen wird? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das „mindestens einmal Kopf werfen“ dann genau?

3.5.3. An wie vielen Ziehungen muss man beim Lotto „6 aus 49“ mit jeweils einem Tipp mindestens teilnehmen, um mit mindestens 90%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal sechs Richtige zu haben?

3.5.4. Beim genetischen Fingerabdruck werden mehrere Abschnitte der DNA vervielfältigt und auf ihre Länge hin untersucht. Nehmen wir an, dass zehn Abschnitte untersucht werden und jeder Abschnitt zufällig verteilt fünf verschiedene Längen haben kann (die Realität ist komplizierter).

(a) An einem Tatort werden DNA-Spuren des Täters gesichert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass der genetische Fingerabdruck einer beliebigen Person mit dem des Täters übereinstimmt?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 000 Verurteilungen auf Grund des genetischen Fingerabdrucks mindestens ein Unschuldiger dabei ist?

(c) Ab wie vielen Verurteilungen auf Grund des genetischen Fingerabdrucks ist mit einer mindestens 50%-igen Wahrscheinlichkeit mindestens ein Unschuldiger ins Gefängnis gewandert?

3.5.5. Magdalena hat beim Stehendschießen die Trefferwahrscheinlichkeit $p = 80\%$.

(a) Magdalena schießt zwanzigmal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_1, dass sie folgende Serie schießt: 10011 11011 10111 01111?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_2, dass sie bei zwanzig Schüssen genau 15 Treffer landet?

(c) Eine Serie besteht aus fünf Schüssen, eine Topserie aus fünf Treffern. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_{T} schießt Lena eine Topserie? Wie viele Serien muss Magdalena mindestens schießen, damit mit mindestens 95%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens eine Topserie dabei ist?

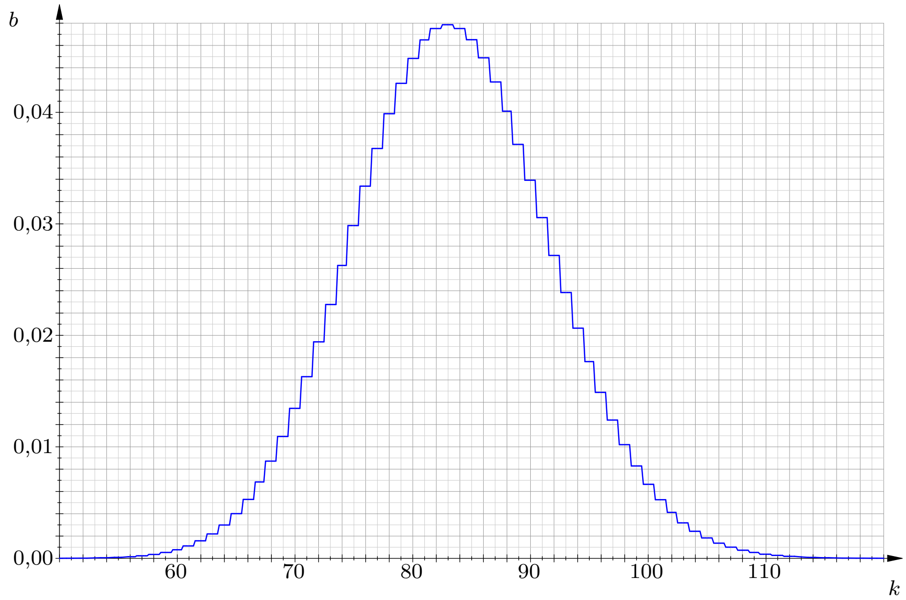
3.5.6. Ein Laplacewürfel wird n-mal geworfen.

(a) Wie groß muss n mindestens sein, damit mit mindestens 99,99%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Sechser dabei ist?

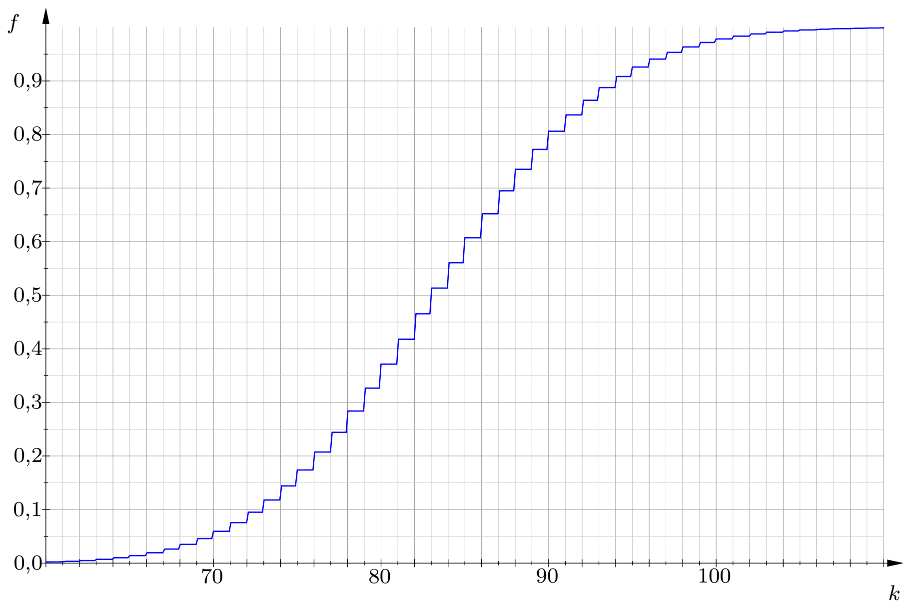
Jetzt wird der Würfel 500-mal geworfen. Wir betrachten die Ereignisse

E_1 :„höchstens 70 Sechser“	E_3 : „mindestens 78 und höchstens 93 Sechser“
E_2 :„mindestens 90 Sechser“	E_4 : „mindestens 78 und höchstens m Sechser“

(b) Die Abbildung zeigt den Grafen von $b(k) = B(500, \frac{1}{6}, k)$. Veranschauliche im Grafen die Wahrscheinlichkeiten $p_1 = P(E_1)$ und $p_2 = P(E_2)$ und schätze in nachvollziehbarer Weise ihre Werte ab.



(c) Die Abbildung zeigt den Grafen von $f(k) = F_{\frac{1}{6}}^{500}(k)$. Drücke $p_3 = P(E_3)$ durch f aus, zeichne p_3 in den Grafen ein und gib den ungefähren Wert von p_3 an. Ermittle ebenfalls mit dem Grafen das kleinste m mit $p_4 = P(E_4) \geqq 50\%$.



3.5.7. Aus einem Kartenspiel mit 32 Blatt wird mit Zurücklegen immer eine Karte gezogen. Ein Treffer (mit 1 bezeichnet) liegt vor, wenn die gezogene Karte ein Ass ist, sonst eine Niete (mit 0 bezeichnet).

(a) Der Versuch wird zehnmal ausgeführt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt das Ergebnis 0001001001 ein?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beim zehnmaligen Kartenziehen genau drei Treffer dabei?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist beim zehnmaligen Kartenziehen mindestens ein Treffer dabei?

(d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beim zehnmaligen Kartenziehen mindestens drei Treffer dabei?

(e) Wie viele Karten muss man mindestens ziehen, um mit mindestens 90%-iger Sicherheit mindestens einen Treffer zu landen?

(f) Wie viele Karten muss man mindestens ziehen, um mit mindestens 90%-iger Sicherheit mindestens zwei Treffer zu landen?

(g) Eine Casino bietet das zehnmalige Kartenziehen mit Zurücklegen als Spiel an. Der Spieler gewinnt, wenn er ein Trefferpaar (zwei Treffer hintereinander) und sonst nur Nieten zieht. In diesem Fall erhält der Spieler den zwanzigfachen Einsatz zurück, sonst ist der Einsatz verloren. Welche Rendite (Gewinn pro Einsatz) wirft dieses Spiel für die Bank ab?

3.5.8. Untersuche bei den binomial nach $B(10; 0{,}8)$, $B(50; 0{,}6)$, $B(100; 0{,}7)$ und $B(200; 0{,}1)$ verteilten Zufallsgrößen, wieviel Prozent der Treffer in den Intervallen

(a) $I_1 = [\mu-\sigma, \mu+\sigma]$, (b) $I_2 = [\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$ und (c) $I_3 = [\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$

liegen (μ: Erwartungswert, σ: Standardabweichung).

Berechne die Mittelwerte der berechneten Prozentzahlen für jedes Intervall.

3.5.9. Für eine nach $B(n, p)$ verteilte Zufallsgröße X mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ gilt näherungsweise für genügend großes n ($\sigma > 3$):

$$\begin{aligned} P(\mu-\sigma \leqq X \leqq \mu+\sigma) &\approx 68{,}3\% \\ P(\mu-2\sigma \leqq X \leqq \mu+2\sigma) &\approx 95{,}4\% \\ P(\mu-3\sigma \leqq X \leqq \mu+3\sigma) &\approx 99{,}7\% \end{aligned}$$

(a) Berechne Näherungswerte für $P(X < \mu-\sigma)$, $P(X > \mu+\sigma)$, $P(X < \mu-2\sigma)$, $P(X > \mu+2\sigma)$, $P(X < \mu-3\sigma)$ und $P(X > \mu+3\sigma)$.

(b) Formuliere mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe (a) Regeln, die die Begriffe *linksseitiger (rechtsseitiger) Signifikanztest*, *Signifikanzniveau* und *kritischer Bereich* enthalten.

(c) Ein Pharmahersteller behauptet, dass sein neues Medikament bei höchstens 4 Prozent der Patienten schwere Nebenwirkungen hervorruft. Entwickle einen einseitigen Signifikanztest mit der Stichprobenlänge $n = 1000$ auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 2,3\%$ für die Nullhypothese „das Medikament ruft bei mehr als 4% der Patienten schwere Nebenwirkungen hervor“.

Warum wird die Firma diesen Test wohl nicht in Auftrag geben?

3.5.10. Eine Urne enthält N Kugeln, S schwarze und $N-S$ weiße. P_1 ist die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen von n Kugeln *mit* Zurücklegen genau k schwarze Kugeln zu ziehen, P_2 dagegen ist die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen von n Kugeln *ohne* Zurücklegen genau k schwarze Kugeln zu ziehen.

(a) Berechne P_1 in Abhängigkeit von N, S, n und k.

(b) Berechne P_2 in Abhängigkeit von N, S, n und k.

(c) Unter welcher Bedingung gilt $P_1 \approx P_2$?

(d) Berechne P_1 und P_2 für

i. $N = 100$, $S = 40$, $n = 20$ und $k = 8$

ii. $N = 10\,000$, $S = 4000$, $n = 20$ und $k = 8$

(e) Eine Schachtel enthält 100 Gummibärchen, grüne und rote. Hans möchte die Nullhypothese „Der Anteil der grünen Bärchen ist mindestens 40%“ auf dem Signifikanzniveau 5% testen. Dazu entnimmt er 200 mal ein Bärchen, notiert die Farbe und legt es wieder zurück. Gib den größtmöglichen kritischen Bereich K an. Wie groß sind in diesem Fall die maximalen Fehler erster und zweiter Art?

(Natürlich ist dieser Test Blödsinn, da er viel schneller alle grünen Bärchen zählen könnte.)