1 Integralrechnung

1.1 Stammfunktionen und unbestimmtes Integral

1.1.1. (a) $\frac{x^{1000}}{1000}+C$ (b) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+C$ (c) $\frac{n}{n+m}\sqrt[n]{x^{n+m}}+C$ (d) $2\sqrt{x}+C$
(e) $\frac{1}{3}\sin 3x+C$ (f) $-\frac{A}{\omega}\cos\omega t+C$ (g) $\frac{x}{a^2}+C$ (h) $-\frac{1}{a}+C$

1.1.2. (a) x^n+C (b) $t^{10}\cdot x+C$ (c) $\frac{1}{11}t^{11}+C$
(d) $\frac{x^{1-n}}{1-n}+C$ (e) $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+C & \text{für } x \geqq 0\\ -\frac{x^2}{2}+C & \text{für } x<0\end{cases}$ (f) $x^2+3x-\frac{3}{x}-\frac{1}{4x^4}+C$
(g) $\frac{a}{2}x^2+ax+C$ (h) $\frac{x+1}{2}a^2+C$ (i) $a(x+1)t+C$

1.1.3. (a) e^x+C (b) $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+C$ (c) $2\sqrt{\mathrm{e}^x}+C$ (d) $-\mathrm{e}^{-x}+C$
(e) $\mathrm{e}^{ax}+C$ (f) $-\frac{A}{b}\mathrm{e}^{-bt}+C$ (g) $-2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+C$ (h) $\frac{2}{3}x^3-\mathrm{e}^{-3x}+C$

1.1.4. (a) e^x+C (b) $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+C$ (c) $2\sqrt{\mathrm{e}^x}+C$ (d) $-\mathrm{e}^{-x}+C$
(e) $\mathrm{e}^{ax}+C$ (f) $-\frac{A}{b}\mathrm{e}^{-bt}+C$ (g) $-2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+C$ (h) $\frac{2}{3}x^3-\mathrm{e}^{-3x}+C$

1.1.5. (a) $\frac{x^{n+1}}{a(n+1)}+C$ (b) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(7-x)^4}+C$
(c) $-\frac{n}{b(n+m)}\sqrt[n]{(a-bx)^{n+m}}+C$ (d) $\frac{2}{5}\sqrt{5x-3}+C$
(e) $\frac{1}{3}\sin(3x-4)+C$ (f) $-\frac{A}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)+C$
(g) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-3}+C$ (h) $-\frac{1}{2}\ln|8-2t|+C$
(i) $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}-1}+C$

1.1.6. (a) $\int\frac{x^3}{5x^4+3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{20}\int\frac{20x^3}{5x^4+3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{20}\int\frac{(5x^4+3)'}{5x^4+3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{20}\ln|5x^4+3|+C$
(b) $\int\frac{x^{n-1}}{x^n+a}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int\frac{nx^{n-1}}{x^n+a}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int\frac{(x^n+a)'}{x^n+a}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\ln|x^n+a|+C$
(c) $\int\frac{x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{(x^3-1)'}{x^3-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln|x^3-1|+C$
(d) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{(\ln x)'}{\ln x}\,\mathrm{d}x=\ln|\ln x|+C$
(e) $\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x=-\int\frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x=-\ln|\sin x+\cos x|+C$

(f) $\displaystyle\int \frac{\sin x + x\cos x}{x\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x\sin x)'}{x\sin x}\,\mathrm{d}x = \ln|x\sin x| + C$

1.1.7. (a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

(b) $\displaystyle\int x^2 \mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \left(x^3\right)' \mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3} + C$

(c) $\displaystyle\int x^n \mathrm{e}^{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int \left(x^{n+1}\right)' \mathrm{e}^{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\mathrm{e}^{x^{n+1}} + C$

1.1.8. Wir müssen zeigen, dass, $F(x) - G(x)$ eine Konstante ist:

$$F(x) - G(x) = \sqrt{x+1} - \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1}) - x}{1+\sqrt{x+1}} =$$
$$= \frac{\sqrt{x+1} + x + 1 - x}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}+1}{1+\sqrt{x+1}} = 1 \quad \text{q.e.d}$$

1.1.9. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{2x}{a^2}\cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin ax + C\right] =$$
$$\frac{2}{a^2}\cos ax - \frac{2x}{a}\sin ax + \frac{2x}{a}\sin ax + \left(x^2 - \frac{2}{a^2}\right)\cos ax = x^2\cos ax \quad \text{q.e.d}$$

1.1.10. (a) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x-1)\mathrm{e}^x + C\right] = \mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$

(b) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2-2x+2)\mathrm{e}^x + C\right] = (2x-2)\mathrm{e}^x + (x^2-2x+2)\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x$

(c)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{a^3x^3 - 3a^2x^2 + 6ax - 6}{a^4}\cdot \mathrm{e}^{ax} + C\right] =$$
$$= \frac{3a^3x^2 - 6a^2x + 6a}{a^4}\cdot \mathrm{e}^{ax} + \frac{a^3x^3 - 3a^2x^2 + 6ax - 6}{a^4}\cdot a\mathrm{e}^{ax} =$$
$$= \frac{3a^2x^2 - 6ax + 6}{a^3}\cdot \mathrm{e}^{ax} + \frac{a^3x^3 - 3a^2x^2 + 6ax - 6}{a^3}\cdot \mathrm{e}^{ax} = x^3\mathrm{e}^{ax}$$

1.2 Das Anfangswertproblem

1.2.1. (a) $\displaystyle F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x + x + C, \quad F(\pi) = \pi + C = \pi \quad\Longrightarrow\quad C = 0$

$$\Longrightarrow \quad F(x) = \sin x + x$$

(b) $\displaystyle F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = 3x^{\frac{1}{3}} + C, \quad F(8) = 6 + C = 0 \quad\Longrightarrow\quad C = -6$

$$\Longrightarrow \quad F(x) = 3x^{\frac{1}{3}} - 6$$

1.2.2. (a) $\displaystyle F(x) = \int \left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + C, \quad F(4) = 4 + C = 4 \quad\Longrightarrow\quad C = 0$

$$\Longrightarrow \quad F(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3$$

(b) $x(t)=\int\left(\frac{t}{4}+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\frac{t^2}{8}-\frac{1}{t}+C,\quad x(2)=0+C=0\quad\Longrightarrow\quad C=0$

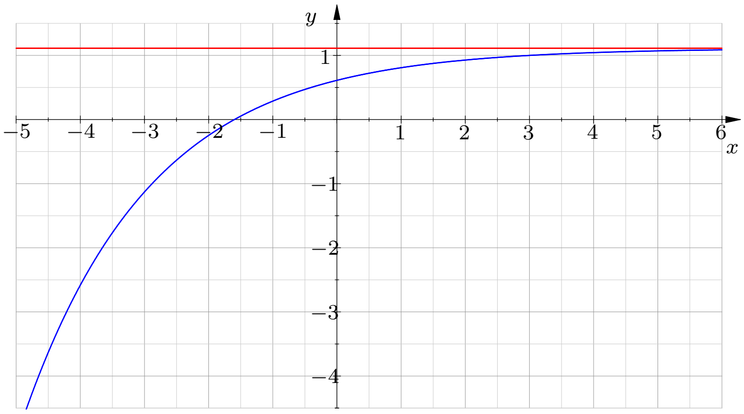
$$\Longrightarrow\quad x(t)=\frac{t^2}{8}-\frac{1}{t}$$

1.2.3. $f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+C$

$$f(3)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}+C=1\quad\Longrightarrow\quad C=1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\approx 1{,}11$$

$$f(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$$

$$f(x)=0\quad\Longrightarrow\quad x_0=-2\ln\left(2+e^{-\frac{3}{2}}\right)\approx -1{,}60$$



1.2.4. (a) $f(x)=\int\left(9-x^2\right)\mathrm{d}x=9x-\frac{x^3}{3}+C$

$$f(3)=27-\frac{27}{3}+C=18+C=10\quad\Longrightarrow\quad C=-8\quad\Longrightarrow\quad f(x)=9x-\frac{x^3}{3}-8$$

$$f(1)=9-\frac{1}{3}-8=\frac{2}{3}$$

(b) $g(x)=\int\frac{1}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x=\int x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+C=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C=-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$

$$g(1)=-2+C=1\quad\Longrightarrow\quad C=3\quad\Longrightarrow\quad g(x)=-\frac{2}{\sqrt{x}}+3$$

1.2.5.
$$\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin x\cos x}{2}+C\right)'=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[1-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\right]=\frac{1}{2}\left[1-\cos^2 x+\sin^2 x\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\sin^2 x+\sin^2 x\right]=\sin^2 x\qquad\text{q.e.d.}$$

1.2.6. (a) $f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int \frac{\frac{1}{3}\cdot(x^3+1)'}{x^3+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln(x^3+1)+C$

$f(0)=C=1 \quad\Longrightarrow\quad C=1$

$$f(x)=\frac{1}{3}\ln(x^3+1)+1$$

$$f(x)=0 \quad\Longrightarrow\quad x_0=-\left(1-\mathrm{e}^{-3}\right)^{\frac{1}{3}}\approx -0{,}983121$$

Definitionsmenge: $x^3+1>0 \quad\Longrightarrow\quad D_f=]-1;+\infty[$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$$

$$f'(x)=0 \quad\Longrightarrow\quad x_1=0$$

In ganz D_f gilt $f'(x)\geqq 0$, f ist also in ganz D_f monoton steigend. Also Terrassenpunkt bei T $(0|1)$.

$$f''(x)=\frac{2x(x^3+1)-x^2\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2}=\frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$$

$f''(x)=0$ für $x_{21}=0$ und $x_{22}=\sqrt[3]{2}$.

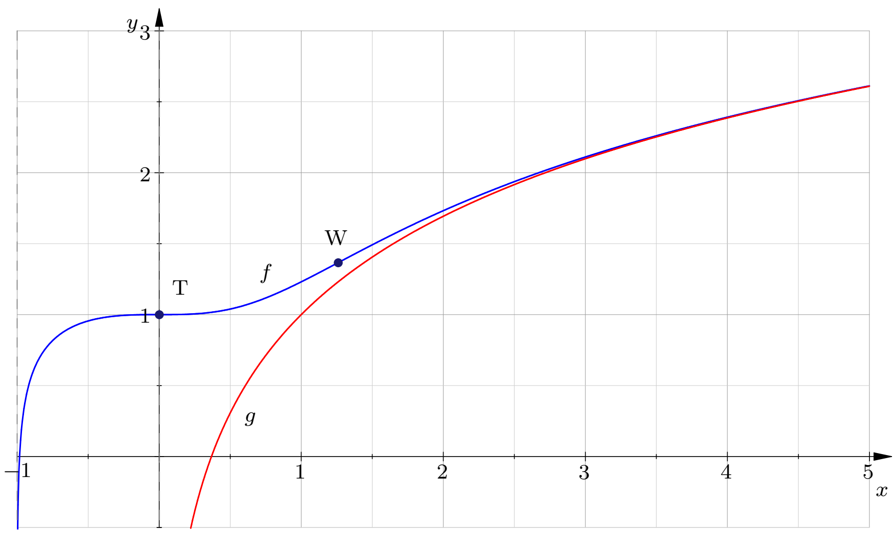
	$-1<x<x_{21}$	$x_{21}<x<x_{22}$	$x_{22}<x$
x	$-$	$+$	$+$
$2-x^3$	$+$	$+$	$-$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$

Also VZW von f'' bei x_{21} und x_{22}, d.h. Wendepunkte bei T $(0|1)$ und W $\left(\sqrt[3]{2}\middle|\frac{1}{3}\ln 3+1\right)$.

(b)

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{3}\ln\left(x^3+1\right)-\ln x=\frac{1}{3}\ln\left(x^3+1\right)-\frac{1}{3}\ln x^3=$$
$$=\frac{1}{3}\ln\frac{x^3+1}{x^3}=\frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}|f(x)-g(x)|=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)=\frac{1}{3}\cdot\ln 1=0$$



(c)
$$|f(x)-g(x)| = \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right) < \frac{1}{100}$$
$$\frac{1}{x^3} < \mathrm{e}^{0{,}03}-1$$
$$x > \frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}^{0{,}03}-1}} \approx 3{,}2$$

1.3 Das bestimmte Integral

1.3.1. (a) $\displaystyle\int\limits_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

(b) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{\omega}} A\sin\omega t\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{A}{\omega}\cos\omega t\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = -\frac{A}{\omega}\cos\pi + \frac{A}{\omega}\cos 0 = \frac{2A}{\omega}$

(c) $\displaystyle\int\limits_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^4 = -\frac{1}{2\cdot 4^2} + \frac{1}{2} = \frac{15}{32}$

(d) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{-2} \left(\frac{x^5}{3} - \frac{3}{x^7}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^6}{18} + \frac{1}{2x^6}\right]_{-1}^{-2} = \frac{32}{9} + \frac{1}{128} - \frac{1}{18} - \frac{1}{2} = \frac{385}{128}$

(e) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x = \left[3\sin\frac{x}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 3\left[\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}\right] = \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$

(f) $\displaystyle\int\limits_0^3 (2x^4 - x^3 + 2x^2 - x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{1809}{20} = 90{,}45$

(g) $\displaystyle\int\limits_0^1 x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^1 = \frac{3}{4}$

(h)
$$\int\limits_1^3 \frac{x^2+2x+1}{x^4+x^3}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \frac{(x+1)^2}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right]_1^3 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{18} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{10}{9}$$

1.3.2. (a) $\displaystyle\int\limits_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

(b) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{\omega}} A\sin\omega t\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{A}{\omega}\cos\omega t\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = -\frac{A}{\omega}\cos\pi + \frac{A}{\omega}\cos 0 = \frac{2A}{\omega}$

(c) $\displaystyle\int\limits_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^4 = -\frac{1}{2\cdot 4^2} + \frac{1}{2} = \frac{15}{32}$

(d) $$\int_{-1}^{-2} \left(\frac{x^5}{3} - \frac{3}{x^7} \right) dx = \left[\frac{x^6}{18} + \frac{1}{2x^6} \right]_{-1}^{-2} = \frac{32}{9} + \frac{1}{128} - \frac{1}{18} - \frac{1}{2} = \frac{385}{128}$$

(e) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\frac{x}{3}\, dx = \left[3\sin\frac{x}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 3\left[\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6} \right] = \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

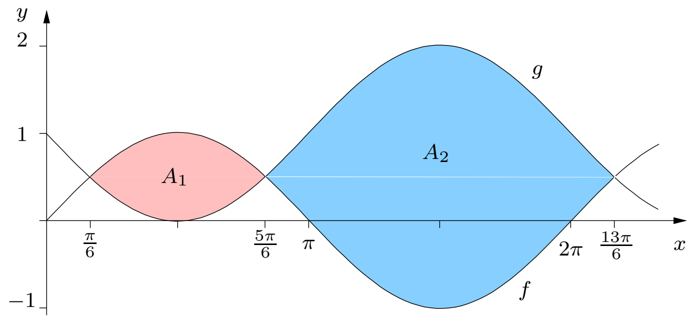
(f) $$\int_0^3 (2x^4 - x^3 + 2x^2 - x)\, dx = \left[\frac{2x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{1809}{20} = 90{,}45$$

(g) $$\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\, dx = \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

(h) $$\int_1^3 \frac{x^2+2x+1}{x^4+x^3}\, dx = \int_1^3 \frac{(x+1)^2}{x^3(x+1)}\, dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx =$$
$$= \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \right]_1^3 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{18} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{10}{9}$$

1.3.3. Schnittpunkte der beiden Grafen:

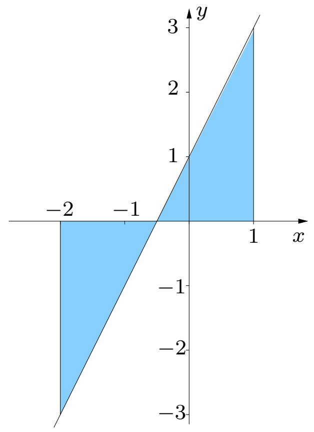
$$f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6}, \quad x_3 = \frac{13\pi}{6}$$



$$A_1 = \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2\sin x - 1)\, dx = \left[-2\cos x - x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} =$$
$$= -2\cos\frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} =$$
$$= 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} \approx 1{,}37$$

$$A_2 = \int_{x_2}^{x_3} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{13\pi}{6}} (1 - 2\sin x)\, dx = \left[2\cos x + x \right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{13\pi}{6}} =$$
$$= 2\cos\frac{13\pi}{6} + \frac{13\pi}{6} - 2\cos\frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = \sqrt{3} + \frac{13\pi}{6} + \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6} =$$
$$= 2\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} \approx 7{,}65$$

1.3.4. (a) Nullstelle im Integrationsintervall: $x_0 = -\frac{1}{2}$



$$f(x) < 0 \text{ für } x < -\frac{1}{2}, \quad f(x) > 0 \text{ für } x > -\frac{1}{2}$$

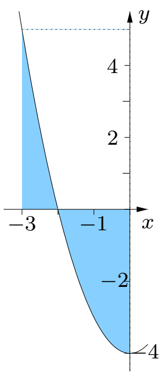
$$A = \int_{-2}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} [-f(x)]\,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \Big[-x^2 - x\Big]_{-2}^{-\frac{1}{2}} + \Big[x^2 + x\Big]_{-\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 4 - 2 + 1 + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 4{,}5$$

elementargeometrisch: $A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5$

(b) Nullstelle im Integrationsintervall: $x_0 = -2$



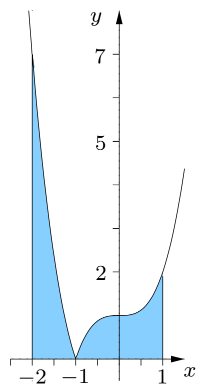
$$f(x) > 0 \text{ für } x < -2, \quad f(x) < 0 \text{ für } x > -2$$

$$A = \int_{-3}^{0} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{0} [-f(x)]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-3}^{-2} + \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{0} =$$

$$= -\frac{8}{3} + 8 + 9 - 12 - \frac{8}{3} + 8 = 7\frac{2}{3}$$

(c) Nullstelle von $x^3 + 1$: $x_0 = -1 \quad \Longrightarrow$



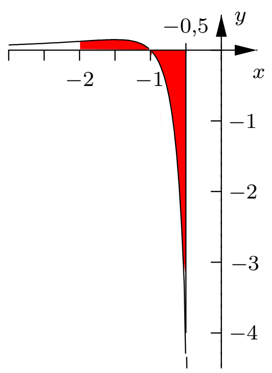
$$f(x) = \begin{cases} -x^3 - 1 & \text{für } x < -1 \\ x^3 + 1 & \text{für } x \geqq -1 \end{cases}$$

$$A = \int_{-2}^{-1} (-x^3 - 1)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} (x^3 + 1)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} - x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{4} + 1 + 4 - 2 + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} + 1 = 4{,}75$$

(d) Nullstelle im Integrationsintervall: $x_0 = -1$



$$f(x) > 0 \text{ für } x < -1, \quad f(x) < 0 \text{ für } -1 < x < 0$$

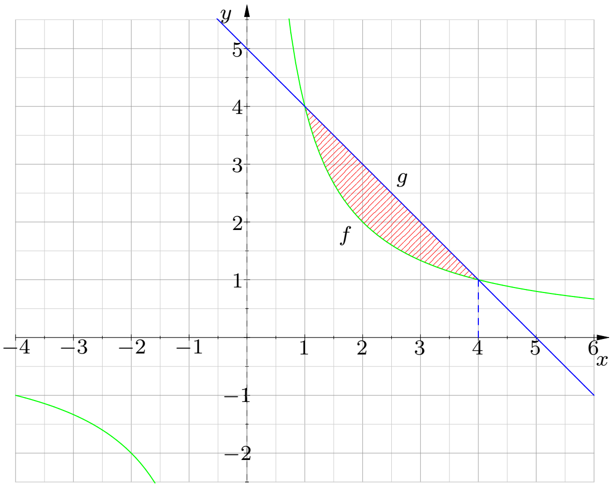
$$A = \int_{-2}^{-0{,}5} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{-0{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^{-0{,}5} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - 2 + 2 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

1.3.5. Schnittpunkte: $f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 5x = -4 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4$

$$A = \int\limits_1^4 |g(x) - f(x)| = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln x\right]_1^4 = \frac{15}{2} - 8\ln 2 \approx 1{,}95$$



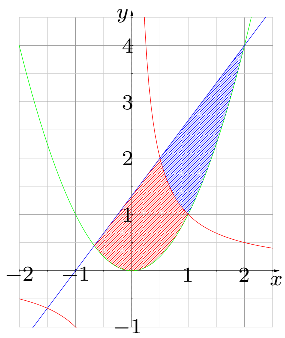
1.3.6. (a) $f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow$

$$\mathrm{S}_1\left(-\frac{2}{3}\middle|\frac{4}{9}\right), \quad \mathrm{S}_2\,(2|4)$$

$g(x) = h(x) \quad \Longrightarrow$

$$\mathrm{S}_3\left(-\frac{3}{2}\middle|-\frac{2}{3}\right), \quad \mathrm{S}_4\left(\frac{1}{2}\middle|2\right)$$

$f(x) = h(x) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{S}_5\,(1|1)$



(b) $A = \int\limits_{-\frac{2}{3}}^{2} \left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} - x^2\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{2}{3}}^{2} = \frac{256}{81} = 3\frac{13}{81}$

(c)
$$A_1 = \int\limits_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} - x^2\right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{x} - x^2\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{2}} + \left[\ln x - \frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{833}{648} + \ln 2 - \frac{7}{24} = \frac{161}{162} + \ln 2$$

$$A_2 = A - A_1 = \frac{13}{6} - \ln 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{161 + \ln 2}{351 - \ln 2} \approx 1{,}145$$

1.3.7. (a) $\int \mathrm{e}^{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b} + C$

(b)
$$\int\limits_1^{\sqrt{7}} \frac{2x}{x^2 - 4}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\sqrt{7}} \frac{(x^2-4)'}{x^2 - 4}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left[\ln|x^2 - 4|\right]_1^{2-\varepsilon} + \left[\ln|x^2 - 4|\right]_{2+\varepsilon}^{\sqrt{7}}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|-4\varepsilon + \varepsilon^2| - \ln 3 + \ln 3 - \ln|4\varepsilon + \varepsilon^2|\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left|\frac{\varepsilon(-4+\varepsilon)}{\varepsilon(4+\varepsilon)}\right| = \ln 1 = 0$$

(c) $\int\limits_0^\pi \sin^2 x \,\mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{3}\left(\sin^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}(\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{2}$

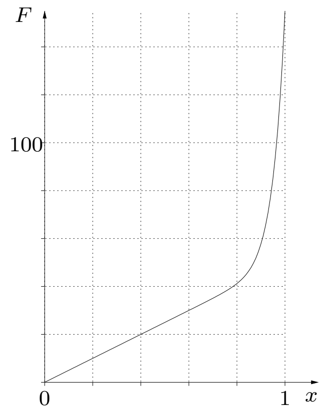
1.3.8. $y(t) = t\left(v_0 - \frac{gt}{2}\right) = 0 \quad\Longrightarrow\quad t =_{01}= 0, \quad t_{02} = \frac{2v_0}{g}$

Maximale Höhe zur Zeit $t_1 = \frac{t_{02}}{2} = \frac{v_0}{g}$: $\quad h = y(t_1) = \frac{v_0^2}{2g}$

$$\overline{h} = \frac{1}{t_{02} - t_{01}} \int\limits_{t_{01}}^{t_{02}} \left(v_0 t - \frac{g}{2}t^2\right) = \frac{g}{2v_0}\left[\frac{v_0 t^2}{2} - \frac{g}{6}t^3\right]_0^{\frac{2v_0}{g}} = \frac{v_0^2}{3g} = \frac{2}{3}h$$

1.3.9. (a) $F(x) = Dx \quad\Longrightarrow\quad \Delta W = D\int\limits_{x_1}^{x_2} x \,\mathrm{d}x = \frac{D}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)$

(b)



$$W(x) = \int\limits_0^x F(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} = \int\limits_0^x (D\tilde{x} + C\tilde{x}^{20})\,\mathrm{d}\tilde{x} =$$
$$= \left[\frac{D}{2}\tilde{x}^2 + \frac{C}{21}\tilde{x}^{21}\right]_0^x = \frac{D}{2}x^2 + \frac{C}{21}x^{21} =$$
$$= 25\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot x^2 + 5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^{20}} \cdot x^{21}$$

$W(1\,\mathrm{m}) = 30\,\mathrm{J}, \quad W(1{,}2\,\mathrm{m}) = 260\,\mathrm{J}$

(c)

$$W(r) = \int\limits_R^r F(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_R^r \frac{GMm}{x^2}\,\mathrm{d}x = GMm\int\limits_R^r \frac{\mathrm{d}x}{x^2} =$$
$$= GMm\left[-\frac{1}{x}\right]_R^r = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

$$\lim_{r\to\infty} W(r) = \frac{GMm}{R}$$

$$\frac{m}{2}v_0^2 = \frac{GMm}{R} \quad\Longrightarrow\quad v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 11{,}2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

1.3.10. (a) $\overline{f} = \frac{1}{4 - \frac{1}{2}}\int\limits_{\frac{1}{2}}^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{2}{7}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^4 = \frac{2}{7}\left[-\frac{1}{4} + 2\right] = \frac{1}{2}$

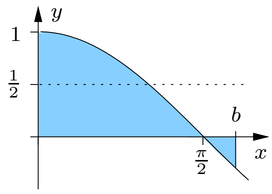
(b) $f(-x) = f(x) \quad\Longrightarrow f$ ist symmetrisch zur y-Achse:

$$\overline{f} = \frac{1}{2 - (-2)}\int\limits_{-2}^2 \left(4 - \frac{x^2}{4}\right)\,\mathrm{d}x \stackrel{\text{Symmetrie}}{=} \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\int\limits_0^2 \left(4 - \frac{x^2}{4}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[4x - \frac{x^3}{12}\right]_0^2 = \frac{11}{3}$$

(c) $\overline{f} = \frac{1}{2\pi - 0}\int\limits_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[-1 + 1\right] = 0$

(d) $\overline{f} = \dfrac{1}{\pi - 0} \displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi} [-\cos x]_0^{\pi} = \dfrac{1}{2\pi} [1 + 1] = \dfrac{1}{\pi}$

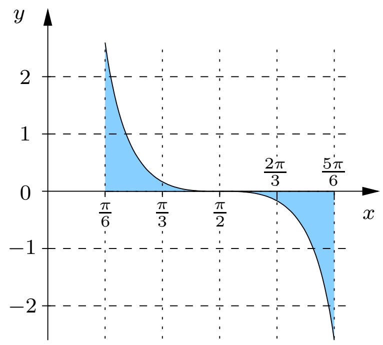
(e) $\overline{f} = \dfrac{1}{b - 0} \displaystyle\int_0^{b} \cos x \, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{b} [\sin x]_0^{b} = \dfrac{\sin b}{b} = \dfrac{1}{2}$



Die Gleichung $\frac{\sin b}{b} = \frac{1}{2}$ ist nur numerisch lösbar, z.B. mit dem Newtonverfahren oder einfach durch Ausprobieren mit dem TR: $b \approx 1{,}895$.

1.3.11. (a)

x	$f(x)$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2{,}60$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{6} \approx 0{,}167$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{6} \approx -0{,}167$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3}{2}\sqrt{3} \approx -2{,}60$



(b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\sin x - \dfrac{1}{\sin x} + C\right) = -\cos x - \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{\cos x\,\overbrace{(1 - \sin^2 x)}^{\cos^2 x}}{\sin^2 x} = \dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$

(c) Nullstelle von f bei $x_0 = \frac{\pi}{2}$ und $f(x) < 0$ für $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$:

$$A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\sin x - \frac{1}{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\sin x - \frac{1}{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} =$$

$$= -1 - 1 + \frac{1}{2} + 2 - (-\frac{1}{2} - 2 + 1 + 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

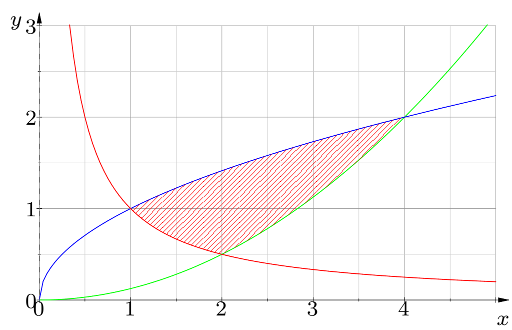
1.3.12. (a) $f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{x^2}{8} = \sqrt{x}$

$x^4 = 64x \quad \Longrightarrow \quad x(x^3 - 64) = 0$

$\mathrm{S}_1\,(0|0)\,, \quad \mathrm{S}_2\,(4|2)$

$f(x) = h(x) \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{x^2}{8} = \dfrac{1}{x}$

$x^3 = 8 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{S}_3\left(2\middle|\dfrac{1}{2}\right)$



$g(x) = h(x) \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x} = \dfrac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad x^3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{S}_4\,(1|1)$

(b)

$$A = \int_1^2 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x + \int_2^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x^2}{8}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \ln x\right]_1^2 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{24}\right]_2^4 =$$

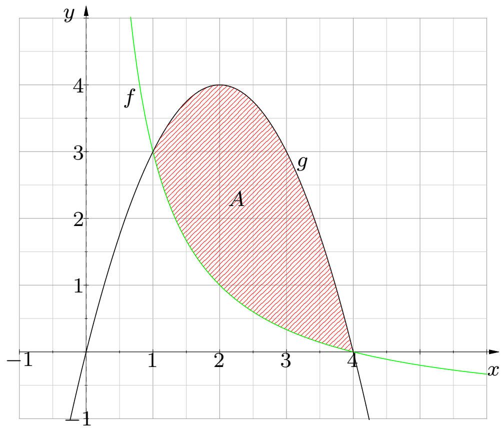
$$= \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} - \ln 2 - \frac{2}{3} + \ln 1 + \frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}} - \frac{4^3}{24} - \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} + \frac{2^3}{24} = \frac{7}{3} - \ln 2 \approx 1{,}64$$

1.3.13. $f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{f0} = 4$

$g(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{g1} = 0, \quad x_{g2} = 4$

$x_1 = 1: \quad f(x_1) = 3, \quad g(x_1) = 3$

$x_2 = 4: \quad f(x_2) = 0, \quad g(x_2) = 0$



$$A = \int_1^4 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^4 \left(4x - x^2 - \frac{4}{x} + 1\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} - 4\ln x + x\right]_1^4$$

$$= 32 - \frac{64}{3} - 4\ln 4 + 4 - 2 + \frac{1}{3} - 1 = 12 - 4\ln 4 \approx 6{,}455$$

1.3.14. (a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = (0 + \infty) = +\infty$

(b) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1$

$f''(x) = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2-x}{x^3}$

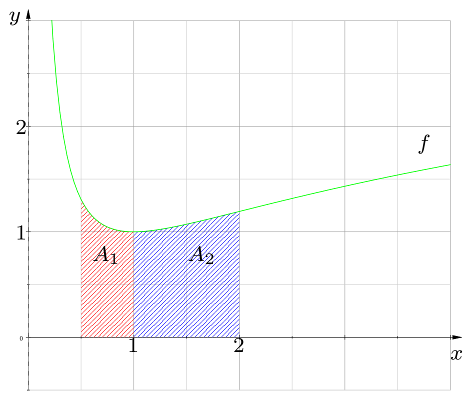
$f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 2$

$f''(1) = 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad$ TP bei $(1|1)$

$f'''(x) = -\dfrac{6}{x^4} + \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2x-6}{x^4}$

$f'''(2) = -\dfrac{1}{8} \neq 0 \quad \Longrightarrow$

WP bei $\left(2\middle|\frac{1}{2} + \ln 2\right) \approx (2|1{,}19)$



(c) $g(x) = \displaystyle\int_1^x \left(\frac{1}{t} + \ln t\right)\,\mathrm{d}t = [\ln t + t(\ln t - 1)]_1^x = \ln x + x(\ln x - 1) - \ln 1 - 1\cdot(\ln 1 - 1)$

$$g(x) = 1 - x + (1+x)\ln x \quad \text{mit} \quad g(1) = 0$$

(d) $A_1 = \left|g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| = \left|\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\ln\dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\ln 2\right| = \dfrac{\ln 8 - 1}{2} \approx 0{,}53972$

$A_2 = g(2) = -1 + 3\ln 2 = \ln 8 - 1 = 2A_1 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{A_2}{A_1} = 2$

1.4 Integralfunktionen

1.4.1. (a) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$ hat für alle $C \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle ($x_0 = \operatorname{sgn}(-3C) \cdot (|3C|)^{\frac{1}{3}}$) und ist damit auch Integralfunktion von f.

(b) $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + C$ hat nur für $C \leqq 0$ eine Nullstelle. Für $C > 0$ ist F also keine Integralfunktion von f.

1.4.2. Allgemein gilt: $\quad f(x) = \displaystyle\int_a^x f'(x)\,\mathrm{d}x$ mit $f(a) = 0$.

(a) $f(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{01} = 2, \quad x_{02} = 6$, also $f(x) = \displaystyle\int_2^x (x-4)\,\mathrm{d}x = \int_6^x (x-4)\,\mathrm{d}x$

(b) $g(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{0k} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, also $g(x) = -\displaystyle\int_{x_{0k}}^x \sin x\,\mathrm{d}x$

(c) $h(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{0k} = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Um nicht über eine Polstelle zu integrieren, muss man unendlich viele Fälle unterscheiden:

$$h(x) = \int_{x_{0k}}^x \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \quad \text{für} \quad x \in \left]x_{0k} - \frac{\pi}{2}, x_{0k} + \frac{\pi}{2}\right[$$

1.4.3. Nullstellen von f: $\quad x_{01} = -1$, $x_{02} = 1$. Wegen der Polstelle Fallunterscheidung:

$$f(x) = \begin{cases} -\displaystyle\int_{-1}^x \frac{2}{t^3}\,\mathrm{d}t & \text{für } x < 0 \\ -\displaystyle\int_{1}^x \frac{2}{t^3}\,\mathrm{d}t & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

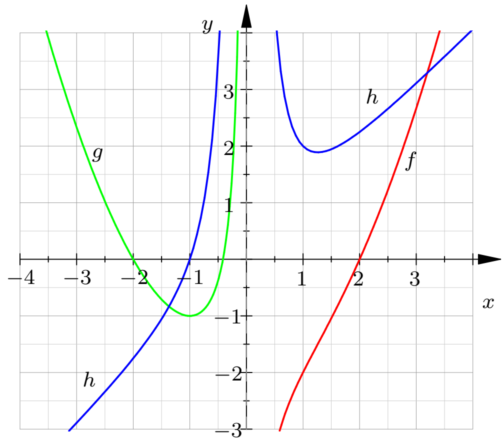
1.4.4. (a) $f(x) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^x \cos t\,\mathrm{d}t = \sin x - \sin\frac{\pi}{6} = \sin x - \frac{1}{2}$

$$g(x) = \int_{\frac{\pi}{3}}^x \cos t\,\mathrm{d}t = \sin x - \sin\frac{\pi}{3} = \sin x - \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$\Longrightarrow \quad f(x) = g(x) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$

(b) $f(x) = \displaystyle\int_2^x \left(\frac{1}{t^2} + t\right)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t} + \frac{t^2}{2}\right]_2^x = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$ für $x > 0$

$$g(x) = \int_{-2}^x \left(\frac{1}{t^2} + t\right)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t} + \frac{t^2}{2}\right]_{-2}^x = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2} \text{ für } x < 0$$



1.4.5. (a) $v(t) = v(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad x(t) = x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

(b) $v(t) = v(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} a\,\mathrm{d}\tau = v_0 + a(t - t_0)$

$$x(t) = x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]\,\mathrm{d}\tau = x_0 + \left[v_0\tau + \frac{a}{2}(\tau - t_0)^2\right]_{t_0}^{t} =$$
$$= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2$$

(c) Aus $m_0 - \alpha t_1 = \frac{m_0}{2}$ folgt $t_1 = \frac{m_0}{2\alpha}$.

$$\dot{v}(t) = a(t) = \frac{F}{m(t)} = \frac{F}{m_0 - \alpha t}$$

$$v(t) = v_0 + \int\limits_{0}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau = v_0 + F\int\limits_{0}^{t} \frac{\mathrm{d}\tau}{m_0 - \alpha\tau} =$$
$$= v_0 + F\left[\frac{1}{-\alpha}\left(\ln|m_0 - \alpha\tau|\right)\right]_0^t = v_0 - \frac{F}{\alpha}\left(\ln(m_0 - \alpha t) - \ln m_0\right) =$$
$$= v_0 - \frac{F}{\alpha}\ln\frac{m_0 - \alpha t}{m_0} = v_0 + \frac{F}{\alpha}\ln\frac{m_0}{m_0 - \alpha t}$$

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{0}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = x_0 + \int\limits_{0}^{t}\left(v_0 + \frac{F}{\alpha}\ln\frac{m_0}{m_0 - \alpha\tau}\right)\mathrm{d}\tau =$$
$$= x_0 + v_0 t - \frac{F}{\alpha}\int\limits_{0}^{t}\ln\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}\tau\right)\mathrm{d}\tau =$$
$$= x_0 + v_0 t - \frac{F}{\alpha}\left(-\frac{m_0}{\alpha}\right)\left[\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}\tau\right)\cdot\left\{\ln\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}\tau\right) - 1\right\}\right]_0^t =$$
$$= x_0 + v_0 t + \frac{Fm_0}{\alpha^2}\left[\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}t\right)\cdot\left\{\ln\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}t\right) - 1\right\} + 1\right] =$$
$$= x_0 + v_0 t + \frac{Fm_0}{\alpha^2}\left[\left(1 - \frac{\alpha t}{m_0}\right)\cdot\ln\left(1 - \frac{\alpha t}{m_0}\right) + \frac{\alpha t}{m_0}\right]$$

Für die speziellen Zahlenwerte gilt:

$$v(t) = -100\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ln\left(1-\frac{t}{100\,\mathrm{s}}\right)$$

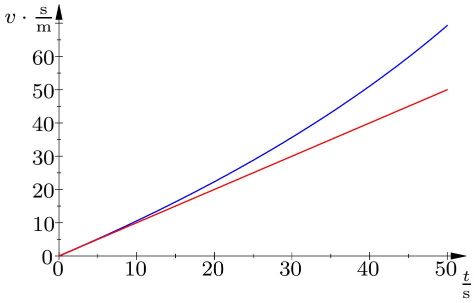
und

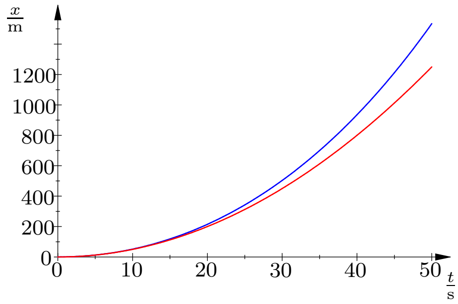
$$x(t) = 10^4\,\mathrm{m}\left[\left(1-\frac{t}{100\,\mathrm{s}}\right)\ln\left(1-\frac{t}{100\,\mathrm{s}}\right)+\frac{t}{100\,\mathrm{s}}\right]$$

Mit $t_1 = 50\,\mathrm{s}$ folgt $v(t_1) = 69{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $x(t_1) = 1{,}53\,\mathrm{km}$.

Ohne Sandverlust: $\overline{v}(t) = \frac{F}{m_0}t = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot t$ und $\overline{x}(t) = \frac{F}{2m_0}t^2 = 0{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot t^2$.

$\overline{v}(t_1) = 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\overline{x}(t_1) = 1{,}25\,\mathrm{km}$.





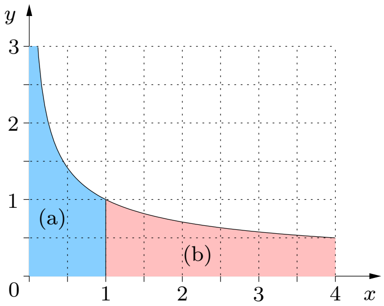
1.5 Uneigentliche Integrale

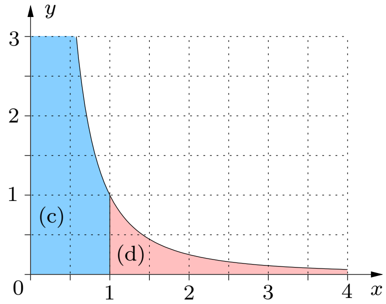
1.5.1. (a) $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0+}\left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0+}(2-2\sqrt{a}) = 2$$

(b) $$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to\infty}\int_1^a x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^a = \lim_{a\to\infty}(2\sqrt{a}-1) = +\infty$$

(c) $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 x^{-2}\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0+}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0+}\left(-1+\frac{1}{a}\right) = +\infty$$

(d) $$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{a\to\infty}\int_1^a x^{-2}\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{a}+1\right) = 1$$





1.5.2. $I_1 = \int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \lim\limits_{a\to\infty} \int\limits_1^a x^{-n}\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to\infty} \left[\frac{1}{(1-n)x^{n-1}}\right]_1^a = \frac{1}{n-1} \cdot \lim\limits_{a\to\infty} \left(1 - \frac{1}{a^{n-1}}\right)$

$\implies \quad I_1 = \frac{1}{n-1}$ für $n > 1$ und $I_1 = \infty$ für $n < 1$

$I_2 = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \lim\limits_{a\to 0^+} \int\limits_a^1 x^{-n}\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to 0^+} \left[\frac{x^{1-n}}{1-n}\right]_a^1 = \frac{1}{1-n} \cdot \lim\limits_{a\to 0^+} \left(1 - a^{1-n}\right)$

$\implies \quad I_2 = \frac{1}{1-n}$ für $n < 1$ und $I_1 = \infty$ für $n > 1$

1.5.3. (a) Pol bei $x_0 = 0 \quad \implies$

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \int\limits_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \int\limits_{\varepsilon_2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_{\varepsilon_2}^1 =$$

$$= \underbrace{\lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \left[\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right]}_{+\infty} + \underbrace{\lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \left[-1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right]}_{+\infty} = +\infty$$

(b) Pol bei $x_0 = 0 \quad \implies$

$$I = \int\limits_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \int\limits_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \int\limits_{\varepsilon_2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{\varepsilon_2}^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \left[-\frac{1}{2\varepsilon_1^2} + \frac{1}{2}\right] + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon_2^2}\right] = \lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon_2^2} - \lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon_1^2}$$

- $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \quad \implies \quad I = 0$
- $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 \quad \implies \quad I = \lim\limits_{\varepsilon_1\to 0^+} \left[\frac{1}{8\varepsilon_1^2} - \frac{1}{2\varepsilon_1^2}\right] = \lim\limits_{\varepsilon_1\to 0^+} \left[-\frac{3}{8\varepsilon_1^2}\right] = -\infty$

z.B. $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 \quad \implies \quad I = \lim\limits_{\varepsilon_2\to 0^+} \left[\frac{1}{2\varepsilon_2^2} - \frac{1}{8\varepsilon_2^2}\right] = \lim\limits_{\varepsilon_2\to 0^+} \left[\frac{3}{8\varepsilon_2^2}\right] = +\infty$

1.5.4. $I_a(x) = -\int\limits_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[\frac{1}{t}\right]_a^x = \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \quad \implies \quad f(x) = \lim\limits_{a\to\pm\infty} I_a(x)$

Um nicht über die Polstelle integrieren zu müssen:

$$f(x) = \begin{cases} -\int\limits_{-\infty}^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2} & \text{für } x < 0 \\ -\int\limits_{\infty}^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Mit der Polstelle $x_0 = 0$ im Integrationsintervall wäre das Integral unendlich, z.B.:

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \int\limits_{\varepsilon}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-\frac{1}{-\varepsilon} + \frac{1}{-1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{\varepsilon}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{2}{\varepsilon} - 2\right] = +\infty$$

1.5.5. (a) $\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$

(b) $\int\limits_R^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{a\to\infty} \int\limits_R^a x^{-2}\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_R^a = \lim\limits_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{a} + \frac{1}{R}\right] = \frac{1}{R}$

(c) $\overline{f} = \frac{1}{a}\int\limits_0^a x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^a = \frac{a^{n+1}}{a(n+1)} = \frac{a^n}{n+1}$

1.6 Numerische Berechnung von Integralen

1.6.1. (a) $\Delta x = \frac{5-1}{4} = 1$, f monoton fallend im Integrationsintervall

$$S_\mathrm{u} = [f(2)+f(3)+f(4)+f(5)]\cdot 1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} = \frac{77}{60} = 1{,}28\overline{3}$$
$$S_\mathrm{o} = [f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]\cdot 1 = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{25}{12} = 2{,}08\overline{3}$$
$$\overline{S} = \frac{S_\mathrm{u}+S_\mathrm{o}}{2} = \frac{101}{60} = 1{,}68\overline{3}$$
$$S_\mathrm{m} = [f(1{,}5)+f(2{,}5)+f(3{,}5)+f(4{,}5)]\cdot 1 = \frac{1}{1{,}5}+\frac{1}{2{,}5}+\frac{1}{3{,}5}+\frac{1}{4{,}5} \approx 1{,}574603$$

I bezeichnet den angegebenen genauen Wert;

$$\delta_\mathrm{u} = \frac{S_\mathrm{u}-I}{I} = -20{,}3\%,\quad \delta_\mathrm{o} = 29{,}4\%,\quad \delta_{\overline{S}} = 4{,}6\%,\quad \delta_\mathrm{m} = -2{,}2\%,$$

(b) $\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$, f monoton fallend im Integrationsintervall

$$S_\mathrm{u} = [f(0{,}5)+f(1)+f(1{,}5)+f(2)]\cdot\frac{1}{2} = 0{,}8068102595$$
$$S_\mathrm{o} = [f(0)+f(0{,}5)+f(1)+f(1{,}5)]\cdot\frac{1}{2} = \frac{25}{12} = 1{,}2755602$$
$$\overline{S} = \frac{S_\mathrm{u}+S_\mathrm{o}}{2} = 1.04118526$$
$$S_\mathrm{m} = [f(0{,}25)+f(0{,}75)+f(1{,}25)+f(1{,}75)]\cdot\frac{1}{2} = 1{,}046497675$$

I bezeichnet den angegebenen genauen Wert;

$$\delta_\mathrm{u} = \frac{S_\mathrm{u}-I}{I} = -22{,}8\%,\quad \delta_\mathrm{o} = 22{,}1\%,\quad \delta_{\overline{S}} = -0{,}34\%,\quad \delta_\mathrm{m} = 0{,}17\%,$$

(c) $\Delta x = \frac{\pi}{16}$, f monoton steigend im Integrationsintervall

$$S_\mathrm{u} = \left[f(0)+f\left(\frac{\pi}{16}\right)+f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{3\pi}{16}\right)\right]\cdot\frac{\pi}{16} = 0{,}2515835636$$
$$S_\mathrm{o} = \left[f\left(\frac{\pi}{16}\right)+f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{3\pi}{16}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\cdot\frac{\pi}{16} = 0{,}4479331044$$
$$\overline{S} = \frac{S_\mathrm{u}+S_\mathrm{o}}{2} = 0{,}349758334$$
$$S_\mathrm{m} = \left[f\left(\frac{\pi}{32}\right)+f\left(\frac{3\pi}{32}\right)+f\left(\frac{5\pi}{32}\right)+f\left(\frac{7\pi}{32}\right)\right]\cdot\frac{\pi}{16} = 0{,}3449916438$$

I bezeichnet den angegebenen genauen Wert;

$$\delta_{\mathrm{u}} = \frac{S_{\mathrm{u}} - I}{I} = -27{,}4\%, \quad \delta_{\mathrm{o}} = 29{,}2\%, \quad \delta_{\overline{S}} = 0{,}92\%, \quad \delta_{\mathrm{m}} = -0{,}46\%,$$

(d) $\Delta x = \frac{\pi}{5}$, f monoton fallend im Integrationsintervall

$$S_{\mathrm{u}} = \left[f\left(\frac{\pi}{5}\right) + f\left(\frac{2\pi}{5}\right) + f\left(\frac{3\pi}{5}\right) + f\left(\frac{4\pi}{5}\right) + f(\pi)\right] \cdot \frac{\pi}{5} = 1.527278662$$

$$S_{\mathrm{o}} = \left[f(0) + f\left(\frac{\pi}{5}\right) + f\left(\frac{2\pi}{5}\right) + f\left(\frac{3\pi}{5}\right) + f\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right] \cdot \frac{\pi}{5} = 2.155597193$$

$$\overline{S} = \frac{S_{\mathrm{u}} + S_{\mathrm{o}}}{2} = 1.841437928$$

$$S_{\mathrm{m}} = \left[f\left(\frac{\pi}{10}\right) + f\left(\frac{3\pi}{10}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{7\pi}{10}\right) + f\left(\frac{9\pi}{10}\right)\right] \cdot \frac{\pi}{5} = 1.857196808$$

I bezeichnet den angegebenen genauen Wert;

$$\delta_{\mathrm{u}} = \frac{S_{\mathrm{u}} - I}{I} = -17{,}5\%, \quad \delta_{\mathrm{o}} = 16{,}4\%, \quad \delta_{\overline{S}} = -0{,}57\%, \quad \delta_{\mathrm{m}} = 0{,}28\%,$$

1.7 Vermischte Aufgaben

1.7.1. (a) $f_{0,25} = -1{,}25^4 x^2 + 0{,}25$

$f_{0,5} = -1{,}5^4 x^2 + 0{,}5$

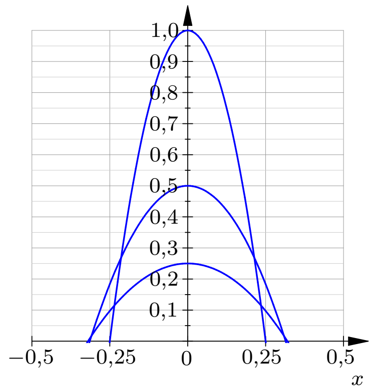
$f_1 = -x^2 + 1$

Nullstellen:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{a}}{(a+1)^2}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{a}}{(a+1)^2} \quad \text{für} \quad a \geqq 0$$

keine Nullstellen für $a < 0$



(b)

$$A(a) = \int_{x_1}^{x_2} f_a(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{x_2} f_a(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2(a+1)^4 x_2^3}{3} + 2ax_2 =$$

$$= -\frac{2(a+1)^4 a^{\frac{3}{2}}}{3(a+1)^6} + \frac{2a\sqrt{a}}{(a+1)^2} = \frac{4a^{\frac{3}{2}}}{3(a+1)^2}$$

(c) $A'(a) = \frac{4}{3(a+1)^4} \cdot \left[\frac{3}{2}\sqrt{a}(a+1)^2 - 2a^{\frac{3}{2}}(a+1)\right] = \frac{4\sqrt{a}}{3(a+1)^3} \cdot \left[\frac{3}{2} - \frac{a}{2}\right]$

$A'(a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = 0$ und $a_2 = 3$

Aus $A(0) = 0$, $A(a) > 0$ für $a > 0$ und $\lim\limits_{a\to\infty} A(a) = 0$ folgt, dass

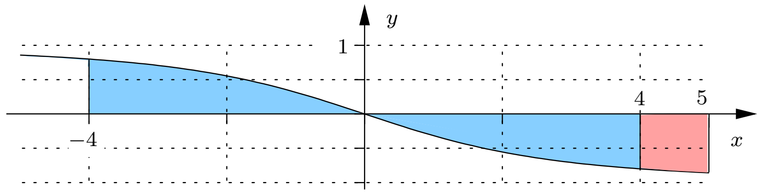
$$A_{\max} = A(3) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

1.7.2. (a) $g(x) = f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}}$, Nullstellen von f: $\pm 4 \quad \Longrightarrow$

$$f(x) = -\int_{-4}^{x} \frac{t}{\sqrt{9+t^2}}\,\mathrm{d}t = -\int_{4}^{x} \frac{t}{\sqrt{9+t^2}}\,\mathrm{d}t$$

(b)

x	$g(x)$
0	0
± 1	$\mp 0{,}316$
± 2	$\mp 0{,}555$
± 3	$\mp 0{,}707$
± 4	$\mp 0{,}800$
± 5	$\mp 0{,}857$



Wegen $f(-x) = f(x)$ ist G_f achsensymmetrisch zur y-Achse.

Wegen $g(-x) = -g(x)$ ist G_g punktsymmetrisch zum Ursprung.

$$f(5) = \int_{-4}^{5} g(x)\,\mathrm{d}t = \int_{-4}^{4} g(x)\,\mathrm{d}t + \int_{4}^{5} g(x)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \underbrace{f(4) - f(-4)}_{0\ \text{(Symmetrie)}} + \int_{4}^{5} g(x)\,\mathrm{d}t = \int_{4}^{5} g(x)\,\mathrm{d}t$$

1.7.3. (a) Nullstellen von f: $x_{01} = 0$, $x_{02} = s$

$$f_s'(x) = -3x^2 + 2sx = x\,(2s - 3x)$$

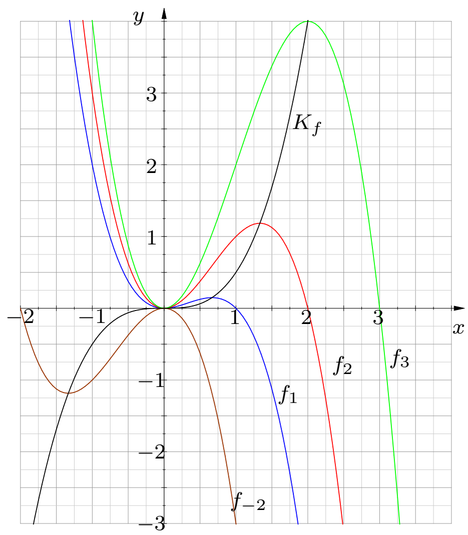
Nullstellen von f': $x_{11} = 0$, $x_{12} = \frac{2}{3}s$

$$f_s''(x) = -6x + 2s$$

$f_s''(x_{11}) = 2s, \quad f_s''(x_{12}) = -2s \quad \Longrightarrow$

$(0|0)$ ist Tiefpunkt für $s > 0$
Hochpunkt für $s < 0$
Terrassenpunkt für $s = 0$

$\left(\frac{2s}{3}\middle|\frac{4s^3}{27}\right)$ ist Hochpunkt für $s > 0$
Tiefpunkt für $s < 0$
Terrassenpunkt für $s = 0$



$\mathrm{E}\left(\frac{2s}{3}\middle|\frac{4s^3}{27}\right) = \mathrm{E}\,(x_E|y_E) \quad \Longrightarrow \quad K_f : x_E \to y_E = \frac{1}{2}x_E^3$

(b) $F_s(x) = \displaystyle\int_0^x (-x^3 + sx^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{s}{3}x^3 = x^3\left(\frac{s}{3} - \frac{x}{4}\right)$

Nullstellen von F: $X_{01} = 0$, $X_{02} = \frac{4}{3}s$

$$F_s'(x) = f_s(x)$$

Nullstellen von F': $X_{11} = 0$, $X_{12} = s$

$$F_s''(x) = f_s'(x)$$

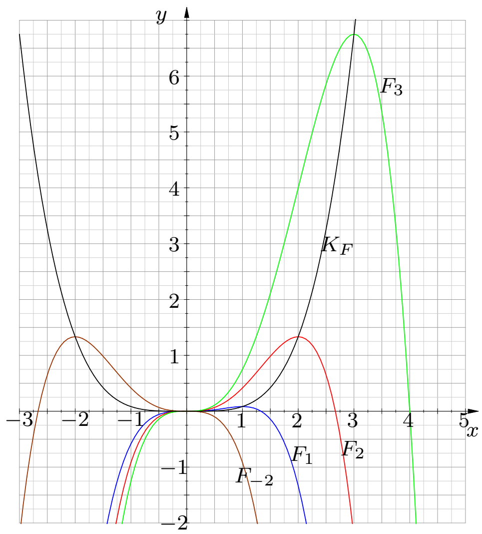
$F_s''(X_{11}) = 0$ mit VZW für $s \neq 0$:

$(0|0)$ ist Terrassenpunkt für $s \neq 0$
Hochpunkt für $s = 0$

$F_s''(X_{12}) = -s^2 < 0 \quad \Longrightarrow$

$\left(s \middle| \frac{s^4}{12}\right)$ ist immer Hochpunkt.

$K_F : x_E \to y_E = \frac{1}{12}x_E^4$



(c) $A_s = \left| \int\limits_0^s f_s(x)\,\mathrm{d}x \right| = |F_s(s)| = \frac{s^4}{12}$

1.7.4. Diskussion von f:

Nullstelle: $x_{f0} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} - 2\right) = (0^+ \cdot (-1)) = 0^-$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} - 2\right) = ((+\infty) \cdot (+\infty)) = +\infty$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^2} = \frac{2x-2}{x^3}, \quad f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{f1} = 1$$

$$f''(x) = \frac{6}{x^4} - \frac{4}{x^3} = \frac{6-4x}{x^4}, \quad f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{f2} = \frac{3}{2}$$

$f''(x_{f1}) = 2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Tiefpunkt bei $(1\,|-1)$.

$$f'''(x) = -\frac{24}{x^5} + \frac{12}{4^3} = \frac{12x-24}{x^5}$$

$$f'''(x_{f2}) = -\frac{64}{81} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{WP bei } \left(\frac{3}{2} \middle| -\frac{8}{9}\right)$$

$$g(x) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{x} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t}\right) \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t} - 2\ln t\right]_{\frac{1}{2}}^{x} = -\frac{1}{x} - 2\ln x + 2 + 2\ln\frac{1}{2}$$

$$g(x) = 2(1 - \ln 2) - \frac{1}{x} - 2\ln x$$

Diskussion von g:

Untere Grenze der Integralfunktion ist Nullstelle: $x_{g0} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0^-$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[2(1-\ln 2) - \frac{1}{x}\left(1 + 2\underbrace{x\ln x}_{\to 0}\right)\right] = \left(2(1-\ln 2) - \frac{1}{0^+}\right) = -\infty$$

$g'(x) = f(x) \quad \Longrightarrow \quad x_{1g} = x_{f0} = \dfrac{1}{2}$

$g''(x_{1g}) = f'(x_{1g}) = -8 < 0 \quad \Longrightarrow$

HP bei $\left(\frac{1}{2}\middle|0\right)$

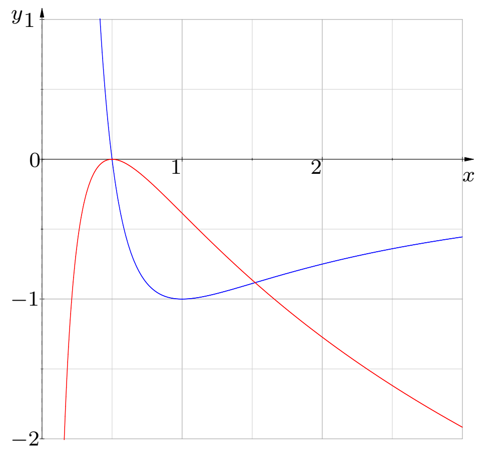
$g''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{g2} = x_{f1} = 1$

$g'''(x_{g2}) = f''(1) = 2 \neq 0 \quad \Longrightarrow$

WP bei $(1|1 - 2\ln 2) \approx (1| - 0{,}39)$

$f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = 2(1 - \ln 2) - \frac{1}{x} - 2\ln x$$



Der erste Schnittpunkt ist die Nullstelle beider Funktionen: $x_1 = \dfrac{1}{2}$.

Zweite Nullstelle mit dem Newton-Verfahren:

$$h(x) = g(x) - f(x) = 2(1 - \ln 2) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 2\ln x = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \frac{2(1 - \ln 2) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 2\ln x}{-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x}}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n\left[3 - 2x_n + 2x_n^2(-2 + \ln 2x_n)\right]}{2 - x_n - 2x_n^2}$$

$$X_1 = 1{,}5$$
$$X_2 = 1{,}521091763$$
$$X_3 = 1{,}521148687$$
$$X_4 = 1{,}521148688 = x_2$$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (g(x) - f(x))\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \left(2(1 - \ln 2) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 2\ln x\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \left[2(1 - \ln 2)x + \ln x + \frac{1}{x} - 2x(\ln x - 1)\right]_{\frac{1}{2}}^{x_2} =$$

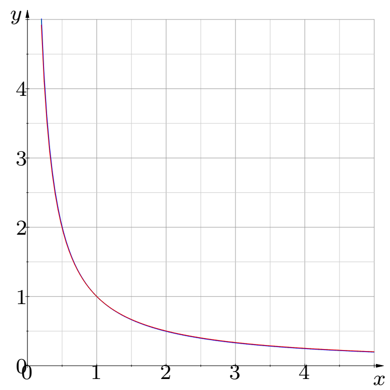
$$= 2(1 - \ln 2)x_2 + \ln x_2 + \frac{1}{x2} - 2x_2(\ln x_2 - 1) - 4 + \ln 2 = 0{,}4697$$

1.7.5. (a)

x	0,2	1	2	5
f_1	5,08	1,00	0,497	0,197
f_2	5,00	1,00	0,500	0,200
f_3	4,92	1,00	0,503	0,203

Die maximale gemeinsame Definitionsmenge aller drei Funktionen ist $\mathbb{R}^+$.

Die Grafen der derei Funktionen sind kaum zu unterscheiden.



(b) Für $0 < x < 1$ gilt $\frac{1}{x} > 1$ und daher wegen $1 - \varepsilon > 0$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{1-\varepsilon} < 1 \quad \Longrightarrow \quad f_1(x) < f_2(x) < f_3(x) < 1$$

Für $k \in \{1, 2, 3\}$ gilt

$$\lim_{x \to 0^+} f_k(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f_k(x) = 0^+$$

(c) $|F_k(x)|$ ist gleich der Fläche zwischen G_{f_k} und der x-Achse im Intervall $[1, x]$.

$$F_1(x) = \int_1^x t^{-1+\varepsilon}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon x^{\varepsilon}}$$

$$F_2(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

$$F_3(x) = \int_1^x t^{-1-\varepsilon}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{\varepsilon}}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\lim_{x \to 0^+} F_1(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} F_2(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} F_3(x) = -\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\lim_{x \to \infty} F_1(x) = \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \lim_{x \to \infty} F_2(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} F_3(x) = +\infty$$

(d)

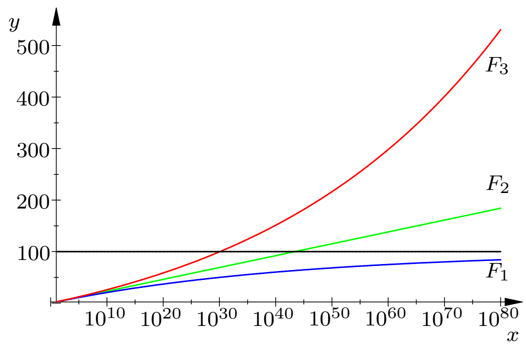
$$F_1(x) = 100 - \frac{100}{\sqrt[100]{x}}$$

$$F_2(x) = \ln x$$

$$F_3(x) = 100\,\sqrt[100]{x} - 100$$

Die tatsächliche Strecke auf der x-Achse ist $X = 0{,}1 \lg x$:

$$F_2(x) = \ln x = \frac{\lg x}{\lg \mathrm{e}} = \frac{10}{\lg \mathrm{e}} \cdot X$$



1.7.6. (a) $\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-3}\right]_0^3 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{-3}\right)$

(b) $\left[2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}-1}\right]_0^2 = 2\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

(c) $\left[-\frac{1}{2}\ln|8 - 2t|\right]_0^2 = -\frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 8) = \frac{\ln 2}{2}$

(d) $\left[-\frac{1}{2}\ln|8 - 2t|\right]_6^8 = -\frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 4) = -\frac{\ln 2}{2}$

(e) $\int\limits_0^8 \frac{\mathrm{d}t}{8-2t} = 0$, da $f(t) = \frac{1}{8-2t}$ punktsymmetrisch zu $(4\,|\,0)$. Oder ausfürlich:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^8 \frac{\mathrm{d}t}{8-2t} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int\limits_0^{4-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}t}{8-2t} + \int\limits_{4+\varepsilon}^{8}\frac{\mathrm{d}t}{8-2t}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\left[\ln|8-2t|\right]_0^{4-\varepsilon} + \left[\ln|8-2t|\right]_{4+\varepsilon}^{8}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\ln 2\varepsilon - \ln 8 + \ln 8 - \ln 2\varepsilon\right) = 0\end{aligned}$$

1.7.7. (a) $\int\limits_1^3 \frac{x^3}{5x^4+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{20}\int\limits_1^3 \frac{(5x^4+3)'}{5x^4+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{20}\left[\ln|5x^4+3|\right]_1^3 = \frac{\ln 51}{20}$

(b) $\int\limits_0^a \frac{x^{n-1}}{x^n+a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int\limits_0^a \frac{(x^n+a)'}{x^n+a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\left[\ln|x^n+a|\right]_0^a = \frac{1}{n}\ln\left|\frac{a^n+a}{a}\right| = \frac{1}{n}\ln\left|a^{n-1}+1\right|$

(c) $\int\limits_2^3 \frac{x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\limits_2^3 \frac{3x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\limits_2^3 \frac{(x^3-1)'}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\ln|x^3-1|\right]_2^3 = \frac{1}{3}\ln\frac{26}{7}$

(d) $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{(\ln x)'}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln|\ln x|\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = \ln 2$

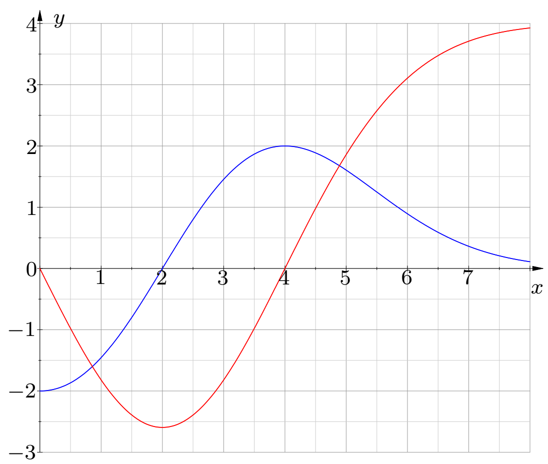
(e) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = -\left[\ln|\sin x + \cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$

(f) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = -\left[\ln|\sin x + \cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\sqrt{2} + \ln 1 = -\frac{1}{2}\ln 2$

1.7.8. Wegen $g'(x) = f(x)$ gilt (Funktionswerte durch Flächenabschätzung):

- Nullstelle an der Untergrenze 0
- g ist streng steigend in $]2;8[$
- g ist streng fallend in $]0;2[$
- TP bei $(2|-2{,}6)$
- $g''(x) = f'(x) \quad\Longrightarrow\quad$ WP bei $(4|0)$

Mit wachsendem x wird $g'(x)$ immer kleiner, wahrscheinlich waagrechte Asymptote $y \approx 4$.



1.7.9. (a) $x_{f0} = 0, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty \cdot \infty) = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = 0^+$$

(b) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$

$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{f1} = 1$

$f''(x) = -2e^{-x} + xe^{-x} = (x-2)e^{-x}$

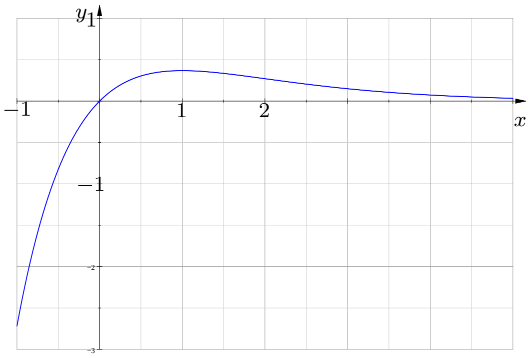
$f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{f2} = 2$

$f''(1) = -\frac{1}{e} < 0 \quad \Longrightarrow \quad$ HP bei $\left(1\middle|\frac{1}{e}\right)$

$f'''(x) = 3e^{-x} - xe^{-x} = (3-x)e^{-x}$

$f'''(2) = \frac{1}{e} \neq 0 \quad \Longrightarrow$

WP bei $\left(2\middle|\frac{2}{e^2}\right) \approx (2|0{,}27)$



(c) Zu zeigen ist $g'(x) = f(x)$ und $g(0) = 0$ (Untergrenze).

$$g'(x) = -e^{-x} - (x+1)(-e^{-x}) = -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} = xe^{-x} = f(x)$$

$$g(0) = 1 - (0+1)e^0 = 1 - 1 = 0$$

(d) $g'(x) = f(x) \quad \Longrightarrow \quad x_{g1} = x_{f0} = 0$

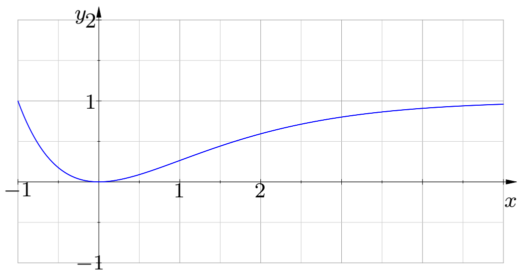
$g''(x) = f'(x) \quad \Longrightarrow \quad x_{g2} = x_{f1} = 1$

$g''(0) = f'(0) = 1 > 0 \quad \Longrightarrow$

TP bei $(0|0)$

$g'''(1) = f''(1) = -\frac{1}{e} \neq 0 \quad \Longrightarrow$

WP bei $\left(1\middle|\frac{1}{e}\right)$



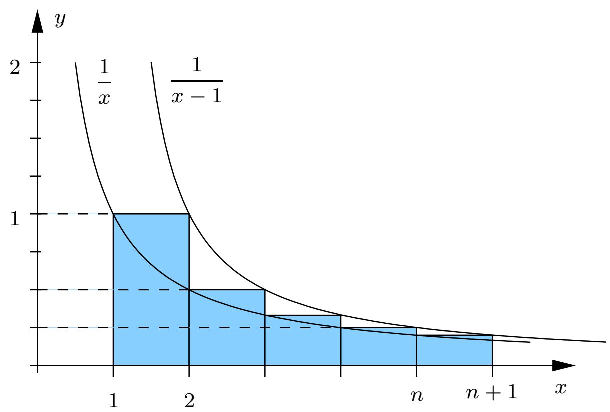
(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{e^x} = 1 - 0 = 1$

Die Fläche zwischen G_f und der x-Achse im Intervall $[0, +\infty[$ ist 1.
G_g hat die waagrechte Asymptote $y = 1$.

1.7.10. (a)

n	H_n
1	1,0
2	1,5
3	1,833333333
4	2,083333333
5	2,283333333
6	2,45
7	2,592857143
8	2,717857143
9	2,828968254
10	2,928968254
11	3,019877345
12	3,103210678
13	3,180133755
14	3,251562327
15	3,318228993
16	3,380728993
17	3,439552523
18	3,495108078
19	3,547739657
20	3,597739657

(b)



$$H_n > \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(1+n)$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(1+n) = \infty$ gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = \infty$.

(b)

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} < H_n < 1 + \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$$

$\dfrac{1}{x-1}$ ist die um 1 nach rechts verschobene Funktion $\dfrac{1}{x}$. Daraus folgt

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln n$$

und somit

$$\ln(1+n) < H_n < 1 + \ln n$$

$$\ln(1+n) = \ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Daraus folgt für die Intervallbreite:

$$b = 1 + \ln n - \ln(1+n) = 1 - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Wegen $1 < 1 + \frac{1}{n} < 2$ gilt $0 < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \ln 2$ und daher

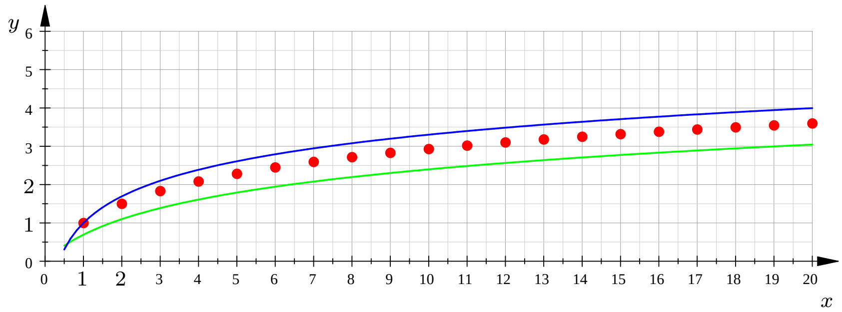
$$1 - \ln 2 < b < 1$$

Die lineare Näherung $f(1+x) \approx f(1) + f'(1)\cdot x$ für $|x| \ll 1$ liefert wegen $n \gg 1$, d.h. $\frac{1}{n} \ll 1$:

$$\ln(1+x) \approx 0 + 1 \cdot x = x \quad \text{oder} \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n}$$

und damit

$$b \approx 1 - \frac{1}{n} \quad \text{für} \quad n \gg 1$$



(c) Auflösen nach n:

$$\mathrm{e}^{H_n - 1} < n < \mathrm{e}^{H_n} - 1$$

$$H_n \approx 100 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{99} < n < \mathrm{e}^{100} - 1 \quad \Longrightarrow \quad 9{,}89 \cdot 10^{42} < n < 2{,}87 \cdot 10^{43}$$

2 Geometrie

2.1 Lineare Abhängigkeit

2.1.1. (a) $\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig.

(b) $\frac{4}{-1{,}6} = -\frac{5}{2} \neq \frac{-3{,}6}{\frac{7}{5}} = -\frac{18}{7} \quad \Longrightarrow \quad \vec{e}$ und $\vec{f}$ sind linear unabhängig.

(c) Da $\vec{x} \nparallel \vec{a} \| \vec{b}$ mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht möglich.

Da $\vec{e}$ und $\vec{f}$ linear unabhängig sind, gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\vec{x} = \lambda\vec{e} + \mu\vec{f} \quad \Longrightarrow$

$$
\begin{array}{rrl}
 & -1{,}6\lambda + 4\mu = 8{,}8 & (1) \\
 & 1{,}4\lambda - 3{,}6\mu = -8 & (2) \\
\hline
0{,}9 \cdot (1) + (2): & -0{,}04\lambda = -0{,}08 & (3) \\
 & \lambda = 2 & (4) \\
(4) \text{ in } (1) & -3{,}2 + 4\mu = 8{,}8 & (5) \\
 & \mu = 3 & \\
 & \vec{x} = 2\vec{e} + 3\vec{f} &
\end{array}
$$

2.1.2. (a) Aus $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{o}$ folgt

$$
\begin{array}{rrl}
 & 4\lambda - 5\mu + 21\nu = 0 & (1) \\
 & -3\lambda - 2\mu - 5\nu = 0 & (2) \\
 & \lambda + 3\mu - 3\nu = 0 & (3) \\
\hline
(3): & \lambda + 3\mu - 3\nu = 0 & (4) \\
(2) + 3 \cdot (3): & 7\mu - 14\nu = 0 & (5) \\
(1) - 4 \cdot (3) & -17\mu + 33\nu = 0 & (6) \\
\hline
(4): & \lambda + 3\mu - 3\nu = 0 & (7) \\
(5): & 7\mu - 14\nu = 0 & (8) \\
17 \cdot (5) + 7 \cdot (6): & -7\nu = 0 & (9)
\end{array}
$$

$\Longrightarrow \quad \lambda = \mu = \nu = 0$, also sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig.

(b) Aus $\lambda\vec{e}+\mu\vec{f}+\nu\vec{g}=\vec{o}$ folgt

$$\begin{array}{rrr}
 & 2\lambda+\mu+9\nu=0 & (1)\\
 & \lambda-\mu+12\nu=0 & (2)\\
 & \lambda+2\mu-3\nu=0 & (3)\\
\hline
(3): & \lambda+2\mu-3\nu=0 & (4)\\
(2)-(3): & -3\mu+15\nu=0 & (5)\\
(1)-2\cdot(3) & -3\mu+15\nu=0 & (6)\\
\hline
(5)\text{ bzw. }(6): & \mu=5\nu & (7)\\
(7)\text{ in }(1): & \lambda=-7\nu & (8)
\end{array}$$

Z.B. für $\nu=1$ folgt $-7\vec{e}+5\vec{f}+\vec{g}=\vec{o}$, also sind $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$ linear abhängig.

(c) Da $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind, gibt es $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ mit $\vec{x}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c} \quad\Longrightarrow$

$$\begin{array}{rrr}
 & 4\lambda-5\mu+21\nu=-8 & (1)\\
 & -3\lambda-2\mu-5\nu=1 & (2)\\
 & \lambda+3\mu-3\nu=2 & (3)\\
\hline
(3): & \lambda+3\mu-3\nu=2 & (4)\\
(2)+3\cdot(3): & 7\mu-14\nu=7 & (5)\\
(1)-4\cdot(3) & -17\mu+33\nu=-16 & (6)\\
\hline
(4): & \lambda+3\mu-3\nu=2 & (7)\\
(5): & 7\mu-14\nu=7 & (8)\\
17\cdot(5)+7\cdot(6): & -7\nu=7 & (9)\\
 & \nu=-1 & (10)\\
(10)\text{ in }(8): & \mu=-1 & (11)\\
(10)\text{ und }(11)\text{ in }(7): & \lambda=2 &
\end{array}$$

$$\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$$

Obwohl $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$ linear abhängig sind, könnte $\vec{x}$ zu $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$ komplanar sein. Wir setzen einfach an: $\vec{x}=\lambda\vec{e}+\mu\vec{f}+\nu\vec{g}$:

$$\begin{array}{rrr}
 & 2\lambda+\mu+9\nu=-8 & (1)\\
 & \lambda-\mu+12\nu=1 & (2)\\
 & \lambda+2\mu-3\nu=2 & (3)\\
\hline
(3): & \lambda+2\mu-3\nu=2 & (4)\\
(2)-(3): & -3\mu+15\nu=-1 & (5)\\
(1)-2\cdot(3) & -3\mu+15\nu=-12 & (6)
\end{array}$$

(5) und (6) sind nicht gleichzeitig erfüllbar, das Gleichungssystem hat keine Lösung, $\vec{x}$ ist nicht als Linearkombination von $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$ darstellbar.

2.2 Geradengleichungen

2.2.1. (a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{R}\,(5|1{,}5|3{,}5)$

$\overrightarrow{\mathrm{S}} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{S}\,(-1|9|8)$

$\overrightarrow{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -11 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{T}\,(15|-11|-4)$

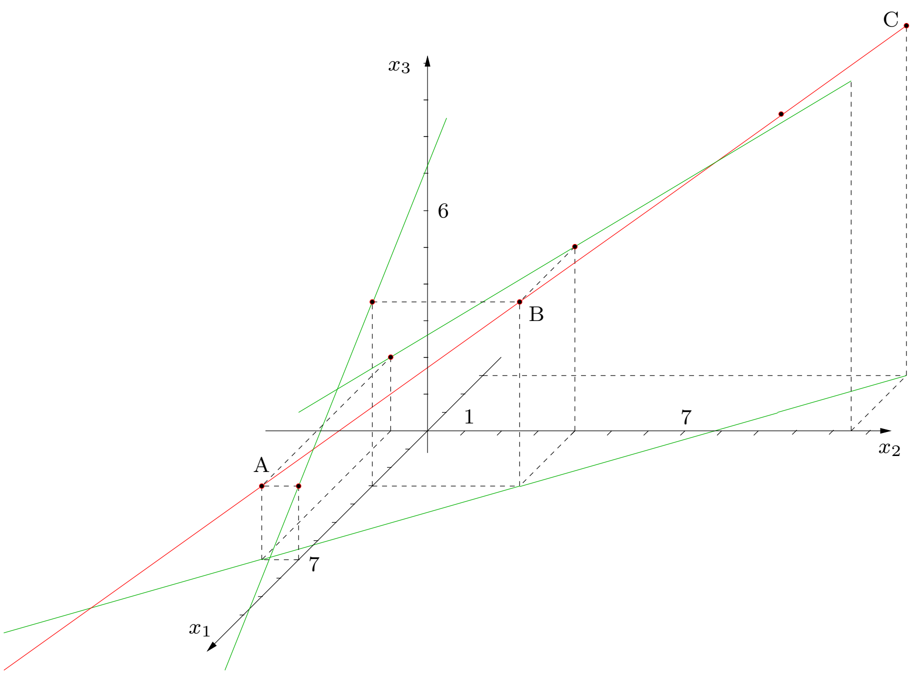
(c) $\mathrm{C} \in g \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 7 - 4\lambda = -3 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{5}{2}$

$$\overrightarrow{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11{,}5 \\ 9{,}5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{C}\,(-3|11{,}5|9{,}5)$$

(d) $s_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \; s_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \; s_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) $x_1 = 7 - 4\lambda \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{7}{4} - \frac{1}{4}x_1, \quad x_2 = -1 + 5\lambda = \frac{31}{4} - \frac{5}{4}x_1$

(f)



2.2.2.

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\k\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}\quad\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}2-\lambda&=1+4\mu\\1+3\lambda&=1-3\mu\\-1-2\lambda&=k+\mu\end{aligned}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt $\lambda=-\frac{1}{3}$ und $\mu=\frac{1}{3}$ und damit aus der dritten Gleichung $k=-\frac{2}{3}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{S}}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7\\0\\-1\end{pmatrix}\quad\Longrightarrow\quad\mathrm{S}\left(\frac{7}{3}\middle|0\middle|-\frac{1}{3}\right)$$

2.2.3. $g_1:\quad \vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{A}_1}+\lambda\vec{v_1}$

$g_2:\quad \vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{A}_2}+\mu\vec{v_2}$

$g_3:\quad \vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{A}_3}+\nu\vec{v_3}$

$g_4:\quad \vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{A}_4}+\sigma\vec{v_4}$

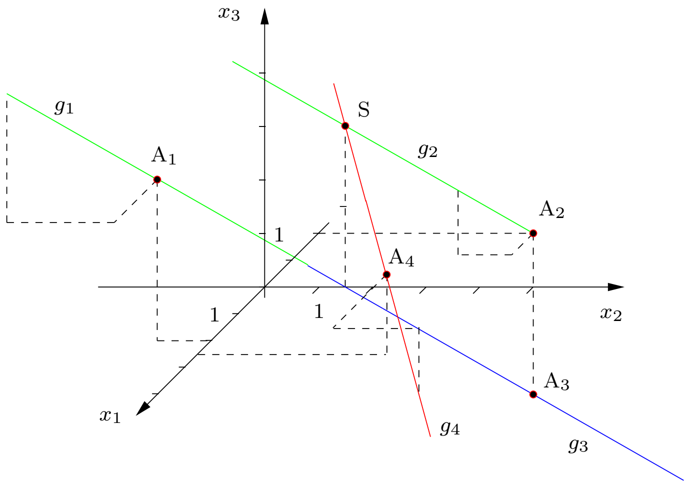
$\vec{v}_1\|\vec{v}_2\|\vec{v}_3 \nparallel \vec{v}_4$

$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}=\begin{pmatrix}-4\\5\\-3\end{pmatrix}\nparallel\vec{v}_1$

g_1 echt parallel zu g_2

$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}=\begin{pmatrix}-4\\5\\-6\end{pmatrix}\parallel\vec{v}_1$

$\Longrightarrow\quad g_1=g_3$



$g_1\cap g_4:\quad \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}5\\3{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}2+4\lambda&=2{,}5+5\sigma\quad(1)\\-1-5\lambda&=3{,}5+4\sigma\quad(2)\\3+6\lambda&=1{,}5-3\sigma\quad(3)\end{aligned}$$

(1) und (2) $\Longrightarrow\quad \lambda=-\frac{1}{2},\quad \sigma=-\frac{1}{2}$

in (3): $0\neq 3\quad\Longrightarrow\quad g_1$ windschief zu g_4

$g_2\cap g_4:\quad \begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}5\\3{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}-2+4\lambda&=2{,}5+5\sigma\quad(1)\\4-5\lambda&=3{,}5+4\sigma\quad(2)\\6\lambda&=1{,}5-3\sigma\quad(3)\end{aligned}$$

(1) und (2) $\Longrightarrow\quad \lambda=\frac{1}{2},\quad \sigma=-\frac{1}{2}$

in (3): $3=3\quad\Longrightarrow\quad g_2\cap g_4=\{S\}$ mit

$$\overrightarrow{\mathrm{S}}=\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1{,}5\\3\end{pmatrix}$$

2.2.4. (a) $\vec{v}_\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -50 \\ -100 \\ 20 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{v}_\mathrm{A}| = \sqrt{12900}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 116\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 409\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

$\vec{v}_\mathrm{K} = \begin{pmatrix} -100 \\ -200 \\ 120 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{v}_\mathrm{K}| = \sqrt{64400}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 254\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 914\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

(b) $\cos\varphi = \frac{\vec{v}_\mathrm{A}\vec{v}_\mathrm{K}}{|\vec{v}_\mathrm{A}| \cdot |\vec{v}_\mathrm{K}}| = 0{,}9506 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 18{,}1^\circ$

(c) Bahnkurven ohne Einheiten:

$$\text{Airbus:} \qquad g_\mathrm{A}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10000 \\ 2000 \\ 3000 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -50 \\ -100 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\text{Jet:} \qquad g_\mathrm{K}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 9500 \\ 1000 \\ 1600 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -100 \\ -200 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -150$ und $\mu = -\frac{40}{3}$. Die Startorte sind dann

$$s_\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 17{,}5 \\ 17{,}0 \\ 0{,}0 \end{pmatrix} \mathrm{km} \quad \text{und} \quad s_\mathrm{K} \approx \begin{pmatrix} 10{,}83 \\ 3{,}67 \\ 0{,}00 \end{pmatrix} \mathrm{km}$$

(d)

$$g_\mathrm{A} = g_\mathrm{K} \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} 50\lambda - 100\mu &= 500 && (1) \\ 100\lambda - 200\mu &= 1000 && (2) \\ -20\lambda + 120\mu &= 1400 && (3) \end{aligned}$$

$$\text{(1) und (2) identisch :} \qquad \begin{aligned} \lambda - 2\mu &= 10 && (4) \\ -\lambda + 6\mu &= 70 && (5) \end{aligned}$$

$$(4) + (5) \qquad \begin{aligned} 4\mu &= 80 \\ \mu = 20, \quad \lambda &= 50 \end{aligned}$$

Die Flugbahnen schneiden sich in S $(7500| - 3000|4000)$.

Orte der Flugzeuge:

$$\text{Airbus:} \qquad \vec{x}_\mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} 10000 \\ 2000 \\ 3000 \end{pmatrix} \mathrm{m} + t \cdot \begin{pmatrix} -50 \\ -100 \\ 20 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\text{Jet:} \qquad \vec{x}_\mathrm{K}(t) = \begin{pmatrix} 9500 \\ 1000 \\ 1600 \end{pmatrix} \mathrm{m} + (t - 39\,\mathrm{s}) \begin{pmatrix} -100 \\ -200 \\ 120 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Der Airbus ist zur Zeit $t_\mathrm{A} = 50\,\mathrm{s}$, der Jet zur Zeit $t_\mathrm{K} = 59\,\mathrm{s}$ am Ort S.

(e) Die Entfernung der beiden Flugzeuge zur Zeit t bezeichnen wir mit $s(t)$. Der Einfachheit halber rechnen wir ohne Einheiten:

$$f(t) = s(t)^2 = [\vec{x}_\mathrm{A}(t) - \vec{x}_\mathrm{K}(t)]^2 = \begin{pmatrix} 50t - 3400 \\ 100t - 6800 \\ 6080 - 100t \end{pmatrix}^2 =$$

$$= 22\,500t^2 - 2\,916\,000t + 94\,766\,400$$

$s(t)$ ist minimal, wenn $f(t)$ minimal ist:

$$f'(t) = 45\,000t - 2\,916\,000 = 0 \quad\Longrightarrow\quad t = 64{,}8$$

$$s(64{,}8) = \sqrt{22\,500 \cdot 64{,}8^2 - 2\,916\,000 \cdot 64{,}8 + 94\,766\,400} = \sqrt{288\,000} \approx 537$$

Die minimale Entfernung zur Zeit 64,8 s ist also 537 m.

2.3 Ebenengleichungen in Parameterform

2.3.1. (a) $E: \quad \vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{A}} + \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \mu\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$g: \quad \vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{G}} + \lambda\overrightarrow{\mathrm{GF}} = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $E \cap x_3$-Achse $\Longrightarrow$ $x_1 = x_2 = 0$:

$$\begin{array}{rrr} & 4\lambda - \mu = -3 & (1) \\ & 3\lambda + 4\mu = -3 & (2) \\ \hline 4 \cdot (1) + (2): & 19\lambda = -15 & (3) \\ & \lambda = -\dfrac{15}{19} & (4) \\ (4) \text{ in } (1): & \mu = -\dfrac{3}{19} & (5) \\ (4) \text{ und } (5) \text{ in } E: & \mathrm{A}_3\left(0\middle|0\middle|\dfrac{69}{19}\right) & \end{array}$$

Analog zeigt man: $\mathrm{A}_2\,(-23|0|0)$, $\mathrm{A}_1\left(0\middle|\dfrac{69}{7}\middle|0\right)$

(c) $g \cap x_1x_2$-Ebene $\Longrightarrow$ $x_3 = 4 + 4\sigma = 0$ $\Longrightarrow$ $\sigma = -1$ $\Longrightarrow$ $\mathrm{S}_{12}\,(12|5|0)$

$g \cap x_1x_3$-Ebene $\Longrightarrow$ $x_2 = 10 + 5\sigma = 0$ $\Longrightarrow$ $\sigma = -2$ $\Longrightarrow$ $\mathrm{S}_{13}\,(11|0|-4)$

$g \cap x_2x_3$-Ebene $\Longrightarrow$ $x_1 = 13 + \sigma = 0$ $\Longrightarrow$ $\sigma = -13$ $\Longrightarrow$ $\mathrm{S}_{23}\,(0|-55|-48)$

(d) $E \cap g \quad\Longrightarrow\quad x_E = x_g \quad\Longrightarrow\quad :$

$$\begin{array}{rrr} & 4\lambda - \mu - \sigma = 10 & (1) \\ & 3\lambda + 4\mu - 5\sigma = 7 & (2) \\ & -\lambda + \mu - 4\sigma = 1 & (3) \\ \hline (1): & 4\lambda - \mu - \sigma = 10 & (4) \\ 3 \cdot (1) - 4 \cdot (2): & -19\mu + 17\sigma = 2 & (5) \\ (1) + 4 \cdot (3): & 3\mu - 17\sigma = 14 & (6) \\ \hline (5) + (6): & -16\mu = 16 & (7) \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \mu = -1, \quad \sigma = -1, \quad \lambda = 2$$

$$\sigma \text{ in } g \quad\Longrightarrow\quad E \cap g = \{\mathrm{S}\} \quad \text{mit} \quad \mathrm{S}\,(12|5|0)$$

(e) Richtungsvektoren von E': $\quad \vec{w} = \overrightarrow{\mathrm{GF}} = \begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, da jeder zur Spurgeraden parallele Vektor als Richtungsvektor verwendet werden kann.

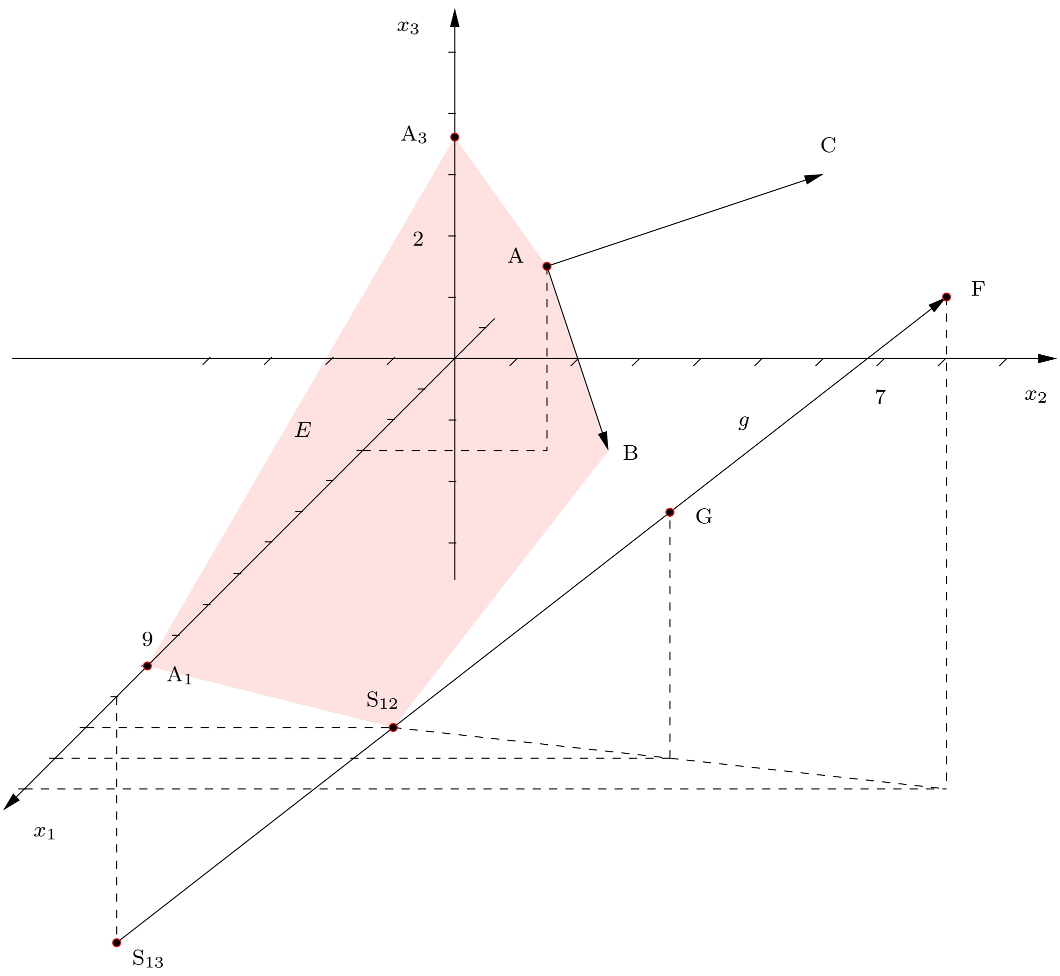
$$E': \quad \vec{x} = \vec{\mathrm{A}} + s\vec{w} + t\vec{y} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Für die Spurgerade h in der x_1x_2-Ebene gilt $x_3 = 0 \quad \Longrightarrow$

$$x_3 = 3 + 4s = 0 \quad \Longrightarrow \quad s = -\frac{3}{4}$$

s in E':

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} - \frac{3}{4}\begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}9\\-3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$



2.4 Ebenengleichungen in Normalenform

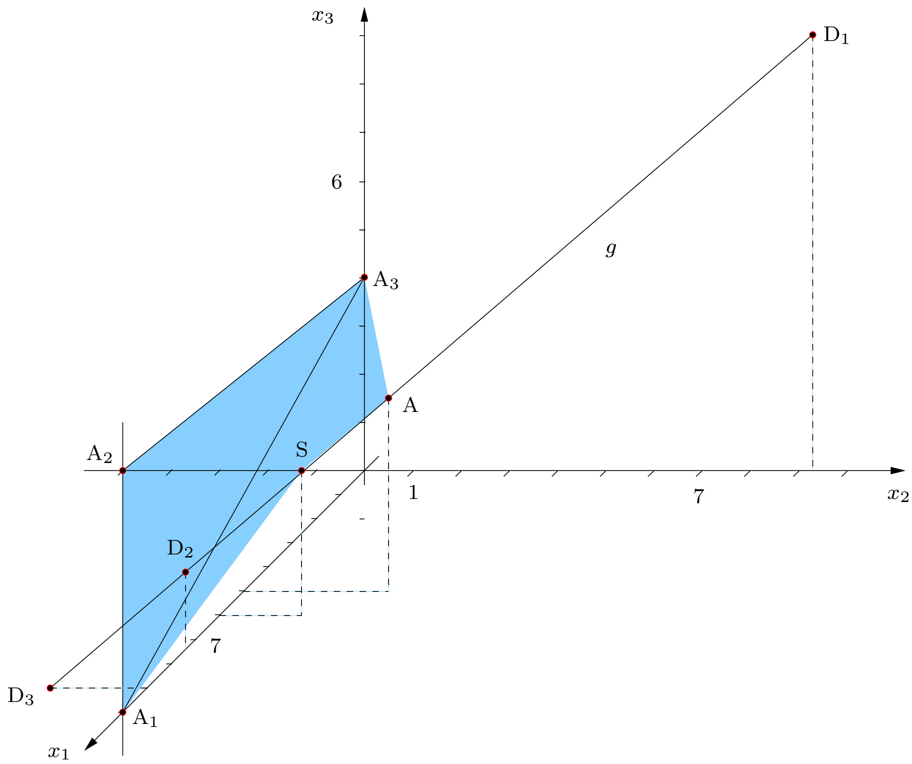
2.4.1. (a) $E: \ \frac{x_1}{10} - \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{4} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{A}_1\,(10|0|0)\,, \ \mathrm{A}_2\,(0|-5|0)\,, \ \mathrm{A}_3\,(0|0|4)$

$$x_2x_3\text{-Ebene}: 5 - 4\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{5}{4} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{D}_1\left(0\left|\frac{37}{4}\right|9\right) = \mathrm{D}_3\,(0|9{,}25|9)$$

$$x_1x_3\text{-Ebene}: 3 + 5\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{5} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{D}_2\left(\frac{37}{5}\left|0\right|\frac{8}{5}\right) = \mathrm{D}_2\,(7{,}4|0|1{,}6)$$

$$x_1x_2\text{-Ebene}: 4 + 4\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{D}_3\,(9|-2|0)$$

(b)



(c) Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $d = 20$ gilt

$$E: \ \vec{n}\vec{x} - d = 0 \text{ und } g: \ \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{v} \quad \Longrightarrow \quad \vec{n}\vec{a} + \lambda\vec{n}\vec{v} = d$$

$$\lambda = \frac{d - \vec{n}\vec{a}}{\vec{n}\vec{v}} = \frac{20 - 18}{-8} = -\frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{S}} = \vec{s} = \vec{a} - \frac{1}{4}\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{7}{4} \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.4.2. (a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\vec{n}_1{}' = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -8 & 5 & 6 \\ -4 & 9 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ 8 \\ -52 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -17 \\ 4 \\ 26 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -17 \\ 4 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_2{}' = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -8 & 5 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 42 \\ -27 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Mit $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ folgt $\vec{n}_1\vec{a} = -45$ und $\vec{n}_2\vec{a} = -14$ und damit

$$\vec{n}_1(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad E_1: \ -17x_1 + 4x_2 - 26x_3 + 45 = 0$$

$$\vec{n}_2(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad E_2: \ 2x_1 + 14x_2 - 9x_3 + 14 = 0$$

(b) Achsenpunkte von E_1: $\mathrm{A}_{11}\left(\frac{45}{17}\middle|0\middle|0\right)$, $\mathrm{A}_{12}\left(0\middle|-\frac{45}{4}\middle|0\right)$, $\mathrm{A}_{13}\left(0\middle|0\middle|\frac{45}{26}\right)$

Achsenpunkte von E_2: $\mathrm{A}_{21}(-7|0|0)$, $\mathrm{A}_{22}(0|-1|0)$, $\mathrm{A}_{23}\left(0\middle|0\middle|\frac{14}{9}\right)$

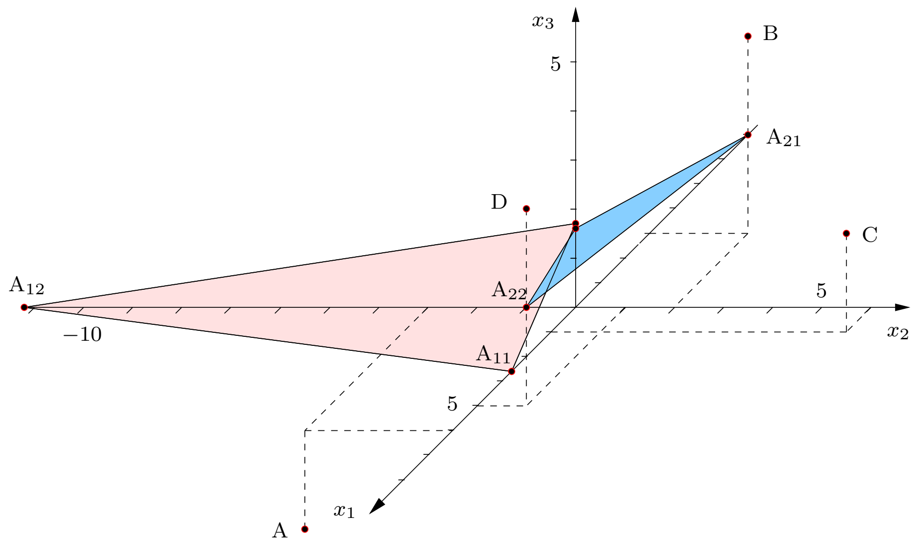
(c) $g_1: \quad -17x_1 + 4x_2 + 45 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \dfrac{17}{4}x_1 - \dfrac{45}{4}$

$g_2: \quad 2x_1 + 14x_2 + 14 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = -\dfrac{1}{7}x_1 - 1$

(d) $-17 \cdot 5 + 4 \cdot 4 - 26f_3 + 45 = 0 \quad \Longrightarrow \quad f_3 = -\dfrac{12}{13}$

$2 \cdot 1 + 14 \cdot g_2 - 9 \cdot 3 + 14 = 0 \quad \Longrightarrow \quad g_2 = \dfrac{11}{14}$

(e)



(f) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \dfrac{256}{3\sqrt{109} \cdot \sqrt{281}} = 0{,}4876 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 60{,}82°$

2.4.3. (a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ -40 \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -20 \\ 55 \\ -20 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\vec{n}' = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 50 \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 5 & 2 & -4 \\ -4 & 11 & -4 \end{vmatrix} = 50\begin{pmatrix} 2 \cdot (-4) - (-4) \cdot 11 \\ (-4) \cdot (-4) - 5 \cdot (-4) \\ 5 \cdot 11 - 2 \cdot (-4) \end{pmatrix} = 50\begin{pmatrix} 36 \\ 36 \\ 63 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}' = 450\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1800 \\ 1800 \\ 3150 \end{pmatrix}, \quad \text{wir wählen} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

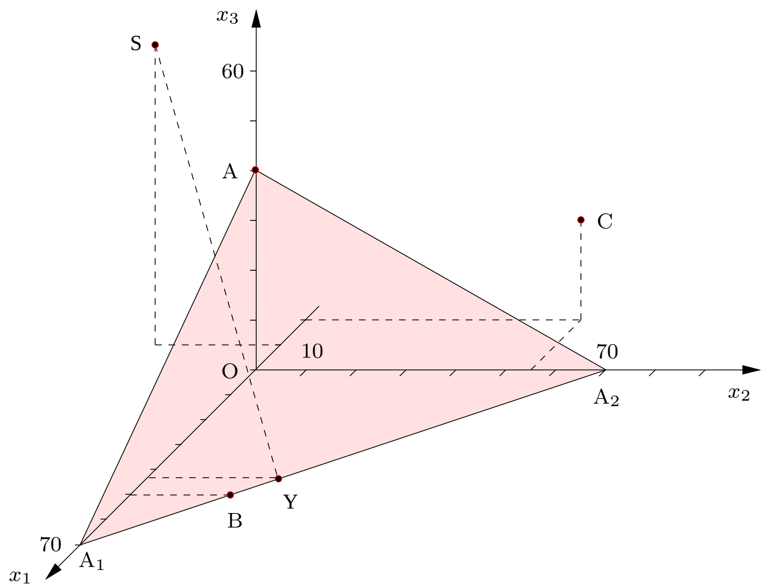
Mit $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}$ folgt $\vec{n}\vec{a} = 7 \cdot 40 = 280$ und damit

$$\vec{n}(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad E: \; 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 280 = 0$$

(b) $\mathrm{S} \in E \quad \Longrightarrow \quad 4 \cdot (-10) + 4s_2 + 7 \cdot 60 = 280 \quad \Longrightarrow \quad s_2 = -25$

(c) A_1: $x_2 = x_3 = 0$
$\Longrightarrow 4x_1 = 280$
$\Longrightarrow x_1 = 70$

A_2: $x_1 = x_3 = 0$
$\Longrightarrow 4x_2 = 280$
$\Longrightarrow x_2 = 70$



(d) Normalenvektor der x_1x_2-Ebene: $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad |\vec{n}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{81} = 9$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{e}_3\vec{n}}{|\vec{e}_3| \cdot |\vec{n}|} = \frac{7}{1 \cdot 9} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 38{,}94^\circ, \quad \text{Steigung: } \tan\varphi = 80{,}8\%$$

(e) Es genügt zu zeigen, dass A_1 und A_2 auf t liegen:

$$t(70) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{A}_1 \in t, \quad t(0) = 70 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{A}_2 \in t$$

(f) $\mathrm{Y} \in t \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Y}(y_1|70 - y_1|0), \quad \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} = \begin{pmatrix} -70 \\ 70 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{SY}} = \begin{pmatrix} y_1 + 10 \\ 95 - y_1 \\ -60 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} \perp \overrightarrow{\mathrm{SY}} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{SY}} = -70(y_1 + 10) + 70(95 - y_1) = 0$$

$$-y_1 - 10 + 95 - y_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_1 = 42{,}5$$

$$y_2 = 70 - y_1 = 27{,}5 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Y}(42{,}5|27{,}5|0)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{SY}} = \begin{pmatrix} 52{,}5 \\ 52{,}5 \\ -60 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \overline{\mathrm{SY}} = \sqrt{2 \cdot 52{,}5^2 + 60^2} \approx 95{,}5$$

(g) $\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1} = \begin{pmatrix} 70 \\ -70 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{S}} = \begin{pmatrix} -10 \\ -95 \\ 60 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} -20 \\ -15 \\ 20 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{S}} \times \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -10 & -95 & 60 \\ 70 & -70 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4200 \\ 4200 \\ 7350 \end{pmatrix}, \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{S}} \times \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1}\right| = 9450$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A_2C}} \times \overrightarrow{\mathrm{A_2S}} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -20 & -15 & 20 \\ -10 & -95 & 60 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1750 \end{pmatrix}, \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{A_2C}} \times \overrightarrow{\mathrm{A_2S}}\right| = 2250$$

$$F = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{A_2S}} \times \overrightarrow{\mathrm{A_2A_1}}\right| + \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{A_2C}} \times \overrightarrow{\mathrm{A_2S}}\right| = 5850$$

Preis: $3{,}51 \cdot 10^6$ €

2.4.4. (a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_1' = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 36 \\ -12 \\ 54 \end{pmatrix}$

$$\vec{n}_1' = 6\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \text{wir wählen} \quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Mit $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt $\vec{n}_1\vec{a} = 6 \cdot 3 - 2 \cdot 6 + 9 \cdot 1 = 15$ und damit

$$\vec{n}_1(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad E_1: \ 6x_1 - 2x_2 + 9x_3 - 15 = 0$$

(b) $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, $|\vec{n}_1| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 9^2} = \sqrt{121} = 11$, $|\vec{n}_2| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 7^2} = \sqrt{121} = 11$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{87}{121} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 44{,}03^\circ$$

(c) C in E_2: $6 \cdot (-3) + 6 \cdot (-3) + 7 \cdot 3 + 15 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{C} \in E_2$

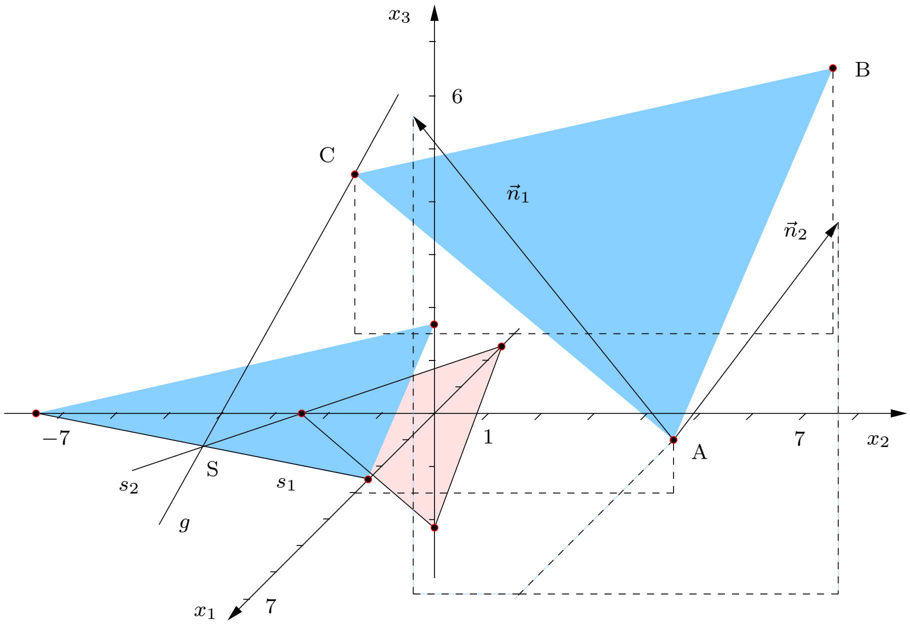
(d) $x_3 = 0$ in E_1: $6x_1 - 2x_2 = 15 \quad \Longrightarrow \quad s_1: \ x_2 = 3x_1 - 7{,}5$

$x_3 = 0$ in E_2: $6x_1 + 6x_2 = -15 \quad \Longrightarrow \quad s_2: \ x_2 = -x_1 - 2{,}5$

$$s_1 \cap s_s: \quad 3x_1 - 7{,}5 = -x_1 - 2{,}5 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{5}{4}$$

$$x_2 = \frac{15}{4} - \frac{15}{2} = -\frac{15}{4} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{S}\left(\frac{5}{4}\middle| -\frac{15}{4}\middle|0\right) = \mathrm{S}\,(1{,}25| - 3{,}75|0)$$

(e) Achsenpunkte von E_2: $\mathrm{A}_1\,(-2{,}5|0|0)$, $\mathrm{A}_2\,(0| - 2{,}5|0)$, $\mathrm{A}_3\,\left(0\middle|0\middle| - \frac{15}{7}\right)$



(f) Da E_1 und E_2 nicht parallel sind ($\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$) ist die gesuchte Schnittmenge eine Gerade g. Wir kennen zwei Punkte, die in beiden Ebenen liegen: S und C. Also ist

$$E_1 \cap E_2 = g = \mathrm{SC}$$

2.4.5. (a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = -9$

$$E: \quad \vec{n}(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad E: \quad -6x_1 + x_2 + 9x_3 + 9 = 0$$

(b) Die Achsenpunkte von E sind $\mathrm{A}_1\,(-10|0|0)$, $\mathrm{A}_2\,(0|4|0)$ und $\mathrm{A}_3\,\left(0\middle|0\middle|\frac{20}{3}\right)$. Mögliche Richtungsvektoren:

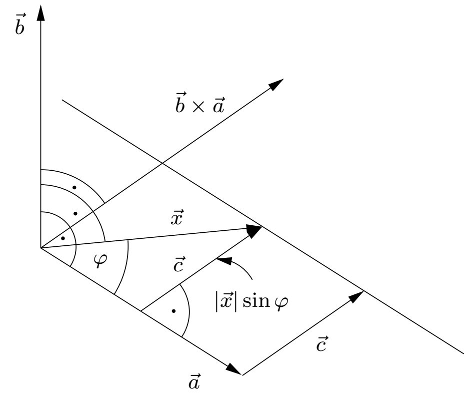
$$\vec{u}\,' = \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ besser } \vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\,' = \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}, \text{ besser } \vec{v} = \frac{3}{4}\vec{v}\,' = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufpunkt z.B. A_2: $\quad E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

2.4.6. (a) Fall 1 ($\vec{a} \not\perp \vec{b}$):

Da $\vec{a} \times \vec{x}$ immer senkrecht auf $\vec{a}$ steht, ist $L = \emptyset$.



Fall 2 ($\vec{a} \perp \vec{b}$):

$$\vec{x} \perp \vec{b} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} \| E \text{ mit } E: \ \vec{b}\vec{x} = 0$$

$$|\vec{a} \times \vec{x}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{x}| \sin\varphi = |\vec{b}| \quad \Longrightarrow$$

$$|\vec{c}| = |\vec{x}| \sin\varphi = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

$$\vec{x} = \lambda\vec{a} + \vec{c} = \lambda\vec{a} + \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{b} \times \vec{a}|} \cdot \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

$$L = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, \vec{x} = \lambda\vec{a} + \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \wedge \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad (1)$$

Oder: $$\vec{a} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$x_2 = \frac{a_2x_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_3}, \quad x_1 = \frac{a_1x_3}{a_3} + \frac{b_2}{a_3} \quad \Longrightarrow$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1x_3}{a_3} + \frac{b_2}{a_3} \\ \frac{a_2x_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_3} \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_3}{a_3} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b_2}{a_3} \\ -\frac{b_1}{a_3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit $\lambda = \dfrac{x_3}{a_3}$ folgt

$$\vec{x} = \lambda\vec{a} + \frac{1}{a_3} \cdot \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

(äquivalent zur obigen Lösung, nur anderer Aufpunkt)

(b) Mit (1): $$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 11 & 10 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 52 \\ -55 \end{pmatrix}, \quad |\vec{a}|^2 = 26$$

$$L = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{26} \begin{pmatrix} -11 \\ 52 \\ -55 \end{pmatrix} \wedge \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Mit (2):

$$L = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

z.B.

λ	0	1	2
$\vec{x}$	$\begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Oder:

$$\vec{a} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 5 & 0 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - 5x_3 \\ 5x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix} \implies$$

$$x_2 = 2 \text{ und } x_1 = -5x_3 - 11$$

2.5 Schnittmengen

2.5.1. (a) $x_3 = 0 \implies \lambda = -1 \implies$ Schnittpunkt: $\mathrm{S}_{12}\,(9|-2|0)$

(b) $x_2 = 0 \implies \lambda = -\dfrac{3}{5} = -0{,}6 \implies$ Schnittpunkt: $\mathrm{S}_{13}\left(\frac{37}{5}\middle|0\middle|\frac{8}{5}\right) = \mathrm{S}_{13}\,(7{,}4|0|1{,}6)$

(c) $x_3 = 0 \implies \lambda = \frac{5}{4} = 1{,}25 \implies$ Schnittpunkt: $\mathrm{S}_{23}\left(0\middle|\frac{37}{4}\middle|9\right) = \mathrm{S}_{23}\,(0|9{,}25|9)$

(d) g in E_1: $2(5-4\lambda) - 4(3+5\lambda) + 5(4+4\lambda) - 20 = 0 \implies -8\lambda - 2 = 0$

$\lambda = -\dfrac{1}{4}$ in g: $\mathrm{S}_{\mathrm{E1}}\left(6\middle|\frac{7}{4}\middle|3\right) = \mathrm{S}_{\mathrm{E1}}\,(6|1{,}75|3) \implies L = \{\mathrm{S}_{E1}\}$

(e) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2' = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = -\dfrac{\vec{n}_2'}{16} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_2:\quad \vec{n}(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \implies x_1 + x_3 + 4 = 0$

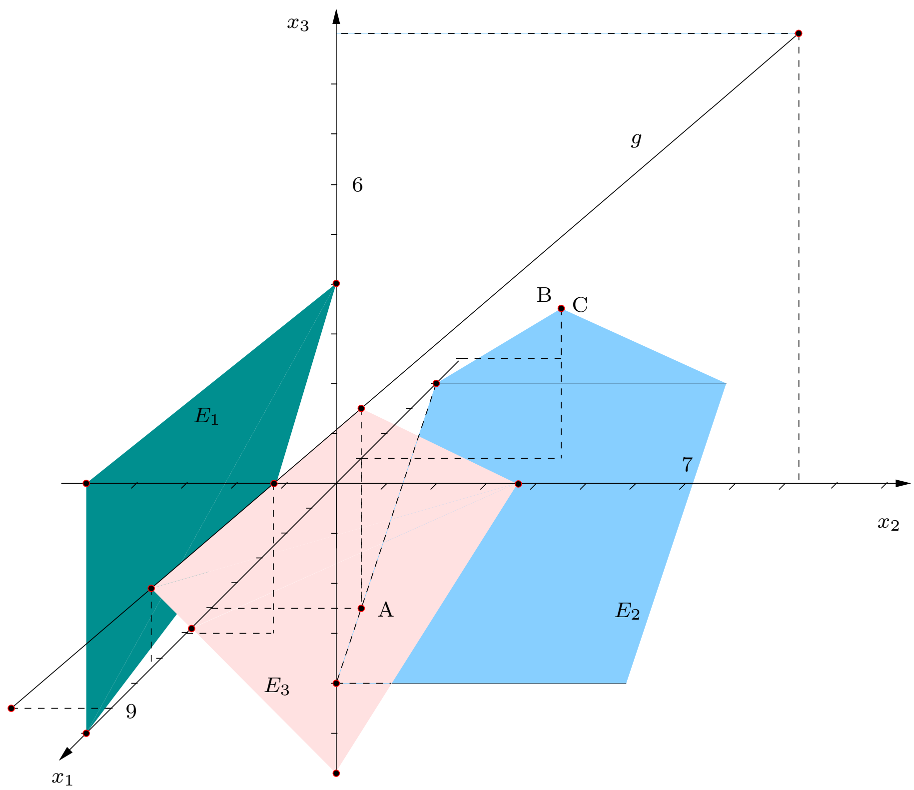
g in E_2: $5 - 4\lambda + 4 + 4\lambda - 20 = 0 \implies 13 = 0 \implies L = \emptyset$

(f) F, G und H sind Achsenpunkte, also Achsenabschnittsform:

$$E_3:\quad \frac{x_1}{5{,}8} + \frac{8x_2}{29} - \frac{x_3}{5{,}8} = 1 \,\Big|\cdot 58 \implies 5x_1 + 8x_2 - 5x_3 - 29 = 0$$

g in E_3: $5(5-4\lambda) + 8(3+5\lambda) - 5(4+4\lambda) - 29 = 0 \implies 0 = 0$

Die Gleichung ist für jedes λ erfüllt, d.h. $g \subset E_3$ oder $L = g$.



2.5.2. Man verschafft sich zunächst einen Überblick, indem man mit Hilfe des Kreuzprodukts Normalenvektoren der Ebenen berechnet:

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Die Gleichungen der Ebenen in Normalenform:

$$\begin{aligned} E_1 : && x_2 + x_3 - 6 = 0 && (1) \\ E_2 : && x_2 + x_3 - 6 = 0 && (2) \\ E_3 : && x_2 + x_3 - 4 = 0 && (3) \\ E_4 : && 5x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 9 = 0 && (4) \end{aligned}$$

$$E_1 \cap E_2 = E_1 = E_2, \quad E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = \emptyset$$

$E_1 \cap E_4$: Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten, wir setzen $x_3 = \lambda$:

$$\begin{aligned} (1) \Longrightarrow && x_2 = 6 - \lambda && (5) \\ (4) \Longrightarrow && 5x_1 - 5x_2 = 9\lambda - 9 && (6) \\ (5) \text{ in } (6) : && 5x_1 - 30 + 5\lambda = 9\lambda - 9 && (7) \\ && x_1 = \frac{4}{5}\lambda + \frac{21}{5} && \end{aligned}$$

$$E_1 \cap E_4 = E_2 \cap E_4 = g : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{21}{5} \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$E_3 \cap E_4$: Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten, wir setzen $x_3 = \lambda$:

$$\begin{aligned}
(3) \Longrightarrow \quad && x_2 &= 4 - \lambda && (8)\\
(4) \Longrightarrow \quad && 5x_1 - 5x_2 &= 9\lambda - 9 && (9)\\
(5) \text{ in } (6): \quad && 5x_1 - 20 + 5\lambda &= 9\lambda - 9 && (10)\\
&& x_1 &= \frac{4}{5}\lambda + \frac{11}{5} &&
\end{aligned}$$

$$E_3 \cap E_4 = h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.5.3. (a) $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$$

(b) $x_3 = 1 + 3\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{G}\left(\frac{11}{3}\middle| -4 \middle| 0\right).$

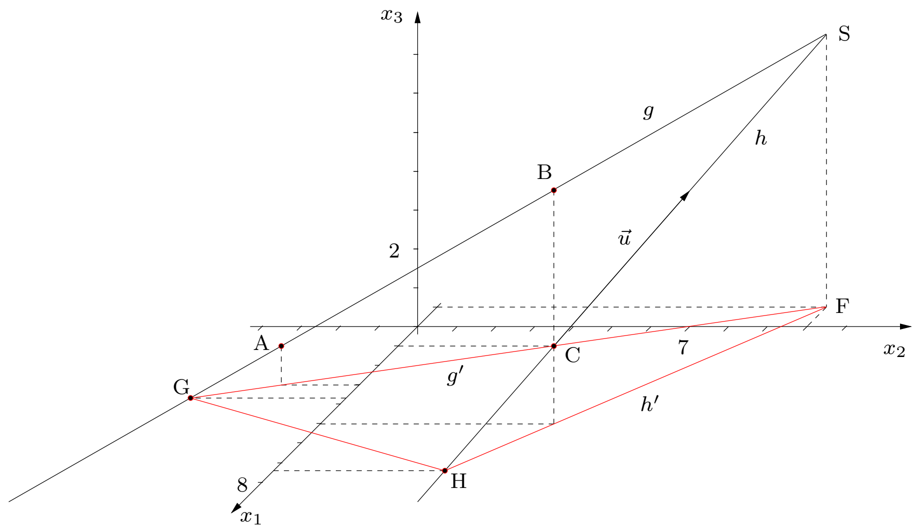
$$g': \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad h': \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned}
g \cap h: \quad && 3 - 2\lambda &= 5 - 3\mu && (1)\\
&& -2 + 6\lambda &= 6 + 2\mu && (2)\\
&& 1 + 3\lambda &= 2 + z\mu && (3)\\
\hline
&& -2\lambda + 3\mu &= 2 && (4)\\
&& 6\lambda - 2\mu &= 8 && (5)\\
&& 3\lambda - z\mu &= 1 && (6)\\
\hline
3 \cdot (4) + (5): \quad && 7\mu &= 14 \Longrightarrow \mu = 2 && (7)\\
(7) \text{ in } (4): \quad && -2\lambda + 6 &= 2 \Longrightarrow \lambda = 2 && (8)\\
(7), (8) \text{ in } (6): \quad && 6 - 2z &= 1 \Longrightarrow z = 2{,}5 && (9)
\end{aligned}$$

(8) in $g \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{S}\,(-1|10|7)$

(d)



(e) $x_3 = 2 + \frac{5}{2}\mu = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu = -\frac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{H}\,(7{,}4|4{,}4|0).\ \mathrm{F}\,(-1|10|0).$

$$\overrightarrow{\mathrm{HF}} = \begin{pmatrix} -8{,}4 \\ 5{,}6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{42}{5} \\ \frac{28}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{14}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{HG}} = \begin{pmatrix} -\frac{56}{15} \\ -\frac{42}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = -\tfrac{14}{15} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{HF}} \times \overrightarrow{\mathrm{HG}} = \frac{14^2}{75} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{\mathrm{HF}} \times \overrightarrow{\mathrm{HG}}| \cdot \overline{\mathrm{FS}} = \frac{14^2 \cdot 35 \cdot 7}{150} = \frac{4802}{15} \approx 320$$

2.5.4. (a) $E_1: \quad \frac{x_1}{4} - \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{4} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{A}_1\,(4|0|0)\,,\ \mathrm{A}_2\,(0|-5|0)\,,\ \mathrm{A}_3\,(0|0|4).$

$$E_1: \quad \vec{x} = \vec{\mathrm{A}}_1 + \nu \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1} + \sigma \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$

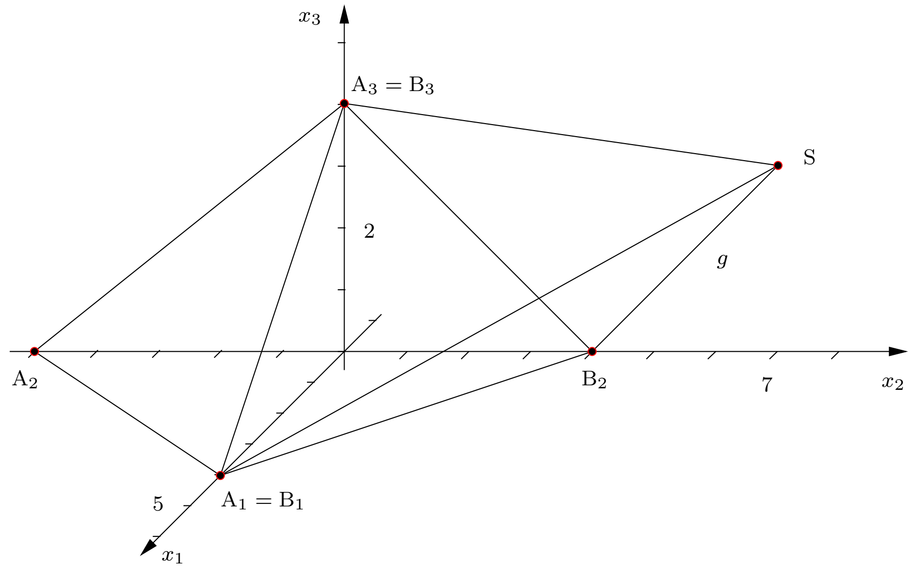
$$E_2: \quad x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$$

(c) $E_2: \quad \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{4} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{B}_1\,(4|0|0)\,,\ \mathrm{B}_2\,(0|4|0)\,,\ \mathrm{B}_3\,(0|0|4).$

(d) $g: \quad \vec{x} = \vec{\mathrm{B}}_2 + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

g in E_1: $5t - 4(4+t) + 5t - 20 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = 6 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{S}\,(6|10|6)$

(e)



(f)

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{B_1B_2} \times \overrightarrow{B_1B_3}| \cdot \overline{B_2S} = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \frac{4^2 \cdot 6}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 16 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 16 \cdot \sqrt{3}^{\,2} = 48$$

2.5.5. Mit Hilfe des Kreuzprodukts berechnet man den Normalenvektor von E_1:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Die Gleichungen der Ebenen in Normalenform:

$$\begin{aligned} E:& \quad 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 20 = 0 && (1) \\ E_1:& \quad 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 4 = 0 && (2) \\ E_2:& \quad -x_1 + 5x_2 - x_3 - 22 = 0 && (3) \end{aligned}$$

$E \cap E_1$: Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten, wir setzen $x_3 = \lambda$:

$$\begin{aligned} E:& \quad 4x_1 + 7x_2 + 4\lambda - 20 = 0 && (4) \\ E_1:& \quad 2x_1 - 3x_2 - 6\lambda + 4 = 0 && (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) - 2 \cdot (5):& \quad 13x_2 + 16\lambda = 28 && (6) \\ & \quad x_2 = \frac{28}{13} - \frac{16}{13}\lambda && (7) \\ (7) \text{ in } (4):& \quad 4x_1 + \frac{7 \cdot 28}{13} - \frac{7 \cdot 16}{13}\lambda + 4\lambda = 20 \,|\, : 4 && (8) \\ & \quad x_1 + \frac{49}{13} - \frac{28}{13}\lambda + \lambda = 5 && (9) \\ & \quad x_1 = \frac{16}{13} + \frac{15}{13}\lambda && (10) \end{aligned}$$

$$E \cap E_1 = g: \quad \vec{x} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}16\\28\\0\end{pmatrix} + \frac{\lambda}{13}\begin{pmatrix}15\\-16\\13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\12\\-8\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}15\\-16\\13\end{pmatrix}$$

$E \cap E_2$: Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten, wir setzen $x_3 = \lambda$:

$$\begin{aligned}
E: &\quad 4x_1 + 7x_2 + 4\lambda - 20 = 0 &(11)\\
E_2: &\quad -x_1 + 5x_2 - \lambda - 22 = 0 &(12)\\
\hline
(11) + 4\cdot(12): &\quad 27x_2 = 108 &(13)\\
&\quad x_2 = 4 &(14)\\
(14) \text{ in } (12): &\quad x_1 = -2 - \lambda &(15)
\end{aligned}$$

$$E \cap E_2 = h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

2.6 Die HNF – Abstände von Ebenen

2.6.1. (a) $\vec{n} = \begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\-6\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\-3\\-6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix} = 8 + 6 - 18 = -4 \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
E: &\quad 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 4 = 0\\
\text{HNF von } E: &\quad -\frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{6}{7}x_3 - \frac{4}{7} = 0
\end{aligned}$$

$$d(\mathrm{P}, E) = \frac{-2\cdot(-4) + 3\cdot 5 + 6\cdot(-2) - 4}{7} = 1$$

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = \vec{P} - d(\mathrm{P}, E)\cdot\vec{n}_0 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-26\\32\\-20\end{pmatrix}$$

$$\vec{P'} = \vec{P} - 2\cdot d(\mathrm{P}, E)\cdot\vec{n}_0 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-24\\29\\-26\end{pmatrix}$$

(b) HNF von E: $\quad \dfrac{9x_1 + 12x_2 + 20x_3 - 205}{25} = 0$

$$d(\mathrm{P}, E) = \frac{9\cdot(-6) + 12\cdot 22 + 20\cdot 31 - 205}{25} = 25$$

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}9\\12\\20\end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = \vec{P} - d(\mathrm{P}, E)\cdot\vec{n}_0 = \begin{pmatrix}-15\\10\\11\end{pmatrix}$$

$$\vec{P'} = \vec{P} - 2\cdot d(\mathrm{P}, E)\cdot\vec{n}_0 = \begin{pmatrix}-24\\-2\\-9\end{pmatrix}$$

(c) Richtungsvektoren von E:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

HNF von E:
$$\frac{x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 1}{3} = 0$$

$$d(\mathrm{P}, E) = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) - 1}{3} = 6$$

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = \vec{P} - d(\mathrm{P}, E) \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P'} = \vec{P} - 2 \cdot d(\mathrm{P}, E) \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.7 Abstände von Geraden

2.7.1. (a) $g \| h$, A ist Aufpunkt von g, B Aufpunkt von h: $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

φ ist der Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-2}{2\sqrt{41} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{1}{82}} = \frac{9}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{2}}$$

$$d(g, h) = \overline{\mathrm{AB}} \sin\varphi = \frac{9 \cdot 2\sqrt{41}}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{2}} = 9\sqrt{2}$$

(b) $\vec{w} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, α ist der Winkel zwischen $\vec{w}$ und $\vec{v}$:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{|\vec{w}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-2}{\sqrt{110} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{55}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{55}} = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{55}}$$

$$d(P, g) = \overline{\mathrm{AP}} \sin\alpha = \frac{\sqrt{110} \cdot \sqrt{54}}{\sqrt{55}} = 6\sqrt{3}$$

$\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{BP}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, β ist der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{v}$:

$$\cos\beta = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{v}|} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \beta = 90^\circ$$

$$d(P, h) = \overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

(c)

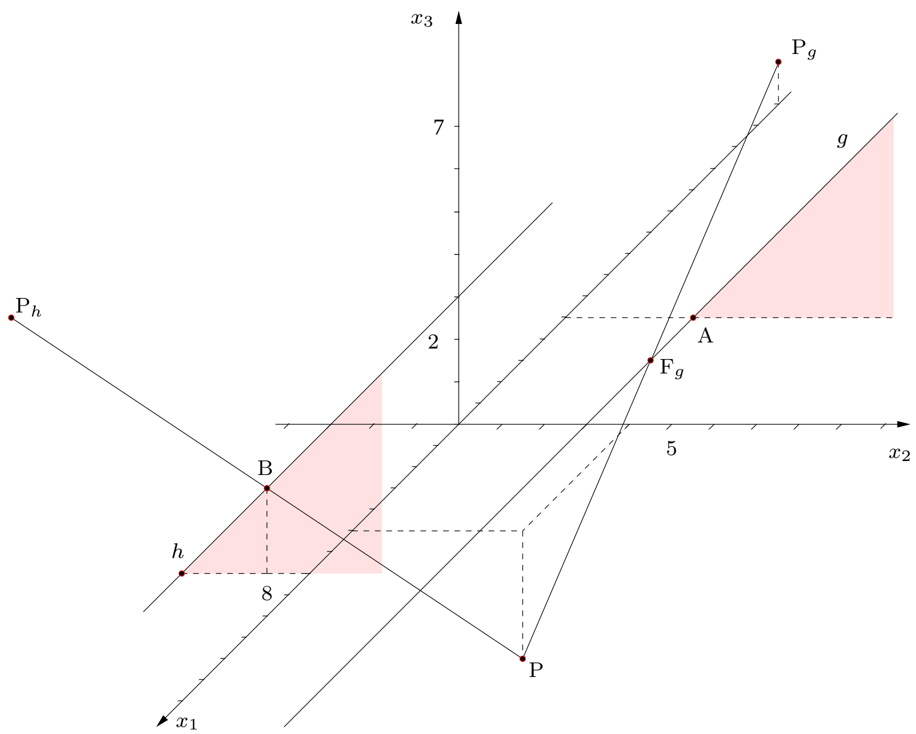
$$\vec{\mathrm{F}}_g = \vec{A} + \overline{\mathrm{AP}}\cos\alpha \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{110}}{\sqrt{55}\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathrm{F}}_h = \vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\vec{\mathrm{P}}_g = \vec{\mathrm{F}}_g + \overrightarrow{\mathrm{PF}_g} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathrm{P}}_h = \vec{\mathrm{F}}_h + \overrightarrow{\mathrm{PF}_h} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$$



2.7.2. (a) $\varphi = \sphericalangle(\vec{v}, \overrightarrow{\mathrm{AP}})$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{p} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \cos\varphi = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\vec{v}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|} = \frac{12}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{35}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{35}}$$

$$d(\mathrm{P}, g) = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}| \sin\varphi = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{35} \cdot \sqrt{1 - \frac{24}{35}} = \sqrt{11}$$

(b) Da $\cos\varphi > 0$, folgt

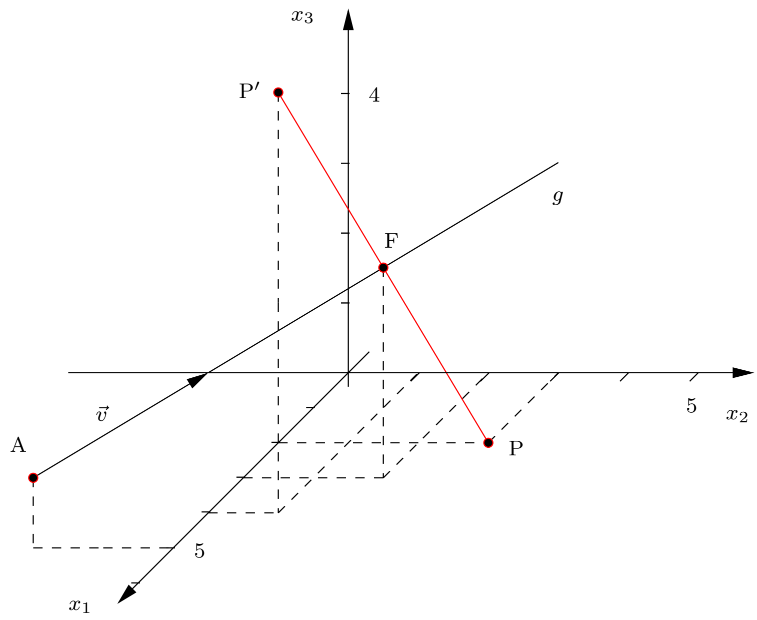
$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{AF}}|}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\varphi}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}}\vec{v} = 2\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{AF}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathrm{F}\,(3|2|3)$$

(c)

$$\overrightarrow{\mathrm{P}}' = \overrightarrow{\mathrm{P}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PF}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathrm{P}'\,(4|1|6)$$

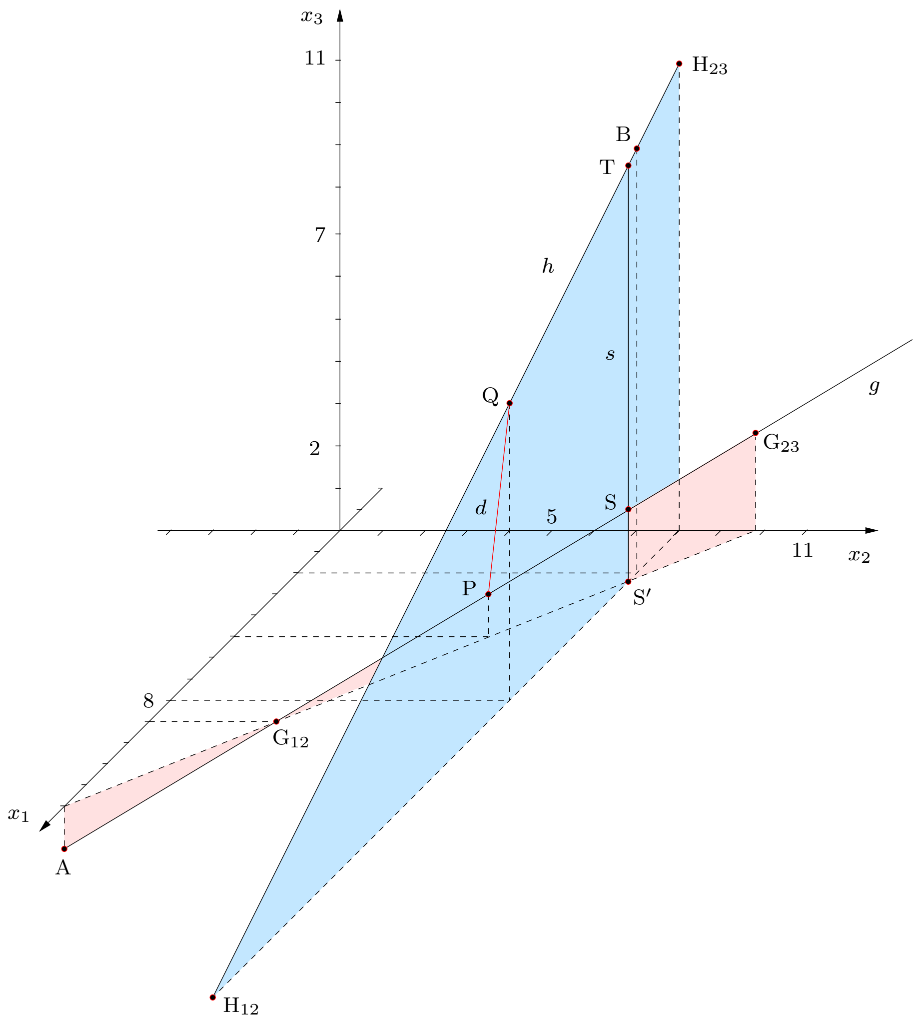
(d)



2.7.3. (a) Spurpunkte von g: $\mathrm{G}_{12}\,(9|3|0)$, $\mathrm{G}_{13}\,(13|0|-1) = A$, $\mathrm{G}_{23}\,(0|9{,}75|2{,}25)$

Spurpunkte von h: $\mathrm{H}_{12}\,(22|8|0)$, kein H_{13}, da h parallel zur x_1x_3-Ebene, $\mathrm{H}_{23}\,(0|8|11)$

Setzt man die x_2-Komponenten der Geradengleichungen gleich, dann folgt $\lambda = \frac{8}{3}$ und damit für den Schnittpunkt von g' und h': $\mathrm{S}'\left(\frac{7}{3}\middle|8\middle|0\right)$.



(b)

$$
\begin{aligned}
g \cap h: \quad && 4\lambda + 2\mu &= 11 && (1)\\
&& 3\lambda &= 8 && (2)\\
&& \lambda + \mu &= 11 && (3)\\
\hline
(2) \text{ und } (3) \Longrightarrow && \lambda = \frac{8}{3}, \quad \mu &= \frac{25}{3} && (4)\\
(4) \text{ in } (1) && \underbrace{\frac{82}{3}}_{\text{lS}} &\neq \underbrace{11}_{\text{rS}}
\end{aligned}
$$

(1) also nicht erfüllt, d.h. g und h haben keinen Schnittpunkt. Da die Richtungsvektoren nicht parallel sind, sind g und h windschief.

(c) Ein Normalenvektor zu den beiden Richtungsvektoren ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$d = |\vec{n}_0(\vec{b} - \vec{a})| = \left| \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \right| = \frac{-33 + 16 + 66}{7} = 7$$

(d) Mit $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = d\vec{n}_0$, $\vec{P} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$, $\vec{Q} = \vec{b} + \mu\vec{v}$ und $\overrightarrow{\mathrm{Q}} = \overrightarrow{\mathrm{P}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ folgt

$$\begin{aligned} 13 - 4\lambda + 3 &= 2 + 2\mu && (1)\\ 3\lambda + 2 &= 8 && (2)\\ -1 + \lambda + 6 &= 10 - \mu && (3)\\ \hline \text{(1) und (2)} \Longrightarrow \quad \lambda = 2,\quad \mu &= 3 && (4) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} 13\\ 0\\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -4\\ 3\\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\\ 6\\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{P}\,(5|6|1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{Q}} = \begin{pmatrix} 2\\ 8\\ 10 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2\\ 0\\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\\ 8\\ 7 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Q}\,(8|8|7)$$

(e) $\mathrm{S}' \in g' \quad \Longrightarrow \quad 3\lambda = 8 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{8}{3}$. Der Punkt $\mathrm{S} \in g$, der senkrecht über S' liegt, hat die Koordinaten $\mathrm{S}\,\left(\frac{7}{3}\middle|8\middle|\frac{5}{3}\right)$.

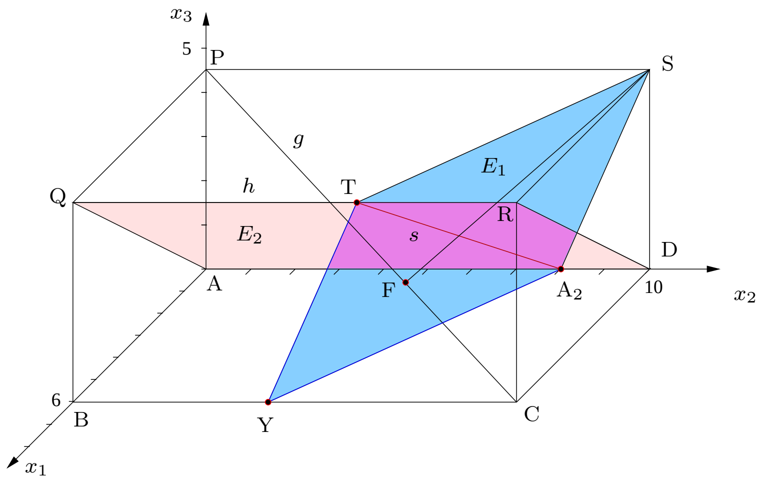
$\mathrm{S}' \in h' \quad \Longrightarrow \quad 2 + 2\mu = \frac{7}{3} \quad \Longrightarrow \quad \mu = \frac{1}{6}$. Der Punkt $\mathrm{T} \in h$, der senkrecht über S' liegt, hat die Koordinaten $\mathrm{T}\,\left(\frac{7}{3}\middle|8\middle|\frac{59}{6}\right)$. Das Seil darf maximal die Länge

$$s = \frac{59}{6} - \frac{5}{3} = \frac{49}{6} = 8{,}1\overline{6}$$

haben.

2.7.4. (a) D $(0|10|0)$, P $(0|0|4{,}5)$, Q $(6|0|4{,}5)$, R $(6|10|4{,}5)$

(b) $g: \quad \vec{x} = \vec{P} + \overrightarrow{\mathrm{PC}} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 4{,}5 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 6\\ 10\\ -4{,}5 \end{pmatrix}$



(c) $\vec{n}_1' = 2\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \begin{pmatrix} 12\\ 20\\ -9 \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor von E_1. $\vec{n}_1' \cdot \vec{S} = \begin{pmatrix} 12\\ 20\\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0\\ 10\\ 4{,}5 \end{pmatrix} = 159{,}5.$

$$\vec{n}_1 = 2\vec{n}_1' \quad \Longrightarrow \quad E_1: \quad \vec{n}_1(\vec{x} - \vec{S}) = 24x_1 + 40x_2 - 18x_3 - 319 = 0$$

(d) g in E_1:

$$24\cdot 6\lambda+40\cdot 10\lambda-18\cdot\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{2}\lambda\right)-319=0\quad\Longrightarrow\quad 625\lambda=400$$

$$\lambda=\frac{16}{25}\quad\Longrightarrow\quad \vec{F}=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}+\frac{16}{25}\cdot\begin{pmatrix}6\\10\\-\frac{9}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{96}{25}\\\frac{32}{5}\\\frac{81}{50}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3{,}84\\6{,}40\\1{,}62\end{pmatrix}$$

$$d(\mathrm{S},g)=|\overrightarrow{\mathrm{FS}}|=\left|\begin{pmatrix}-\frac{96}{25}\\\frac{18}{5}\\\frac{72}{25}\end{pmatrix}\right|=6$$

(e)

$$d(\mathrm{B},E_1)=\left|\frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|}\cdot(\vec{B}-\vec{S})\right|=\left|\frac{1}{50}\begin{pmatrix}24\\40\\-18\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\10\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}\right|=\frac{175}{50}=3{,}5$$

(f) Jeder Punkt $(0\,|\,x_2\,|\,0)$ erfüllt die Gleichung von E_2, d.h. die x_2-Achse ist in E_2 enthalten. Weiter erfüllt jeder Punkt $(6\,|\,x_2\,|\,4{,}5)$ die Gleichung von E_2, d.h. die Gerade $h=\mathrm{QR}$ ist auch in E_2 enthalten. E_2 ist also Diagonalebene in unserem Quader.

(g) $E_1\cap a \quad\Longrightarrow\quad x_1=x_3=0$ in $E_1 \quad\Longrightarrow\quad x_2=\dfrac{319}{40} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{A}_2\,(0|7{,}975|0)$

$E_1\cap h \quad\Longrightarrow\quad x_1=6$ und $x_3=\frac{9}{2}$ in $E_1 \quad\Longrightarrow\quad x_2=\dfrac{32}{5} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{T}\,(6|6{,}4|4{,}5)$

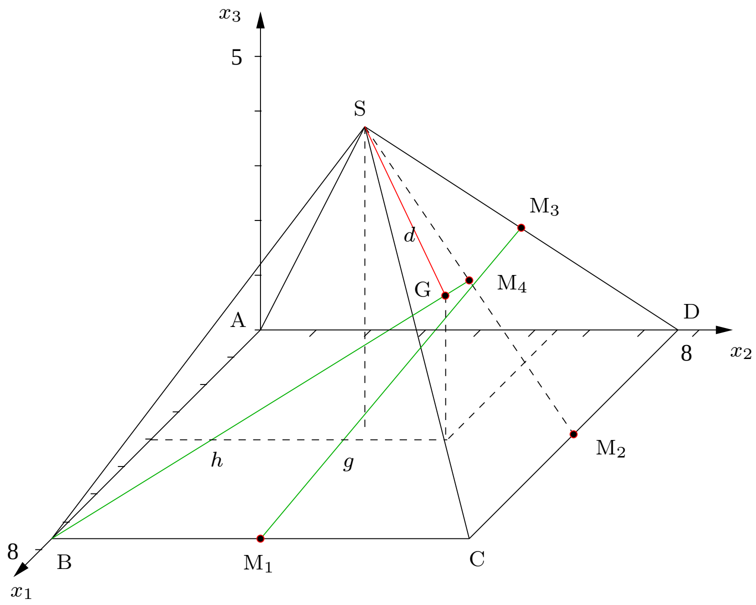
(h) $s=\mathrm{A}_2\mathrm{T} \quad\Longrightarrow\quad s:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\\frac{319}{40}\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}6\\-\frac{63}{40}\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\7{,}975\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}80\\-21\\60\end{pmatrix}$

2.7.5. (a) $\mathrm{M}_1\,(76|38|0)$, $\mathrm{M}_2\,(38|76|0)$, $\overrightarrow{\mathrm{M}_3}=\overrightarrow{\mathrm{D}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DS}}=\begin{pmatrix}0\\76\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}38\\-38\\56\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\57\\28\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_4}=\overrightarrow{\mathrm{M}_2}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{M}_2\mathrm{S}}=\begin{pmatrix}38\\76\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-38\\56\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}38\\57\\28\end{pmatrix}$$

(b) $g:\quad \vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{M}_1}+\mu\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3}}_{\vec{u}}=\begin{pmatrix}76\\38\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-57\\19\\28\end{pmatrix},\quad \mu\in\mathbb{R}$

$h:\quad \vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{B}}+\lambda\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{BM}_4}}_{\vec{v}}=\begin{pmatrix}76\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-38\\57\\28\end{pmatrix},\quad \lambda\in\mathbb{R}$



(c) $\vec{n}_1 = \vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{BM}_4}$ ist Normalenvektor von E_1. $\vec{n}_1 \cdot \vec{S} = \begin{pmatrix} -38 \\ 57 \\ 28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 38 \\ 38 \\ 56 \end{pmatrix} = 2290.$

$$\Longrightarrow \quad E_1: \quad \vec{n}_1(\vec{x} - \vec{S}) = -38x_1 + 57x_2 + 28x_3 - 2290 = 0$$

(d) G ist der Schnittpunkt von h mit E_1. h in E_1:

$$-38 \cdot (76 - 57\lambda) + 57 \cdot 57\lambda + 28 \cdot 28\lambda - 2290 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{5178}{5477}$$

$$\vec{\mathrm{G}} = \begin{pmatrix} 76 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5178}{5477} \begin{pmatrix} -38 \\ 57 \\ 28 \end{pmatrix} = \frac{1}{5477} \begin{pmatrix} 219488 \\ 295146 \\ 144984 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 40 \\ 54 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$d = \overline{\mathrm{GS}} = \frac{38\sqrt{4281}}{\sqrt{5477}} \approx 33{,}6$$

(e) Gesucht ist der Abstand $d(g,h)$ der beiden Geraden:

$$\vec{n}' = \vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -38 & 57 & 28 \\ -57 & 19 & 28 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 57 \cdot 28 - 28 \cdot 19 \\ -57 \cdot 28 + 38 \cdot 28 \\ -38 \cdot 19 + 57 \cdot 57 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1064 \\ -532 \\ 2527 \end{pmatrix} = 133 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$d(g,h) = \left| \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot (\vec{\mathrm{M}_1} - \vec{\mathrm{B}}) \right| = \left| \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 38 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{-4 \cdot 38}{21} \right| = \frac{152}{21}$$

2.7.6. (a) $g: \quad \vec{x} = \vec{\mathrm{A}} + \lambda' \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 120 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} -80 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h: \quad \vec{x} = \vec{\mathrm{T}} + \mu \overrightarrow{\mathrm{TS}} = \begin{pmatrix} 78 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 140 \\ s - 14 \end{pmatrix}$

(b) Gleichsetzen von g und h:

$$
\begin{aligned}
&& -8\lambda &= -42 && (1)\\
&& 6\lambda - 140\mu &= -45 && (2)\\
&& \lambda - (s-14)\mu &= -6 && (3)\\
\hline
(1) \implies && \lambda &= \frac{21}{4} && (4)\\
(4) \text{ und } (2): && \mu &= \frac{153}{280} && (5)\\
(4) \text{ und } (5) \text{ in } (3): && \frac{21}{4} - (s-14)\cdot\frac{153}{280} &= -6 && (6)\\
&& s = s_1 &= \frac{588}{17} \approx 34{,}6 &&
\end{aligned}
$$

(c) Die kürzeste Verbindung zwischen g und h steht senkrecht auf beiden Geraden:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 140 \\ s-14 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 224-6s \\ 112-8s \\ 1120 \end{pmatrix}$$

Die Ebene E enthält g uns steht senkrecht auf $\vec{n}$:

$$E: \quad \vec{n}(\vec{x} - \overrightarrow{\mathrm{A}}) = 0$$

Der Abstand der Geraden ist der Abstand von T zu E:

$$
\begin{aligned}
d(s) &= \frac{\vec{n}(\overrightarrow{\mathrm{T}} - \overrightarrow{\mathrm{A}})}{|\vec{n}|} = \frac{\begin{pmatrix} 224-6s \\ 112-8s \\ 1120 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -42 \\ -45 \\ -6 \end{pmatrix}}{\sqrt{(224-6s)^2 + (112-8s)^2 + 1120}} = \\
&= \frac{612s - 21168}{\sqrt{(224-6s)^2 + (112-8s)^2 + 1120}} = 15
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(612s - 21\,168)^2 &= 15^2 \cdot [(224-6s)^2 + (112-8s)^2 + 1120]\\
374\,544s^2 - 25\,909\,632s + 448\,084\,224 &= 22\,500s^2 - 1\,008\,000s + 296\,352\,000\\
352\,044s^2 - 24\,901\,632s &= -151\,732\,224\\
s^2 - 2\cdot\frac{49\,408}{1397} &= -\frac{602\,112}{1397}\\
\left(s - \frac{49\,408}{1397}\right)^2 &= \frac{49\,408^2 - 602\,112\cdot 1397}{1397^2} = \frac{40\,000^2}{1397^2}\\
s &= \frac{49\,408}{1397} \underset{(-)}{+} \frac{40\,000}{1397}
\end{aligned}
$$

$$s = s_2 = 64, \qquad \left(s_3 = \frac{9408}{1397} \approx 6{,}73\right)$$

(d) $s = 64 \quad \implies \quad h: \quad \vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{T}} + \mu\overrightarrow{\mathrm{TS}} = \begin{pmatrix} 78 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} 0 \\ 140 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$

Weiter folgt aus $s = 64$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}| = 15$. Da $\vec{n}$ nach oben zeigt und h über g verläuft, folgt mit $\overrightarrow{\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} 120 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{\mathrm{Q}} = \begin{pmatrix} 78 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$:

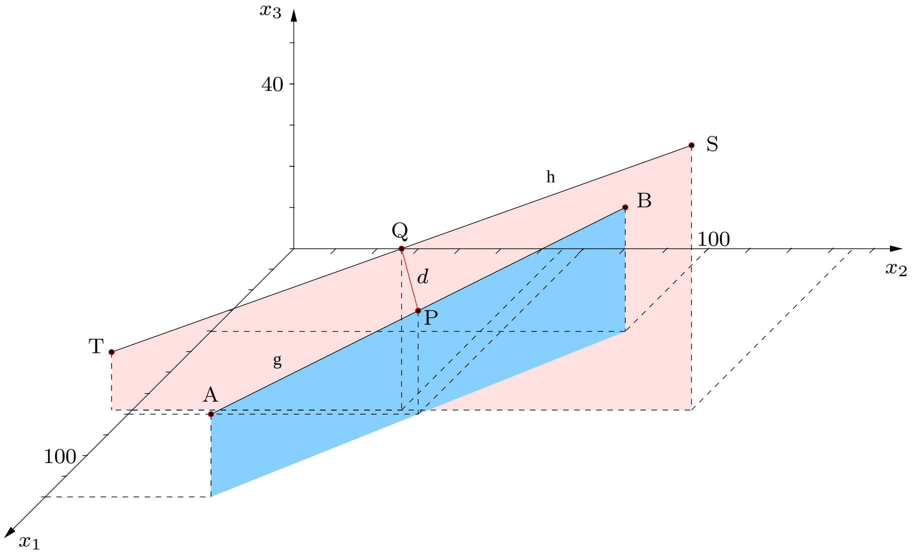
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = d \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} -42 \\ -45 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{15}{15} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

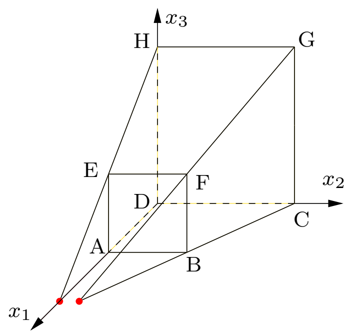
Daraus folgt $\lambda = \mu = 5$ und damit P$\,(80|70|25)$ und Q$\,(78|65|39)$.

(e)



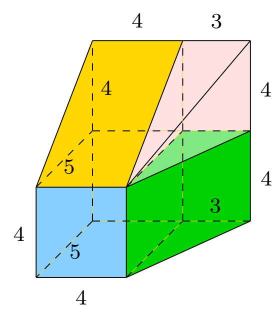
2.7.7. (a) Da die Grundfläche (Rechteck mit den Seiten 7 und 8) und die Deckfläche (Quadrat mit der Kante 4) nicht ähnlich sind, handelt es sich um keinen Pyramidenstumpf.
Alternativ kann man zeigen, dass die Schnittpunkte der Geraden DA, CB, HE und GF nicht zusammenfallen, z.B.

$$\mathrm{DA} \cap \mathrm{HE}: \ \mathrm{S}_1(10|0|0), \quad \mathrm{CB} \cap \mathrm{GF}: \ \mathrm{S}_2(10|1|0)$$



(b)

$$V = 4 \cdot 4 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 =$$
$$= 5 \cdot 4 \cdot \left(4 + 2 + \frac{3}{2} + 1\right) = 20 \cdot 8{,}5 = 170$$



3 Stochastik

3.1 Ereignisalgebra

3.1.1. (a) Die gegebenen Zahlenwerte in das Mengendiagramm und in die Vierfeldertafeln eintragen

B	S	$\overline{S}$	
M	3		
$\overline{M}$			
		4	

$+$

$\overline{B}$	S	$\overline{S}$	
M	1		
$\overline{M}$		2	
	6		

$=$

Ω	S	$\overline{S}$	
M			7
$\overline{M}$	14		18

und die leeren Felder ausfüllen:

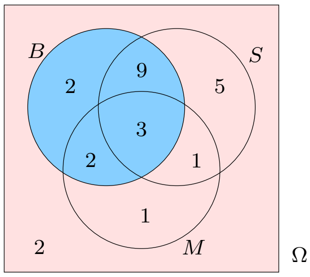
B	S	$\overline{S}$	
M	3	2	5
$\overline{M}$	9	2	11
	12	4	16

$+$

$\overline{B}$	S	$\overline{S}$	
M	1	1	2
$\overline{M}$	5	2	7
	6	3	9

$=$

Ω	S	$\overline{S}$	
M	4	3	7
$\overline{M}$	14	4	18
	18	7	25



(b) i. Buben, die weder Mathe noch Sport mögen, $|B \cap \overline{M} \cap \overline{S}| = 2$

ii. $(B \cap M \cap \overline{S}) \cup (\overline{B} \cap M \cap \overline{S}) = M \cap \overline{S}$, also Schüler, die zwar Mathe aber keinen Sport mögen. $|M \cap \overline{S}| = 3$

(c) i. $E = B \cap \overline{M} \cap S, \quad |E| = 9$

ii. $E = (\overline{B} \cap \overline{M} \cap S) \cup (\overline{B} \cap \overline{S} \cap M), \quad |E| = 5 + 1 = 6$

iii. $E = M \cup S, \quad |E| = |M| + |S| - |M \cap S| = 7 + 18 - 4 = 21$

3.1.2. (a)

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cup \overline{B}) &= P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) \overset{\text{(de Morgan)}}{=} \\ &= P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A \cup B}) = \\ &= 1 - P(A) + 1 - P(B) - (1 - P(A \cup B)) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B)) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= 1 - P(A \cap B) \end{aligned}$$

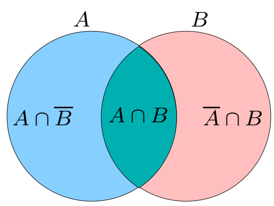
Oder zuerst Mengenalgebra: $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} = \Omega \setminus (A \cap B) \quad \Longrightarrow$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\Omega \setminus (A \cap B)) = 1 - P(A \cap B)$$

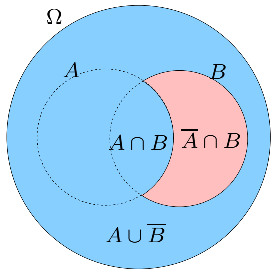
(b) $A \cap \overline{B}$ und $A \cap B$ sind disjunkt, daraus folgt

$$P(A) = P((A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) \quad \Longrightarrow$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$



(c) Mit dem Ergebnis von (b) folgt:



$$\begin{aligned}
P(A \cup \overline{B}) &= P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) = \\
&= P(A) + P(\overline{B}) - (P(A) - P(A \cap B)) = \\
&= P(A) + 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) = \\
&= 1 - P(B) + P(A \cap B)
\end{aligned}$$

Oder zuerst mit Mengenalgebra:

$A \cup \overline{B} = (A \cap B) \cup \overline{B} \quad \Longrightarrow$

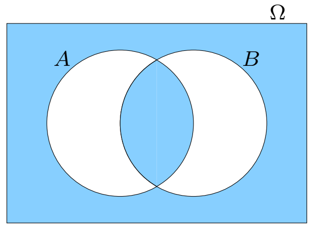
$$P(\overline{A} \cup B) = 1 - P(A) + P(A \cap B)$$

(d) Im Ergebnis von (c) A und B vertauschen:

$$P(A \cup \overline{B}) = P(A \cap B) + P(\overline{B}) = 1 - P(B) + P(A \cap B)$$

3.1.3. (a)

$$\begin{aligned}
M &= (A \cap B) \cup \overline{A \cup B} = \\
&= (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \\
&= \overline{(A \cup B) \setminus (A \cap B)} = \\
&= \overline{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)} = \\
&= \overline{A \setminus B} \cap \overline{B \setminus A}
\end{aligned}$$



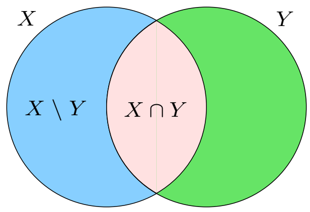
(b) $D = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B)$

3.1.4. Aus $(X \cap Y) \cap (X \setminus Y) = \emptyset$

und $X = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y)$ folgt mit (1)

$|X| = |X \setminus Y| + |X \cap Y|$

und damit (2).



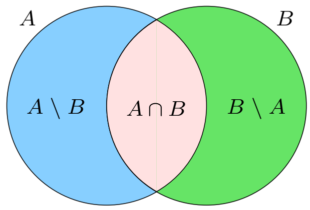
Aus $(A \cap B) \cap (A \setminus B) = \emptyset$

und $(A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$

und $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$

und $(A \cup B) = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$

folgt mit (1)



$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|$$

und daraus mit (2)

$$|A \cup B| = \underbrace{|A| - |A \cap B|}_{|A \setminus B|} + |A \cap B| + \underbrace{|B| - |A \cap B|}_{|B \setminus A|} = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Für $A \cap B = \emptyset$ ist (3) mit (1) identisch, also ja.

3.1.5.

Ω	T	$\overline{T}$	
S	8 %	24 %	32 %
$\overline{S}$	32 %	36 %	68 %
	40 %	60 %	100 %

$$36\,\% \cdot x = 180 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{180}{0{,}36} = 500$$

Es gibt 500 Dorfbewohner.

3.2 Stochastische Unabhängigkeit

3.2.1. Definition der Unabhängigkeit und 1. Pfadregel:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot p_1 \quad \Longrightarrow \quad p_1 = P(B)$$

1. Pfadregel:

$$p_2 = 1 - p_1 = 1 - P(B) = P(\overline{B}) \quad \Longrightarrow \quad P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot p_2 = P(A) \cdot P(\overline{B})$$

1. Pfadregel:

$$p_5 = P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot p_3 \quad \Longrightarrow \quad p_3 = P(A)$$

$$p_4 = 1 - p_3 = 1 - P(A) = P(\overline{A})$$

1. Pfadregel:

$$p_6 = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot p_4 = P(\overline{B}) \cdot P(\overline{A})$$

$\Longrightarrow$ $\overline{A}$ und $\overline{B}$ sind stochastisch unabhängig.

3.2.2. $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) \quad \Longrightarrow \quad gc = a$

$P(A) \cdot P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) \quad \Longrightarrow \quad gf = d$

$P(\overline{A}) \cdot P(B) = P(\overline{A} \cap B) \quad \Longrightarrow \quad hc = b$

$P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) \quad \Longrightarrow \quad hf = e$

3.2.3. $A = \{ww, ws\}$, $P(A) = \frac{z}{n} \cdot \frac{z-1}{n-1} + \frac{z}{n} \cdot \frac{n-z}{n-1} = \frac{z(z-1+n-z)}{n(n-1)} = \frac{z(n-1)}{n(n-1)} = \frac{z}{n}$

$B = \{ww, sw\}$, $P(B) = \frac{z}{n} \cdot \frac{z-1}{n-1} + \frac{n-z}{n} \cdot \frac{z}{n-1} = \frac{z(z-1+n-z)}{n(n-1)} = \frac{z(n-1)}{n(n-1)} = \frac{z}{n}$

$A \cap B = \{ww\}$, $P(A \cap B) = \frac{z}{n} \cdot \frac{z-1}{n-1} \neq \frac{z^2}{n^2} = P(A) \cdot P(B)$

d.h. A und B stochastisch abhängig.

3.2.4. (a)

	M	W	
S	22 %	18 %	40 %
B	33 %	27 %	60 %
	55 %	45 %	100 %

$P(M) \cdot P(B) = 0{,}55 \cdot 0{,}6 = 0{,}33 = P(M \cap B) \quad \Longrightarrow$
M und B sind stochastisch unabhängig.

(b) $P_M(S) = \frac{P(M \cap S)}{P(M)} = \frac{0{,}22}{0{,}55} = \frac{2}{5} = 40\,\%$

(c) $P_B(W) = \frac{P(W \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}27}{0{,}6} = \frac{9}{20} = 45\,\%$

3.2.5. (a) $|B \cap E| = 0{,}38 \cdot |E| = 0{,}38 \cdot 4000 = 1520$

$|\overline{B} \cap E| = |E| - |B \cap E| = 4000 - 1520 = 2480$

$63\frac{1}{3}\% \cdot |B| = |B \cap E| \quad \Longrightarrow$

$|B| = \frac{|B \cap E|}{\frac{19}{30}} = \frac{1520 \cdot 30}{19} = 2400$

$|B \cap \overline{E}| = |B| - |B \cap E| = |B| - 1520 = 880$

$|\overline{E}| = |B \cap \overline{E}| + |\overline{B} \cap \overline{E}| = 880 + 120 = 1000$

	E	$\overline{E}$	
B	1520	880	2400
$\overline{B}$	2480	120	2600
	4000	1000	5000

%	E	$\overline{E}$	
B	30,4	17,6	48
$\overline{B}$	49,6	2,4	52
	80,0	20,0	100

(b) $P_{\overline{E}}(\overline{B}) = \frac{|\overline{B} \cap \overline{E}|}{|\overline{E}|} = \frac{120}{1000} = 12\%$

(c) $P_{\overline{B}}(\overline{E}) = \frac{|\overline{B} \cap \overline{E}|}{|\overline{B}|} = \frac{120}{2600} = \frac{3}{65} \approx 4{,}6\%$

(d) $P(E) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}48 = 0{,}384 \neq 0{,}304 = P(E \cap B) \quad \Longrightarrow \quad$ abhängig

3.2.6. (a)

	M	$\overline{M}$	
S	22 %	18 %	40 %
$\overline{S}$	33 %	27 %	60 %
	55 %	45 %	100 %

$P(M) \cdot P(S) = 55\% \cdot 0{,}4 = 22\% = P(M \cap S)$

$\Longrightarrow \quad M$ und S stochastisch unabhängig

(b)

P	A	$\overline{A}$	
B	28 %	25 %	53 %
$\overline{B}$	32 %	15 %	47 %
	60 %	40 %	100 %

$P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 53\% = 21{,}2\% \neq \underbrace{P(\overline{A} \cap B)}_{25\%}$

$\Longrightarrow \quad \overline{A}$ und B stochastisch abhängig

$\Longrightarrow \quad A$ und B stochastisch abhängig

(c)

P	E	$\overline{E}$	
F	2 %	8 %	10 %
$\overline{F}$	8 %	82 %	90 %
	10 %	90 %	100 %

$P(E) \cdot P(\overline{F}) = 0{,}1 \cdot 90\% = 9\% \neq \underbrace{P(E \cap \overline{F})}_{8\%}$

$\Longrightarrow \quad E$ und $\overline{F}$ stochastisch abhängig

$\Longrightarrow \quad E$ und F stochastisch abhängig

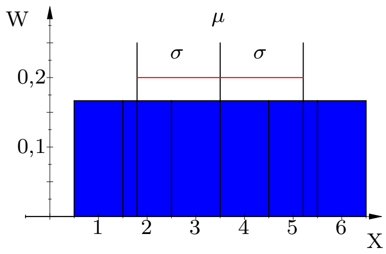
(d) $P(\overline{C}) \cdot P(\overline{H}) = 25\% \cdot 0{,}3 = 7{,}5\% = P(\overline{C} \cap \overline{H}) \quad \Longrightarrow$

$\overline{C}$ und $\overline{H}$ stochastisch unabhängig $\quad \Longrightarrow \quad C$ und H stochastisch unabhängig

3.3 Zufallsgrößen

3.3.1. (a)

i	1	2	3	4	5	6
x_i	1	2	3	4	5	6
$P(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



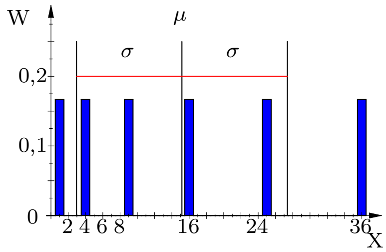
$$\mu = E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \left(\frac{7}{2} - 1\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + \left(\frac{7}{2} - 6\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \approx 1{,}7$$

(b)

i	1	2	3	4	5	6
x_i	1	4	9	16	25	36
$P(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



$$\mu = E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 36 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

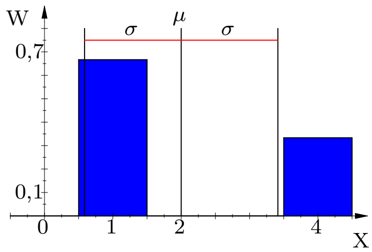
$$\mu \approx 15{,}17$$

$$\mathrm{Var}(X) = \left(\frac{91}{6} - 1\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{91}{6} - 4\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + \left(\frac{91}{6} - 36\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5369}{36}$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \approx 12{,}2$$

(c)

i	1	2
x_i	1	4
$P(x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$



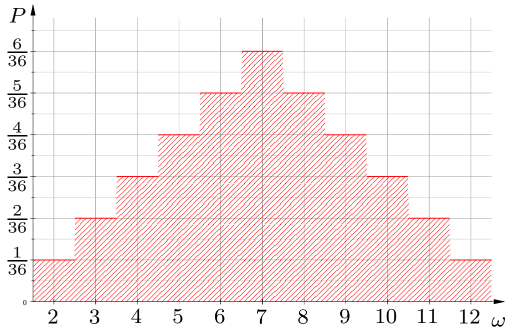
$$\mu = E(X) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

$$\mathrm{Var}(X) = (2-1)^2 \cdot \frac{2}{3} + (2-4)^2 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \approx 1{,}41$$

3.3.2. (a) Jedes Ergebnis des feineren Ergebnisraums $\Omega' = \{11, 12, 13, \ldots, 56, 66\}$ tritt wegen $|\Omega'| = 36$ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$ ein.

ω	$A \subset \Omega'$	$P(\omega)$
2	$\{11\}$	$\frac{1}{36}$
3	$\{12, 21\}$	$\frac{2}{36}$
4	$\{13, 22, 31\}$	$\frac{3}{36}$
5	$\{14, 23, 32, 41\}$	$\frac{4}{36}$
6	$\{15, 24, 33, 42, 51\}$	$\frac{5}{36}$
7	$\{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$	$\frac{6}{36}$
8	$\{26, 35, 44, 53, 62\}$	$\frac{5}{36}$
9	$\{36, 45, 54, 63\}$	$\frac{4}{36}$
10	$\{46, 55, 64\}$	$\frac{3}{36}$
11	$\{56, 65\}$	$\frac{2}{36}$
12	$\{66\}$	$\frac{1}{36}$

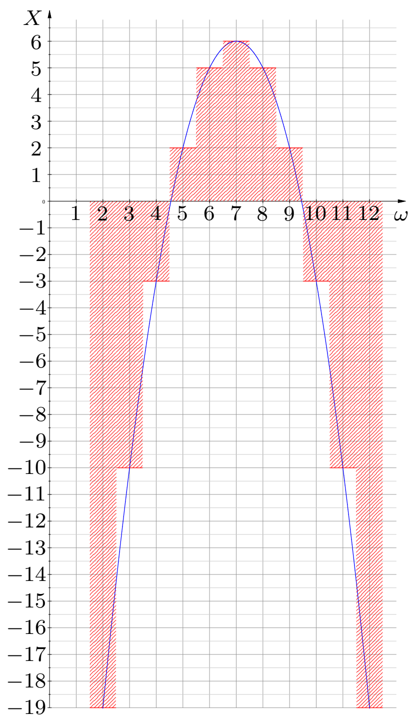


$$P(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\omega - 1}{36} & \text{für } \omega \leqq 7 \\ \dfrac{13 - \omega}{36} & \text{für } \omega > 7 \end{cases} \qquad \text{oder} \qquad P(\omega) = \frac{6 - |7 - \omega|}{36}$$

(b)

ω	$X(\omega)$
2	-19
3	-10
4	-3
5	2
6	5
7	6
8	5
9	3
10	-3
11	-10
12	-19

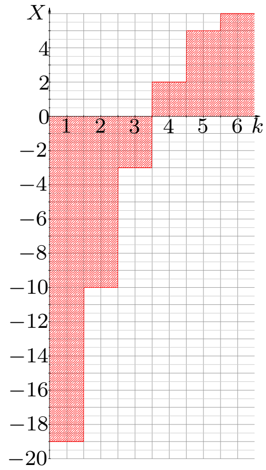
$$X(\omega) = 6 - (\omega - 7)^2$$



(c)

$$W_X = \{-19, -10, -3, 2, 5, 6\}$$

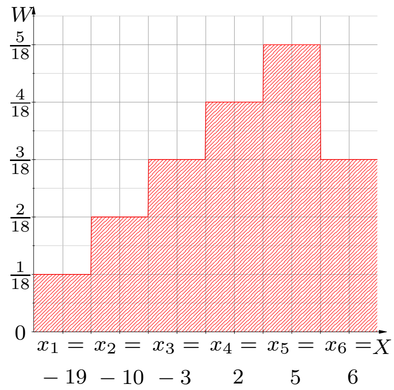
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-19	-10	-3	2	5	6



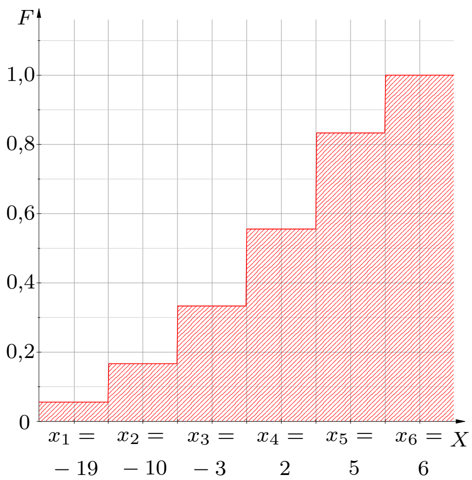
$$\begin{array}{lcl}
X = x_1 = -19 & : & A_1 = \{2, 12\} \\
X = x_2 = -10 & : & A_2 = \{3, 11\} \\
X = x_3 = -3 & : & A_3 = \{4, 10\} \\
X = x_4 = 2 & : & A_4 = \{5, 9\} \\
X = x_5 = 5 & : & A_5 = \{6, 8\} \\
X = x_6 = 6 & : & A_6 = \{7\}
\end{array}$$

(d)

$$W(x_1) = P(A_1) = P(2) + P(12) = \frac{1}{18}$$
$$W(x_2) = P(A_2) = P(3) + P(11) = \frac{2}{18}$$
$$W(x_3) = P(A_3) = P(4) + P(10) = \frac{3}{18}$$
$$W(x_4) = P(A_4) = P(5) + P(9) = \frac{4}{18}$$
$$W(x_5) = P(A_5) = P(6) + P(8) = \frac{5}{18}$$
$$W(x_6) = P(A_6) = P(7) = \frac{3}{18}$$



$$F(x_1) = W(x_1) = \frac{1}{18}$$
$$F(x_2) = F(x_1) + W(x_2) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$
$$F(x_3) = F(x_2) + W(x_3) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$
$$F(x_4) = F(x_3) + W(x_4) = \frac{10}{18} = \frac{2}{9}$$
$$F(x_5) = F(x_4) + W(x_5) = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$
$$F(x_6) = F(x_5) + W(x_6) = \frac{18}{18} = 1$$



(e) $P(S_1) = W(x_4) + W(x_5) + W(x_6) = \dfrac{2}{3}$

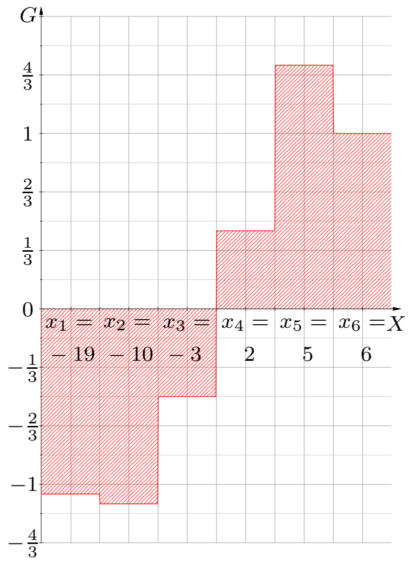
$$P(S_2) = 1 - P(S_1) = \frac{1}{3}$$

$$P(S_3) = 1 - P(X = 19) = 1 - W(x_1) = \frac{17}{18}$$

$$P(S_4) = W(x_3) + W(x_4) + W(x_5) = F(x_5) - F(x_2) = \frac{2}{3}$$

(f)

$$G(x_1) = x_1 W(x_1) = -\frac{19}{18}$$
$$G(x_2) = x_2 W(x_2) = -\frac{20}{18} = -\frac{10}{9}$$
$$G(x_3) = x_3 W(x_3) = -\frac{9}{18} = -\frac{1}{2}$$
$$G(x_4) = x_4 W(x_4) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$
$$G(x_5) = x_5 W(x_5) = \frac{25}{18}$$
$$G(x_6) = x_6 W(x_6) = \frac{18}{18} = 1$$



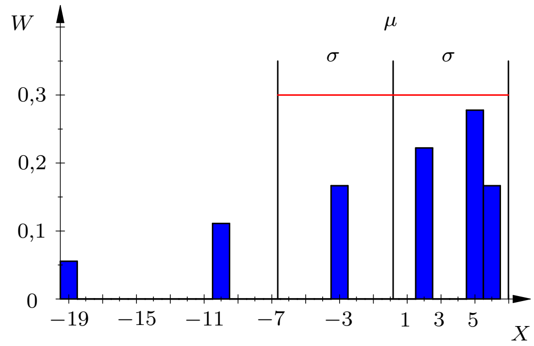
Bei N Spielen ist $NG(x_k)$ der durchschnittliche Gewinn, den der Spielebetreiber mit x_k erzielt, z.B. mit $N = 18$:

$N = 18$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$NG(x_k)$	-19	-20	-9	8	25	18

(g) $\mu = \overline{X} = \sum_{k=1}^{6} x_k W(x_k) = \frac{1}{6}$

$\mathrm{Var}(X) = \sum_{k=1}^{6} (x_k - \mu)^2 W(x_k) = \frac{1673}{36}$

$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \approx 6{,}82$



(h) Sein mittlerer Gewinn pro Tag ist $270 \cdot \frac{1}{6}$ € $= 45$ €, pro Woche 270 € und pro Monat 1080 €.

3.4 Kombinatorik – Urnenmodell

3.4.1. $3! \cdot 4! \cdot 9! \cdot 10! = 1{,}896 \cdot 10^{14}$

3.4.2. (a) $P(A) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{864} \approx 0{,}116\,\%$

(b) $P(B) = \frac{6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}{6^3 \cdot 2^2} = \frac{1}{72} \approx 1{,}39\,\%$

(c) $P(C) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1}{6^3 \cdot 2^2} = \frac{5}{18} \approx 27{,}8\,\%$

3.4.3. $52^k \leqq n \quad\Longrightarrow\quad k \ln 52 \leqq \ln n \quad\Longrightarrow\quad k \leqq \frac{\ln n}{\ln 52}$

(a) $n_1 = 365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 = 525969 \quad\Longrightarrow\quad k \leqq \frac{\ln n_1}{\ln 52} = 3{,}33 \quad\Longrightarrow\quad k_{\max} = 3$

(b) $n_2 = 1000 n_1 = 525\,969\,000 \quad\Longrightarrow\quad k \leqq \frac{\ln n_2}{\ln 52} = 5{,}08 \quad\Longrightarrow\quad k_{\max} = 5$

(c) $n_3 = 13{,}7 \cdot 10^9 n_1 = 7{,}206 \cdot 10^{15} \quad\Longrightarrow\quad k \leqq \frac{\ln n_3}{\ln 52} = 9{,}24 \quad\Longrightarrow\quad k_{\max} = 9$

3.4.4. (a) Geordnet mit Zurücklegen: $n = 26^5 = 11\,881\,376$

(b) Geordnet ohne Zurücklegen: $n = \frac{26!}{(26-5)!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 7\,893\,600$

(c) Ungeordnet ohne Zurücklegen: $n = \binom{49}{6} = 13\,983\,816$

(d) Geordnet ohne Zurücklegen (Permutation): $n = 10! = 3\,628\,800$

(e) Geordnet mit Zurücklegen: $n = 3^{10} = 59\,049$

(f) Ungeordnet mit Zurücklegen: $n = \binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10} = \binom{12}{2} = 66$

Sind x_1, x_2 und x_3 die Besetzungszahlen, dann kann man das Problem auch so formulieren:

Wie viele Lösungen aus $\mathbb{N}_0$ hat die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 10$?

(g) Das ist keine unserer Grundaufgaben. Anders formuliert lautet das Problem:

Wie viele Lösungen aus $\mathbb{N}_0$ hat die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ mit $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$? Für dieses Problem gibt es keine einfache geschlossene Formel. Wir lösen es durch das Hinschreiben aller Möglichkeiten für (x_1, x_2, x_3): (0,0,10), (0,1,9), (0,2,8), (1,1,8), (0,3,7), (1,2,7), (0,4,6), (1,3,6), (2,2,6), (0,5,5), (1,4,5), (2,3,5), (2,4,4), (3,3,4), also 14 Möglichkeiten.

Weiterführende Lektüre: Im Netz nach *Partiton Function* suchen (z.B. auf den Seiten von WolframMathWorld). Mit der Rundungsfunktion oder nint-Funktion (*nearest integer*)

$$[x] = \text{nächstgelegene ganze Zahl von } x,$$

wobei Komma-Fünf-Zahlen auf die nächste *gerade* Zahl gerundet werden ($[1{,}5] = 2$, $[2{,}5] = 2$, $[3{,}5] = 4$) und der Abrundfunktion oder floor-Funktion

$$\lfloor x \rfloor = \text{nächstkleinere ganze Zahl von } x$$

($\lfloor -2,3 \rfloor = -3$, $\lfloor 2,3 \rfloor = 2$) hat die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = n$ mit $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$ genau

$$1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left[\frac{n^2}{12} \right]$$

Lösungen in $\mathbb{N}_0$. Für $n = 10$ ergibt sich

$$1 + \left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor + \left[\frac{10^2}{12} \right] = 1 + \lfloor 5 \rfloor + [8{,}\overline{3}] = 1 + 5 + 8 = 14$$

3.4.5. Es gibt $n = \binom{32}{8} = 10\,518\,300$ verschiedene Schafkopfblätter.

(a) Buam-Solo-Du: $z = 1 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 9{,}51 \cdot 10^{-8}$.

Wenn jemand jeden Tag 100 Spiele absolviert, dauert es im Schnitt $10^5\,\mathrm{d} = 288\,\mathrm{a}$ bis er einmal ein Buam-Solo-Du erhält. Soviel zum korrekten Mischen beim Schafkopfen!

(b) Vier Ober und vier Herzkarten: $z = 1 \cdot \binom{7}{4} = 35 \quad \Longrightarrow \quad p = \dfrac{z}{n} = 3{,}33 \cdot 10^{-6}$

(c) Keinen Ober und keinen Unter: $z = \binom{24}{8} = 735\,471 \quad \Longrightarrow \quad p = \dfrac{z}{n} = 6{,}99 \cdot 10^{-2}$

(d) Acht Trümpfe für ein Herz-Solo: $z = \binom{14}{8} = 3003 \quad \Longrightarrow \quad p = \dfrac{z}{n} = 2{,}89 \cdot 10^{-4}$

(e) Wir betrachten den Spieler mit dem Herzober. Er bekommt noch sieben Karten aus den restlichen 23 Karten (5 Trümpfe, 18 Nichttrümpfe). Die Zahl der Möglichkeiten, keinen Trumpf mehr zu bekommen, ist

$$z_0 = \binom{18}{7}$$

Die Zahl der Möglichkeiten, noch einen Trumpf zu bekommen, ist

$$z_1 = 5 \cdot \binom{18}{6}$$

Also gewinnt unser Spieler seinen „Du“ in $z = z_1 + z_2 = 124\,644$ von

$$n = \binom{23}{7} = 245\,157$$

Fällen, d.h. mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{z}{n} = 0{,}5084 = 50{,}84\%$.

3.4.6. Die Zahl der möglichen Pokerblätter zu fünf Karten ist $n = \binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

(a) Royal Flush: $z = 4 \quad \Longrightarrow \quad p = \dfrac{z}{n} = 1{,}54 \cdot 10^{-6}$

(b) Straight Flush: $z = 4 \cdot 9 = 36 \quad \Longrightarrow \quad p = \dfrac{z}{n} = 1{,}39 \cdot 10^{-5}$

(c) Vierer: $z = 13 \cdot 48 = 624 \quad \Longrightarrow \quad p = \dfrac{z}{n} = 2{,}40 \cdot 10^{-4}$

(d) Full House: $z = 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 3744 \quad \Longrightarrow \quad p = \dfrac{z}{n} = 1{,}44 \cdot 10^{-3}$

(e) Flush: $z = 4 \cdot \binom{13}{5} - 36 - 4 = 5108 \quad \Longrightarrow \quad p = \dfrac{z}{n} = 1{,}97 \cdot 10^{-3}$

(f) Straight: $z = 10 \cdot 4^5 - 36 - 4 = 10200 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 3{,}92 \cdot 10^{-2}$

(g) Dreier: $z = 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \frac{48 \cdot 44}{2} = 54\,912 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 2{,}11 \cdot 10^{-2}$

(h) Zwei Paare: $z = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot 44 = 123\,552 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 4{,}75 \cdot 10^{-2}$

(i) Ein Paar: $13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \frac{48 \cdot 44 \cdot 40}{3!} = 1\,098\,240 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 0{,}423$

3.4.7. (a) Anfangslage: n rote und n schwarze Karten. Die Wahrscheinlichkeit für ein Pärchen ist

$$p_n = P(\{rs, sr\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2n-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2n-1} = \frac{n}{2n-1}$$

Beim nächsten Versuch ist die Ausgangslage $n-1$ rote und $n-1$ schwarze Karten, d.h. die Wahrscheinlichkeitfür ein zweites Pärchen ist

$$p_{n-1} = \frac{n-1}{2(n-1)-1} = \frac{n-1}{2n-3}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeitist dann

$$\begin{aligned} p &= p_n \cdot p_{n-1} \cdot p_{n-2} \cdot \ldots \cdot p_1 = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1} = \\ &= \frac{n! \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1)!} = \frac{n! \cdot 2 \cdot (n-1) \cdot 2 \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}{(2n-1)!} = \\ &= \frac{n! \cdot 2^{n-1} \cdot (n-1)!}{(2n-1)!} = \frac{n! \cdot 2^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot 2n}{(2n-1)! \cdot 2n} = \frac{n! \cdot 2^n \cdot n!}{(2n)!} = \frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n)!} \end{aligned}$$

Für $n = 26$ ist

$$p = \frac{2^{26} \cdot (26!)^2}{52!} = 1{,}35 \cdot 10^{-7}$$

(b) Der Unterschied zu Teilaufgabe (a): Die Wahrscheinlichkeit für ein rs-Paar ist halb so groß wie p_n, d.h. die gesamte gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$p' = \frac{1}{2^n} \cdot p = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n)!} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Für $n = 26$ ist

$$p' = \frac{(26!)^2}{52!} = 2{,}0 \cdot 10^{-15}$$

(c) Entweder Stapel 1 rot und Stapel 2 schwarz oder umgekehrt:

$$p'' = 2p' = \frac{2(n!)^2}{(2n)!}$$

Für $n = 26$ ist $p'' = 4{,}0 \cdot 10^{-15}$.

3.4.8. (a) $\overline{p}(n)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter n Personen alle an verschiedenen Tagen Geburtstag haben:

$$\overline{p}(n) = \begin{cases} \dfrac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} = \dfrac{365!}{365^n \cdot (365-n)!} & \text{für } n \leqq 365 \\ 0 & \text{für } n > 365 \end{cases}$$

Da der Taschenrechner $n!$ für $n > 69$ nicht berechnen kann, verwenden wir das Ergebnis in der Form (hier ist keine Fallunterscheidung nötig!)

$$\overline{p}(n) = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \frac{365-n+1}{365} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{365-i}{365}$$

$$p(n) = 1 - \overline{p}(n) = 1 - \prod_{i=1}^{n-1} \frac{365-i}{365}$$

Eine weiter Form für die Berechnung mit einem Taschenrechner, der die Binomialkoeffizienten beherrscht:

$$\overline{p}(n) = \frac{365!}{365^n \cdot (365-n)!} = \frac{365! \cdot n!}{365^n \cdot (365-n)! \cdot n!} = \frac{n!}{365^n} \cdot \binom{365}{n}$$

Weiter muss man aufpassen, dass der TR kein Zwischenergebnis $\geqq 10^{100}$ errechnet. Als Beispiel die Berechnung für $n = 40$:

$$\overline{p}(40) = \binom{365}{39} \cdot \frac{326}{40} : 365^{20} : 365^{20} \cdot 40! = 0{,}10877 \quad \Longrightarrow \quad p(40) = 0{,}89123$$

Noch etwas trickreicher die Berechnung für $n = 60$:

$$\binom{365}{60} = \underbrace{\frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 327}{1 \cdot 2 \ldots \cdot 39}}_{\binom{365}{39}} \cdot \underbrace{\frac{326 \cdot 325 \cdot \ldots \cdot 306}{40 \cdot 41 \ldots \cdot 60}}_{\binom{326}{21} \cdot \frac{21! \cdot 39!}{60!}}$$

$$\overline{p}(60) = \binom{365}{39} : 60! \cdot \binom{326}{21} \cdot 21! \cdot 39! : 365^{20} : 365^{20} : 365^{20} \cdot 60! = 0{,}005877$$

$$\Longrightarrow \quad p(60) = 0{,}99412$$

n	2	3	4	5	6	7
$p(n)$	0,274%	0,820%	1,64%	2,71%	4,05%	5,62%
n	8	9	10	20	40	60
$p(n)$	7,43%	9,46%	11,69%	41,14%	89,12%	99,41%

(b) $p(22) = 47{,}57\%$ und $p(23) = 50{,}73\%$ $\quad \Longrightarrow \quad$ ab 23 Personen

3.4.9. $\overline{\mathrm{G}}\mathrm{Z}(6,n) = \binom{6+n-1}{n} = \binom{n+5}{n} = \frac{(n+5)!}{n! \cdot 5!} = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{120}$

$$\overline{\mathrm{G}}\mathrm{Z}(6,n) > 10^6 \quad \Longrightarrow \quad (n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) > 1{,}2 \cdot 10^8$$

Das Produkt nähern wir durch $(n+3)^5$ an:

$$(n+3)^5 > 1{,}2 \cdot 10^8 \quad \Longrightarrow \quad n > \left(1{,}2 \cdot 10^8\right)^{\frac{1}{5}} - 3 = 38{,}3$$

Probieren:

$$\binom{38+5}{5} = 962\,598, \quad \binom{39+5}{5} = 1\,086\,008 \quad \Longrightarrow \quad n \geqq 39$$

3.4.10. (a) $N = 3^{20} = 3\,486\,784\,401$

(b) Statt die Schüler 1, 2 ... 20 auf die Hotels A, B und C kann man auch die Hotels auf die Schüler verteilen. Damit MISSISSIPPI-Problem: $N = \dfrac{20!}{8! \cdot 7! \cdot 5!} = 99\,768\,240$

(c) 15 Buben auf A und B, die 5 Mädchen in C: $N = \dfrac{15!}{8! \cdot 7!} \cdot 1 = 6\,435$

3.4.11. Wenn n Lose gekauft werden, ist die Wahrscheinlichkeit für k Treffer:

$$P(X = k) = \frac{\binom{40}{k} \cdot \binom{460}{n-k}}{\binom{500}{n}}$$

(a) $P(X \geqq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \dfrac{\binom{40}{0} \cdot \binom{460}{n}}{\binom{500}{n}} = 1 - \dfrac{\binom{460}{n}}{\binom{500}{n}} > 0{,}4 \quad \Longrightarrow$

$$f(n) = \frac{\binom{460}{n}}{\binom{500}{n}} < 0{,}6$$

$$f(6) = 0{,}605 \text{ und } f(7) = 0{,}56 \quad \Longrightarrow \quad \text{mindestens 7 Lose}$$

(b) $P(X = 2) = \dfrac{\binom{40}{2}\binom{460}{10-2}}{\binom{500}{10}} = 0{,}148$

$P(X \geqq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \dfrac{\binom{40}{0}\binom{460}{10}}{\binom{500}{10}} - \dfrac{\binom{40}{1}\binom{460}{9}}{\binom{500}{10}} = 0{,}187$

3.4.12. (a) dual zu „Ziehen geordnet ohne Zurücklegen“:

$$N = \mathrm{G}\overline{\mathrm{Z}}(64, 5) = \frac{64!}{(64-5)!} = 64 \cdot 63 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60 = 914\,941\,440$$

(b) dual zu „Ziehen geordnet mit Zurücklegen“:

$$N = \mathrm{GZ}(64, 5) = 64^5 = 1\,073\,741\,824$$

(c) dual zu „Ziehen ungeordnet ohne Zurücklegen“:

$$N = \overline{\mathrm{GZ}}(64, 5) = \binom{64}{5} = 7\,624\,512$$

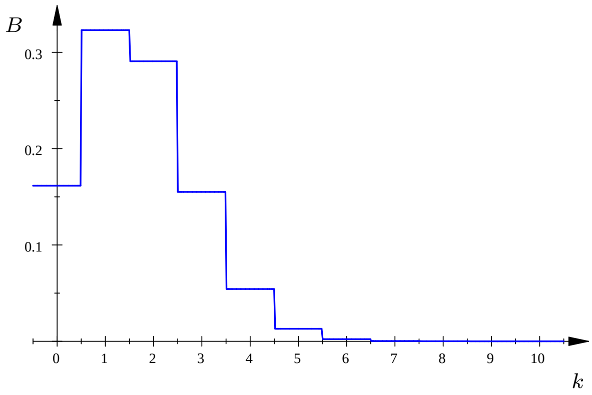
(d) dual zu „Ziehen ungeordnet mit Zurücklegen“:

$$N = \overline{\mathrm{G}}\mathrm{Z}(64, 5) = \binom{68}{5} = 10\,424\,128$$

3.5 Die Bernoullikette

3.5.1. (a)

k	$B(10,\frac{1}{6},k)$
0	16,15%
1	32,30%
2	29,07%
3	15,50%
4	5,43%
5	1,30%
6	0,22%
7	0,025%
8	$1{,}86\cdot 10^{-3}$ %
9	$8{,}27\cdot 10^{-5}$ %
10	$1{,}65\cdot 10^{-6}$ %



(b) $p=\dfrac{1}{6}$, $q=1-p=\dfrac{5}{6}$

P(„mindestens einmal 6“) $=1-P$(„keine 6“) $=1-q^n\geqq 0{,}9$

$q^n\leqq 0{,}1 \quad\Longrightarrow\quad n\geqq\dfrac{\ln 0{,}1}{\ln\frac{5}{6}}=12{,}6$

Der Würfel muss mindestens 13-mal geworfen werden.

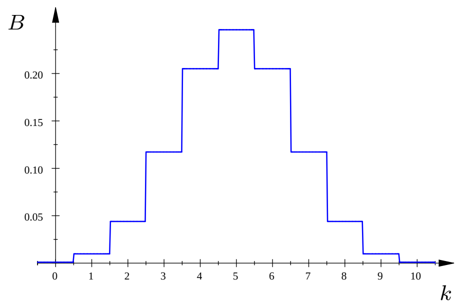
$$P(\text{„mindestens einmal 6“})=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{13}=90{,}65\%$$

3.5.2. (a) $B(n;\frac{1}{2};k)=\dbinom{n}{k}\dfrac{1}{2^k}\cdot\dfrac{1}{2^{n-k}}=\dbinom{n}{k}\dfrac{1}{2^n}$

$B(n;\frac{1}{2};n-k)=\dbinom{n}{k}\dfrac{1}{2^{n-k}}\cdot\dfrac{1}{2^k}=\dbinom{n}{k}\dfrac{1}{2^n}$

$B(n;\frac{1}{2};k)=B(n;\frac{1}{2};n-k) \quad\Longrightarrow$

$B(n;\frac{1}{2};k)$ ist symmetrisch zur Geraden $k=\frac{n}{2}$



(b) Mittlere Säule: $B(n;\frac{1}{2};\frac{n}{2})=\dbinom{n}{\frac{n}{2}}\cdot\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{n!}{2^n\cdot\left(\frac{n}{2}\right)!^2}$

Säulen daneben:

$$B(n;\tfrac{1}{2};\tfrac{n}{2}-1)=B(n;\tfrac{1}{2};\tfrac{n}{2}+1)=\binom{n}{\frac{n}{2}+1}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{n!}{2^n\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)!\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)!}=$$

$$=\frac{n!}{2^n\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdot\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot 1\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdot\ldots\cdot 1}=$$

$$=\frac{\frac{n}{2}\cdot n!}{\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdot 2^n\cdot\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot 1\cdot\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdot\ldots\cdot 1}=$$

$$=\frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+1}\cdot\frac{n!}{2^n\cdot\left(\frac{n}{2}\right)!^2}=\underbrace{\frac{n}{n+2}}_{<1}\cdot B(n;\tfrac{1}{2};\tfrac{n}{2})<B(n;\tfrac{1}{2};\tfrac{n}{2})$$

(c) P(„mindestens einmal K“) $=1-P$(„kein K“) $=1-\dfrac{1}{2^n}\geqq 0{,}9$

$$\frac{1}{2^n} \leqq 0{,}1 \quad\Longrightarrow\quad 2^n \geqq 10 \quad\Longrightarrow\quad n\ln 2 \geqq \ln 10 \quad\Longrightarrow\quad n \geqq \frac{\ln 10}{\ln 2} = 3{,}32$$

Die Münze muss mindestens viermal geworfen werden.

$$P(\text{„mindestens einmal K“}) = 1 - \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16} = 93{,}75\%$$

3.5.3. $p = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816} = 7{,}151 \cdot 10^{-8}, \quad q = 1 - p = \frac{13983815}{13983816} = 0{,}9999999285$

$n \geqq \frac{\ln 0{,}1}{\ln q} = 32\,198\,925{,}11$, also mindestens 32 198 926-mal.

3.5.4. (a) Es gibt $z = 5^{10} = 9\,765\,625$ verschiedene Möglichkeiten, also ist

$$p = \frac{1}{9\,765\,625} = 1{,}024 \cdot 10^{-7}$$

(b) $q = 1 - p = \frac{9\,765\,624}{9}765\,625 = 0{,}999\,999\,8976 \quad\Longrightarrow$

$$p_1 = 1 - q^{10000} = 1{,}0235 \cdot 10^{-3} = 0{,}10235\%$$

(c) $1 - q^n \geqq 0{,}5 \quad\Longrightarrow\quad q^n \leqq 0{,}5 \quad\Longrightarrow\quad n \geqq \frac{\ln 0{,}5}{\ln q} = 6\,769\,015{,}09$

3.5.5. (a) $p = \frac{4}{5} = 0{,}8$, $q = 1 - p = \frac{1}{5} = 0{,}2$, $p_1 = p^{15}q^5 = \frac{4^{15}}{5^{20}} = 1{,}126 \cdot 10^{-5}$

(b) $p_2 = \binom{20}{15} p^{15} q^5 = \underbrace{\binom{20}{5}}_{15504} p^{15} q^5 = \frac{15504 \cdot 4^{15}}{5^{20}} = 17{,}46\%$

(c) $p_{\mathrm{T}} = p^5 = \frac{4^5}{5^5} = \frac{1024}{3125} = 0{,}32768 = 32{,}768\%$

$q_{\mathrm{T}} = 1 - p_{\mathrm{T}} = \frac{2101}{3125} = 0{,}67232 = 67{,}232\%$

$P(\text{„kein Treffer“}) = q_{\mathrm{T}}^n, \quad P(\text{„mindestens ein Treffer“}) = 1 - q_{\mathrm{T}}^n$

$$1 - q_{\mathrm{T}}^n \geqq 0{,}95 \quad\Longrightarrow\quad q_{\mathrm{T}}^n \leqq 0{,}05 \quad\Longrightarrow\quad n \geqq \frac{\ln 0{,}05}{\ln q_{\mathrm{T}}} = 7{,}55$$

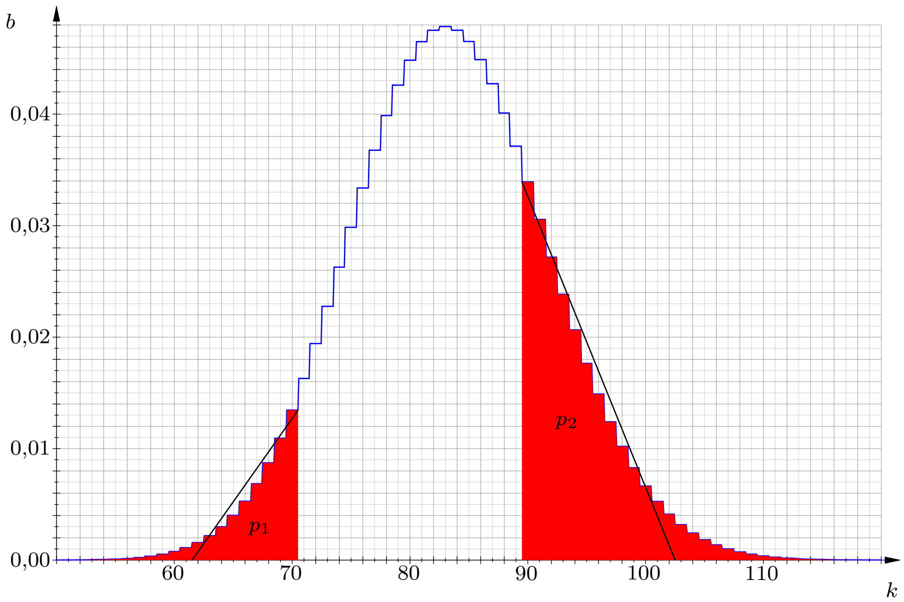
Lena muss mindestens acht Serien schießen.

3.5.6. (a) $p = \dfrac{1}{6} \quad \Longrightarrow \quad q = 1 - p = \dfrac{5}{6}, \quad 1 - q^n \geqq 0{,}9999 \quad \Longrightarrow \quad q^n \leqq 10^{-4}$

$$n \ln q \leqq -4 \ln 10 \quad \Longrightarrow \quad n \geqq \frac{-4 \ln 10}{\ln q} = 50{,}52 \quad \Longrightarrow \quad n \geqq 51$$

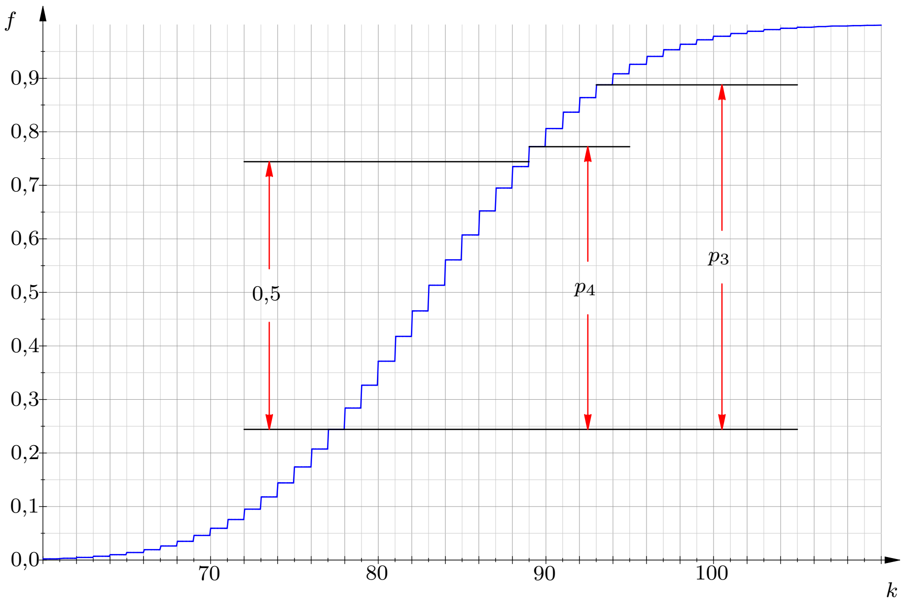
(b) $p_1 = \sum\limits_{k=0}^{70} B\left(500, \dfrac{1}{6}, k\right) \approx \dfrac{1}{2} \cdot 9 \cdot 0{,}0135 \approx 6\%$

$p_2 = \sum\limits_{k=90}^{500} B\left(500, \dfrac{1}{6}, k\right) \approx \dfrac{1}{2} \cdot 13 \cdot 0{,}034 \approx 22\%$



(c) $p_3 = \sum\limits_{k=78}^{93} B\left(500, \dfrac{1}{6}, k\right) = F_{\frac{1}{6}}^{500}(93) - F_{\frac{1}{6}}^{500}(77) = f(93) - f(77) \approx 64\%$

$p_4 = f(m) - f(77) \geqq 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad f(m) \geqq f(77) + 0{,}5 \approx 0{,}75 \quad \Longrightarrow \quad m = 89$



3.5.7. Trefferwahrscheinlichkeit: $p = \dfrac{1}{8}, \quad q = 1 - p = \dfrac{7}{8}$

(a) $p_1 = p^3 q^7 = 7{,}67 \cdot 10^{-4}$

(b) $p_2 = B(10; \frac{1}{8}; 3) = \dbinom{10}{3} p^3 q^7 = 0{,}0920 = 9{,}20\%$

(c) $p_3 = 1 - B(10; \frac{1}{8}; 0) = 1 - \dbinom{10}{0} p^0 q^{10} = 1 - q^{10} = 0{,}7369 = 73{,}69\%$

(d) $P(\text{„mindestens 3 Treffer“}) = 1 - P(\text{„höchstens 2 Treffer“} \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} p_4 &= B(10; \tfrac{1}{8}; 3) + B(10; \tfrac{1}{8}; 4) + \ldots + B(10; \tfrac{1}{8}; 10) = \\ &= 1 - B(10; \tfrac{1}{8}; 0) - B(10; \tfrac{1}{8}; 1) - B(10; \tfrac{1}{8}; 2) = \\ &= 1 - q^{10} - \binom{10}{1} p^1 q^9 - \binom{10}{2} p^2 q^8 = 0{,}1195 = 11{,}95\% \end{aligned}$$

(e) $1 - q^n \geqq 0{,}9 \quad \Longrightarrow \quad q^n \leqq 0{,}1 \quad \Longrightarrow \quad n \geqq \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln q} = 17{,}24$, also mindestens 18-mal.

(f) $1 - q^n - \dbinom{n}{1} p^1 q^{n-1} \geqq 0{,}9 \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{q^n + npq^{n-1}}_{f(n)} \leqq 0{,}1$

Diese Gleichung ist für uns nur durch Probieren lösbar:

$f(29) = 0{,}107$ und $f(30) = 0{,}0962 \quad \Longrightarrow \quad$ mindestens 30 Karten

(g) Es gibt 9 Möglichkeiten für die Lage des Trefferpaars. Die Gewinnwahrscheinlichkeit des Spielers ist also

$$p_g = 9p^2 q^8 = 0{,}04832 = 4{,}832\%$$

E sei der Einsatz pro Spiel. Von N Spielen gewinnt die Bank $(1 - p_g)N$ Spiele und nimmt somit $(1 - p_g)NE$ ein. Andererseits verliert die Bank $p_g N$ Spiele und zahlt damit $20 p_g NE$ aus. Die Rendite der Bank ist also

$$\frac{(1 - p_g)NE - 20 p_g NE}{NE} = 1 - 21 p_g = -1{,}47\%$$

Die Bank dürfte nur das 19-fache des Einsatzes auszahlen, dann wäre die Rendite $1 - 20 p_g = 3{,}36\%$

3.5.8. $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

	$B(10; 0{,}8)$	$B(50; 0{,}6)$	$B(100; 0{,}7)$	$B(200; 0{,}1)$
μ	8	30	70	20
σ	1,265	3,464	4,583	4,243
2σ	2,530	6,928	9,165	8,485
3σ	3,795	10,39	13,75	12,73

(a) $P(\mu - \sigma \leqq X \leqq \mu + \sigma) = F(\mu + \sigma) - F(\mu - \sigma)$

	$B(10; 0{,}8)$	$B(50; 0{,}6)$	$B(100; 0{,}7)$	$B(200; 0{,}1)$
$P(X \in I_1)$	$F(9) - F(6)$ $= 77{,}2\%$	$F(33) - F(26)$ $= 68{,}8\%$	$F(74) - F(65)$ $= 67{,}4\%$	$F(24) - F(15)$ $= 71{,}2\%$

Mittelwert: 71,15% für große n : 68,3%

(b) $P(\mu - 2\sigma \leqq X \leqq \mu + 2\sigma) = F(\mu + 2\sigma) - F(\mu - 2\sigma)$

	$B(10;0{,}8)$	$B(50;0{,}6)$	$B(100;0{,}7)$	$B(200;0{,}1)$
$P(X \in I_2)$	$F(10) - F(5)$ $= 96{,}7\%$	$F(36) - F(23)$ $= 94{,}1\%$	$F(79) - F(60)$ $= 96{,}3\%$	$F(28) - F(11)$ $= 95{,}6\%$

Mittelwert: 95,68% für große n : 95,4%

(c) $P(\mu - 3\sigma \leqq X \leqq \mu + 3\sigma) = F(\mu + 3\sigma) - F(\mu - 3\sigma)$

	$B(10;0{,}8)$	$B(50;0{,}6)$	$B(100;0{,}7)$	$B(200;0{,}1)$
$P(X \in I_3)$	$F(11) - F(4)$ $= 99{,}36\%$	$F(40) - F(19)$ $= 99{,}79\%$	$F(83) - F(56)$ $= 99{,}69\%$	$F(32) - F(7)$ $= 99{,}66\%$

Mittelwert: 99,63% für große n : 99,7%

3.5.9. (a) $P(X < \mu - \sigma) = P(X > \mu + \sigma) = \dfrac{1 - P(\mu - \sigma \leqq X \leqq \mu + \sigma)}{2} = 15{,}9\%$

$$P(X < \mu - 2\sigma) = P(X > \mu + 2\sigma) = \frac{1 - P(\mu - 2\sigma \leqq X \leqq \mu + 2\sigma)}{2} = 2{,}3\%$$

$$P(X < \mu - 3\sigma) = P(X > \mu + 3\sigma) = \frac{1 - P(\mu - 3\sigma \leqq X \leqq \mu + 3\sigma)}{2} = 0{,}15\%$$

(b) Ein rechtsseitiger Signifikanztest der Stichprobenlänge n auf dem Signifikanzniveau 16% (2,3%, 0,15%) hat den kritischen Bereich

$K = \{k + 1, \dots, n\}$ mit $k = \lceil \mu + \sigma \rceil$ ($k = \lceil \mu + 2\sigma \rceil$, $k = \lceil \mu + 3\sigma \rceil$).

Um ganz sicher zu gehen, verwenden wir die *Aufrundungsfunktion*

$$\lceil x \rceil = \text{kleinste ganze Zahl} \geqq x$$

Analog gilt mit der *Abrundungsfunktion*

$$\lfloor x \rfloor = \text{größte ganze Zahl} \leqq x \ :$$

Ein linksseitiger Signifikanztest der Stichprobenlänge n auf dem Signifikanzniveau 16% (2,3%, 0,15%) hat den kritischen Bereich

$K = \{0, \dots, k\}$ mit $k = \lfloor \mu - \sigma \rfloor$ ($k = \lfloor \mu - 2\sigma \rfloor$, $k = \lfloor \mu - 3\sigma \rfloor$).

(c) $p = 0{,}04$, $\mu = np = 40$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{38{,}4} = 6{,}2$

Linksseitiger Test: $K = \{0, \dots, k\}$ mit $k = \lfloor \mu - 2\sigma \rfloor = \lfloor 27{,}6 \rfloor = 27$

Wird dieser Test auf viele Medikamente angewendet, dann werden höchstens 2,3% der schädlichen Arzneien für gut befunden, allerdings im schlechtesten Fall 97,7% der guten Medikamente nicht als solche erkannt.

3.5.10. (a) Mit $p = \dfrac{S}{N}$ folgt $P_1 = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \dbinom{n}{k} \cdot \dfrac{S^k (N-S)^{n-k}}{N^n}$

(b) $P_2 = \dfrac{\dbinom{S}{k} \cdot \dbinom{N-S}{n-k}}{\dbinom{N}{n}}$

(c) Im Fall „ohne Zurücklegen“ ändert sich die Trefferwahrscheinlichkeit vom $p_1 = \frac{S}{N}$ bei der ersten gezogenen Kugel bis $n = \frac{S-k}{N-n}$ bei der letzten Kugel. Für $S \gg k$ und $N \gg n$ gilt $p_1 \approx p_2 \approx \ldots \approx p_n$ und wir können näherungsweise von einer Bernoullikette mit Parameter $p = p_1$ ausgehen.

(d) In beiden Fällen ist $p = 0{,}4$:

$$P_1 = \binom{20}{8} 0{,}4^8 \cdot 0{,}6^{12} = 17{,}97\%, \qquad P_2 = \frac{\binom{40}{8} \cdot \binom{60}{12}}{\binom{100}{20}} = 20{,}08\%$$

ii. $$P_1 = \binom{20}{8} 0{,}4^8 \cdot 0{,}6^{12} = 17{,}97\%, \qquad P_2 = \frac{\binom{4000}{8} \cdot \binom{6000}{12}}{\binom{10000}{20}} = 17{,}99\%$$

(e) Die möglichen Trefferwahrscheinlichkeiten sind hier diskret, da die Kugeln nur ganzzahlig vorkommen:

$$H_0 = \left\{ \frac{40}{100}, \frac{41}{100}, \ldots, \frac{100}{100} \right\}, \qquad H_1 = \left\{ \frac{0}{100}, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{39}{100} \right\}$$

Aus $K = \{0, 1, 2, \ldots, k\}$ und $\alpha = 0{,}05$ folgt

$$\alpha'_{\max} = F_{0,4}^{200}(k) \leqq \alpha \quad \Longrightarrow \quad k = 68$$

$$\alpha'_{\max} = F_{0,4}^{200}(68) = 4{,}748\%, \qquad \beta'_{\max} = 1 - F_{0,39}^{200}(68) = 91{,}662\%$$

$\beta'_{\max}$ wurde mit einem CAS berechnet. Weil die Hypothesen nicht kontinuierlich sind, ist $\alpha'_{\max} + \beta'_{\max} = 96{,}41\% \neq 1$.