Physik 10. Klasse g8
Aufgaben

Richard Reindl

Die aktuellste Version der Aufgaben findet man unter

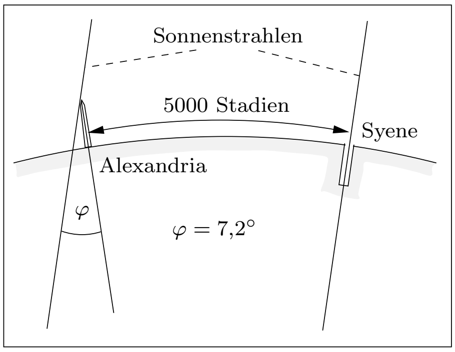
http://www.stbit.de

24. Juni 2014

1 Das astronomische Weltbild

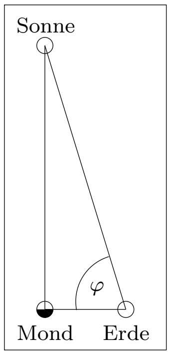
1.1 Geozentrisches und heliozentrisches Weltbild

1.1.1. **Eratosthenes (276-194 v.Chr.) berechnet den Erdradius**



Die ägyptischen Städte Alexandria und Syene (heute Assuan) liegen auf dem gleichen Längengrad (Meridian). Am Tag der Sommersonnwende spiegelte sich zur Mittagszeit die Sonne im tiefen Brunnen von Syene, d.h. die Sonne stand genau senkrecht über Syene (Syene liegt auf dem *Wendekreis des Krebses*). Zur gleichen Zeit warf die Sonne im 5000 Stadien ($\approx 800\,\mathrm{km}$) nördlich gelegenen Alexandria einen kleinen Schatten (siehe Abb.). Berechne den Erdradius.
Welche anderen Argumente für die kugelförmige Gestalt der Erde konnten zur damaligen Zeit noch vorgebracht werden, welche gibt es heute?

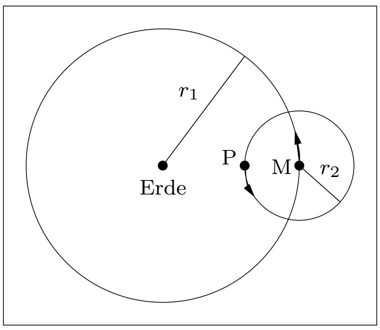
1.1.2. **Aristarch aus Samos (315-240 v.Chr.) berechnet das Verhältnis der Entfernungen Erde-Sonne und Erde-Mond**



Nebenstehende Abbildung zeigt die Lage von Erde, Sonne und Mond, wenn von der Erde aus der Mond gerade als Halbmond erscheint. Aristarch aus Samos, der auch ein heliozentrisches Weltbild vorgeschlagen hatte, bestimmte den Winkel Sonne-Erde-Mond etwas ungenau zu $\varphi \approx 87°$. Berechne daraus das Verhältnis der Entfernungen Erde-Sonne und Erde-Mond.

Berechne den wahren Wert des Winkels φ aus den heute bekannten Entfernungen $\overline{\mathrm{SE}} = 1{,}496 \cdot 10^8\,\mathrm{km}$ und $\overline{\mathrm{ME}} = 384\,400\,\mathrm{km}$.

1.1.3. **Das Weltbild des Ptolemäus (90-168 n.Chr.), vereinfachte Darstellung**



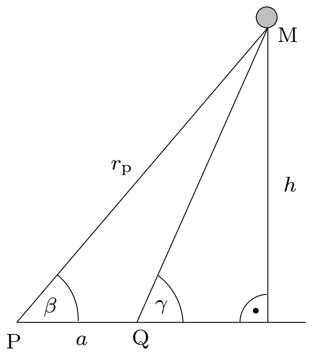
Die Planeten (Wandelsterne, Wanderer) verändern ihre Lage relativ zu den Fixsternen. Dabei führen sie schleifenartige Bewegungen aus. Zu deren Erklärung nahm Ptolemäus an, dass ein Planet in der Zeit T_2 um einen Punkt M kreist, der sich wiederum in der Zeit T_1 auf einer Kreisbahn um die Erde bewegt (siehe Abb.). Konstruiere die Planetenbahn punktweise für $T_1 = 1\,\mathrm{a}$, $T_2 = \frac{1}{4}T_1$ und $r_1 = 2{,}5\,r_2$ (das entspricht ungefähr dem Merkur).

Erstelle die Gleichungen der Bahn in Parameterform (t als Parameter, d.h. $x = f(t)$, $y = g(t)$) und zeichne sie mit einer geeigneten Software.

1.1.4. (a) Erkläre anhand geeigneter Skizzen das Zustandekommen einer Sonnen- und einer Mondfinsternis.

(b) Es gibt ringförmige und totale Sonnenfinsternisse. Schätze auf Grund dieser Tatsache den Radius der Sonne ab ($R_{\mathrm{Mond}} = 1738\,\mathrm{km}$).

1.1.5. **Mondentfernung**

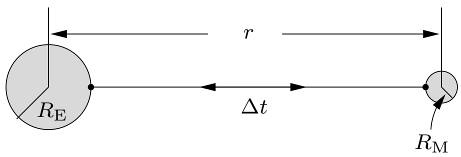


(a) Die Orte P und Q liegen auf dem 39. Breitengrad bei 11° östlicher und bei 93° westlicher Länge. Berechne $a = \overline{\mathrm{PQ}}$.

(b) Von P und Q aus wird gleichzeitig ein Punkt M des Mondes anvisiert und es werden die Winkel $\beta = 63{,}000°$ und $\gamma = 64{,}000°$ gegen die Gerade PQ gemessen. Berechne die Entfernung $r_\mathrm{p} = \overline{\mathrm{PM}}$.

(c) Von P aus erscheint der Monddurchmesser unter dem Winkel $\delta = 29'43{,}5''$. Berechne den Radius R_M des Mondes.

1.2 Die Gesetze von Kepler



1.2.1. Ein kurzer Laserpuls wird von einem Teleskop T am Äquator zu einem Spiegel S auf dem Mond geschickt, dort reflektiert und bei T wieder empfangen, die Zeit Δt, die der Strahl unterwegs war, wird von einer Atomuhr gemessen. Im Verlauf eines Monats misst man die kleinste Zeitdifferenz $\Delta t_{\mathrm{min}} = 2{,}369506841\,\mathrm{s}$ und den größten Wert $\Delta t_{\mathrm{max}} = 2{,}651082437\,\mathrm{s}$. Der Erdradius ist $R_\mathrm{E} = 6378\,\mathrm{km}$, der Radius des Mondes $R_\mathrm{M} = 1738\,\mathrm{km}$.

(a) Berechne die kleinste (r_{min}) und die größte (r_{max}) Entfernung der Mittelpunkte von Erde und Mond. Ermittle daraus die große Halbachse a_M und die kleine Halbachse b_M der Mondbahn.

(b) Die *siderische* (in einem zu den Sternen ruhenden Koordinatensystem betrachtete) Umlaufdauer des Mondes ist $T_\mathrm{M} = 27{,}32166\,\mathrm{d}$. Welchen Radius hat die kreisförmige Bahn eines geostationären Satelliten, der die Erde in genau einem siderischen Tag (*Sterntag*), d.h. in $d_{\mathrm{sid}} = 23\,\mathrm{h}\,56\,\mathrm{min}\,4\,\mathrm{s}$ umrundet?

(c) Erkläre das Zustandekommen des Zahlenwertes eines siderischen Tages.

1.2.2. (a) Der Komet *Tempel-Tuttle* umrundet die Sonne in $T = 33{,}227\,\mathrm{a}$ und hat die kleinste Sonnenentfernung $r_1 = 0{,}976\,\mathrm{AE}$. Berechne die Halbachsen der Kometenbahn und seine größte Entfernung r_2 von der Sonne. Skizziere die Bahn des Kometen und zeichne auch die Erdbahn ein.

(b) Der Komet Hale-Bopp hat den Perihelabstand $r_{\mathrm{min}} = 0{,}914\,\mathrm{AE}$ und die Exzentrizität seiner Bahn ist $e = 0{,}99511$. Berechne seine Umlaufdauer und die Halbachsen seiner Bahn.

1.2.3. Der Jupitermond Io umrundet den Planeten in der Zeit $T_{\mathrm{Io}} = 1{,}77\,\mathrm{d}$ auf einer Bahn mit der großen Halbachse $a_{\mathrm{Io}} = 4{,}22 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$.

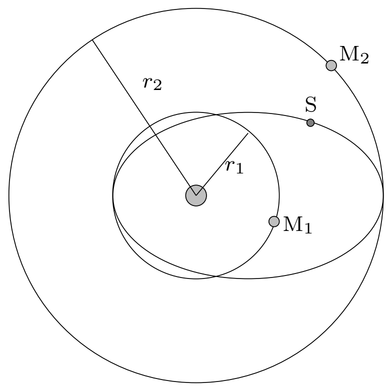
(a) Der Jupitermond Europa hat die Umlaufdauer $T_{\mathrm{Eu}} = 3{,}55\,\mathrm{d}$. Wie lang ist die große Halbachse a_{Eu} der Umlaufbahn von Europa?

(b) Eine Jupitersonde soll den Planeten so umrunden, dass ihre kleinste Entfernung (Punkt A) vom Planetenmittelpunkt $r_1 = 2{,}00 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$ und ihre größte Entfernung (Punkt B) $r_2 = 8{,}00 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$ ist. Berechne die Länge a der großen Halbachse, die Umlaufdauer T, die Exzentrizität e und die Länge b der kleinen Halbachse der Sondenbahn.

(c) Zeichne von der Sondenbahn die Punkte A, B und die beiden Brennpunkte S_1 (Jupiter) und S_2 ($10^5\,\mathrm{km} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$). Zeichne auch die Punkte C und D ein, die aus der Kenntnis der kleinen Halbachse resultieren.

Konstruiere (mit kurzer Erläuterung) die Bahnpunkte E und F, die von Jupiter die Entfernung $r_3 = 3{,}2 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$ haben. Welche Entfernung r_4 haben diese Punkte von S_2? Beweise, dass $\mathrm{EF} \perp \mathrm{AB}$ gilt. Skizziere jetzt die Bahn unter Ausnutzung von Symmetrien.

1.2.4. Ein Planet wird von zwei Monden M_1 und M_2 auf kreisförmigen Bahnen umrundet, die Radien sind $r_1 = 200\,000\,\mathrm{km}$ und $r_2 = 450\,000\,\mathrm{km}$. Der Mond M_1 hat die Umlaufdauer $T_1 = 20{,}0\,\mathrm{d}$.
Die ENTERPRISE setzt einen Satelliten S aus, dessen Umlaufbahn um den Planeten die kleinste Entfernung r_1 und die größte Entfernung r_2 vom Planeten hat (siehe Abb.).

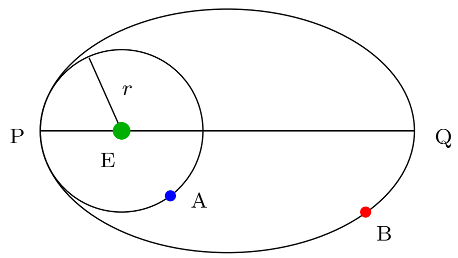


(a) Berechne die Umlaufdauer T_2 des Mondes M_2.

(b) Berechne die große Halbachse a und die Umlaufdauer T der Satellitenbahn.

(c) Berechne die lineare Exzentrizität d, die Exzentrizität e und kleine Halbachse b der Satellitenbahn.

1.2.5. Der Satellit Alpha (A) bewegt sich auf einer Kreisbahn mit Radius r und der Umlaufdauer T_{A} um die Erde (E). Der Satellit Beta (B) bewegt sich auf einer Ellipsenbahn um E, seine Umlaufdauer ist $T_{\mathrm{B}} = 8T_{\mathrm{A}}$ und seine kleinste Entfernung zur Erde ist r (siehe Abb.).



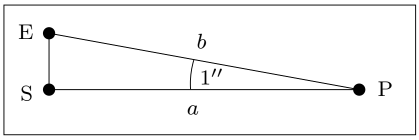
(a) Berechne die Längen der großen (a) und der kleinen (b) Halbachse der Bahn von Beta, ausgedrückt als Vielfache von r.

Zeichne die Bahn von Beta mit $r \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$.

(b) Wie lautet das zweite Keplergesetz (Flächensatz)? Schätze damit die Geschwindigkeit v_2 von Beta im erdfernsten Punkt Q ab, wenn sie im erdnächsten Punkt P $v_1 = 8400\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beträgt.

1.3 Aufbau des Universums

1.3.1. In verschiedenen Lehrbüchern findet man verschiedene Definitionen der Länge 1 pc nämlich a oder b in nebenstehender Abbildung (S: Sonne, E: Erde, $\overline{\mathrm{SE}} = 1\,\mathrm{AE}$). Um welche Strecke unterscheiden sich die beiden Definitionen und wie groß ist der relative Fehler?



1.3.2. Ordne die Erdentfernungen folgender Sterne der Größe nach:

Sirius	8,65 LJ
ε-Eridani	3,30 pc
Barnards Stern	$5{,}66 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}$
α-Centauri	$2{,}75 \cdot 10^{5}\,\mathrm{AE}$
Altair	Erdbahnradius erscheint unter dem Winkel $0{,}198''$

1.3.3. Die Strahlungsintensität (Leistung pro Fläche) der Sonne am Ort der Erde ist

$$S = 1367\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \qquad (\textit{Solarkonstante}).$$

(a) Berechne die Strahlungsleistung $L_\odot$ (*Leuchtkraft*) der Sonne aus S und der Entfernung Erde-Sonne: $1\,\mathrm{AE} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ (*astronomische Einheit*).

(b) Rigel, ein Stern im Orion (rechts unten), hat die Leuchtkraft $L = 4{,}06 \cdot 10^4 \cdot L_\odot$ und seine Strahlungsintensität am Ort der Erde ist $E = 2{,}2 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. Wie viele Lichtjahre ist Rigel von der Erde entfernt?

1.3.4. (a) Schätze ab, aus wie vielen Protonen das sichtbare Universum besteht (hundert Milliarden Galaxien mit je hundert Milliarden Sonnen). Nimm dazu an, dass das Weltall nur Wasserstoff enthält.

(b) Das Alter des Universums ist $13{,}8 \cdot 10^9\,\mathrm{a}$. Wie viele Sekunden sind das?

(c) Nimm an, dass sich das All seit dem Urknall mit Lichtgeschwindigkeit ausgedehnt hat und dass es kugelförmig ist. Wie groß ist dann die Dichte des Universums? Wie viele Wasserstoffatome enthält es pro m^3?

(d) Wie groß ist die gesamte Energie W_m der Materie des Universums? Es ist fast unglaublich, dass die aus der Gravitation resultierende potentielle Energie des Weltalls gleich $-W_\mathrm{m}$ ist und somit seine Gesamtenergie ziemlich exakt null ist!

1.3.5. Welche Dichte hat ein Neutronenstern der 1,5-fachen Sonnenmasse und mit dem Radius $R = 20\,\mathrm{km}$? Welche Masse hat ein Kubikzentimeter dieses Sterns?

1.3.6. Der Ereignishorizont (*Point of no Return*) eines schwarzen Lochs der Masse M ist eine Kugelfläche mit dem Radius

$$R_\mathrm{S} = \frac{2GM}{c^2} \qquad \text{(Schwarzschildradius)},$$

wobei $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$ die Gravitationskonstante ist.

(a) Berechne den Schwarzschildradius der Sonne und der Erde.

(b) Das schwarze Loch im Zentrum unserer Galaxis hat den Schwarzschildradius $R_\mathrm{S} = 7{,}7 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$. Welche Masse hat dieses Monstrum?

2 Newtonsche Mechanik

2.1 Masse, Beschleunigung, Kraft

2.1.1. Ein Projektil wird in einem $s = 50\,\mathrm{cm}$ langen Gewehrlauf auf $v = 400\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beschleunigt. Berechne die Beschleunigung a und die Zeitdauer t des Beschleunigungsvorgangs.

2.1.2. Ein Auto beschleunigt in $t = 10{,}8\,\mathrm{s}$ von $v_0 = 0$ auf $v = 100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Berechne die Beschleunigung a und die Beschleunigungsstrecke s.

2.1.3. Ein Zug beschleunigt mit $a = 0{,}10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ aus dem Stand auf $v = 72\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Wie lange dauert der Beschleunigungsvorgang und wie weit fährt der Zug dabei?

2.1.4. Ein Auto fährt mit $v_0 = 100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ dahin. Plötzlich taucht 125 m vor dem Wagen ein Reh auf. Nach einer Schrecksekunde bremst der Fahrer und erteilt somit seinem Auto die Beschleunigung $a = -4{,}00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Gibt es einen Rehbraten oder nicht?
Zeichne das tx-Diagramm.

2.1.5. Wie lange braucht ein Stein für den Fall von einem 60 m hohen Turm? Mit welcher Geschwindigkeit prallt er auf den Boden?

2.1.6. Ein Auto stürzt von einer Brücke in einen Fluss und hat beim Aufprall die Geschwindigkeit $20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Wie hoch ist die Brücke?

2.1.7. Eine Kanonenkugel wird mit $v_0 = 200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ senkrecht nach oben geschossen. Berechne die maximale Höhe h, ihre Aufprallgeschwindigkeit v_a auf den Boden und die gesamte Flugdauer t_a. Zeichne ein tx- und ein tv-Diagramm der gesamten Bewegung.

2.1.8. Eine Sylvesterrakete wird senkrecht nach oben geschossen; dabei wird ihr $t_0 = 3{,}00\,\mathrm{s}$ lang die Beschleunigung $a = 17{,}44\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ erteilt. Berechne die maximale Höhe h und die gesamte Flugdauer. Zeichne ein tv- und ein tx-Diagramm des Fluges.

2.1.9. Wie groß ist die Antriebskraft einer Lokomotive, die dem Zug mit der Gesamtmasse $m = 700\,\mathrm{t}$ die Beschleunigung $a = 0{,}200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ erteilt?

2.1.10. Auf einen Golf-GTI der Masse $m = 900\,\mathrm{kg}$ wirkt die Antriebskraft $F = 1530\,\mathrm{N}$. In welcher Zeit beschleunigt das Auto von Null auf $100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$?

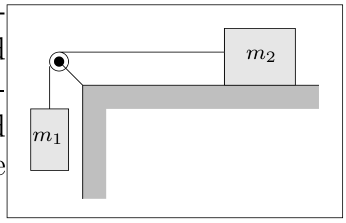
2.1.11. Ein Auto fährt mit $v_0 = 108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ gegen eine Wand. Welcher Kraft müssen die Sicherheitsgurte des Fahrers der Masse $m = 70{,}0\,\mathrm{kg}$ standhalten, wenn der Wagen auf einer Strecke von $\Delta x = 1{,}5\,\mathrm{m}$ (Knautschzone) zum stehen kommt und eine konstante Beschleunigung mit dem Betrag a angenommen wird?

2.1.12. Wie verhalten sich die Bremswege bei sonst gleichen Bedingungen auf dem Mond und auf der Erde? ($g_\mathrm{Mond} \approx \frac{1}{6} \cdot g_\mathrm{Erde}$)

2.1.13. Für die Reibungskraft zwischen Luft und einem Körper (*Luftwiderstand*) gilt folgender Zusammenhang: $R = C \cdot v^2$. C hängt von der Form des Körpers ab. Für einen Fallschirmspringer ($m = 80\,\mathrm{kg}$) ist $C = 0{,}20\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$ bei geschlossenem und $C = 16\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$ bei geöffnetem Schirm. Welche konstante Endgeschwindigkeit erreicht der Springer bei geschlossenem (geöffnetem) Schirm?

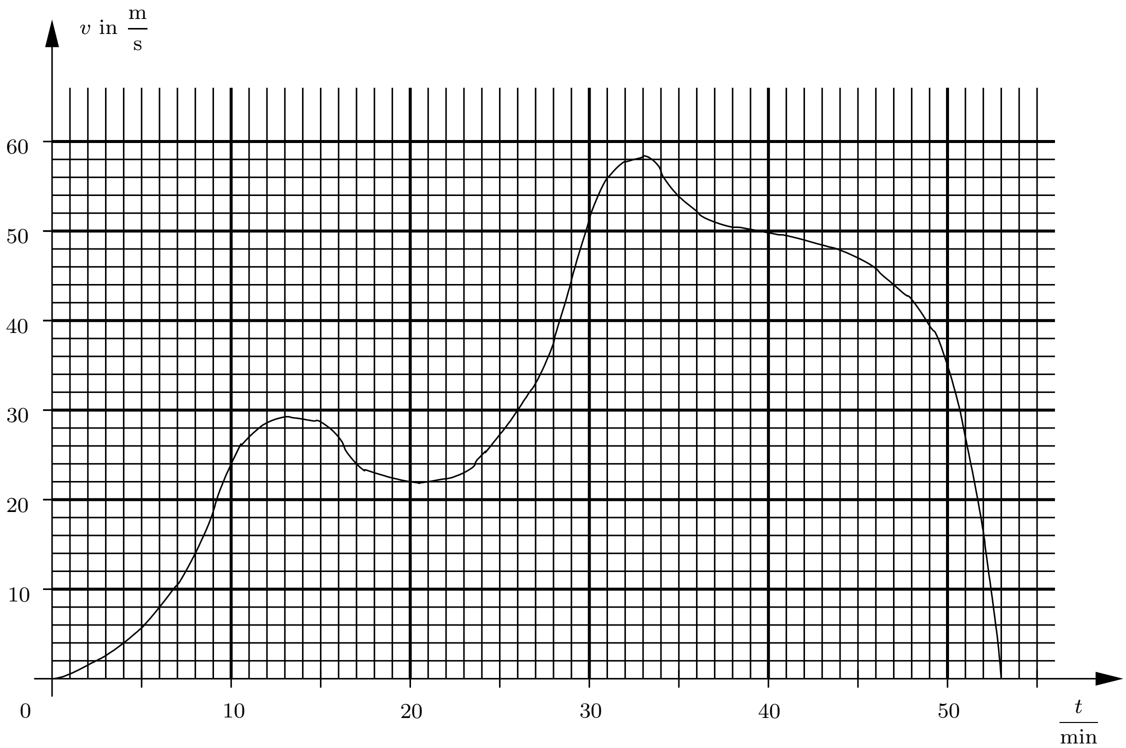
2.1.14. Ein Eisstock der Masse 5,0 kg gleitet mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ 50 m weit. Wie groß ist die Reibungszahl zwischen Eis und Eisstock?

2.1.15. Berechne die Beschleunigung der Masse m_2 sowie die Fadenspannung F_S unter Vernachlässigung der Masse und der Reibung der Rolle sowie der Fadenmasse! Die Reibungszahl zwischen dem Klotz mit der Masse m_2 und seiner Unterlage sei μ. Für welches m_1 bewegt sich die Anordnung mit konstanter Geschwindigkeit?



2.2 Näherungen

2.2.1. **Fahrtenschreiber**



Die Abbildung zeigt das Ergebnis eines Fahrtenschreibers zwischen zwei Tankstops eines PKW's. Beim zweiten Halt wird der anfänglich volle Tank mit 12,3 Litern Benzin wieder ganz aufgefüllt. Gesucht ist der möglichst genaue Benzinverbrauch des Autos auf 100 km.

(a) Wähle für die Berechnung der Fahrstrecke in den ersten 50 min $\Delta t_1 = 10\,\text{min}$ und für den Rest $\Delta t_2 = 3\,\text{min}$.

(b) Rechne jetzt durchgehend mit $\Delta t = 1\,\text{min}$. Um wieviel Prozent weicht das ungenauere Ergebnis vom genaueren Ergebnis ab?

2.2.2. Ein Auto bewegt sich 4 s lang nach dem Gesetz

$$x(t) = \frac{1}{10}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^3} \cdot t^3.$$

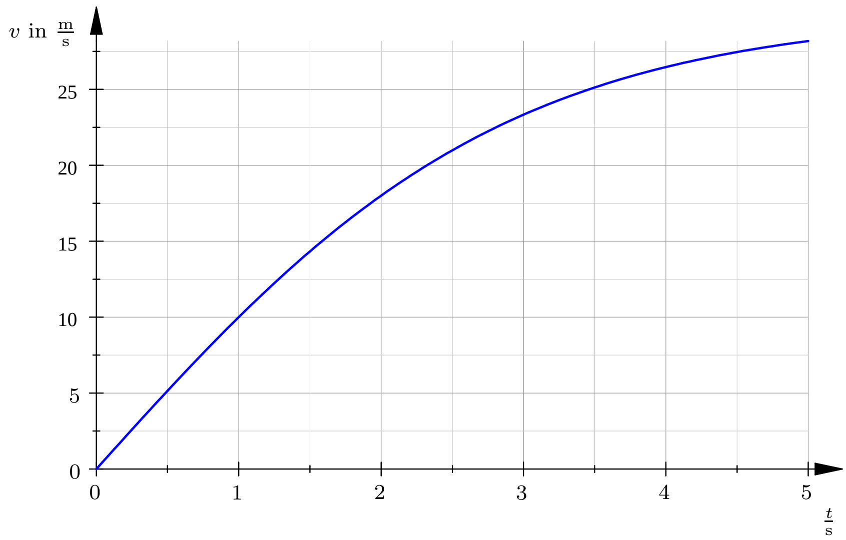
Berechne näherungsweise die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Autos zur Zeit $t_1 = 3{,}0000\,\text{s}$.

2.2.3. Ein Auto startet zur Zeit Null und seine Geschwindigkeit ändert sich nach dem Gesetz:

$$v(t) = 0{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3} \cdot t^2$$

Berechne mit Hilfe der Midpoint-Rule einen Näherungswert x_n für den Weg, den das Auto in der Zeit von Null bis 4,8 s zurücklegt. Teile dazu das Zeitintervall in vier gleich große Teilintervalle. Wie groß ist der relative Fehler des berechneten Näherungswertes, wenn das exakte Ergebnis $x_e = 18{,}432\,\mathrm{m}$ lautet?

2.2.4. Die folgende Abbildung zeigt das tv-Diagramm eines frei fallenden Körpers in der Nähe der Erdoberfläche mit Berücksichtigung der Luftreibung.



(a) Berechne näherungsweise möglichst genau den Weg, den der Körper im Zeitintervall von $t_0 = 0$ bis $t_1 = 4{,}00\,\mathrm{s}$ zurücklegt. Welchen Weg würde der Körper ohne Luftwiderstand im gleichen Zeitintervall zurücklegen und welche Geschwindigkeit hätte er zur Zeit t_1?

(b) Ermittle möglichst genau die Beschleunigung des Körpers zur Zeit $t_2 = 2{,}00\,\mathrm{s}$.

2.3 Die harmonische Schwingung

2.3.1. Eine etwas kitschige Uhr hat folgenden Zeitgeber: An einer Feder hängt eine Schaukel, auf der eine Puppe sitzt (zusammen 20 g). Wie groß muss die Federkonstante sein, damit die Schaukel in einer Sekunde einmal auf- und abschwingt?

2.3.2. Eine Kugel der Masse $m = 12{,}00\,\mathrm{kg}$ schwingt an einer Feder mit der Härte $D = 18{,}95\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Die Auslenkung zur Zeit $t = 0{,}000\,\mathrm{s}$ beträgt $x_0 = 1{,}902\,\mathrm{cm}$, die Geschwindigkeit zur selben Zeit ist $v(0) = v_0 = 0{,}7766\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$. Berechne die Kreisfrequenz ω, die Schwingungsdauer T, die Frequenz f, die Amplitude A und die Phase φ in

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi).$$

Zeichne $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ in ein Diagramm.

Einheiten: $1\,\mathrm{cm} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{s}$; $1\,\mathrm{cm} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$ bzw. $1\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ bzw. $1\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$.

2.3.3. In einen Bus der Masse $M = 8000\,\mathrm{kg}$ steigen $n = 20$ Personen der durchschnittlichen Masse $m = 70\,\mathrm{kg}$ ein; dabei senkt sich der Bus um $\Delta x = 15\,\mathrm{cm}$. Mit welcher Frequenz f schwingt der volle Bus?

2.3.4. Eine Kugel der Masse $m = 400\,\mathrm{g}$ schwingt an einer Feder mit der Frequenz $f = 0{,}50\,\mathrm{Hz}$ und der Amplitude $A = 10\,\mathrm{cm}$. Mit welcher Amplitude A' schwingt dieses Federpendel, wenn die Energie $\Delta W = 0{,}01\,\mathrm{J}$ durch Reibung verlorengegangen ist?

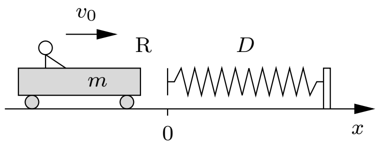
2.3.5. Wie ändert sich die Frequenz einer mechanischen harmonischen Schwingung, wenn ohne Änderung der Gesamtenergie die Amplitude verdoppelt und die Masse vervierfacht wird?

2.3.6. Eine Schwingung mit Reibung, eine sogenannte *gedämpfte Schwingung*, wird durch die Gleichung

$$x(t) = A_0 \cdot 10^{-\alpha t} \cdot \sin \omega t$$

beschrieben. Zeichne zunächst $h_1(t) = A_0 \cdot 10^{-\alpha t}$ und $h_2(t) = -A_0 \cdot 10^{-\alpha t}$ (die *Einhüllenden*) und dann $x(t)$ für $A_0 = 5\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 0{,}2\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ und $\omega = 2\,\pi\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ im t-Intervall $[0\,;\,9\,\mathrm{s}]$.

2.3.7. Der Wagen einer neuen Wiesnattraktion mit der Gesamtmasse $m = 200\,\mathrm{kg}$ (Wagen plus Insasse) prallt zur Zeit $t_0 = 0$ mit der Geschwindigkeit $v_0 = 8{,}00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf eine starke Feder mit der Federkonstanten $D = 5000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Die ganze Bewegung verläuft reibungsfrei.



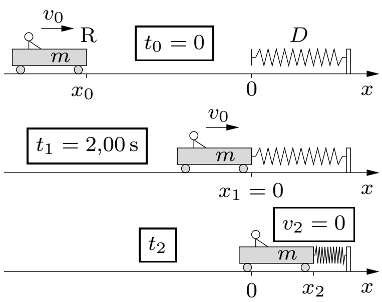
(a) Um welche Strecke A wird die Feder zusammengedrückt?

(b) Wann (t_1) ist der rechte Rand R des Wagens wieder bei $x = 0$?

(c) Welche maximale Beschleunigung muss der Insasse aushalten?

(d) $x(t)$ ist die Ortskoordinate von R zur Zeit t. Zeichne den Grafen von $x(t)$ mit Hilfe von nachvollziehbaren Rechnungen im t-Intervall $[0; 1\,\mathrm{s}]$.

2.3.8. Nebenstehende Abbildung zeigt Momentaufnahmen des Wagens einer neuen Wiesnattraktion mit der Gesamtmasse $m = 180\,\mathrm{kg}$ (Wagen plus Insasse). Der Wagen startet zur Zeit $t_0 = 0$ am Ort $x_0 = -6{,}28\,\mathrm{m}$ und prallt zur Zeit $t_1 = 2{,}00\,\mathrm{s}$ bei $x_1 = 0$ mit der Geschwindigkeit v_0 auf eine starke Feder mit der Federkonstanten D. Zur Zeit t_2 am Ort $x_2 = 1{,}50\,\mathrm{m}$ ist gerade $v_2 = 0$. Die ganze Bewegung verläuft reibungsfrei.



(a) Berechne v_0 und D.

(b) Berechne t_2 und die Zeit t_3, zu der der Wagen wieder x_0 erreicht.

(c) Welche maximale Beschleunigung muss der Insasse aushalten?

(d) $x(t)$ ist die Ortskoordinate von R zur Zeit t. Zeichne den Grafen von $x(t)$ mit Hilfe von nachvollziehbaren Rechnungen im t-Intervall $[1\,\mathrm{s}; 4{,}5\,\mathrm{s}]$.

2.4 Kreisbewegung

2.4.1. Das Pferd P eines Kinderkarussells, das sich im Uhrzeigersinn dreht, befindet sich zur Zeit $t_0 = 0$ am Ort $(\,0\,|\,4\,\mathrm{m}\,)$, der Drehpunkt des Karussells ist der Koordinatenursprung. Die Bahngeschwindigkeit des Pferdes ist konstant $v = 2{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
Berechne die Frequenz f, die Winkelgeschwindigkeit ω und den Ortsvektor von P zur Zeit $t_1 = 8\,\mathrm{s}$.

2.4.2. Mit welcher Geschwindigkeit v kann ein Auto unbeschadet eine Kurve mit $r = 200\,\mathrm{m}$ durchfahren, wenn die Haftzahl $\mu_\mathrm{H} = 0{,}8$ (trocken) bzw. $\mu_\mathrm{H} = 0{,}1$ (eisig) ist?

2.4.3. Astronauten werden getestet, wie sie auf die zehnfache Erdbeschleunigung reagieren. Dazu wird die Raumkapsel auf einer horizontalen Kreisbahn mit dem Radius $r = 8\,\mathrm{m}$ bewegt. Wie oft muss die Raumkapsel die Kreisbahn in einer Minute durchlaufen?

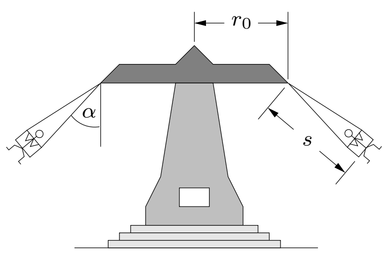
2.4.4. Ein Radfahrer durchfährt eine Kurve ($r = 20\,\mathrm{m}$) mit $v = 36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Wie stark muss er sich in die Kurve legen (Neigungswinkel zur Vertikalen)? Für welche Haftzahlen ist seine Kurvenfahrt ohne Unfall möglich?

2.4.5. Die Kurve einer Bobbahn ($r = 10\,\mathrm{m}$) ist gegen die Horizontale um den Winkel $\beta = 84°$ geneigt. Mit welcher Geschwindigkeit v darf die Kurve durchfahren werden, damit sogar bei der Haftzahl $\mu_\mathrm{H} = 0$ kein Unfall passiert?

2.4.6. Der Fotografie eines Karussells entnimmt man folgende Daten:

$$r_0 = 3{,}00\,\mathrm{m}\ ;\ s = 4{,}00\,\mathrm{m}\ ;\ \alpha = 30{,}0°$$

Welche Zeit T benötigt das Karussell für einen vollen Umlauf? Mit welcher Kraft F wird die Sesselaufhängung bei der Gesamtmasse $m = 80{,}0\,\mathrm{kg}$ von Sessel und Insasse belastet?



2.4.7. Ein Massenpunkt bewegt sich auf einem Kreis mit Radius $r = 1{,}00\,\mathrm{m}$ nach dem Gesetz

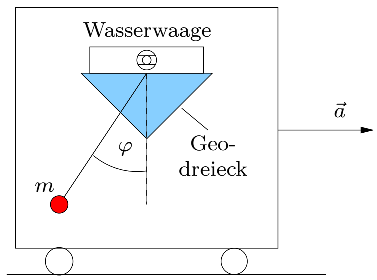
$$\vec{r}(t) = r\begin{pmatrix}\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \varphi(t) = \frac{\alpha}{2}\,t^2 \quad \text{und} \quad \alpha = \pi\,\frac{1}{\mathrm{s}^2} \quad .$$

Berechne numerisch $\vec{v}(1\,\mathrm{s})$ und $\vec{a}(1\,\mathrm{s})$ sowie die Beträge $v(1\,\mathrm{s})$ und $a(1\,\mathrm{s})$.

2.5 Trägheitskräfte

2.5.1. Vermischte Flüssigkeiten trennen sich nach längerer Zeit infolge der Gewichtskraft, wobei sich der Stoff mit der größeren Dichte am Gefäßboden absetzt (**Sedimentation**). Die Trenngeschwindigkeit hängt stark von der Kraft ab, die auf die Moleküle wirkt. Zur Sedimentation verwendet man daher Zentrifugen, in denen durch die Zentrifugalkraft eine große Gewichtskraft simuliert wird. Das Wievielfache der Gewichtskraft wirkt auf ein Teilchen in einer „Ultrazentrifuge“ in der Entfernung 10 cm vom Drehpunkt, wenn ihre Umlauffrequenz 1000 Hz beträgt?

2.5.2. In einem anfahrenden Auto misst ein findiger Schüler die Beschleunigung mit seinem selbstgebastelten Messgerät. Das Gerät besteht aus einer Kugel der Masse m, die an einem Faden im „Nullpunkt“ eines Geodreiecks aufgehängt ist und einer kleinen Wasserwaage. Nachdem die lange Kante des Geodreiecks „in der Waage“ ist, wird der Winkel φ des Fadens gegen die Vertikale gemessen.



Drücke a durch φ aus. Berechne a speziell für $\varphi = 11{,}0° \pm 0{,}5°$. Wie groß ist φ beim Bremsen mit $|a| = 4{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$?

2.5.3. (a) Um wieviel Prozent weicht die am Äquator gemessene Fallbeschleunigung $g = 9{,}781\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ von der reinen (nur auf die Gravitation zurückzuführenden) Erdbeschleunigung g_0 ab? Bei welcher Tageslänge T_0 würde ein relativ zur Erdoberfläche ruhend losgelassener Stein gerade nicht mehr auf den Boden fallen? Wie würde er sich bewegen?

(b) Um wieviel Prozent weicht die in Garmisch (47,5° nördliche Breite) gemessene Fallbeschleunigung g von der reinen (nur auf die Gravitation zurückzuführenden) Erdbeschleunigung $g_0 = 9{,}821\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ab? Welchen Winkel φ schließen $\vec{g}$ und $\vec{g}_0$ ein? Bei welcher Tageslänge T_0 würde ein ruhend losgelassener Stein gerade nicht mehr auf den Boden fallen? Wie würde er sich bewegen?

2.5.4. Im Kaufhaus hat Frau Leicht eine neue Personenwaage erworben, die beim Ausprobieren ihre Masse zu 80 kg anzeigt. Im Aufzug, der sie vom 3. Stock ins Erdgeschoß befördert, wird das neue Stück ein weiteres mal getestet. Nach dem Schließen der Türen zeigt die Waage zunächst 2 s lang 68 kg, dann 2,25 s lang 80 kg und schließlich bis zum Stillstand des Aufzugs noch 1,5 s lang 96 kg an. Berechne die Stockwerkshöhe mit $g = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

2.5.5. Die Gesamtkraft, die auf einen Tropfen an der Flüssigkeitsoberfläche wirkt, steht immer senkrecht auf der Flüssigkeitsoberfläche.

(a) Ein Auto beschleunigt auf einer horizontalen Straße mit $a = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Der Beifahrer hält ein halb gefülltes Bierglas in der Hand. Welche Form zeigt die Oberfläche des Bieres?

(b) Ein zylinderförmiges, halb gefülltes Wasserglas rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Zylinderachse. Welche Form zeigt die Wasseroberfläche?

2.5.6. Ein Steilwandfahrer fährt mit seinem Motorrad an der senkrechten Innenwand eines Zylinders mit 12 m Durchmesser, die Haftzahl zwischen Bahn und Reifen beträgt 0,5. Mit welcher Bahngeschwindigkeit muss der Fahrer im Kreis rasen, um nicht abzurutschen? Um welchen Winkel φ ist er gegen die Horizontale geneigt?

2.5.7. **Künstliche Schwerkraft**:

In A.C. Clarke's Roman „Rendezvous mit 31/439“ wird ein riesiges, zylinderförmiges Raumschiff (Radius: $r = 3\,\mathrm{km}$) beschrieben, das sich in $T = 3\,\mathrm{min}$ einmal um die Zylinderachse dreht. Mit Welcher Kraft F wird ein Mensch von innen an die Zylinderwand gedrückt? In welcher Zeit T_0 müsste sich das Raumschiff einmal drehen, damit sich Menschen wie auf der Erde fühlen würden?

2.6 Wurfbewegungen

2.6.1. (a) Berechne allgemein die Wurfweite x_w bei einem waagrechten Wurf ($\varphi = 0$) mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und der Abwurfhöhe h!

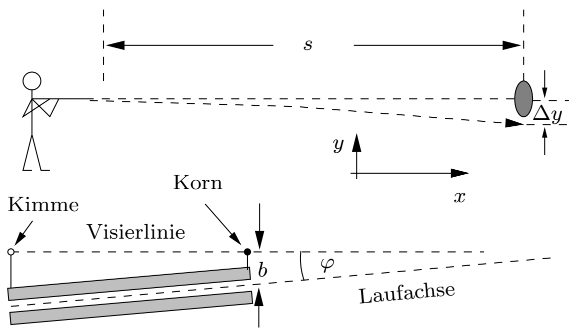
(b) Mit welcher Geschwindigkeit muss ein Stein von einem 40 m hohen Turm waagrecht geworfen werden, damit er 100 m vom Turm entfernt auftrifft!

2.6.2. Eine Kanonenkugel wird auf Bodenhöhe unter dem Winkel φ gegen den Boden mit der Geschwindigkeit v_0 abgefeuert. Für welchen Winkel φ erreicht die Kugel die größte Höhe bzw. die größte Weite (kein Luftwiderstand)?

2.6.3. Ein Fußball wird mit $v_0 = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ unter einem 30°-Winkel gegen die Horizontale abgeschlagen. Wie hoch und wie weit fliegt er unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes? Mit welcher Geschwindigkeit (Betrag und Richtung) kommt der Ball wieder am Boden auf?

2.6.4. Ein Kugelstoßer stößt die Kugel mit $v_0 = 11{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in einer Höhe von $h = 2\,\mathrm{m}$ ab. Berechne die Stoßweite w in Abhängigkeit vom Stoßwinkel φ und zeichne $w(\varphi)$. Ermittle durch Probieren den Winkel für die größte Weite. Rechne mit $g = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

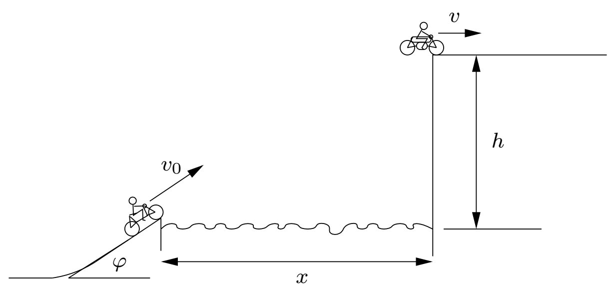
2.6.5. Die Kugel eines Biathlongewehrs hat die Mündungsgeschwindigkeit $v_0 = 380\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, die Zielscheibe mit dem Durchmesser $d = 4{,}5\,\mathrm{cm}$ (liegender Anschlag) ist $s = 50{,}0\,\mathrm{m}$ von der Mündung entfernt.



(a) Magdalena Neuner richtet ihr Gewehr so aus, dass die Achse des Laufs genau auf die Mitte der Scheibe zielt. In welcher Entfernung Δy vom Zentrum trifft die Kugel auf die Scheibe (Luftwiderstand vernachlässigen)?

(b) Welcher Winkel φ muss zwischen Visierlinie und Laufachse eingestellt werden, damit beim Anvisieren des Scheibenzentrums dieses auch getroffen wird? Der Mittelpunkt der Mündung hat von der Visierlinie den Abstand $b = 2\,\mathrm{cm}$. Es darf angenommen werden, dass die Geschwindigkeit der Kugel in x-Richtung v_0 ist. Zeige nach der Berechnung von φ, dass diese Annahme gerechtfertigt ist.

2.6.6. Ein Fluss der Breite $x = 40\,\mathrm{m}$ ist auf einer Seite von einer Felswand der Höhe $h = 20\,\mathrm{m}$ begrenzt. Der Damm auf der anderen Flussseite wird als Absprungrampe für einen Mororradstunt präpariert. Der Neigungswinkel der Rampe gegen die Horizontale ist φ, das Motorrad erreicht das Ende der Rampe mit der Absprunggeschwindigkeit v_0. Berechne v_0 und φ so, dass das Motorrad die Kante der Felswand mit einer zur Horizontalen parallelen Geschwindigkeit erreicht (Maximum der Flugbahn). Der Luftwiderstand ist zu vernachlässigen.



2.7 Impulssatz

2.7.1. Eine unbemannte Raumsonde explodiert und zerbricht in zwei Teile. Durch fotografische Registrierung werden die Geschwindigkeiten der Bruchstücke zu $|\vec{v}_1| = 700\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $|\vec{v}_2| = 200\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ festgestellt. Ein Bruchstück wird eingefangen und seine Masse zu $m_2 = 210\,\text{kg}$ bestimmt. Berechne m_1.

2.7.2. Ein Kahn mit aufmontierter Kanone feuert eine Kugel der Masse $m_2 = 10{,}0\,\text{kg}$ horizontal ab; dabei erhält der Kahn eine Geschwindigkeit vom Betrag $v_1 = 3{,}00\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die Gesamtmasse von Kahn, Kanone und Kugel beträgt $m_1 = 500\,\text{kg}$. Wie schnell ist die Kugel?

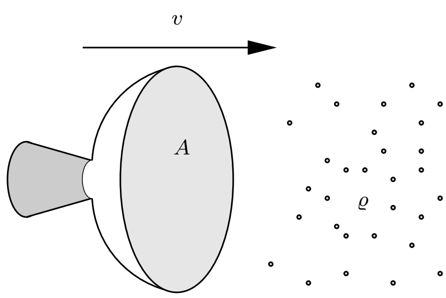
2.7.3. Ein interplanetarisches Raumschiff bewegt sich antriebslos im Weltall. Genau in der Mitte ihrer mit Atemluft gefüllten Kabine schwebt eine nur mit einem Badeanzug bekleidete Astronautin. Die Relativgeschwindigkeit der Astronautin zum Raumschiff ist exakt Null, die Wände der Kabine sind außer Reichweite.
Wie kann sich die Astronautin aus ihrer misslichen Lage befreien (unsittliche Lösungen ausgeschlossen!)?

2.7.4. Ein kugelförmiger Eisenmeteorit mit dem Durchmesser $d = 1{,}0\,\text{km}$ prallt mit der Geschwindigkeit $5{,}0 \cdot 10^4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf die Erde und bleibt tief im Boden stecken. Welche Geschwindigkeitsänderung erfährt die Erde? Welche Energie wird in innere Energie (Wärme, Verformung) umgewandelt? Vergleiche diese Energie mit der bei einer Atombombenexplosion umgesetzten Energie (Hiroshima: $\approx 5 \cdot 10^{13}\,\text{J}$).

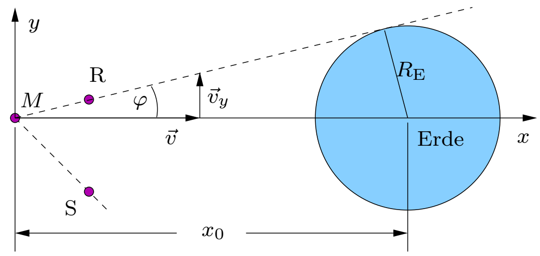
2.7.5. Eine Gewehrkugel der Masse $m = 5{,}00\,\text{g}$ wird in einen ruhenden Holzwürfel der Masse $M = 2{,}00\,\text{kg}$ geschossen und bleibt in ihm stecken. Danach hat der Verbundkörper Holzwürfel-Kugel die Geschwindigkeit $u = 1{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Welche Geschwindigkeit v hatte die Kugel? Wieviel Prozent der kinetischen Enerie der Kugel werden in innere Energie umgewandelt?

2.7.6. Die drei Eishockey-Spieler Anton ($m_\text{A} = 100\,\text{kg}$), Bertram ($m_\text{B} = 80{,}0\,\text{kg}$) und Charly ($m_\text{C} = 75{,}0\,\text{kg}$) prallen zusammen und bleiben als Dreimann-Knäuel mit der Relativgeschwindigkeit Null relativ zum Eis liegen. Anton kam mit einer Geschwindigkeit vom Betrag $v_\text{A} = 2{,}50\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ genau aus Norden und Bertram mit $v_\text{B} = 4{,}42\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ genau aus Süd-Westen. Aus welcher Richtung und mit welcher Geschwindigkeit stürzte sich Charly auf die beiden anderen Spieler?

2.7.7. Eine Raumsonde mit der Masse $M = 100\,\text{kg}$ und der Querschnittsfläche $A = 16{,}0\,\text{m}^2$ fliegt mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 2{,}00\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ in einen großen Bereich interstellaren Staubes (Sternentstehungsgebiet) mit der Dichte $\varrho = 1{,}00 \cdot 10^{-16}\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Der ganze Staub, den die Querschnittsfläche der Sonde erfasst, wird in der Raumkapsel gesammelt. Berechne mit Hilfe des Impulssatzes die Geschwindigkeit $v(x)$ der **antriebslosen** Sonde am Ort x. Wie groß ist $v(x)$ speziell für $x = 1{,}00 \cdot 10^{12}\,\text{km}$? Nach welcher Strecke hat sich die Geschwindigkeit der Kapsel halbiert?



2.7.8. Ein Meteorit der Masse $M = 130 \cdot 10^9\,\mathrm{kg}$ rast mit der Geschwindigkeit $v = 3000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ genau auf den Mittelpunkt der Erde zu (Erdradius: $R_\mathrm{E} = 6400\,\mathrm{km}$). Mutige Astronauten haben auf dem Meteoriten eine Atombombe installiert. Die Bombe wird gezündet, wenn der Meteorit noch die Entfernung $x_0 = 16640\,\mathrm{km}$ zum Erdmittelpunkt hat. Bei der Explosion wird ein Meteoritenstück S der Masse $m = 2{,}0 \cdot 10^9\,\mathrm{kg}$ abgesprengt. Im System des Meteoriten wird S senkrecht zur Bewegungsrichtung abgestoßen, d.h. S und der Restmeteorit R haben in x-Richtung immer noch die Geschwindigkeit v, die Geschwindigkeit von S in y-Richtung bezeichnen wir mit $-u$.



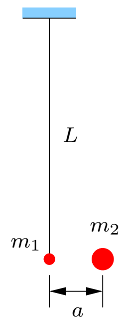
Bei allen Rechnungen darf die Erdanziehung vernachlässigt werden!

(a) Wie groß muss die y-Komponente v_y der Geschwindigkeit von R nach der Sprengung mindestens sein, damit der Meteorit an der Erde vorbeifliegt? Erstelle eine Zeichnung mit $1000\,\mathrm{km} \,\widehat{=}\, 1\,\mathrm{cm}$ und zeichne $\vec{v}$ mit der Länge $6\,\mathrm{cm}$ ein. Wenn die Berechnung von v_y nicht gelingt, kann als Näherung der Wert aus der Zeichnung verwendet werden.

(b) Wie groß muss also u mindestens sein, um eine Katastrophe zu verhindern?

2.8 Gravitationsgesetz

2.8.1. Eine Bleikugel der Masse $m_1 = 10\,\mathrm{kg}$ hängt an einer Schnur der Länge $L = 10\,\mathrm{m}$. Um welchen Winkel φ bzw. um welche waagrechte Strecke x wird die Kugel ausgelenkt, wenn eine zweite Kugel der Masse $m_2 = 100\,\mathrm{kg}$ im Abstand $a = 25\,\mathrm{cm}$ neben der ersten Kugel angebracht wird? Verwende geeignete Näherungen, da sicher $x \ll a$!



2.8.2. Welchen Abstand a von der Erdoberfläche muss eine Raumstation haben, die über einem festen Punkt am Äquator zu ruhen scheint (geostationäre Bahn)? Welche Geschwindigkeit v hat die Station von einem Inertialsystem aus betrachtet? Welche Anziehungskraft F wirkt von der Erde auf einen Astronauten der Masse m in der Raumstation? Warum fühlt sich der Astronaut trotzdem schwerelos?

2.8.3. Der Planet Nemesis hat den Radius $R = 5000\,\mathrm{km}$ und an seiner Oberfläche herrscht die gleiche Gravitationsfeldstärke wie an der Erdoberfläche.

(a) Berechne die Masse M von Nemesis. [Zur Kontrolle: $M = 3{,}67 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$]

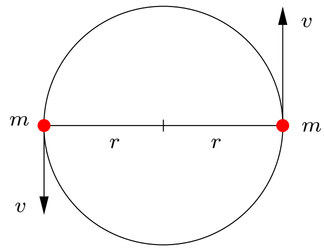
(b) Ein Satellit soll Nemesis in genau zehn Stunden umkreisen. In welcher Höhe h über der Planetenoberfläche muss die Umlaufbahn des Satelliten verlaufen? Mit welcher Geschwindigkeit v_1 muss der Satellit umlaufen?

2.8.4. An welchem Punkt ist die Stärke des von Erde und Mond erzeugten Gravitationsfeldes null?

2.8.5. Um wieviel Prozent ist die Gravitationsfeldstärke auf der Zugspitze kleiner als in Garmisch?

2.8.6. **Doppelstern aus Neutronensternen**

Zwei Neutronensterne mit der gleichen Masse m umkreisen ihren gemeinsamen Schwerpunkt (siehe Abb.), der Radius der Kreisbahn ist r.



Es gilt $m = 5{,}00 \cdot 10^{29}\,\mathrm{kg}$ und $r = 139\,\mathrm{km}$.

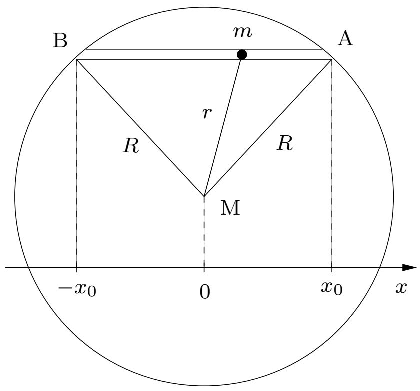
(a) Berechne die Umlaufdauer T und die Umlaufgeschwindigkeit v.

(b) Die Dichte der Neutronensterne ist $\rho = 1{,}19 \cdot 10^{14} \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$. Berechne den Radius R und den Ortsfaktor g an der Oberfläche eines der Sterne.

2.8.7. Eine homogene Kugel (Dichte überall gleich) mit Radius R hat die Masse M. Berechne das von der Kugel erzeugte Gravitationsfeld $g(r)$.

Zeichne $g(r)$ im Intervall $[0; 4R]$ für $R = 5000\,\mathrm{km}$ und $M = 3{,}747 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

2.8.8. Durch einen Planeten mit Radius R und der konstanten Dichte ρ wird ein gerader Kanal gebohrt, der zwei Städte A und B miteinander verbindet. Durch den **Sehnenkanal** fällt reibungsfrei eine Transportkapsel der Masse m mit der Anfangsgeschwindigkeit Null am Ort A.



(a) Berechne unter Verwendung von Aufgabe 2.8.7 den Betrag $F_\mathrm{G}(x)$ der Kraft auf die Kapsel!

(b) Berechne die Komponente $F(x)$ der Kraft $F_\mathrm{G}(x)$, die parallel zur x-Achse zeigt! Welche Bewegung führt die Kapsel demnach aus?

(c) Berechne die Fallzeit τ von A nach B zunächst allgemein und dann speziell für die Erde, und zwar einmal für München-New-York und einmal für München-Sydney!

2.8.9. **Masse der Galaxis**

In dieser Aufgabe nehmen wir an, dass die Masse unserer Galaxis radialsymmetrisch verteilt ist.

(a) Wie berechnet man den Betrag der Gravitationsfeldstärke einer radialsymmetrischen Massenverteilung (Formel und kurze Erläuterung)!

(b) Ein Kugelsternhaufen umrundet das Zentrum unserer Galaxis mit der Geschwindigkeit $v_2 = 200\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ auf einem Kreis mit Radius $r_2 = 2{,}00 \cdot 10^{21}\,\mathrm{m}$. Welche Masse M_2 muss demnach unsere Galaxis mindestens haben? Die sichtbare Masse unserer Galaxis ist $M_\mathrm{G} \approx 3 \cdot 10^{41}\,\mathrm{kg}$. Wieviel Prozent der gesamten galaktischen Masse liegen mindestens in Form von sogenannter *dunkler Materie* vor?

3 Relativitätstheorie

3.1 Die Zeitdilatation

3.1.1. Ein Raumschiff fliegt mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ zu einem $s = 20\,\mathrm{LJ}$ entfernten Planeten und nach einem einjährigen Aufenthalt mit der gleichen Geschwindigkeit wieder zurück zur Erde.

(a) Welche gesamte Reisedauer zeigen eine Uhr auf der Erde (t) und eine Uhr im Raumschiff (t') für $\beta = 0{,}6$, $\beta = 0{,}8$, $\beta = 0{,}99$ und $\beta = 0{,}9999$ an? An welchen Grenzwert nähert sich das Verhältnis $\frac{t}{t'}$ an, wenn v immer größer wird?

(b) Für welches β dauert die gesamte Reise, im Raumschiff gemessen, nur zwei Jahre?

(c) Für welches β ist die reine Flugzeit im Erdsystem hundert mal so groß wie im System der Rakete?

3.1.2. **Kosmischer Nachbar**

2013 entdeckten Astronomen einen Planeten, der den sonnenähnlichen Stern GJ 504 umkreist. GJ 504 ist $s = 60\,\mathrm{LJ}$ von der Erde entfernt.

(a) Welche Zeit $\Delta t'$ vergeht an Bord eines Raumschiffs, das mit 60% der Lichtgeschwindigkeit von der Erde zu GJ 504 fliegt?

(b) Mit welcher Geschwindigkeit muss das Raumschiff von der Erde zu GJ 504 fliegen, damit eine Borduhr die Reisedauer $\tau = 25\,\mathrm{a}$ misst?

3.1.3. **Zeitdilatation bei kleinen Geschwindigkeiten**

(a) Berechne $\Delta t'$ mit der Formel $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}$ für $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$ und folgende Werte für β: $\beta_1 = 0{,}01$, $\beta_2 = 0{,}001$, $\beta_3 = 10^{-4}$, $\beta_4 = 10^{-5}$ und $\beta_5 = 10^{-6}$.

Berechne auch jeweils die Differenz $\delta t = \Delta t - \Delta t'$.

(b) Teilaufgabe (a) entnimmt man, dass für kleine Werte von β der Taschenrechner $\delta t = 0$ errechnet, obwohl δt natürlich größer als null sein muß. Abhilfe schafft folgende Näherungsformel:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \quad \text{für} \quad |x| \ll 1$$

Überprüfe die Formel für $x \in \{10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}\}$ und berechne jeweils den relativen Fehler des Näherungswertes. Auf wie viele Stellen stimmt der Näherungswert mit dem exakten Wert überein, wenn $x = 10^{-n}$ ist?

(c) Eine Atomuhr U' wird mit der Geschwindigkeit $v = 108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ über die Strecke $s = 300\,\mathrm{km}$ transportiert. Welche Zeitspanne δt zeigt U' weniger an als die Atomuhren am Start und am Ende der Strecke?

3.1.4. Mit welcher Geschwindigkeit wurde eine Atomuhr über eine 4500 km lange Strecke transportiert, wenn sie nach der Ankunft um 0,50 ns nachgeht?

3.1.5. **Zeitdilatation bei großen Geschwindigkeiten**

Für Geschwindigkeiten sehr nahe an der Lichtgeschwindigkeit kann man schreiben

$$\beta = \frac{v}{c} = 1 - \alpha \quad \text{mit} \quad \alpha \ll 1,$$

z.B. $\beta = 0{,}999\,999\,999 = 1 - \alpha$ mit $\alpha = 10^{-9}$. Für dieses Beispiel gilt

$$1 - \beta^2 = 1 - (1-\alpha)^2 = 2\alpha - \alpha^2 = 2 \cdot 10^{-9} - 10^{-18} = 0{,}000\,000\,001\,999\,999\,999$$

d.h. $1 - \beta^2 \approx 2\alpha$. Also folgt

$$\boxed{\beta = 1 - \alpha \quad \text{mit} \quad \alpha \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{1-\beta^2} \approx \sqrt{2\alpha}}$$

Berechne die Zeiten Δt (im System der Erde), $\Delta t'$ (Eigenzeit im System des bewegten Körpers) und $\dfrac{\Delta t'}{\Delta t}$ für

(a) einen Flug von der Erde zu unserem Nachbarstern Alpha Centauri ($s = 4\,\mathrm{LJ}$) mit $v = 0{,}8\,c$.

(b) ein Proton, das mit $v = 0{,}999\,999\,999\,999\,999\,999\,c$ von einem $s = 10^9\,\mathrm{LJ}$ entfernten Quasar zur Erde fliegt.

3.1.6. **Intergalaktisches Rennen**

Bei einer Supernova gehen ein Photon (Lichtteilchen) und ein Proton gleichzeitig auf die zwei Millionen Lichtjahre lange Reise zur Erde. Dort hat das Photon gerade einmal $\Delta s = 100\,\mathrm{m}$ Vorsprung vor dem Proton. Zeige anhand einer beschrifteten Skizze und einer kurzen Rechnung, dass die Geschwindigkeit des Protons durch

$$v = \beta c \quad \text{mit} \quad \beta = 1 - \alpha \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\Delta s}{s} \ll 1$$

gegeben ist. Zeige weiter, dass für die Eigenzeit τ, in der das Proton die Reise zurücklegt, in guter Näherung

$$\tau = \frac{s}{c}\sqrt{2\alpha}$$

gilt und berechne dann τ in Stunden.

3.1.7. Freie Neutronen haben die mittlere Lebensdauer $\tau = 10{,}6\,\mathrm{min}$. Mit welcher Geschwindigkeit fliegt ein Neutron von einer $s = 10^5\,\mathrm{LJ}$ entfernten Supernova zur Erde, wenn im System des Neutrons dazu gerade die Zeit τ vergeht?

3.2 Geschwindigkeitsaddition

3.2.1. Zwei Raumschiffe fliegen mit den Geschwindigkeitsbeträgen $0{,}8\,c$ und $0{,}7\,c$ einmal in gleicher und einmal in entgegengesetzter Richtung an der Erde vorbei. Mit welchem Geschwindigkeitsbetrag entfernen sich die beiden Raumschiffe voneinander?

3.2.2. Ein Flugzeug mit der Geschwindigkeit $v = 2160\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ relativ zur Erde feuert in Flugrichtung eine Rakete ab, die sich relativ zum Flugzeug mit der Geschwindigkeit $u' = v$ bewegt. Wie groß ist der relative Fehler δ, wenn die Raketengeschwindigkeit relativ zur Erde mit $2\,v$ angegeben wird? Für welche v ist $\delta > 1\,\%$?

3.3 Relativistische Energie

3.3.1. (a) Zeige, dass der relativistische Ausdruck für die kinetische Energie für kleine Geschwindigkeiten näherungsweise in die klassische (nichtrelativistische) Formel übergeht.

(b) Zeige, dass man die relativistische Formel für die kinetische Energie *nicht* erhält, wenn man einfach in der nichtrelativistischen Formel m durch γm ersetzt.

3.3.2. Ein Eisenwürfel der Kantenlänge 10 cm wird von $\vartheta_1 = 20\,°\mathrm{C}$ auf $\vartheta_2 = 300\,°\mathrm{C}$ erwärmt. Berechne die absolute und relative Massenzunahme.

3.3.3. Um wieviel Prozent ist Wasser der Temperatur 0 °C schwerer als Eis der Temperatur 0 °C?

3.3.4. Mit welcher Geschwindigkeit muss sich ein Körper bewegen, damit seine kinetische Energie gleich seiner Ruhenergie ist?

3.3.5. Zwei Atomkerne mit den Massen m stoßen mit den Geschwindigkeiten $v_1 = 0{,}6\,c$ und $v_2 = -0{,}6\,c$ total unelastisch zusammen und bilden einen neuen Kern. Berechne die Masse des neuen Kerns.

3.3.6. Beweise: Ein Körper der Masse m und der kinetischen Energie W_k bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = \beta\, c$ mit

$$\beta = \frac{\sqrt{W_\mathrm{k}\,(W_\mathrm{k} + 2\,m\,c^2)}}{W_\mathrm{k} + m\,c^2}$$

3.3.7. Zur Erinnerung: $\boxed{1\,\mathrm{eV} = e \cdot 1\,\mathrm{V}}$

(a) Die Masse des Elektrons ist $m_\mathrm{e} = 9{,}10938 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$. Berechne die Ruhenergie des Elektrons in MeV.

(b) Die Ruhenergie des Protons ist $W_\mathrm{p} = 938{,}27\,\mathrm{MeV}$. Berechne die Masse des Protons.

3.3.8. In vielen Büchern findet man folgende Faustregel:

$$\boxed{\text{Bis zu } v = 0{,}1\,c \text{ darf klassisch gerechnet werden.}}$$

(a) Berechne den relativen Fehler der kinetischen Energie, wenn für $v = 0{,}1\,c$ klassisch gerechnet wird.

(b) Bis zu welcher Beschleunigungsspannung U darf nach unserer Faustregel für Elektronen bzw. Protonen klassisch gerechnet werden?

3.3.9. (a) Berechne den Lorentzfaktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ für ein Proton mit $W = 400\,\mathrm{GeV}$ (Superprotonensynchrotron am CERN) und für ein Elektron mit $W = 21\,\mathrm{GeV}$ (Linearbeschleuniger in Stanford, USA). Wie groß ist β in beiden Fällen?

(b) In welcher Eigenzeit legt ein Elektron mit der Energie 1 J die Strecke vom Quasar 3C 48 bis zur Erde ($4{,}8 \cdot 10^9$LJ) zurück? Welche Energie müsste man aufbringen, um ein 100 t schweres Raumschiff in der gleichen Eigenzeit zu diesem Quasar zu schicken?

3.3.10. 1991 entdeckte der „Fly's Eye detector“ in Utha, U.S.A., einen Schauer von hochenergetischen Teilchen, die von einem ursprünglichen Teilchen mit der enormen Energie $W = 51{,}2\,\mathrm{J}$ erzeugt wurden. Die Identität des ursprünglichen Teilchens konnte nicht genau ermittelt werden, aber es könnte ein Proton gewesen sein, was wir für die weiteren Rechnungen annehmen. In welcher Eigenzeit hätte das Teilchen die Strecke $s = 2 \cdot 10^6\,\mathrm{LJ}$ von der Andromeda-Galaxie zur Erde zurückgelegt? Um welchen Betrag weicht die Geschwindigkeit v des Teilchens von der Lichtgeschwindigkeit ab?