Physik 10. Klasse g8
Lösungen zu den Aufgaben

Richard Reindl

Die aktuellste Version der Aufgaben findet man unter

`http://www.stbit.de`

25. Juni 2014

1 Das astronomische Weltbild

1.1 Geozentrisches und heliozentrisches Weltbild

1.1.1. $R = \frac{b}{\varphi} = \frac{800\,\text{km}}{7{,}2 \cdot \frac{\pi}{180}} \approx 6{,}4 \cdot 10^3\,\text{km}$

Schiffe, kreisförmiger Schatten bei Mondfinsternissen

heute: Blick aus einem Raumschiff

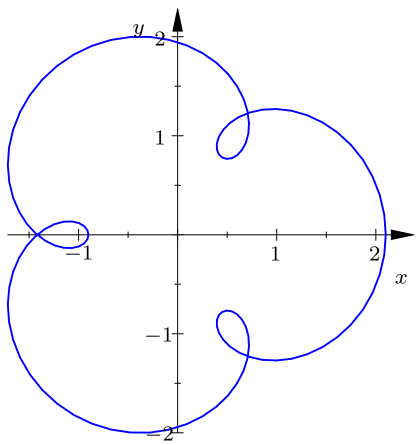
1.1.2. $\frac{\overline{\text{ES}}}{\overline{\text{EM}}} = \frac{1}{\cos\varphi} = 19{,}1$; in Wirklichkeit: $\frac{\overline{\text{ES}}}{\overline{\text{EM}}} = \frac{1{,}496 \cdot 10^8\text{km}}{3{,}844 \cdot 10^5\,\text{km}} = 389$

$\cos\varphi' = \frac{\overline{\text{EM}}}{\overline{\text{ES}}} = \frac{3{,}844 \cdot 10^5\,\text{km}}{1{,}496 \cdot 10^8\text{km}} = 0{,}00257 \quad \Longrightarrow \quad \varphi' = 89{,}85°$

Ein kleiner Fehler beim Winkel bewirkt einen sehr großen Fehler im Verhältnis $\frac{\overline{\text{ES}}}{\overline{\text{EM}}}$.

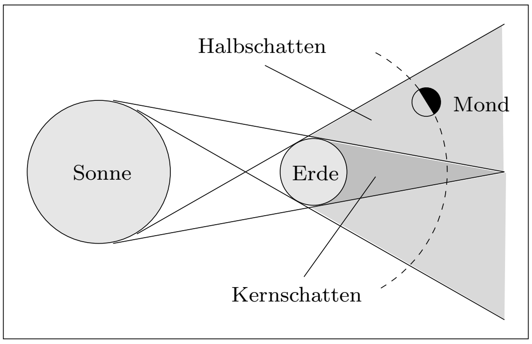
1.1.3. MuPAD-Befehle:

```
w1 := 2*PI;
w2 := 8*PI;
r1 := 1.5;
r2 := 0.6;
x := t -> r1*cos(w1*t)+r2*cos(w2*t);
y := t -> r1*sin(w1*t)+r2*sin(w2*t);
curve := plot::Curve2d([x(t), y(t)], t = 0..1,Scaling = Constrained):
plot(curve)
```



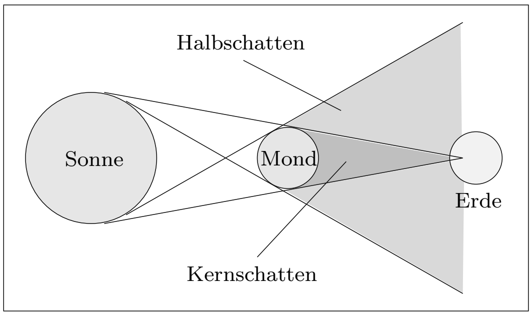
1.1.4. (a) **Mondfinsternis:**

Wenn Sonne, Mond und Erde (fast) auf einer Geraden liegen, gibt es eine Finsternis. Eine Mondfinsternis kann es nur bei Vollmond, eine Sonnenfinsternis nur bei Neumond geben. Außerdem muss der Mond bei einer Finsternis in der Erdbahnebene liegen. Bei der Mondfinsternis liegt der Mond im Schatten der Erde.



Sonnenfinsternis:

Bei der Sonnenfinsternis liegt der Beobachtungsort auf der Erde im Schatten des Mondes. Der Sichtbarkeitsbereich einer totalen Sonnenfinsternis ist nicht sehr groß und hängt von den momentanen Entfernungen Erde-Mond und Erde-Sonne ab.



(b) Ist die Erde zu weit vom Mond entfernt, dann ist der scheinbare Durchmesser (Winkeldurchmesser) des Mondes kleiner als der der Sonne und man beobachtet eine **ringförmige** Sonnenfinsternis. Ungefähr aber erscheint der Mond genauso groß wie die Sonne. Aus dem Strahlensatz folgt dann

$$\frac{R_\odot}{R_{\text{Mond}}} = \frac{1\,\text{AE}}{r_{\text{Mond}}} \quad \Longrightarrow$$

$$R_\odot = \frac{1\,\text{AE} \cdot R_{\text{Mond}}}{r_{\text{Mond}}} = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11}\,\text{m} \cdot 1{,}738 \cdot 10^{6}\,\text{m}}{3{,}84 \cdot 10^{8}\,\text{m}} = 6{,}8 \cdot 10^{8}\,\text{m}$$

1.1.5.

(a) $\varphi = 39°$, $\alpha = 104°$, $R = 6378\,\text{km}$

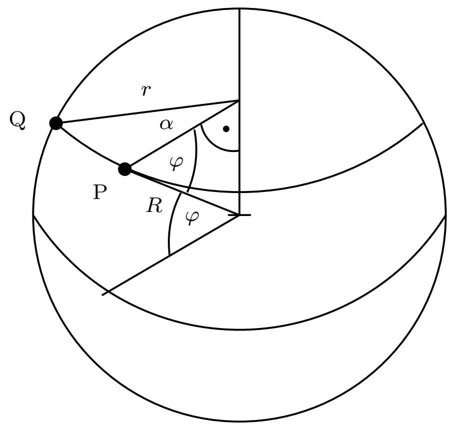
$r = R\cos\varphi = 4957\,\text{km}$

$a = \overline{\text{PQ}} = 2 \cdot r \sin\frac{\alpha}{2} = 7812\,\text{km}$

(b) $\varepsilon = \sphericalangle \text{PMQ} = \gamma - \beta = 1{,}000°$

Sinussatz: $\frac{r_{\text{p}}}{a} = \frac{\sin(180° - \gamma)}{\sin\varepsilon}$

$$r_{\text{p}} = \frac{a \sin 116°}{\sin 1°} = 4{,}02 \cdot 10^{5}\,\text{km}$$



(c) $\delta = \left(\frac{29}{60} + \frac{43{,}5}{3600}\right)^{\circ} = 0{,}49542°$

$$R_{\text{M}} = r_{\text{p}} \tan\frac{\delta}{2} = 1{,}74 \cdot 10^{3}\,\text{km}$$

1.2 Die Gesetze von Kepler

1.2.1. (a) $r_{\min} = \frac{c\Delta t_{\min}}{2} + R_{\text{E}} + R_{\text{M}} = 363296\,\text{km}$

$$r_{\max} = \frac{c\Delta t_{\max}}{2} + R_{\mathrm{E}} + R_{\mathrm{M}} = 405504\,\mathrm{km}$$

$$a_{\mathrm{M}} = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = 384400\,\mathrm{km}$$

$$d_{\mathrm{M}} = a_{\mathrm{M}} - r_{\min} = 21104\,\mathrm{km}, \qquad e_{\mathrm{M}} = \frac{d_{\mathrm{M}}}{a_{\mathrm{M}}} = 0{,}0549$$

$$b_{\mathrm{M}} = \sqrt{a_{\mathrm{M}}^2 - d_{\mathrm{M}}^2} = 383820\,\mathrm{km}$$

(b) $T = d_{\mathrm{sid}} = 86164\,\mathrm{s}, \qquad \frac{T^2}{a^3} = \frac{T_{\mathrm{M}}^2}{a_{\mathrm{M}}^3} \quad\Longrightarrow\quad a = a_{\mathrm{M}} \left(\frac{T}{T_{\mathrm{M}}}\right)^{\frac{2}{3}} = 42298\,\mathrm{km}$

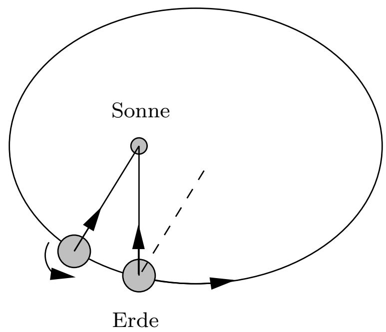
über Erdoberfläche: $x = a - R_{\mathrm{E}} = 35920\,\mathrm{km}$

(c) Ein Jahr hat 365,25 24 h-Tage und 366,25 Sterntage:

$$365{,}25 \cdot 24\,\mathrm{h} = 366{,}25 \cdot d_{\mathrm{sid}}$$

$$d_{\mathrm{sid}} = \frac{365{,}25}{366{,}25} \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s} = 86164\,\mathrm{s}$$

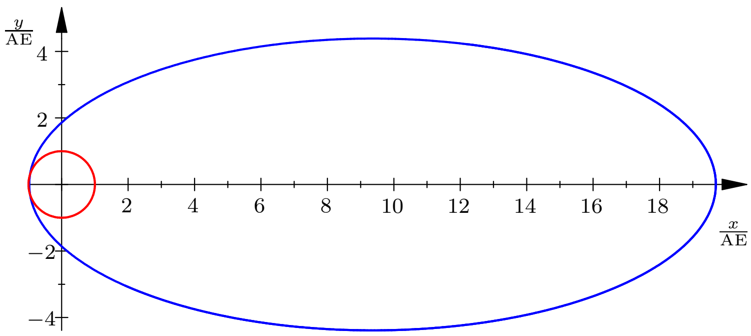
$$d_{\mathrm{sid}} = 23\,\mathrm{h}\;56\,\mathrm{min}\;4\,\mathrm{s}$$



1.2.2. (a) $\frac{T^2}{a^3} = C_{\odot} = 1\,\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{AE}^3} \quad\Longrightarrow\quad a = \sqrt[3]{\frac{T^2}{C_{\odot}}} = 10{,}335\,\mathrm{AE}$

$$d = a - r_1 = 9{,}359\,\mathrm{AE} \quad\Longrightarrow\quad b = \sqrt{a^2 - d^2} = 4{,}386\,\mathrm{AE}$$

$$r_2 = a + d = 19{,}694\,\mathrm{AE}$$



(b) $d = ea \quad\Longrightarrow\quad r_{\min} = a - d = a(1-e) \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{r_{\min}}{1-e} = 187\,\mathrm{AE}$

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = 18{,}5\,\mathrm{AE}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = C_{\odot} = 1\,\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{AE}^3} \quad\Longrightarrow\quad T = \sqrt{a^3 C_{\odot}} = 2{,}56 \cdot 10^3\,\mathrm{a}$$

1.2.3. (a) $\frac{T_{\mathrm{Eu}}^2}{a_{\mathrm{Eu}}^3} = \frac{T_{\mathrm{Io}}^2}{a_{\mathrm{Io}}^3} = C_{\mathrm{Jup}} = 4{,}17 \cdot 10^{-17}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{km}^3} \quad\Longrightarrow$

$$a_{\mathrm{Eu}} = \sqrt[3]{\frac{T_{\mathrm{Eu}}^2 a_{\mathrm{Io}}^3}{T_{\mathrm{Io}}^2}} = a_{\mathrm{Io}} \sqrt[3]{\frac{T_{\mathrm{Eu}}^2}{T_{\mathrm{Io}}^2}} = 1{,}59\, a_{\mathrm{Io}} = 6{,}71 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$$

(b) $a = \dfrac{r_1 + r_2}{2} = 5 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$

$$\frac{T^2}{a^3} = C_{\mathrm{Jup}} \quad \Longrightarrow \quad T = \sqrt{a^3 C_{\mathrm{Jup}}} = 2{,}28\,\mathrm{d}$$

$$d = a - r_1 = 3 \cdot 10^5\,\mathrm{km} = ea \quad \Longrightarrow \quad e = \frac{d}{a} = 0{,}6$$

$$b = \sqrt{a^2 - d^2} = a\sqrt{1 - e^2} = 0{,}8\, a = 4 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$$

(c) $r_4 = \overline{\mathrm{ES}_2} = 2a - r_3 = 6{,}8 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$

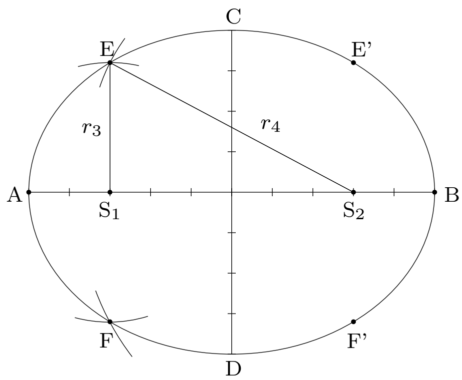
$\mathrm{k}(\mathrm{S}_1, r_3) \cap \mathrm{k}(\mathrm{S}_2, r_4) = \{\mathrm{E{,}F}\}$

$\overline{\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2} = 2d = 6 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$

$r_3^2 + \overline{\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2}^2 = 46{,}24 \cdot 10^{10}\,\mathrm{km}^2$

$r_4^2 = 6{,}8^2 \cdot 10^{10}\,\mathrm{km}^2 = r_3^2 + \overline{\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2}^2 \quad \Longrightarrow$

$\sphericalangle \mathrm{S}_2\mathrm{S}_1\mathrm{E} = 90°$



1.2.4. (a) $\dfrac{T_2^2}{T_1^2} = \dfrac{r_2^3}{r_1^3} \quad \Longrightarrow \quad T_2 = T_1\sqrt{\dfrac{r_2^3}{r_1^3}} = 20\,\mathrm{d} \cdot \sqrt{\left(\dfrac{9}{4}\right)^3} = 20\,\mathrm{d} \cdot \dfrac{27}{8} = 67{,}5\,\mathrm{d}$

(b) $a = \dfrac{r_1 + r_2}{2} = 325\,000\,\mathrm{km}$

$$\frac{T^2}{T_1^2} = \frac{a^3}{r_1^3} \quad \Longrightarrow \quad T = T_1\sqrt{\frac{a^3}{r_1^3}} = 20\,\mathrm{d} \cdot \sqrt{\left(\frac{13}{8}\right)^3} = 41{,}4\,\mathrm{d}$$

(c) $d = a - r_1 = 125\,000\,\mathrm{km}, \quad e = \dfrac{d}{a} = \dfrac{5}{13} \approx 0{,}385$

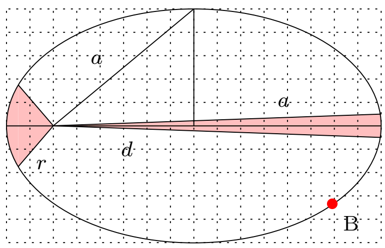
$$b = \sqrt{a^2 - d^2} = \sqrt{9 \cdot 10^{10}\,\mathrm{km}^2} = 300\,000\,\mathrm{km}$$

1.2.5. (a) $\dfrac{T_{\mathrm{A}}^2}{r^3} = \dfrac{T_{\mathrm{B}}^2}{a^3} = \dfrac{64 T_{\mathrm{A}}^2}{a^3} \quad \Longrightarrow \quad a = \sqrt[3]{64 r^3} = 4r$

$d = a - r = 3r \quad \Longrightarrow$

$b = \sqrt{a^2 - d^2} = \sqrt{16r^2 - 9r^2} = r\sqrt{7} \approx 2{,}65r$

(b) „Der Strahl Zentralkörper–Umlaufkörper überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.“



$$\frac{1}{2} v_1 \Delta t \cdot r = \frac{1}{2} v_2 \Delta t \cdot 7r \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \frac{v_1}{7} = 1200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

1.3 Aufbau des Universums

1.3.1. $a = \dfrac{1\,\mathrm{AE}}{\tan 1''} = 206264{,}80624548\,\mathrm{AE} \qquad b = \dfrac{1\,\mathrm{AE}}{\sin 1''} = 206264{,}80624790\,\mathrm{AE}$

$$b - a = 2{,}42 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{AE} = 363\,\mathrm{km} \quad \Longrightarrow \quad \delta_{\mathrm{rel}} = \frac{b - a}{b} = 1{,}2 \cdot 10^{-11}$$

1.3.2.

	LJ	Parsec	AE	m	φ
Sirius	8,65	2,65			
ε-Eridani		3,30			
Barnards Stern				$5{,}66 \cdot 10^{16}$	
α-Centauri			$2{,}75 \cdot 10^{5}$		
Altair					$0{,}198''$

1.3.3. (a) Mit $r = 1\,\text{AE}$ ist die Fläche einer Kugel um die Sonne durch den Ort der Erde:

$$A = 4\pi r^2 \quad \Longrightarrow \quad L_\odot = S \cdot A = 3{,}84 \cdot 10^{26}\,\text{W}$$

(b) $$L = E \cdot 4\pi r^2 \quad \Longrightarrow \quad r = \sqrt{\frac{L}{4\pi E}} = \sqrt{\frac{4{,}06 \cdot 10^4 \cdot 3{,}84 \cdot 10^{26}\,\text{W}}{4\pi \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}}} = 7{,}5 \cdot 10^{18}\,\text{m}$$

$$1\,\text{LJ} = 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s} \cdot 299792458\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} = 9{,}46 \cdot 10^{15}\,\text{m} \quad \Longrightarrow \quad r = 7{,}9 \cdot 10^2\,\text{LJ}$$

1.3.4. (a) Masse Sonne: $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$, Masse Universum: $M = 10^{22} M_\odot = 2 \cdot 10^{52}\,\text{kg}$

Zahl der Protonen: $N_\text{p} = \dfrac{M}{m_\text{p}} \approx 10^{79}$

(b) $T = 13{,}8 \cdot 10^9\,\text{a} = 4{,}4 \cdot 10^{17}\,\text{s}$

(c) $r = cT = 1{,}3 \cdot 10^{26}\,\text{m}, \quad V = \dfrac{4\pi}{3} r^3 = 9{,}3 \cdot 10^{78}\,\text{m}^3 \approx 10^{79}\,\text{m}^3$

$$\varrho = \frac{M}{V} \approx 2 \cdot 10^{-27}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad \frac{N_\text{p}}{V} \approx 1 \frac{\text{Proton}}{\text{m}^3}$$

(d) $W = Mc^2 \approx 2 \cdot 10^{69}\,\text{J}$

1.3.5. $$\varrho = \frac{M}{V} = \frac{1{,}5 M_\odot \cdot 3}{4\pi r^2} = 8{,}9 \cdot 10^{16}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 8{,}9 \cdot 10^{13}\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$$

1.3.6. (a) $R_\text{S,Sonne} = 2{,}95\,\text{km}, \; R_\text{S,Erde} = 8{,}87\,\text{mm}$

(b) $$M = \frac{R_\text{S} c^2}{2G} = \frac{7{,}7 \cdot 10^9\,\text{m} \cdot c^2}{2G} = 5{,}2 \cdot 10^{36}\,\text{kg} = 2{,}6 \cdot 10^6\,M_\odot$$

2 Newtonsche Mechanik

2.1 Masse, Beschleunigung, Kraft

2.1.1. $s = \frac{a}{2}t^2$ und $v = at \quad \Longrightarrow \quad s = \frac{a}{2} \cdot \frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{v^2}{2s} = 1{,}6 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$t = \frac{v}{a} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}$

2.1.2. $a = \frac{v}{t} = \frac{100}{3{,}6 \cdot 10{,}8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 2{,}57\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \qquad s = \frac{a}{2}t^2 = \frac{vt}{2} = 150\,\mathrm{m}$

2.1.3. $t = \frac{v}{a} = \frac{72}{3{,}6 \cdot 0{,}1}\,\mathrm{s} = 200\,\mathrm{s}, \qquad s = \frac{a}{2}t^2 = 2000\,\mathrm{m}$

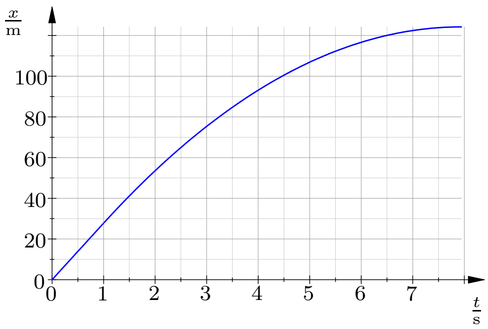
2.1.4. Der Anhalteweg ist

$$s = v_0 \cdot 1\,\mathrm{s} + \frac{v_0^2}{2|a|} =$$

$$= \frac{100\,\mathrm{m}}{3{,}6\,\mathrm{s}} \cdot 1\mathrm{s} + \frac{100^2\,\mathrm{m}^2}{2 \cdot 3{,}6^2\,\mathrm{s}^2 \cdot 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 124\,\mathrm{m}$$

Das Reh hat noch einmal Glück gehabt.

$$x(t) = \begin{cases} v_0 t & \text{für } t \leqq 1\,\mathrm{s} \\ v_0 t + \frac{a}{2}(t - 1\,\mathrm{s})^2 & \text{für } t > 1\,\mathrm{s} \end{cases}$$

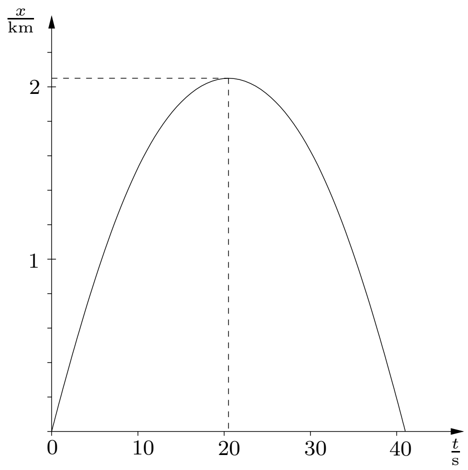


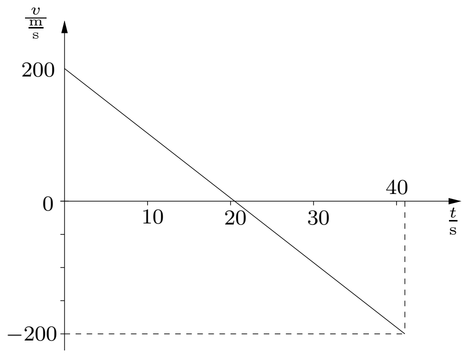
2.1.5. $h = \frac{g}{2}t^2 \quad \Longrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3{,}50\,\mathrm{s} \quad \Longrightarrow \quad v = gt = \sqrt{2gh} = 34{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 124\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

2.1.6. $h = \frac{v^2}{2g} = 20{,}4\,\mathrm{m}$

2.1.7. $h = \frac{v_0^2}{2g} = 2{,}04\,\mathrm{km}, \qquad v_\mathrm{a} = -v_0$

Zeit bis zur maximalen Höhe: $t_h = \frac{v_0}{g} = 20{,}4\,\mathrm{s} \quad \Longrightarrow \quad t_\mathrm{a} = 2t_h = 40{,}8\,\mathrm{s}$





2.1.8. $x_0 = x(t_0) = \frac{a}{2}t_0^2 = 78{,}48\,\mathrm{m}, \qquad v_0 = at_0 = 52{,}32\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{a}{2}t^2 = 8{,}72\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 & \text{für } x \leqq t_0 \\ x_0 + v_0(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2 = -4{,}905\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 + 81{,}75\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - 122{,}625\,\mathrm{m} & \text{für } x > t_0 \end{cases}$$

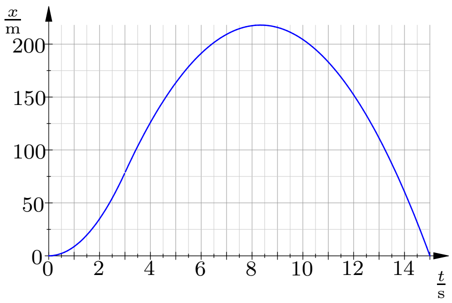
$$v(t) = \begin{cases} at = 8{,}72\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t & \text{für } x \leqq t_0 \\ v_0 - g(t - t_0) = 81{,}75\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t & \text{für } x > t_0 \end{cases}$$

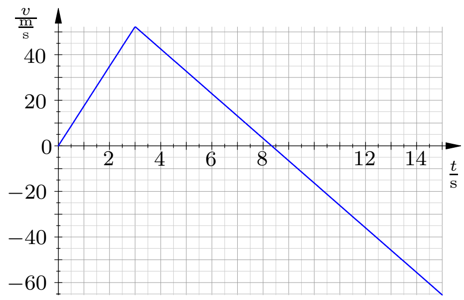
Maximale Höhe h zur Zeit $t_1 \quad \Longrightarrow \quad v(t_1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_1 = 8{,}33\,\mathrm{s}$

$h = x(t_1) = 218\,\mathrm{m}$

Aufprall am Boden zur Zeit t_2: Entweder die quadratische Gleichung lösen oder einfacher die Fallzeit aus der Höhe h zu t_1 addieren: $t_2 = t_1 + \sqrt{\frac{2h}{g}} = 15{,}0\,\mathrm{s}$

Aufprallgeschwindigkeit: $v_2 = v(t_2) = -65{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$





2.1.9. $F = ma = 1{,}40 \cdot 10^5\,\mathrm{N}$

2.1.10. $a = \dfrac{F}{m} = 1{,}70\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \qquad t = \dfrac{v}{a} = \dfrac{100\,\mathrm{m}}{3{,}6\,\mathrm{s} \cdot 1{,}70\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 16{,}3\,\mathrm{s}$

2.1.11. $v_0 = 30\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad \Delta x = \dfrac{a}{2}t^2$ und $v_0 = at \quad \Longrightarrow \quad \Delta x = \dfrac{v_0^2}{2a} \quad \Longrightarrow$

$a = \dfrac{v_0^2}{2\Delta x} = 300\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 30{,}6g \quad \Longrightarrow \quad F = ma = 21{,}0\,\mathrm{kN}$

Es wirkt die 30,6-fache Gewichtskraft, allerdings nur für die Zeitspanne $\Delta t = \frac{v_0}{a} = 0{,}10\,\mathrm{s}$.

2.1.12. Bei gleichen Reibungszahlen μ, gleichen Geschwindigkeiten v und gleichen Masse m sind die Reibungskräfte

$$F_{\mathrm{E}} = \mu m g_{\mathrm{Erde}} \quad \text{und} \quad F_{\mathrm{M}} = \mu m g_{\mathrm{Mond}} \approx \frac{1}{6} \cdot F_{\mathrm{E}}$$

uns damit die Beträge der Beschleunigungen

$$a_{\mathrm{E}} = \mu g_{\mathrm{Erde}} \quad \text{und} \quad a_{\mathrm{M}} = \mu g_{\mathrm{Mond}} \approx \frac{1}{6} \cdot a_{\mathrm{E}}.$$

Die Bremswege sind also

$$s_{\mathrm{E}} = \frac{v^2}{2a_{\mathrm{E}}} \quad \text{und} \quad s_{\mathrm{M}} = \frac{v^2}{2a_{\mathrm{M}}} \approx \frac{v^2}{2 \cdot \frac{1}{6}a_{\mathrm{E}}} = 6s_{\mathrm{E}}$$

2.1.13. Die Geschwindigkeit ist konstant, wenn die Gesamtkraft auf den Körper null ist:

$$-mg + Cv^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{mg}{C}} = \begin{cases} -63\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -226\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} & \text{(Schirm geschlossen)} \\ -7{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -25\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} & \text{(Schirm offen)} \end{cases}$$

2.1.14. $s = \dfrac{v_0^2}{2|a|} \quad\Longrightarrow\quad |a| = \dfrac{v_0^2}{2s} = 1{,}0\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \qquad F = \mu m g = m|a| \quad\Longrightarrow\quad \mu = \dfrac{|a|}{g} = 0{,}10$

2.1.15. Die Gewichtskraft von m_1 muss beide Massen beschleunigen und die Reibung von m_2 überwinden:

$$m_1 g = (m_1 + m_2)a + \mu m_2 g \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2}\, g$$

Die Fadenspannung ist gleich der Kraft auf die Masse m_2:

$$F_\mathrm{S} = a m_2 + \mu m_2 g = \frac{m_1 m_2 (1+\mu)}{m_1 + m_2}\, g$$

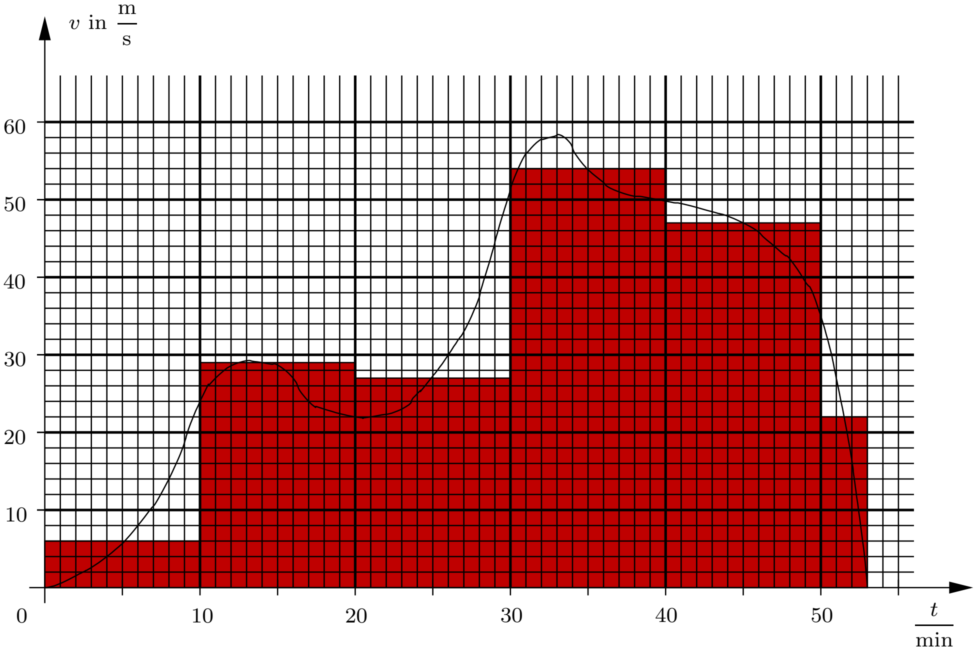
Oder: Die Fadenspannung ist gleich der Kraft, die von der Gewichtskraft von m_1 übrig bleibt, wenn die zur Beschleunigung von m_1 nötige Kraft subtrahiert wird (das ist die Gewichtskraft im beschleunigten Bezugssystem):

$$F_\mathrm{S} = m_1 g - m_1 a = m_1(g - a) = \frac{m_1 m_2 (1+\mu)}{m_1 + m_2}\, g$$

Konstante Geschwindigkeit, wenn $a = 0$, d.h. wenn $m_1 = \mu m_2$.

2.2 Näherungen

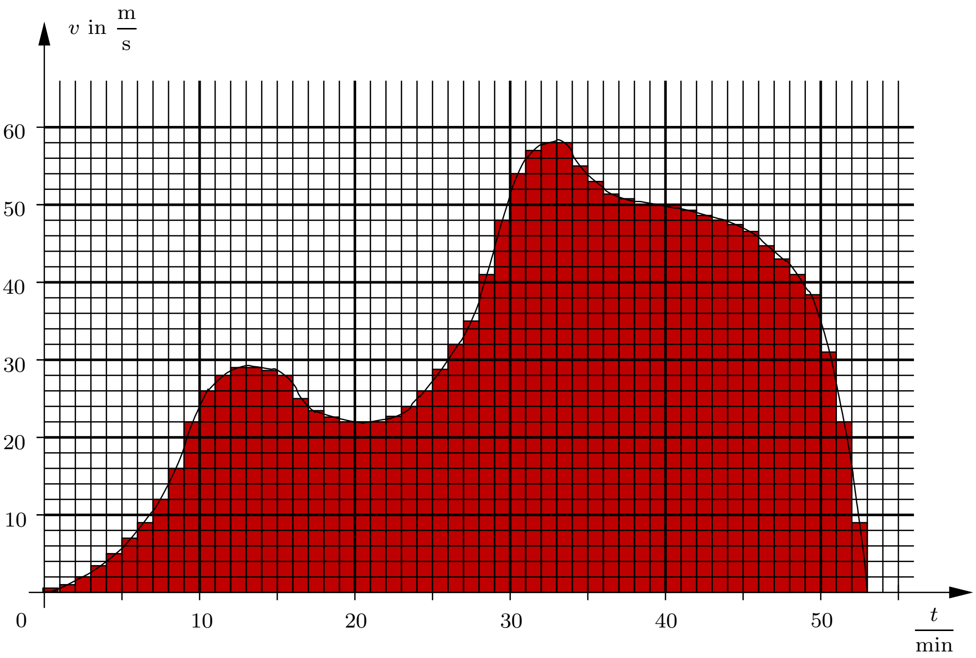
2.2.1. (a)



$$\Delta x = (6 + 29 + 27 + 54 + 47)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 600\,\mathrm{s} + 22\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 180\,\mathrm{s} = 101{,}76\,\mathrm{km}$$

Verbrauch: $\dfrac{12{,}3\,l}{101{,}76\,\mathrm{km}} = 12{,}1\,\dfrac{\mathrm{l}}{100\,\mathrm{km}}$

(b)



$\Delta x = (1+2+3+5+7+9+12+16+22+28+29+29+29+28+25+23+23+22+22+22+23+24+26+29+32+35+41+48+54+57+58+58+55+53+51+51+50+50+50+49+48+47+47+45+43+41+38+31+22+9)\ \frac{m}{s} \cdot 60\,s = 101{,}82\,km$

Verbrauch: $\frac{12{,}3\,l}{101{,}82\,km} = 12{,}1\ \frac{l}{100\,km}$

Abweichung: $\delta_{rel} = \frac{101,76 - 101{,}82}{101{,}82} = -0{,}06\,\%$

2.2.2. Mit $\Delta t = 0{,}001\,s$ folgt

$$v(t_1) \approx \frac{x\left(t_1 + \frac{\Delta t}{2}\right) - x\left(t_1 - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} = \frac{\left(3{,}0005^3 - 2{,}9995^3\right)\ m}{10 \cdot 0{,}001\,s} = 2{,}700\ \frac{m}{s}$$

Mit $t_2 = t_1 - \frac{\Delta t}{2} = 2{,}9995\,s$ und $t_3 = t_1 + \frac{\Delta t}{2} = 3{,}0005\,s$ folgt

$$v(t_2) \approx \frac{x\left(t_2 + \frac{\Delta t}{2}\right) - x\left(t_2 - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} = \frac{\left(3{,}000^3 - 2{,}999^3\right)\ m}{10 \cdot 0{,}001\,s} = 2{,}6991\ \frac{m}{s}$$

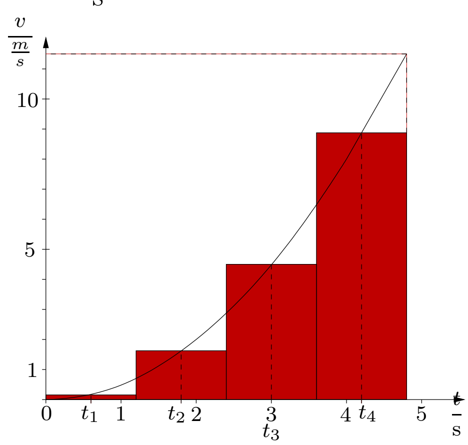
$$v(t_3) \approx \frac{x\left(t_3 + \frac{\Delta t}{2}\right) - x\left(t_3 - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} = \frac{\left(3{,}001^3 - 3{,}000^3\right)\ m}{10 \cdot 0{,}001\,s} = 2{,}7009\ \frac{m}{s}$$

$$a(t_1) \approx \frac{v\left(t_3\right) - v\left(t_2\right)}{\Delta t} = 1{,}800\ \frac{m}{s^2}$$

2.2.3. $t_1 = 0{,}6\,s$, $t_2 = 1{,}8\,s$, $t_3 = 3{,}0\,s$, $t_4 = 4{,}2\,s$, $\Delta t = 1{,}2\,s$

$$\Delta x = (v(t_1) + v(t_2) + v(t_3) + v(t_4)) \cdot \Delta t =$$
$$= (0{,}18 + 1{,}62 + 4{,}5 + 8{,}82)\ \frac{m}{s} \cdot 1{,}2\,s =$$
$$= 18{,}144\,m$$

$$\delta_{rel} = \frac{18{,}144 - 18{,}432}{18{,}432} = -1{,}56\,\%$$



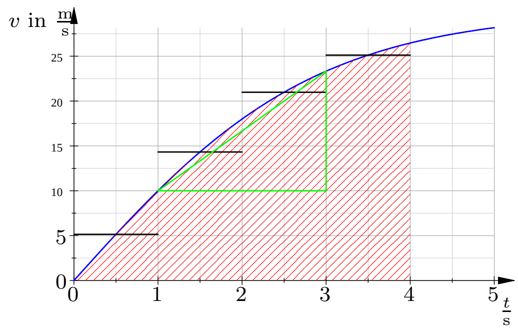
2.2.4. (a) $\Delta x \approx 1\,\mathrm{s}\,(5{,}1 + 14{,}3 + 21{,}0 + 25,1)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} =$

$= 65{,}5\,\mathrm{m}$

Ohne Luftwiderstand:

$h = \frac{g}{2}t_1^2 = 78{,}5\,\mathrm{m}$

$v_1 = gt_1 = \sqrt{2gh} = 39{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 141\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$



(b) $a(2\,\mathrm{s}) \approx \frac{v(3\,\mathrm{s}) - v(1\,\mathrm{s})}{2\,\mathrm{s}} =$

$= \frac{23{,}3 - 10}{2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 6{,}65\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

2.3 Die harmonische Schwingung

2.3.1. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \quad\Longrightarrow\quad D = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = 0{,}79\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

2.3.2. $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 1{,}257\,\frac{1}{\mathrm{s}} = 0{,}4000\,\pi\,\frac{1}{\mathrm{s}}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 0{,}2000\,\frac{1}{\mathrm{s}}, \quad T = \frac{1}{f} = 5{,}000\,\mathrm{s}$

Energiesatz: $\frac{D}{2}A^2 = \frac{D}{2}x_0^2 + \frac{m}{2}v_0^2 \quad\Longrightarrow\quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{D}v_0^2} = 2{,}000\,\mathrm{cm}$

$x(0) = x_0 = A\sin\varphi \quad\Longrightarrow\quad \sin\varphi = \frac{x_0}{A} = 0{,}951 \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 71{,}99^\circ = 0{,}400\,\pi$

$x(t) = A\sin\left[\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right] = 2\,\mathrm{cm}\cdot\sin\left[0{,}4\pi\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,(t + 1\,\mathrm{s})\right]$

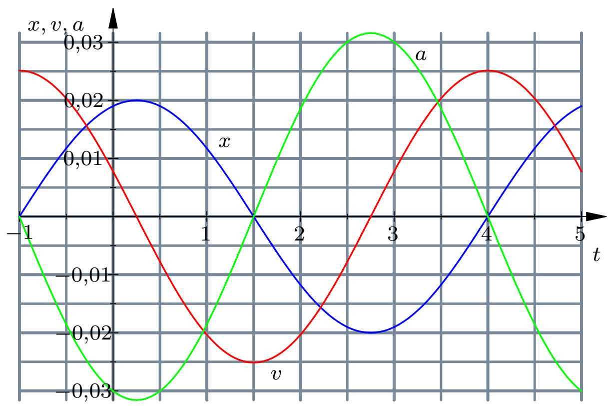
Energiesatz: $\frac{D}{2}A^2 = \frac{m}{2}v_{\max}^2 \quad\Longrightarrow\quad v_{\max} = A\sqrt{\frac{D}{m}} = A\omega = 2{,}513\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$

$v(t) = v_{\max}\cos\left[\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right] = 2{,}513\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\cdot\cos\left[0{,}4\pi\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,(t + 1\,\mathrm{s})\right]$

Die maximale Kraft auf die Masse m ist $F_{\max} = DA$, ihre maximale Beschleunigung ist also

$$a_{\max} = \frac{DA}{m} = \omega^2 A = 3{,}158\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad\Longrightarrow$$

$a(t) = -a_{\max}\sin\left[\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right] = -3{,}158\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\sin\left[0{,}4\pi\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,(t + 1\,\mathrm{s})\right]$



2.3.3. $D = \frac{F}{\Delta x} = \frac{nmg}{\Delta x} = 91560\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}, \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{M+m}} = 0{,}54\,\mathrm{Hz}, \qquad T = \frac{1}{f} = 1{,}9\,\mathrm{s}$

2.3.4. $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} \quad \Longrightarrow \quad D = 4\pi^2 f^2 m = 3{,}95\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

$$W' = W - \Delta W \quad \Longrightarrow \quad \frac{D}{2}A'^2 = \frac{D}{2}A^2 - \Delta W \quad \Longrightarrow \quad A' = \sqrt{A^2 - \frac{2\Delta W}{D}} = 7{,}0\,\mathrm{cm}$$

2.3.5. $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} \quad \Longrightarrow \quad D = 4\pi^2 f^2 m \quad \Longrightarrow \quad W = \frac{D}{2}A^2 = 2\pi^2 f^2 m A^2$

$$W = W' \quad \Longrightarrow \quad 2\pi^2 f^2 m A^2 = 2\pi^2 f'^2 \cdot 4m \cdot (2A)^2 = 16 \cdot 2\pi^2 f'^2 m A^2$$

$$f^2 = 16 f'^2 \quad \Longrightarrow \quad f' = \frac{f}{4}$$

2.3.6. Für

$$\omega t_k = 2\pi\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

mit $k \in \mathbb{Z}$, d.h. für

$$t_k = \left(\frac{1}{4} + k\right)\,\mathrm{s}$$

ist $\sin\omega t_k = 1$ und damit

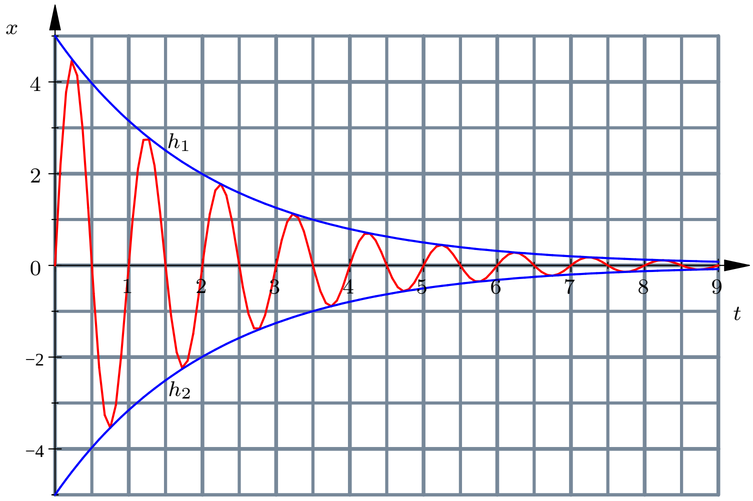
$$x(t_k) = h_1(t_k).$$

Analog gilt

$$x(t'_k) = h_2(t'_k)$$

für

$$t'_k = \left(\frac{3}{4} + k\right)\,\mathrm{s}$$



2.3.7. (a) $\frac{D}{2}A^2 = \frac{m}{2}v_0^2 \quad \Longrightarrow \quad A = v_0\sqrt{\frac{m}{D}} = 1{,}60\,\mathrm{m}$

(b) $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 5{,}00\,\frac{1}{\mathrm{s}} \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 1{,}26\,\mathrm{s} \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \frac{T}{2} = 0{,}628\,\mathrm{s}$

(c) Maximale Kraft bei $x = A$, d.h. $F_{\max} = DA = 8000\,\mathrm{N} \quad \Longrightarrow$

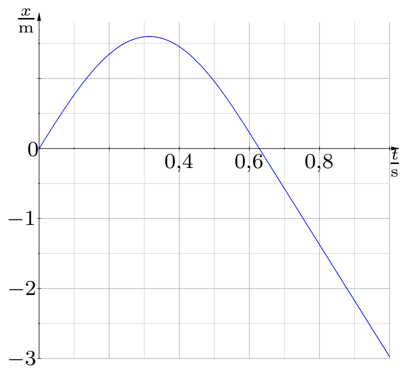
$$a_{\max} = \frac{F_{\max}}{m} = 40{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

(d) $x(t) = A \sin \omega t$ für $t \leqq t_1$

t in s	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
x in m	0,77	1,35	1,60	1,45	0,96	0,23

Konstante Geschwindigkeit $-8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ für $t > t_1$:

$$x(1\,\mathrm{s}) = -8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \underbrace{(1\,\mathrm{s} - t_1)}_{0{,}372\,\mathrm{s}} = -2{,}97\,\mathrm{m}$$



2.3.8. (a) $A = x_2, \quad v_0 = \frac{0 - x_0}{t_1} = 3{,}14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \frac{v_0}{A} = 2{,}09\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

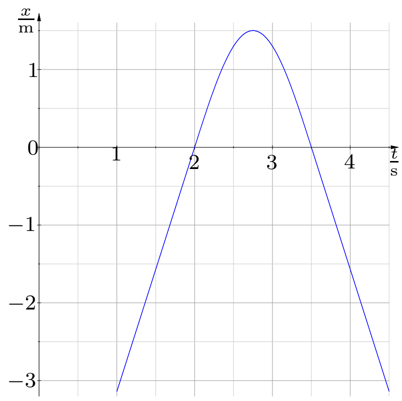
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \Longrightarrow \quad D = m\omega^2 = \frac{mv_0^2}{A^2} = 789\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

(b) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi A}{v_0} = 3{,}00\,\mathrm{s} \quad \Longrightarrow \quad t_2 = t_1 + \frac{T}{4} = 2{,}75\,\mathrm{s}, \quad t_3 = t_1 + \frac{T}{2} = 3{,}50\,\mathrm{s}$

(c) $F_{\mathrm{max}} = DA = \frac{mv_0^2}{A} = 1183\,\mathrm{N} \quad \Longrightarrow \quad a_{\mathrm{max}} = \frac{F_{\mathrm{max}}}{m} = \frac{v_0^2}{A} = 6{,}57\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

(d)

$$x(t) = \begin{cases} v_0(t - t_1) & \text{für } t < t_1 \\ A \sin \omega t & \text{für } t_1 \leqq t \leqq t_3 \\ -v_0(t - t_3) & \text{für } t > t_3 \end{cases}$$



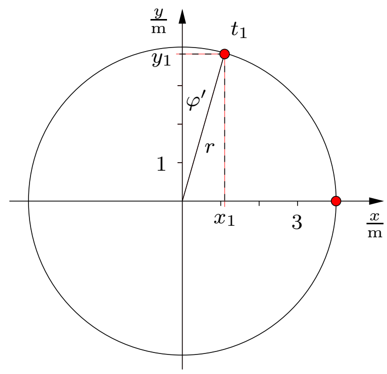
2.4 Kreisbewegung

2.4.1. $r = 4\,\mathrm{m}, \quad T = \frac{2r\pi}{v} = 10\,\mathrm{s}, \quad f = \frac{1}{T} = 0{,}1\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

$$\omega = 2\pi f = 0{,}625\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$\varphi_1 = \omega t_1 = 5 = 286°, \quad \varphi' = 270° - \varphi = 16°$$

$$x_1 = r \sin \varphi' = 1{,}1\,\mathrm{m}, \quad y_1 = r \cos \varphi' = 3{,}8\,\mathrm{m}$$



2.4.2. $F_z = \frac{mv^2}{r} \leqq \mu_{\mathrm{H}} mg \quad \Longrightarrow \quad v \leqq \sqrt{\mu_{\mathrm{H}} r g} = \begin{cases} 39{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 143\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} & \text{(trocken)} \\ 14{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 50{,}4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} & \text{(eisig)} \end{cases}$

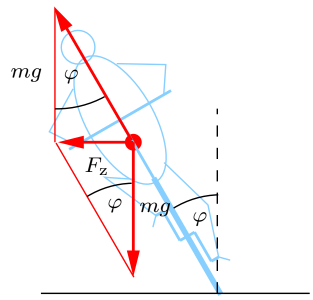
2.4.3. $a = \omega^2 r = 4\pi^2 f^2 r = 10g \quad \Longrightarrow \quad f = \sqrt{\dfrac{10g}{4\pi^2 r}} = 0{,}557\,\mathrm{Hz}$

$$f \cdot 60\,\mathrm{s} = 33{,}4 \quad \text{Umdrehungen pro Minute}$$

2.4.4. $v = 10\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad \tan\varphi = \dfrac{F_\mathrm{z}}{mg} = \dfrac{v^2}{rg} = 0{,}5097 \quad \Longrightarrow$

$$\varphi = 27{,}0°$$

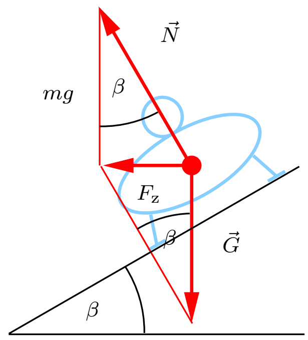
$$F_\mathrm{H} > F_\mathrm{z} \quad \Longrightarrow \quad \mu_\mathrm{H} mg > \frac{mv^2}{r} \quad \Longrightarrow \quad \mu_\mathrm{H} > \frac{v^2}{rg} = 0{,}51$$



2.4.5. Auf den Bob wirken die Gewichtskraft $\vec{G}$ und die von der Unterlage (Eis) ausgehende Normalkraft $\vec{N}$. Die Summe der beiden Kräfte muss die Zentripetalkraft ergeben:

$$\tan\varphi = \frac{F_\mathrm{z}}{mg} = \frac{v^2}{rg}$$

$$v = \sqrt{rg\tan\beta} = 30{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 110\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

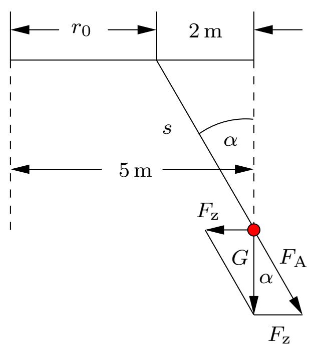


2.4.6. $r = r_0 + s\sin\alpha = 3\,\mathrm{m} + 2\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m}$

$$F_\mathrm{z} = mg\tan\alpha = m\omega^2 r \quad \Longrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g\tan\alpha}{r}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g\tan\alpha}} = 5{,}9\,\mathrm{s}$$

$$F_\mathrm{A} = \frac{mg}{\cos\alpha} = 906\,\mathrm{N}$$



2.4.7. $\vec{v}(1\,\mathrm{s}) \approx \dfrac{\vec{r}(1{,}01\,\mathrm{s}) - \vec{r}(0{,}99\,\mathrm{s})}{0{,}02\,\mathrm{s}} = \begin{pmatrix} -0{,}0005 \\ -3{,}141 \end{pmatrix} \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad |\vec{v}(1\,\mathrm{s})| \approx 3{,}141\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$$\left[\text{exakt:} \quad \vec{v}(t) = r\alpha t \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2}t^2 \\ -\sin\frac{\alpha}{2}t^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(1\,\mathrm{s}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

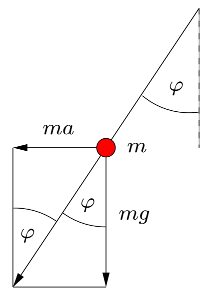
$$\vec{a}(1\,\mathrm{s}) \approx \frac{\vec{r}(1{,}01\,\mathrm{s}) - 2\vec{r}(1\,\mathrm{s}) + \vec{r}(0{,}99\,\mathrm{s})}{0{,}01^2\,\mathrm{s}} = \begin{pmatrix} -9{,}87 \\ -3{,}14 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \quad |\vec{a}(1\,\mathrm{s})| \approx 10{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\left[\text{exakt:} \quad \vec{a}(t) = -\alpha t^2 \vec{r} + \frac{\vec{v}}{t}, \quad \vec{a}(1\,\mathrm{s}) = \begin{pmatrix} -\pi^2 \\ -\pi \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \quad |\vec{a}(1\,\mathrm{s})| = \pi\sqrt{1+\pi^2} \approx 10{,}36\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

2.5 Trägheitskräfte

2.5.1. $a = r\omega^2 = 4\pi^2 r f^2, \quad \dfrac{a}{g} = \dfrac{4\pi^2 r f^2}{g} = 4{,}0 \cdot 10^5 \quad \Longrightarrow \quad F = ma = 4{,}0 \cdot 10^5 \cdot G$

2.5.2. $\tan\varphi = \dfrac{ma}{mg} = \dfrac{a}{g} \quad\Longrightarrow\quad a = g\tan\varphi$



$$a_{\max} = g\tan 11{,}5^\circ = 1{,}99587\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \quad a_{\min} = g\tan 10{,}5^\circ = 1{,}81818\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$a = (1{,}91 \pm 0{,}09)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$A = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad\Longrightarrow\quad \tan\varphi = \frac{4}{9{,}81} = 0{,}4077 \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 22{,}2^\circ$$

2.5.3. (a) Auf einen Körper der Masse m am Äquator wirkt die Gravitation in Richtung Erdmittelpunkt und die Zentrifugalkraft in Folge der Erdrotation in die entgegengesetzte Richtung. Mit $R = 6{,}378\cdot 10^6\,\mathrm{m}$ (Äquatorradius) und der siderischen (von einem Inertialsystem aus betrachteten) Rotationsdauer $T = 23\,\mathrm{h}\,56\,\mathrm{min}\,4{,}1\,\mathrm{s} = 86164{,}1\,\mathrm{s}$ folgt

$$mg = mg_0 - m\omega^2 R \quad\Longrightarrow\quad g_0 = g + \omega^2 R = g + \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 9{,}815\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

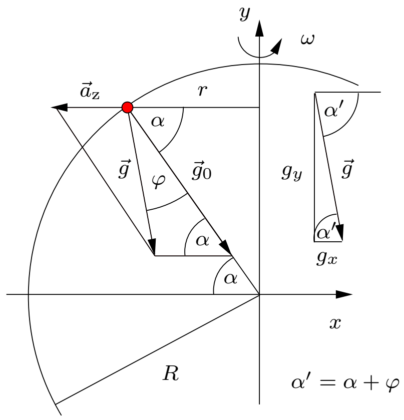
$$\frac{g - g_0}{g_0} = \frac{g}{g_0} - 1 = -0{,}35\%$$

Nicht auf den Boden fallen: $g = g_0 - \omega^2 R = g_0 - \dfrac{4\pi^2 R}{T_0^2} = 0$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}} = 5065\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{h}\,24\,\mathrm{min}\,25\,\mathrm{s}$$

Der Stein beschreibt eine geostationäre Umlaufbahn.

(b) $\alpha = 47{,}5^\circ, \quad r = R\cos\alpha = 4{,}309\cdot 10^6\,\mathrm{m}$



$$a_z = \omega^2 r = 0{,}0229\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\vec g_0 = \begin{pmatrix} g_0\cos\alpha \\ -g_0\sin\alpha \end{pmatrix}, \quad a_z = \begin{pmatrix} -a_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

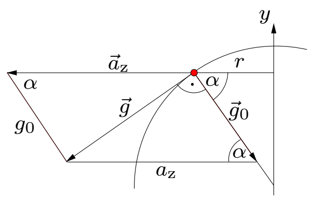
$$\vec g = \vec g_0 + \vec a_z = \begin{pmatrix} g_0\cos\alpha - a_z \\ -g_0\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}612 \\ -7{,}241 \end{pmatrix}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\tan\alpha' = \frac{|g_y|}{g_x} = 1{,}095 \quad\Longrightarrow\quad \alpha' = 47{,}599^\circ$$

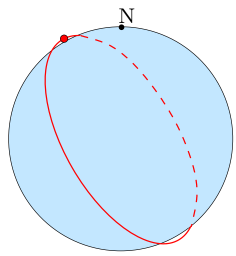
$$\varphi = \alpha' - \alpha = 0{,}099^\circ = 5{,}9'$$

Nicht auf den Boden fallen $\quad\Longrightarrow$

$\vec g \parallel$ Erdoberfläche



$$a_z = \frac{g_0}{\cos\alpha} = r\omega_0^2 = \frac{4\pi^2 r}{T_0^2} = \frac{4\pi^2 R\cos\alpha}{T_0^2}$$



Bahn im Inertialsystem

$$T_0 = 2\pi\cos\alpha\sqrt{\frac{R}{g_0}} = 3421\,\mathrm{s} \approx 57\,\mathrm{min}$$

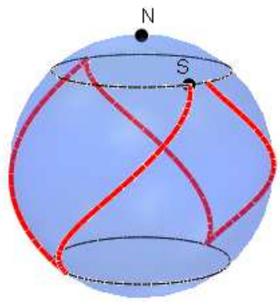
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g_0}{R}}$$

$$v_0 = \omega_0 r = \frac{r}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g_0}{R}} = R\sqrt{\frac{g_0}{R}} = \sqrt{g_0 R}$$

Das ist genau die Geschwindigkeit für eine Kreisbahn um die Erde (von einem nicht rotierenden Inertialsystem aus betrachtet), denn die Zentripetalkraft

$$F_{z0} = \frac{mv_0^2}{R} = mg_0$$

ist gleich der Gewichtskraft. Nach dem Loslassen bewegt sich der Stein zuerst nach Süden und dann nach südwest. Nebenstehende Abbildung zeigt die Bahn des Steins vom rotierenden System der Erde aus betrachtet für zwei Umrundungen (S ist der Startpunkt, N der Nordpol).



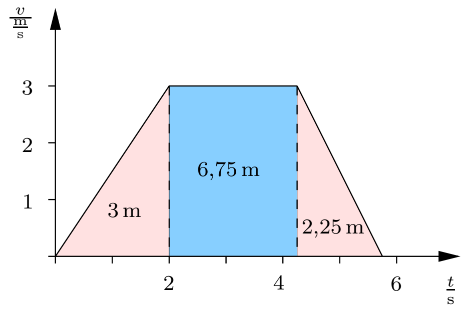
2.5.4. a ist die Beschleunigung des Aufzugs, die x-Achse zeige nach unten (damit sind nach unten gerichtete Beschleunigungen positiv). Die Masse der Frau ist $m = 80\,\mathrm{kg}$, auf die Waage wirkt die Kraft

$$F = mg - ma = \overline{m}g\,,$$

wobe $\overline{m}$ die von der Waage angezeigte Masse ist.

$$a = \frac{mg - \overline{m}g}{m} = \left(1 - \frac{\overline{m}}{m}\right) g$$

0 bis 2 s	:	$a = 1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	$v(2\,\mathrm{s}) = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
2 s bis 4,25 s	:	$a = 0$	$v(4{,}25\,\mathrm{s}) = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
4,25 s bis 5,75 s	:	$a = -2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	$v(5{,}75\,\mathrm{s}) = 0$



Der Aufzug legt die Strecke

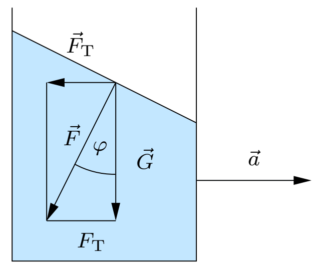
$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3\,\mathrm{m} + 2{,}25 \cdot 3\,\mathrm{m} + \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 3\,\mathrm{m} = 12\,\mathrm{m}$$

zurück, die Stockwerkshöhe ist also

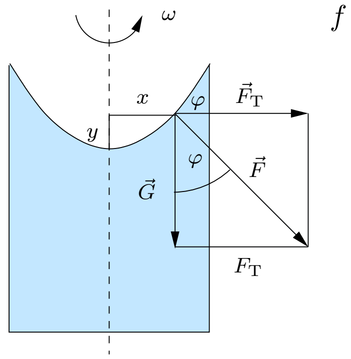
$$h = \frac{s}{3} = 4\,\mathrm{m}.$$

2.5.5. (a) $\tan\varphi = \frac{|F_\mathrm{T}|}{G} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} = \frac{1}{9{,}81}$

$$\varphi = 5{,}82°$$



(b) Der Steigungswinkel φ der Flüssigkeitsoberfläche in der Entfernung x von der Drehachse genügt der Gleichung



$$\tan\varphi = \frac{|F_\mathrm{T}|}{G} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} = \frac{\omega^2}{g}\cdot x$$

Die Funktion f, die die Form der Oberfläche beschreibt, hat also die Steigung

$$m(x) = \tan\varphi = \frac{\omega^2}{g}\cdot x$$

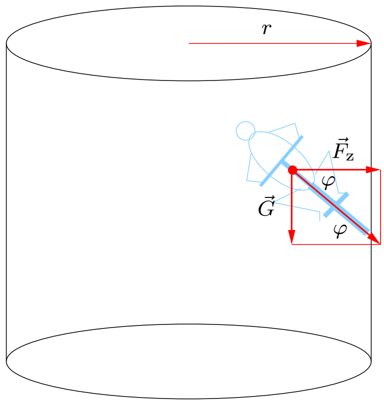
wird mit wachsender Entfernung von der Achse immer steiler.

Man kann zeigen (Mathematik 11. Klasse), dass

$$f(x) = \frac{\omega^2}{2g}\cdot x^2$$

gilt (Parabel).

2.5.6. Senkrecht auf die Wand drückt



$$F_\mathrm{z} = \frac{mv^2}{r}\,,$$

die Haftkraft ist somit

$$F_\mathrm{H} = \mu_\mathrm{H}F_\mathrm{z} = \frac{\mu_\mathrm{H}mv^2}{r}$$

Er rutsch nicht ab für

$$F_\mathrm{H} > mg\,,$$

d.h.

$$\frac{\mu_\mathrm{H}mv^2}{r} > mg \quad\Longrightarrow\quad v > \sqrt{\frac{gr}{\mu_\mathrm{H}}} = \sqrt{2gr} = 10{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 39\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Die Gesamtkraft zeigt in Richtung Schwerpunkt–Berührpunkt, d.h.

$$\tan\varphi = \frac{mg}{F_\mathrm{z}} = \frac{gr}{v^2} = \mu_\mathrm{H} = 0{,}5 \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 26{,}6^\circ$$

2.5.7. $F_\mathrm{z} = m\omega^2 r = \dfrac{4\pi^2 mr}{T^2} = m\cdot 3{,}66\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0{,}37\,mg$

$$m\omega_0^2 r = mg = \frac{4\pi^2 mr}{T_0^2} \quad\Longrightarrow\quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 110\,\mathrm{s}$$

2.6 Wurfbewegungen

2.6.1. (a) Fallzeit: $\dfrac{g}{2}t^2 = h \quad\Longrightarrow\quad t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} \quad\Longrightarrow\quad x_\mathrm{w} = v_0 t = v_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

(b) $v_0 = x_\mathrm{w}\sqrt{\dfrac{g}{2h}} = 35{,}0\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

2.6.2. $v_{y0} = v_0 \sin\varphi \quad \Longrightarrow \quad v_y(t) = v_{y0} - gt = v_0 \sin\varphi - gt$

Größte Höhe für $v_y(t_1) = v_0 \sin\varphi - gt_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \frac{v_0}{g} \sin\varphi$

$$h = y(t_1) = v_{y0} t_1 - \frac{g}{2} t_1^2 = \frac{v_0^2}{g} \sin^2\varphi - \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\varphi = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\varphi$$

h ist maximal für $\sin\varphi = 1$, d.h. für $\varphi = 90°$ (klar!).

Flugdauer t_2 bis zum Aufprall auf dem Boden und Flugweite w:

$$t_2 = 2t_1 = \frac{2v_0}{g} \sin\varphi \quad \Longrightarrow \quad w = v_{x0} t_2 = v_0 \cos\varphi \cdot \frac{2v_0}{g} \sin\varphi = \frac{2v_0^2}{g} \sin\varphi \cos\varphi$$

Mit der trigonometrischen Formel $\sin 2\varphi 2 \sin\varphi \cos\varphi$ folgt

$$w = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi$$

w ist maximal für $\sin 2\varphi = 1$, d.h. für $\varphi = 45°$.

2.6.3. $v_{x0} = v_0 \cos\varphi, \quad v_{y0} = v_0 \sin\varphi, \quad v_y(t) = v_{y0} - gt = v_0 \sin\varphi - gt$

Größte Höhe für $v_y(t_1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \frac{v_0}{g} \sin\varphi$

$$h = y(t_1) = v_{y0} t_1 - \frac{g}{2} t_1^2 = \frac{v_0^2}{g} \sin^2\varphi - \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\varphi = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\varphi = 5{,}1\,\mathrm{m}$$

Zeit bis zum Aufprall: $t_2 = 2t_1 = \frac{2v_0}{g} \sin\varphi$

Schussweite w:

$$w = v_{x0} t_2 = v_0 \cos\varphi \cdot \frac{2v_0}{g} \sin\varphi = \frac{2v_0^2}{g} \sin\varphi \cos\varphi = 35{,}3\,\mathrm{m}$$

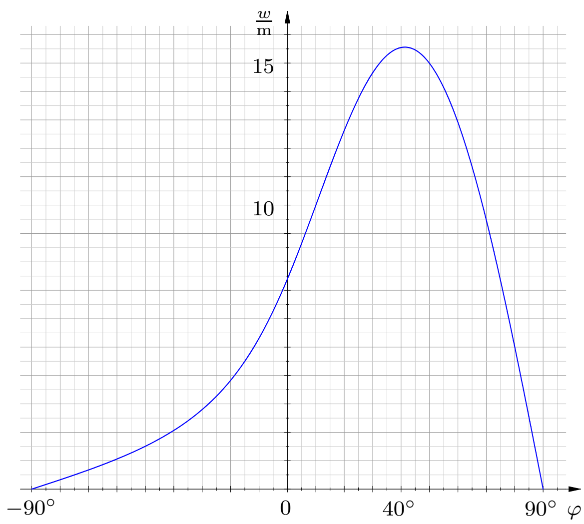
2.6.4. $v_{x0} = v_0 \cos\varphi, \quad v_{y0} = v_0 \sin\varphi, \quad y(t) = h + v_{y0} t - \frac{g}{2} t^2 = h + v_0 t \sin\varphi - \frac{g}{2} t^2$

Zeit bis zum Aufprall: $y(t_1) = 0$

$$h + v_{y0} t - \frac{g}{2} t^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \frac{v_{y0}}{g} \underset{(-)}{+} \frac{1}{g} \sqrt{v_{y0}^2 + 2gh}$$

$$w(\varphi) = v_{x0} t_1 = \frac{v_0^2}{g} \cos\varphi \left(\sin\varphi + \sqrt{\sin^2\varphi + \frac{2gh}{v_0^2}} \right)$$

φ in Grad	w in m
41,00	15,56015
41,20	15,56086
41,30	15,56090
41,338	15,56100
41,40	15,56097
41,50	15,56080
42,00	15,55773



Maximale Stoßweite $x_{\max} = 15{,}56\,\mathrm{m}$ bei $\varphi \approx 41°$ ($g = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$).

Mit $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$:

$$x_{\max} = 15{,}83\,\mathrm{m} \text{ bei } \varphi = 41{,}399°$$

2.6.5. (a) $t = \dfrac{s}{v_0} = 0{,}132\,\mathrm{s} \quad\Longrightarrow\quad \Delta y = \dfrac{g}{2}t^2 = \dfrac{gs^2}{2v_0^2} = 8{,}49\,\mathrm{cm}$

(b) $y = v_{0y}t - \dfrac{g}{2}t^2 = \dfrac{v_0 s \sin\varphi}{v_0} - \dfrac{gs^2}{2v_0^2} = s\sin\varphi - \dfrac{gs^2}{2v_0^2} = b \quad\Longrightarrow$

$$\sin\varphi = \frac{b}{s} + \frac{gs}{2v_0^2} = 2{,}10 \cdot 10^{-3} \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 0{,}120°$$

$$v_{0x} = v_0\cos\varphi = 379{,}999163\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad \frac{\Delta v_x}{v_0} = \frac{-0{,}000837}{380} = -2{,}2 \cdot 10^{-6}$$

2.6.6. $v_y = v_0\sin\varphi - gt = 0 \quad\Longrightarrow\quad t = \dfrac{v_0\sin\varphi}{g}$

$$x = tv_0\cos\varphi = \frac{v_0^2\sin\varphi\cos\varphi}{g}$$

$$h = tv_0\sin\varphi - \frac{g}{2}t^2 = \frac{v_0^2\sin^2\varphi}{g} - \frac{g}{2}\cdot\frac{v_0^2\sin^2\varphi}{g^2} = \frac{v_0^2\sin^2\varphi}{2g}$$

$$\frac{h}{x} = \frac{v_0^2\sin^2\varphi \cdot g}{2g\cdot v_0^2\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{2\cos\varphi} = \frac{1}{2}\tan\varphi \quad\Longrightarrow\quad \tan\varphi = \frac{2h}{x} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 45°$$

$$v_0^2 = \frac{2gh}{\sin^2\varphi} = \frac{2gh}{0{,}5} = 4gh \quad\Longrightarrow\quad v_0 = 2\sqrt{gh} = 28{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 101\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

2.7 Impulssatz

2.7.1. $m_1|\vec{v}_1| = m_2|\vec{v}_2| \quad\Longrightarrow\quad m_1 = \dfrac{m_2|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|} = \dfrac{210\,\mathrm{kg}\cdot 200}{700} = 60\,\mathrm{kg}$

2.7.2. $(m_1 - m_2)v_1 = m_2 v_2 \quad\Longrightarrow\quad v_2 = \dfrac{(m_1 - m_2)v_1}{m_2} = \dfrac{490 \cdot 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10} = 147\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

2.7.3. Einatmen, Kopf um 180° drehen, ausatmen.

2.7.4. Dichte Eisen: $\varrho = 7{,}87\,\dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 7870\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, Radius Meteorit: $r = \dfrac{d}{2} = 500\,\mathrm{m}$

Masse Erde: $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, Masse Meteorit: $m = \varrho V = \dfrac{4\pi}{3}r^3\varrho = 4{,}12 \cdot 10^{12}\,\mathrm{kg}$

$$mv = (m + M)u \quad\Longrightarrow\quad u = \frac{mv}{(m + M)} = 3{,}45 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$W_\mathrm{k} = \frac{m}{2}v^2 = 5{,}15 \cdot 10^{21}\,\mathrm{J}, \quad W'_\mathrm{k} = \frac{M}{2}u^2 = 3{,}56 \cdot 10^{9}\,\mathrm{J}$$

$$\frac{W_\mathrm{k} - W'_\mathrm{k}}{W_\mathrm{k}} = 1 - 6{,}9 \cdot 10^{-13} \approx 100\%$$

$\dfrac{W_\mathrm{k}}{W_\mathrm{Atombombe}} = 1{,}03 \cdot 10^{8}$, d.h. ungefähr 100 000 000 Atombomben!

2.7.5. $mv = (m + M)u \quad\Longrightarrow\quad v = \dfrac{(m + M)u}{m} = 602\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$$W_\mathrm{k} = \frac{m}{2}v^2 = 906\,\mathrm{J}, \quad W'_\mathrm{k} = \frac{M}{2}u^2 = 2{,}25\,\mathrm{J}, \quad \frac{W_\mathrm{k} - W'_\mathrm{k}}{W_\mathrm{k}} = 99{,}75\%$$

2.7.6. $m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B + m_C\vec{v}_C = \vec{o} \quad \Longrightarrow$

$$m_C\vec{v}_C = -m_A\vec{v}_A - m_B\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 250 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}} - \begin{pmatrix} 250 \\ 250 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}} = -\begin{pmatrix} 250 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$$

Charly kam aus Osten mit der Geschwindigkeit $v_C = \frac{250}{75} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 3{,}33 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

2.7.7. Das von der Querschnittsfläche überstrichene Volumen ist $V = Ax$, die eingesmmelte Staubmasse also

$$m = \varrho V = \varrho A x$$

Impulssatz (der Staub ruht vor dem Einsammeln):

$$M v_0 = (M + m)\, v(x) \quad \Longrightarrow$$

$$v(x) = \frac{M v_0}{M + \varrho A x} = \frac{100\,\mathrm{kg} \cdot 2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}{100\,\mathrm{kg} + 10^{-13}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 16\,\mathrm{m}^2 \cdot x} = \frac{2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}{1 + 1{,}6 \cdot 10^{-11}\,\frac{1}{\mathrm{km}} \cdot x}$$

$$v(10^6\,\mathrm{km}) = \frac{2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}{17} = 0{,}118\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

$$v(x) = \frac{2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}{1 + 1{,}6 \cdot 10^{-11}\,\frac{1}{\mathrm{km}} \cdot x} = 1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \quad \Longrightarrow \quad x = 6{,}25 \cdot 10^{10}\,\mathrm{km}$$

2.7.8. (a) $\sin\varphi = \frac{R_E}{x_0} = \frac{5}{13} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 22{,}62° \quad \Longrightarrow \quad \tan\varphi = \frac{5}{12}$

$$v_y = v \tan\varphi = 1250\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(b) Impulssatz für y-Komponente:

$$v_y(M - m) = um \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{v_y(M - m)}{m} = 8{,}00 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

2.8 Gravitationsgesetz

2.8.1. Da sicher φ und a sehr klein sind, befinden sich m_1 und m_2 noch ungefähr auf der gleichen Höhe und es gilt

$$r \approx a - x \approx a$$

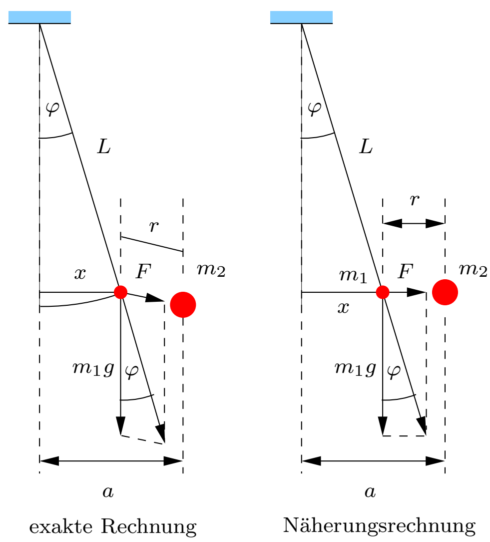
$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \approx \frac{G m_1 m_2}{a^2}$$

Da auch $F \ll m_1 g$ gilt, folgt

$$\sin\varphi = \frac{x}{L} = \frac{F}{\sqrt{F^2 + m_1^2 g^2}} \approx \frac{F}{m_1 g}$$

$$x \approx \frac{FL}{m_1 g} = \frac{G L m_2}{a^2 g} = 1{,}1 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

(Das Ergebnis der exakten Rechnung stimmt auf sechs geltende Ziffern mit dem Näherungsergebnis überein.)



$$\sin\varphi = \frac{x}{L} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 1{,}09 \cdot 10^{-8} = (6{,}2 \cdot 10^{-7})° = 0{,}0022''$$

2.8.2. $M = M_{\text{Erde}} = 5{,}974 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$, $R = R_{\text{Erde,Äquator}} = 6{,}378 \cdot 10^6\,\text{m}$

„Zentripetalkraft gleich Gravitationskraft“ und $r = R + a$:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2} \quad\Longrightarrow\quad v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r} \quad\Longrightarrow\quad r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

Mit $T = 24\,\text{h} = 86400\,\text{s}$ folgt $r = 4{,}225 \cdot 10^4\,\text{km}$ und $a = r - R = 3{,}587 \cdot 10^4\,\text{km}$.

Streng genommen beträgt die Rotationsdauer der Erde in einem Inertialsystem

$$T' = \frac{365{,}25}{366{,}25} \cdot T = 86164\,\text{s}.$$

Damit folgt $r = 4{,}217 \cdot 10^4\,\text{km}$ und $a = r - R = 3{,}579 \cdot 10^4\,\text{km}$.

$$v = \frac{2\pi r}{T'} = 3081\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \left(3072\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ mit } T\right)$$

$$F = \frac{GMm}{r^2} = 0{,}2234\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot m$$

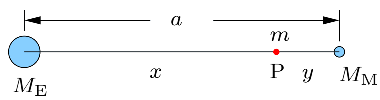
Er fühlt sich schwerelos, weil in seinem (rotierenden) Bezugssystem die nach aussen wirkende Zentrifugalkraft die Schwerkraft exakt aufhebt.

2.8.3. (a) $g = \dfrac{GM}{R^2} \quad\Longrightarrow\quad M = \dfrac{gR^2}{G} = 3{,}67 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$

(b) $\dfrac{mv^2}{r} = \dfrac{GmM}{r^2} \quad\Longrightarrow\quad v^2 = \dfrac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \dfrac{GM}{r} \quad\Longrightarrow\quad r = \sqrt[3]{\dfrac{GMT^2}{4\pi^2}} = 2{,}00 \cdot 10^4\,\text{km}$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 3{,}50 \cdot 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2.8.4. Die Gesamtkraft auf eine Testmasse m am gesuchten Ort P muss null sein:



$$\frac{GM_{\text{E}}m}{x^2} = \frac{GM_{\text{M}}m}{y^2}$$

Mit $y = a - x$ folgt

$$M_{\text{E}}(a-x)^2 = M_{\text{M}}x^2 \quad\Longrightarrow\quad |a-x|\sqrt{M_{\text{E}}} = |x|\sqrt{M_{\text{M}}}$$

Da $a - x > 0$ und $x > 0$ gilt

$$(a-x)\sqrt{M_{\text{E}}} = x\sqrt{M_{\text{M}}} \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{a\sqrt{M_{\text{E}}}}{\sqrt{M_{\text{E}}} + \sqrt{M_{\text{M}}}} = \frac{a}{1 + \sqrt{\frac{M_{\text{M}}}{M_{\text{E}}}}}$$

Mit $M_{\text{E}} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$, $M_{\text{M}} = 7{,}35 \cdot 10^{22}\,\text{kg}$ und $a = 3{,}84 \cdot 10^5\,\text{km}$ folgt

$$x = 0{,}900 \cdot a = 3{,}45 \cdot 10^5\,\text{km}$$

2.8.5. Erdradius bis Garmisch: $R = 6{,}38 \cdot 10^6\,\text{m}$, die Zugspitze liegt $h = 2960\,\text{m} - 700\,\text{m} = 2260\,\text{m}$ über Garmisch. Garmisch: g_0, Zugspitze: g

$$g_0 = \frac{GM}{R^2}, \quad g = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

$$\frac{g_0 - g}{g_0} = 1 - \frac{g}{g_0} = 1 - \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{2Rh + h^2}{(R+h)^2} \approx \frac{2h}{R} = 0{,}071\%$$

2.8.6. (a) $\frac{mv^2}{r} = \frac{Gm^2}{(2r)^2} \implies v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{4r} \implies T = 4\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 0{,}113\,\mathrm{s}$

(b) $\varrho = \frac{M}{V} \implies V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{M}{\varrho} \implies R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\varrho}} = 10{,}0\,\mathrm{km}$

$$g = \frac{GM}{R^2} = 3{,}34 \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 3{,}40 \cdot 10^{10} \cdot g_{\mathrm{Erde}}$$

2.8.7. Der Fluss des radialsymmetrischen Gravitationsfeldes $g(r)$ durch eine zum Zentrum konzentrische Kugelfläche mit Radius r ist

$$\Phi = g(r) \cdot 4\pi r^2 = 4\pi G M(r) \implies g(r) = \frac{GM(r)}{r^2}$$

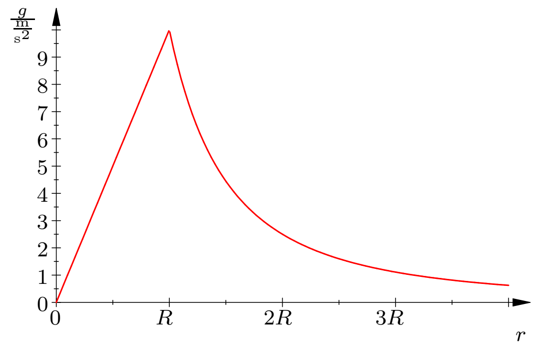
Dabei ist $M(r)$ die Masse innerhalb der Kugelfläche. Aus

$$M(r) = \begin{cases} M & \text{für } r \geqq R \\ M \cdot \frac{r^3}{R^3} & \text{für } r < R \end{cases}$$

folgt

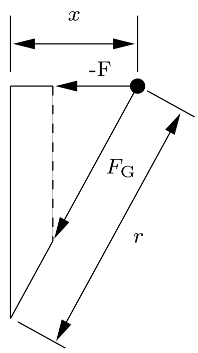
$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} = \begin{cases} \frac{GM}{r^2} & \text{für } r \geqq R \\ \frac{GM}{R^3} \cdot r & \text{für } r < R \end{cases}$$

$$g(R) = \frac{GM}{R^2} = 10{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$



2.8.8. $F_{\mathrm{G}}(x) = Dr$ mit $D = \frac{GMm}{R^3} = \frac{4\pi\varrho G m}{3}$

$$\frac{-F}{F_{\mathrm{G}}} = \frac{x}{r} \implies F = m\ddot{x} = -F_{\mathrm{G}} \cdot \frac{x}{r} = -Dx \implies \ddot{x} = -\frac{D}{m}x$$



Die Kapsel führt also eine harmonische Schwingung mit

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi\varrho G}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\varrho G}} = 5070\,\mathrm{s}, \quad \tau = \tfrac{T}{2} \approx 42\,\mathrm{min}$$

Bemerkenswert ist, dass τ nur von der Dichte ϱ abhängt, nicht aber von der Größe des Planeten und auch nicht von der Lage des Kanals!

2.8.9. (a) $g(r) = \frac{GM(r)}{r^2}$, wobei $M(r)$ die Masse innerhalb einer Kugel mit Radius r ist.

(b) $\frac{mv_2^2}{r_2} = \frac{GmM(r_2)}{r_2^2} \implies M_2 \geqq M(r_2) = \frac{v_2^2 r_2}{G} = 1{,}2 \cdot 10^{42}\,\mathrm{kg}$

$$\frac{M_{\mathrm{dunkel}}}{M_2} = \frac{M_2 - M_{\mathrm{G}}}{M_2} = 75\%$$

3 Relativitätstheorie

3.1 Die Zeitdilatation

3.1.1. (a) $t = \frac{2s}{\beta c} + 1\,\mathrm{a}, \qquad t' = \frac{2s\sqrt{1-\beta^2}}{\beta c} + 1\,\mathrm{a}, \qquad \lim\limits_{\beta\to 1}\frac{t}{t'} = 41$

β	0,6	0,8	0,99	0,9999
t in a	67,7	51,0	41,4	41,0
t' in a	54,3	31,0	6,70	1,57
$\frac{t}{t'}$	1,25	1,65	6,18	26,19

(b) $t' = \frac{2s\sqrt{1-\beta^2}}{\beta c} + 1\,\mathrm{a} = 2\,\mathrm{a} \implies \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} = \frac{1\,\mathrm{a}\cdot c}{2s} = \frac{1}{40}$

$$1-\beta^2 = \frac{\beta^2}{1600} \implies \beta = \sqrt{\frac{1600}{1601}} = 0{,}9996876$$

(c) $\frac{2s}{\beta c} = 100\cdot\frac{2s\sqrt{1-\beta^2}}{\beta c} \implies \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{100} \implies \beta = \sqrt{0{,}9999} = 0{,}99995$

3.1.2. (a) $\Delta t{=}\frac{s}{v} = \frac{60c\,\mathrm{a}}{0{,}6c}{=}100\,\mathrm{a}, \quad \Delta t'{=}\Delta t\sqrt{1-\beta^2} = 0{,}8\Delta t{=}80\,\mathrm{a}$

(b) $\tau{=}\frac{s}{\beta c}\sqrt{1-\beta^2} \implies \beta^2c^2\tau^2{=}s^2 - s^2\beta^2 \implies \beta^2(s^2+c^2\tau^2){=}s^2$

$$\beta{=}\frac{s}{\sqrt{s^2+c^2\tau^2}}{=}\frac{60\,\mathrm{LJ}}{\sqrt{60^2+25^2}\,\mathrm{LJ}} = \frac{60}{65} = \frac{12}{13} \implies v{=}\frac{12}{13}c \approx 0{,}923c$$

3.1.3. (a) Je nach Taschenrechner erscheint das Wertepaar $\Delta t' = 1\,\mathrm{s}$ und $\delta t = 0$ früher oder später:

β	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$\Delta t'$ in s	0,99995	0,9999995	0,999999995	1	1
δt in s	$5\cdot 10^{-5}$	$5\cdot 10^{-7}$	$5\cdot 10^{-9}$	$5\cdot 10^{-11}$	0

(b) $\delta_{\mathrm{rel}} = \frac{1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{1+\frac{x}{2}}{\sqrt{1+x}} - 1$

x	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
$\sqrt{1+x}$	1,0488	1,004988	1,000499875	
$1+\frac{x}{2}$	1,05	1,005	1,0005	1,00005
δ_{rel}	$1{,}34\cdot 10^{-3}$	$1{,}24\cdot 10^{-5}$	$1{,}249\cdot 10^{-7}$	$1{,}2499\cdot 10^{-9}$

Für $x = 10^{-n}$ gilt $\delta_{\mathrm{rel}} \approx 1{,}25\cdot 10^{-(1+2n)} = \frac{10^{-2n}}{8}$.

Übereinstimmung auf $2n$ geltende Ziffern.

(c) $v = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \implies \beta = 10^{-7} \implies \beta^2 = 10^{-14} \implies x = -\beta^2 = -10^{-14}$

$$\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} = 1 - \frac{\beta^2}{2} = 1 - 5\cdot 10^{-15}$$

$$\Delta t = \frac{s}{v} = 10^4\,\mathrm{s} \implies \Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\beta^2} = 10^4\cdot(1-5\cdot 10^{-15})\,\mathrm{s}$$

$$\delta t = \Delta t - \Delta t' \approx \frac{\Delta t\cdot\beta^2}{2} = 5\cdot 10^{-11}\,\mathrm{s}$$

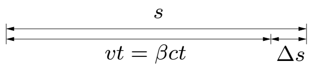
3.1.4. $\delta t \approx \frac{s\beta}{2c} \quad \Longrightarrow \quad v = \beta c \approx \frac{2c^2\delta t}{s} = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 72\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

exakte Lösung: $v = \frac{2c^2\delta t}{s\left(1+\frac{c^2\delta t^2}{s^2}\right)} = 72\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot (1 - 1{,}1 \cdot 10^{-15})$

3.1.5. (a) $\Delta t = \frac{c \cdot 4\,\mathrm{a}}{0{,}8\,c} = 5\,\mathrm{a}, \quad \Delta t' = \Delta t\sqrt{1-0{,}8^2} = 0{,}6\Delta t = 3\,\mathrm{a}, \quad \frac{\Delta t'}{\Delta t} = 0{,}6 = 60\%$

(b) $\beta = 1 - \alpha$ mit $\alpha = 10^{-18}$, $\Delta t = 10^9\,\mathrm{a}, \quad \Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{2\alpha} = 1{,}4\,\mathrm{a}, \quad \frac{\Delta t'}{\Delta t} = 1{,}4 \cdot 10^{-9}$

3.1.6. $s{=}ct, \quad vt{=}\beta ct = \beta s \quad \Longrightarrow \quad s{=}vt + \Delta s{=}\beta s + \Delta s$



$$\beta{=}\frac{s-\Delta s}{s} = 1 - \frac{\Delta s}{s} = 1 - \alpha$$

$$\alpha = \frac{\Delta s}{s}{=}\frac{100\,\mathrm{m}}{1{,}89 \cdot 10^{22}\,\mathrm{m}}{=}5{,}28 \cdot 10^{-21} \ll 1$$

$$\tau{=}t\sqrt{1-\beta^2}{=}\frac{s}{c}\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}{=}\frac{s}{c}\sqrt{\alpha(2-\alpha)} \approx \frac{s}{c}\sqrt{2\alpha}$$

$$\tau \approx 2 \cdot 10^6\,\mathrm{a} \cdot \sqrt{2\alpha}{=}2{,}06 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{a}{=}1{,}80\,\mathrm{h}$$

3.1.7. $\tau = \frac{s}{c}\sqrt{2\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{c^2\tau^2}{2s^2} = 2{,}0 \cdot 10^{-20} \quad \Longrightarrow \quad \beta = 1 - \alpha = 0{,}999\,999\,999\,999\,999\,999\,98$

$$v = \beta c = c - \alpha c = (299792458 - 6{,}1 \cdot 10^{-12})\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 299792457{,}999\,999\,999\,993\,9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

exakte Lösung: $\beta = \left(1 + \frac{c^2\tau^2}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Die exakte Lösung für v unterscheidet sich erst in der 31-sten Stelle nach dem Komma von unserer Näherungslösung.

3.2 Geschwindigkeitsaddition

3.2.1. gleiche Richtung: $v = 0{,}8c \ominus 0{,}7c = \frac{0{,}1c}{1-0{,}56} = 0{,}227c$

entgegenges. Richtung: $v = 0{,}8c \oplus 0{,}7c = \frac{1{,}5c}{1+0{,}56} = 0{,}962c$

3.2.2. $u = \frac{v+u'}{1+\frac{vu'}{c^2}} = \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}} \approx 2v\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$

$$\delta = \frac{2v-u}{u} = \frac{2v^3}{c^2 u} \approx \frac{2v^3}{c^2 \cdot 2v} = \frac{v^2}{c^2} = 4 \cdot 10^{-12}$$

$$\delta > 1\% \quad \Longrightarrow \quad \frac{v^2}{c^2} > \frac{1}{100} \quad \Longrightarrow \quad v > 0{,}1c$$

3.3 Relativistische Energie

3.3.1. (a) $W_{\mathrm{kin}} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \approx mc^2\left(\frac{1}{1-\frac{\beta^2}{2}} - 1\right) \approx mc^2\left(1 + \frac{\beta^2}{2} - 1\right) = \frac{m}{2}v^2$

(b) $W_{\text{kin,falsch}} = \dfrac{\gamma m}{2} v^2 = \dfrac{m\beta^2 c^2}{2\sqrt{1-\beta^2}}$

z.B. gilt für $\beta = 0{,}6$:

$W_{\text{kin}} = 0{,}225\, mc^2$, $W_{\text{kin,falsch}} = 0{,}25\, mc^2$, $W_{\text{kin,klassisch}} = 0{,}18\, mc^2$

Man kann auch allgemein zeigen, dass $W_{\text{kin,falsch}} < W_{\text{kin}}$ für $\beta > 0$, d.h. $\gamma > 1$:

$$\frac{W_{\text{kin}}}{W_{\text{kin,falsch}}} = \frac{(\gamma-1)mc^2}{\frac{\mu}{2}v^2} = \frac{2(\gamma-1)}{\gamma\beta^2} = \frac{2(\gamma-1)}{\gamma\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)} = \frac{2(\gamma-1)\gamma}{\gamma^2-1} =$$
$$= \frac{2(\gamma-1)\gamma}{(\gamma-1)(\gamma+1)} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} = \frac{\gamma+\gamma}{\gamma+1} > 1 \quad \text{für} \quad \beta > 0$$

Für $\gamma \gg 1$ ist $W_{\text{kin}} \approx 2W_{\text{kin,falsch}}$.

3.3.2. $\Delta W = mc_{\text{Fe}}\Delta T = 7{,}86\,\text{kg} \cdot 0{,}452\,\dfrac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot 280\,\text{K} = 9{,}95 \cdot 10^5\,\text{J}$

$\Delta m = \dfrac{\Delta W}{c^2} = 1{,}1 \cdot 10^{-11}\,\text{kg}, \quad \dfrac{\Delta m}{m} = 1{,}4 \cdot 10^{-12}$

3.3.3. $\Delta W = mC_{\text{schmelz}} = m \cdot 334\,\dfrac{\text{kJ}}{\text{kg}} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\Delta m}{m} = \dfrac{\Delta W}{mc^2} = \dfrac{C_{\text{schmelz}}}{c^2} = 3{,}7 \cdot 10^{-10}\,\%$

3.3.4. $W_{\text{kin}} = mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = mc^2, \quad 1-\beta^2 = \dfrac{1}{4}, \quad \beta = \dfrac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}866$

3.3.5. $Mc^2 = 2\gamma mc^2, \quad M = 2\gamma m = 2\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}m = \dfrac{2m}{0{,}8} = 2{,}5\,m$

3.3.6. $\dfrac{W_{\text{k}}}{mc^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \quad \Longrightarrow \quad 1-\beta^2 = \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{W_{\text{k}}}{mc^2}\right)^2} \quad \Longrightarrow \quad$ die Beh.

3.3.7. (a) $W_{\text{e0}} = mc^2 = 8{,}18711 \cdot 10^{-14}\,\text{J} = 0{,}511\,\text{MeV}$

(b) $m_{\text{p}} = \dfrac{W_{\text{p0}}}{c^2} = 1{,}67262 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$

3.3.8. (a) Mit $\beta = 0{,}1$ ist $\delta_{\text{rel}} = \dfrac{W_{\text{kin}} - W_{\text{kin,klassisch}}}{W_{\text{kin}}}$:

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right) - \dfrac{m}{2}\beta^2c^2}{mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)} = 1 - \frac{\beta^2}{2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)} = 0{,}0075 = 0{,}75\,\%$$

(b) $U = \dfrac{W_{\text{kin}}}{e} = \dfrac{mc^2}{e}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}1^2}} - 1\right) = 0{,}00504 \cdot \dfrac{mc^2}{e}$

e^- : $U = 0{,}00504 \cdot 0{,}511 \cdot 10^6\,\text{V} = 2{,}57\,\text{kV}$
p^+ : $U = 0{,}00504 \cdot 938{,}27 \cdot 10^6\,\text{V} = 4{,}73\,\text{MV}$

3.3.9. (a) $\gamma = \dfrac{W}{W_0} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \sqrt{1-\dfrac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \dfrac{1}{2\gamma^2}, \quad$ da $\dfrac{1}{\gamma^2} \ll 1$

$$\text{Proton} \quad : \quad \gamma = \frac{400\,\text{GeV}}{0{,}93827\,\text{GeV}} = 426 \qquad \beta = 1 - 2{,}75 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{Elektron} \quad : \quad \gamma = \frac{21\,000\,\text{MeV}}{0{,}511\,\text{MeV}} = 4{,}11 \cdot 10^{4} \quad \beta = 1 - 2{,}96 \cdot 10^{-10}$$

(b) $$\gamma = \frac{1\,\text{J}}{0{,}511 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{J}} = 1{,}22 \cdot 10^{13}$$

$\beta = 1 - \alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{2\gamma^2} = 3{,}35 \cdot 10^{-27}$

$$\tau = \frac{s}{c}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{s}{c}\sqrt{\underbrace{(1-\beta)}_{\alpha}\underbrace{(1+\beta)}_{\approx 2}} \approx \frac{s}{c}\sqrt{2\alpha} = \frac{s}{c\gamma} = \frac{4{,}8 \cdot 10^{9}\,\text{a}}{1{,}22 \cdot 10^{13}} = 12\,400\,\text{s}$$

oder $\tau = 3\,\text{h}\,27\,\text{min}$

Im Raumschiff steckt die kinetische Energie $W_\text{k} = (\gamma - 1)mc^2 \approx \gamma mc^2 = 1{,}1 \cdot 10^{35}\,\text{J}$.

Die tatsächlich aufzuwendende Energie ist viel größer, da auch in der von der Rakete ausgestoßenen Masse (heiße Gase, Photonen) Energie steckt (siehe Raketenaufgabe zum Kapitel *Energie-Impuls-Beziehungen*). Für die Photonenrakete ist die aufzuwendende Energie $\approx 2\gamma mc^2$.

3.3.10. $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{W}{W_\text{p}} = \frac{W}{m_\text{p}c^2} = 3{,}4 \cdot 10^{11}$$

$$t = \frac{s}{c} = 2 \cdot 10^{6}\,\text{a} = 6{,}31 \cdot 10^{13}\,\text{s} \quad \Longrightarrow \quad \tau = t\sqrt{1-\beta^2} = \frac{t}{\gamma} = 185\,\text{s}$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} = \frac{1}{(1-\beta)(1+\beta)} \approx \frac{1}{2(1-\beta)} \quad \Longrightarrow$$

$$\Delta v = c - v = c(1-\beta) \approx \frac{c}{2\gamma^2} = 1{,}3 \cdot 10^{-15}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Bei einem Wettlauf des Teilchens mit einem Lichtstrahl würde das Teilchen nach 10^7 Jahren nur um 4 cm hinter dem Licht zurück bleiben!