Physik Q11
Aufgaben

Richard Reindl

Die aktuellste Version der Aufgaben findet man unter

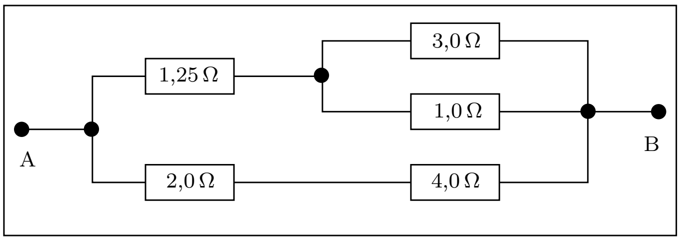
http://www.stbit.de

17. Mai 2014

1 Wiederholung

1.1 Wiederholung Elektrizität

1.1.1. Berechne den Gesamtwiderstand R_{AB} der nebenstehend gezeichneten Schaltung!



1.1.2. (a) Ist ΔQ die frei bewegliche Ladung eines Leiters im Volumen ΔV, dann nennt man

$$\varrho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

die **Dichte** der frei beweglichen Ladung. Fließt senkrecht durch die Fläche ΔA der Strom ΔI, dann heißt

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta A}$$

die **Stromdichte**.

In einem Draht mit dem Querschnitt A fließt ein räumlich und zeitlich konstanter Strom I. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Dichte ϱ der frei beweglichen Ladung, der Stromdichte j und der Elektronengeschwindigkeit v?

(b) Durch einen Kupferdraht mit dem Querschnitt $A = 5{,}00\,\mathrm{mm}^2$ fließt der Strom $I = 4{,}00\,\mathrm{A}$. Von jedem Cu-Atom der Masse $m = 1{,}06 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}$ stammen im Mittel 1,27 Leitungselektronen. Berechne die Stromdichte j, die Dichte ϱ der frei beweglichen Ladung und die Driftgeschwindigkeit v der Elektronen! Die Dichte von Kupfer ist $\sigma = 8{,}93\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

2 Elektrostatik

2.1 Das elektrische Feld

2.1.1. Welche Beschleunigung erhält eine kleine Alukugel der Masse $m = 0{,}50\,\mathrm{g}$ mit der Ladung $Q = 2{,}0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$ in einem elektrischen Feld der Feldstärke $E = 4{,}0 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$?

2.1.2. Eine Kugel der Masse $m = 0{,}100\,\mathrm{g}$ trägt die Ladung $Q = 5{,}00 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ und hängt an einem $l = 2{,}00\,\mathrm{m}$ langen Faden. Die horizontale Auslenkung der Kugel in einem waagrechten und homogenen elektrischen Feld der Stärke E beträgt $x = 2{,}50\,\mathrm{cm}$. Berechne E.

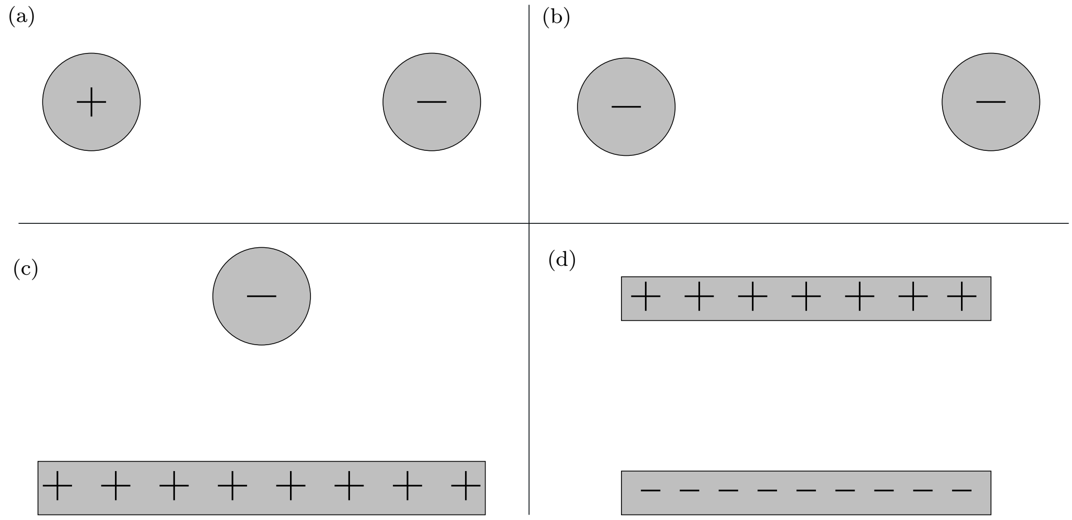
2.1.3. $\vec{E}_1(\vec{r})$, ... , $\vec{E}_n(\vec{r})$ seien die Feldstärken der Punktladungen Q_1, ... , Q_n am Ort $\vec{r}$. Beweise das Superpositionsprinzip für Feldstärken:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{E}_\nu(\vec{r})}$$

2.1.4. (a) Ein elektrisches Feld mit dem Betrag $E = 3{,}00 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ zeigt in die Richtung von $\mathrm{P}\,(-2{,}00\,\mathrm{m}|3{,}00\,\mathrm{m}|1{,}00\,\mathrm{m})$ nach $\mathrm{Q}\,(-5{,}00\,\mathrm{m}|-3{,}00\,\mathrm{m}|4{,}00\,\mathrm{m})$. Berechne $\vec{E}$.

(b) Ein Flugzeug startet mit $v = 2{,}30 \cdot 10^2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ genau nach NNO mit einem Steigungswinkel von $\varphi = 22{,}5^\circ$ gegen den Boden. Berechne $\vec{v}$.

2.1.5. Zeichne die Feldlinienbilder folgender Ladungsverteilungen (Leiter sind grau). Achte auf Symmetrien.



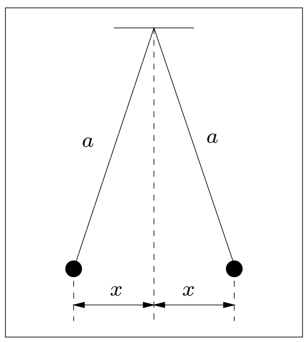
2.2 Das Coulombsche Gesetz

2.2.1. Zwei Protonen in einem Atomkern haben die gegenseitige Entfernung $r = 2{,}6 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$. Mit welcher Kraft stoßen sich die beiden Protonen ab? Wie groß wäre die Beschleunigung der Protonen, wenn keine anziehenden Kernkräfte vorhanden wären?

2.2.2. (a) Welche Beschleunigung erfährt ein Elektron ($m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$) in der Entfernung $d = 0{,}30\,\mathrm{nm}$ von einem He4-Kern (2 Protonen)?

(b) Einer Kupferkugel der Masse $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$ werden alle Elektronen entzogen und auf eine gleichartige Kugel transportiert. Mit welcher Kraft ziehen sich die beiden Kugeln an, wenn die Entfernung ihrer Mittelpunkte dem dreifachen Radius einer Kugel entspricht?

2.2.3. Zwei gleiche Alukugeln (jede hat die Masse $m = 2{,}0\,\mathrm{g}$) hängen an Fäden der Länge $a = 2{,}0\,\mathrm{m}$. Die sich berührenden Kugeln werden geladen (wie stellt man das an?) und stoßen sich dann ab. Berechne die Ladung Q einer Kugel aus $x = 2{,}6\,\mathrm{cm}$.



2.2.4. Zwei Schaumstoffkügelchen der jeweiligen Masse $m = 0{,}20\,\mathrm{g}$ hängen an Fäden der Länge $a = 1{,}0\,\mathrm{m}$, die Aufhängepunkte der Fäden sind $b = 15\,\mathrm{cm}$ voneinander entfernt. Berechne die Entfernung der Kugelmittelpunkte, wenn jede Kugel die Ladung $Q = 8{,}9 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$ trägt.

2.2.5. Auf der x-Achse eines Koordinatensystems sitzen die Ladungen Q_1 und Q_2, Q_1 bei $x_1 = 0$ und Q_2 bei $x_2 = a$. $F(x)$ ist die Kraft auf eine positive Probeladung q, die sich auf der x-Achse am Ort x befindet. Schreibe $F(x)$ hin, zeichne ein qualitatives xF-Diagramm ($F < 0$, wenn F nach links zeigt) und suche den Ort x_0, an dem $F(x)$ Null ist:

(a) $Q_2 = 4\,Q_1 \quad , \quad Q_1 > 0$ (b) $Q_2 = -4\,Q_1 \quad , \quad Q_1 > 0$

2.2.6. Welche Kraft (Betrag und Vektor) übt die Ladung Q_1 am Ort R auf die Ladung Q_2 am Ort S aus?

(a) $Q_1 = 1{,}69 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$, R $(2{,}00\,\mathrm{cm}|1{,}00\,\mathrm{cm}|3{,}00\,\mathrm{cm})$
$Q_2 = 2{,}60 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$, S $(5{,}00\,\mathrm{cm}|5{,}00\,\mathrm{cm}|15{,}00\,\mathrm{cm})$

(b) $Q_1 = 5{,}07 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$, R $(2{,}00\,\mathrm{cm}|1{,}00\,\mathrm{cm}|3{,}00\,\mathrm{cm})$
$Q_2 = -5{,}20 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$, S $(-10{,}00\,\mathrm{cm}|4{,}00\,\mathrm{cm}|-1{,}00\,\mathrm{cm})$

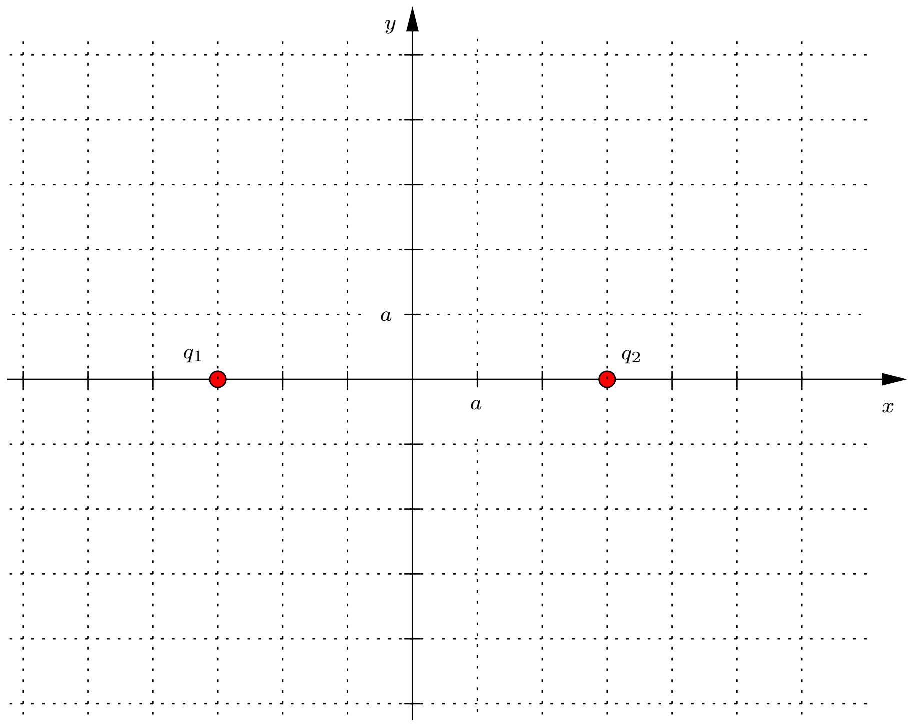
2.3 Das Feld von Punktladungen

2.3.1. Die Punktladung $Q = 1{,}0 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ sitzt fest am Ort $\mathrm{P}_0\,(-2{,}0\,\mathrm{cm}|-2{,}0\,\mathrm{cm})$. Berechne das von der Ladung Q erzeugte Feld am Ort $\mathrm{P}_1\,(-5{,}0\,\mathrm{cm}|2{,}0\,\mathrm{cm})$.

2.3.2. Am Ort A $(-3a|0)$ sitzt die Ladung $q_1 = 4q$, am Ort B $(3a|0)$ die Ladung $q_2 = q$ $(q > 0)$.

(a) Wo verschwindet die elektrische Feldstärke?

(b) Berechne die Feldstärke an den Orten $\mathrm{P}_1\,(0|a)$, $\mathrm{P}_2\,(0|2a)$, $\mathrm{P}_3\,(0|4a)$ und $\mathrm{P}_4\,\left(a|\frac{a}{2}\right)$. Zeichne die Richtung des Feldes in diesen Punkten ein und skizziere dann das Feldlinienbild der beiden Ladungen. Symmetrie ausnutzen!



2.4 Der Gauß'sche Satz

2.4.1. **Homogen geladene Kugelfläche**

Berechne den Betrag $E(r)$ der Feldstärke im Innen- und Außenraum einer Kugel mit Radius R, deren Oberfläche gleichmäßig verteilt die Ladung Q trägt.
Zeichne ein qualitatives rE-Diagramm.

2.4.2. **Homogen geladene Kugel**

Berechne den Betrag $E(r)$ der Feldstärke im Innen- und Außenraum einer Kugel mit Radius R, die gleichmäßig über das ganze Volumen verteilt die Ladung Q trägt.
Zeichne ein qualitatives rE-Diagramm.

2.4.3. **Geladene Ebenen**

(a) Die xy-Ebene trägt eine Ladung mit der konstanten Flächenladungsdichte σ. Welches Feld $\vec{E}$ wird von dieser Ladungsverteilung erzeugt?

(b) Die xy-Ebene trägt eine Ladung mit der konstanten Flächenladungsdichte $\sigma_1 > 0$, die zur xy-Ebene parallele Ebene durch den Punkt $\mathrm{P}\,(0|0|a)$ trägt eine Ladung mit $\sigma_2 = -\sigma_1$. Welches Feld $\vec{E}$ wird von dieser Ladungsverteilung erzeugt?

(c) Ein Kondensator besteht aus zwei kreisförmigen Platten (Radius r) im Abstand $d \ll r$; die Platten tragen gleichmäßig verteilt die Ladung Q bzw. $-Q$. Welches Feld herrscht zwischen den Platten?

2.5 Arbeit im elektrischen Feld

2.5.1. Berechne die Überführungsarbeit W_{AB} im homogenen Feld $\vec{E}$ für die Bewegung der Ladung $q = 3 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ von $\mathrm{A}\,(-1{,}0\,\mathrm{cm}|3{,}0\,\mathrm{cm}|3{,}0\,\mathrm{cm})$ nach $\mathrm{B}\,(2{,}0\,\mathrm{cm}|-2{,}0\,\mathrm{cm}|5{,}0\,\mathrm{cm})$.

(a) $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 800 \\ 0 \end{pmatrix} \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

(b) $\vec{E}$ zeigt in die Richtung von $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}\,\mathrm{m}$ und $|\vec{E}| = 800\,\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

2.5.2. Die Ladung $Q = 10^{-8}\,\mathrm{C}$ sitzt fest am Ort $\mathrm{P}_0\,(-2\,\mathrm{cm}|-2\,\mathrm{cm})$. Berechne die Arbeit für die Überführung der Ladung $q = 10^{-10}\,\mathrm{C}$ von $\mathrm{P}_1\,(-5{,}0\,\mathrm{cm}|2{,}0\,\mathrm{cm})$ nach $\mathrm{P}_2\,(6{,}0\,\mathrm{cm}|4{,}0\,\mathrm{cm})$!

2.6 Das Potential des elektrischen Feldes

2.6.1. $\vec{E}$ ist ein homogenes Feld parallel zur z-Achse mit $E_z = E$.

(a) Berechne das Potential φ_{A} bzw. φ_{B} in $\mathrm{A}\,(a_x|a_y|a_z)$ bzw. $\mathrm{B}\,(b_x|b_y|b_z)$ bezüglich des Punktes $\mathrm{P}_0\,(x_0|y_0|z_0)$ sowie φ'_{A} bzw. φ'_{B} bezüglich $\mathrm{P}'_0\,(x'_0|y'_0|z'_0)$. Berechne die Spannung U_{AB} in B bezüglich A einmal mit φ und einmal mit φ'.

(b) Berechne die Größen aus Teilaufgabe (a) speziell für $E = E_z = 300\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$, $\mathrm{P}_0\,(0|0|0)$, $\mathrm{P}'_0\,(1\,\mathrm{cm}|3\,\mathrm{cm}|-2\,\mathrm{cm})$, $\mathrm{A}\,(1\,\mathrm{cm}|-2\,\mathrm{cm}|2\,\mathrm{cm})$ und $\mathrm{B}\,(-3\,\mathrm{cm}|4\,\mathrm{cm}|5\,\mathrm{cm})$.

2.6.2. Berechne im homogenen Feld $\vec{E} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ das Potential bezüglich des Ursprungs in den Punkten $\mathrm{A}\,(-3\,\mathrm{cm}|1\,\mathrm{cm})$ und $\mathrm{B}\,(4\,\mathrm{cm}|1\,\mathrm{cm})$. Berechne die Spannung U_{AB} in B bezüglich A.

2.6.3. Eine Leiterkugel mit Radius R trägt die positive Ladung Q. Skizziere den Verlauf der Feldstärke $E(r)$ und des Potentials $\varphi_\infty(r)$.

Jetzt wird die Leiterkugel konzentrisch von einer ungeladenen, leitenden Kugelschale mit Innenradius $2R$ und Außenradius $4R$ umgeben. Skizziere wieder den Verlauf der Feldstärke $E'(r)$ und des Potentials $\varphi'_\infty(r)$.

2.6.4. Wir stellen uns einen Atomkern der Kernladungszahl Z, stark vereinfacht, als homogen geladene Kugel mit dem Radius R und der Ladung $Q = Ze$ vor.

(a) Berechne das Potential $\varphi(r)$ des Kerns mit dem Bezugspunkt Unendlich. Schreibe das Ergebnis mit den Abkürzungen $A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ und $x = \frac{r}{R}$. Zeichne $\varphi(r)$ mit $\varphi = A \mathrel{\widehat{=}} 4\,\mathrm{cm}$ und $R \mathrel{\widehat{=}} 2\,\mathrm{cm}$.

(b) $W(r)$ sei die potentielle Energie eines Elektrons im Feld unseres Kerns mit $W(\infty) = 0$. Skizziere $W(r)$.

(c) Welche Spannung herrscht zwischen der Oberfläche eines Goldkerns ($R = 7{,}6 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$, $Z = 79$) und einem sehr weit davon entfernten Punkt? Mit welcher Geschwindigkeit v_0 muss man Protonen zentral auf einen Goldkern schießen, damit sie seine Oberfläche erreichen?

2.6.5. Am Ort A $(0|a)$ befindet sich die Punktladung Q. Berechne das Potential $\varphi(x)$ auf der x-Achse, wenn einmal ein unendlich ferner Punkt und ein anderes Mal der Ursprung als Bezugspunkt gewählt wird. Skizziere die Grafen der beiden Potentialfunktionen für $Q > 0$. Berechne U_{RS} für R $(5\,\mathrm{cm}|0)$, S $(9\,\mathrm{cm}|0)$, $Q = -10^{-8}\,\mathrm{C}$ und $a = 12\,\mathrm{cm}$.

2.7 Elektrostatik und Gravitation

2.7.1. Eine homogene Kugel (Dichte überall gleich) mit Radius R hat die Masse M. Berechne das von der Kugel erzeugte Gravitationsfeld $g(r)$.

Zeichne $g(r)$ im Intervall $[0; 4R]$ für $R = 5000\,\mathrm{km}$ und $M = 3{,}747 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

2.7.2. Welche Geschwindigkeit v muss ein Satellit haben, der die Erde in einer Höhe von 200 km über Grund umkreist? Mit welcher Geschwindigkeit v_0 muss der Satellit von der Erdoberfläche abgeschossen werden, damit er ohne weiteren Antrieb (außer zu Richtungskorrekturen) die Umlaufbahn mit der richtigen Geschwindigkeit v erreicht (Luftwiderstand vernachlässigen!)? Warum werden Satelliten immer in Richtung Osten abgeschossen?

2.7.3. (a) Ein Neutronenstern hat die Dichte $\varrho = 1{,}81 \cdot 10^{17}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Welchen Radius R hat ein Neutronenstern mit der Masse unserer Sonne ($M = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$) und welche Gravitationsfeldstärke g herrscht an seiner Oberfläche?

(b) Welchen Radius R_0 dürfte ein Neutronenstern nur haben, damit an seiner Oberfläche die gleiche Feldstärke herrschen würde wie an der Erdoberfläche?

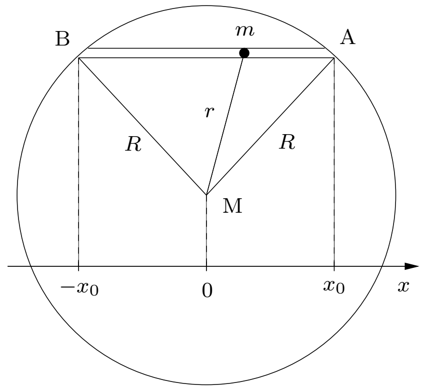
(c) Ein Mensch der Größe $h = 180\,\mathrm{cm}$ fällt mit den Füßen voraus auf einen Neutronenstern mit der Masse unserer Sonne. $\Delta g(r)$ sei der Unterschied der Feldstärken an den Füßen und am Kopf, wenn sich die Füße in der Entfernung r vom Mittelpunkt des Sterns befinden. Berechne den exakten Ausdruck für $\Delta g(r)$ sowie eine Näherung mit $h \ll r$! Berechne den prozentualen Fehler der Näherung für $r = 100\,\mathrm{km}$! Für welches r ist $\Delta g(r) = 100 \cdot g_{\mathrm{Erde}}$?

2.7.4. (a) Ein Körper der Masse m fällt aus der Höhe h über der Erdoberfläche mit der Anfangsgeschwindigkeit Null herab. Berechne die Aufprallgeschwindigkeit bei Vernachlässigung der Luftreibung einmal exakt ($v(h)$) und einmal mit der Näherung eines konstanten Gravitationsfeldes ($v_n(h)$)! Berechne $v(1\,\mathrm{km})$, $v(100\,\mathrm{km})$ und $v(10000\,\mathrm{km})$ und den jeweiligen prozentualen Fehler der Näherung!

(b) Berechne $h(v)$ einmal exakt und einmal mit der obigen Näherung! Berechne $h(100\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})$, $h(1000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})$ und $h(10000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})$ sowie den jeweiligen prozentualen Fehler der Näherung!

(c) Ab welcher Höhe h ist der Betrag des relativen Fehlers der Näherung $v_n(h)$ größer als ein Prozent?

2.7.5. Durch einen Planeten mit Radius R und der konstanten Dichte ρ wird ein gerader Kanal gebohrt, der zwei Städte A und B miteinander verbindet. Durch den **Sehnenkanal** fällt reibungsfrei eine Transportkapsel der Masse m mit der Anfangsgeschwindigkeit Null am Ort A.



(a) Berechne unter Verwendung von Aufgabe 2.7.1 den Betrag $F_G(x)$ der Kraft auf die Kapsel!

(b) Berechne die Komponente $F(x)$ der Kraft $F_G(x)$, die parallel zur x-Achse zeigt! Welche Bewegung führt die Kapsel demnach aus?

(c) Berechne die Fallzeit τ von A nach B zunächst allgemein und dann speziell für die Erde, und zwar einmal für München-New-York und einmal für München-Sydney!

2.7.6. Ein Neutronenstern hat die Masse $M = 3{,}00 \cdot 10^{30}$ kg und den Radius $R = 10{,}0$ km. Ein sehr weit vom Neutronenstern entferntes, zunächst ruhendes Proton fällt auf den Stern.

(a) Mit welcher Geschwindigkeit v_1 prallt das Proton auf die Sternoberfläche, wenn dieser keine Ladung trägt?

(b) Welche Ladung Q (mit Vorzeichen!) muss der Stern gleichmäßig über seine Oberfläche verteilt tragen, damit das Proton mit der Geschwindigkeit $v_2 = 1{,}00 \cdot 10^7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf den Stern aufschlägt?

2.8 Kondensatoren

2.8.1. Ein Plattenkondensator trägt auf jeder Platte die Ladung $Q = 5{,}00 \cdot 10^{-8}$ C, der Plattenabstand ist $d = 4{,}00$ mm und die Fläche einer Platte beträgt $A = 900\,\text{cm}^2$. Welche Spannung U liegt an den Platten? Welche Kraft F wirkt auf ein Staubteilchen zwischen den Platten, das die Ladung $q = 2{,}00 \cdot 10^{-13}$ C trägt? Welche Beschleunigung erhält das Teilchen mit $m = 4{,}00 \cdot 10^{-5}$ g?

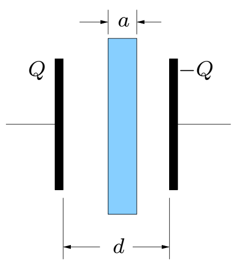
2.8.2. (a) Welche Fläche A hat ein Plattenkondensator der Kapazität 1 F, wenn der Plattenabstand 1 cm beträgt?

(b) Welche Kapazität hat ein Plattenkondensator aus kreisförmigen Platten mit dem Radius 1 cm und dem Abstand 1 mm?

2.8.3. Ein Plattenkondensator mit dem Plattenabstand d liegt an der Spannung U und trägt die Ladung Q, das Feld zwischen den Platten sei E. Drücke die jeweils neuen (gestrichenen) Größen durch die alten (ungestrichenen) aus, wenn folgende Änderungen vorgenommen werden:

(a) Vergrößerung von d auf $d' = n \cdot d$ bei angeklemmter Spannung, d.h. U ist konstant. Gesucht: E', Q' und C'.

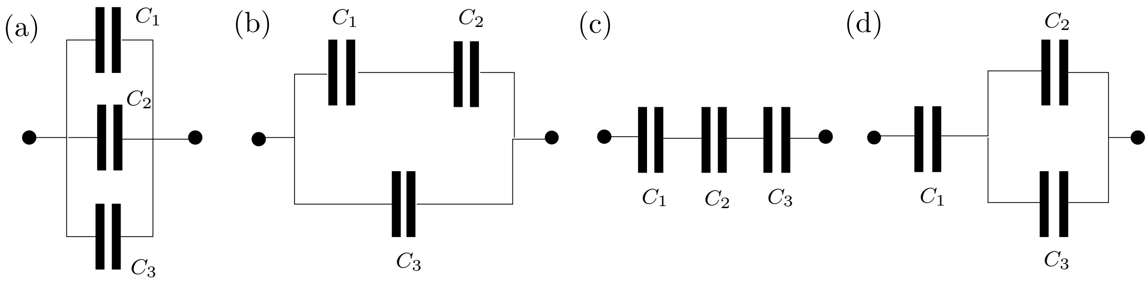
(b) Wie (a), jedoch mit abgeklemmter Spannungsquelle! Welche Größe bleibt konstant? Gesucht: E', U' und C'.



(c) Eine Leiterplatte der Dicke a ($a < d$) wird parallel zu den Kondensatorplatten ins Feld geschoben. Berechne E', U' und C' bei abgeklemmter Spannung!

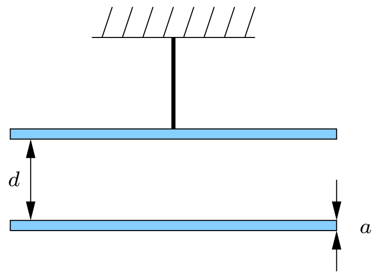
(d) Berechne E', Q' und C' in der Anordnung aus Teilaufgabe (c), jedoch mit angeschlossener Spannungsquelle.

2.8.4. Berechne jeweils die Gesamtkapazität ($C_1 = 1{,}0\,\mu\text{F}$, $C_2 = 2{,}0\,\mu\text{F}$, $C_3{,}0 = 4\,\mu\text{F}$):



2.9 Energie des elektrischen Feldes

2.9.1. Die untere Kondensatorplatte in nebenstehender Abbildung soll im Gravitationsfeld an der Erdoberfläche frei schweben. Die Grenzfeldstärke für einen Funkenüberschlag durch kalte Feldemission sei bei der herrschenden Luftfeuchtigkeit $E_0 = 5{,}00 \cdot 10^6\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$. Die Dicke der unteren Platte sei a, ihre Dichte ist ϱ.



(a) Welche Spannung U muss zwischen den Platten liegen, damit eine Eisenplatte $\left(\varrho = 7{,}86\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ mit $a = 2{,}00\,\text{mm}$ und dem Plattenabstand $d = 5{,}00\,\text{mm}$ frei schwebt? Kann diese Spannung überhaupt zwischen den Platten liegen?

(b) Welche maximale Dichte ϱ_0, ausgedrückt durch E_0 und a, darf die untere Platte haben, um frei schweben zu können? Berechne ϱ_0 speziell für $a = 2{,}00\,\text{mm}$.

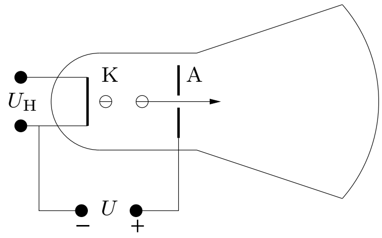
2.9.2. In der Relativitätstheorie wird gezeigt, dass jeder Masse m die Energie $W = m\,c^2$ mit der Lichtgeschwindigkeit c entspricht. Damit entspricht auch umgekehrt jeder Energie W die Masse $m = \frac{W}{c^2}$. Insbesondere folgt, dass das elektrische Feld, das ja Energie besitzt, auch eine Masse hat.

(a) Ein ungeladener Plattenkondensator mit der Fläche $A = 1{,}00\,\text{m}^2$ einer Platte und dem Plattenabstand $d = 10{,}0\,\text{cm}$ wird auf eine Waage gestellt und mit der Spannung $U = 200\,\text{kV}$ aufgeladen. Welche Masse zeigt die Waage nach dem Laden mehr an?

(b) Jetzt werden der ungeladene Kondensator und die Spannungsquelle gemeinsam auf die Waage gestellt. Wie ändert sich jetzt die Anzeige der Waage beim Laden des Kondensators?

2.10 Bewegung geladener Teilchen im elektrischen Feld

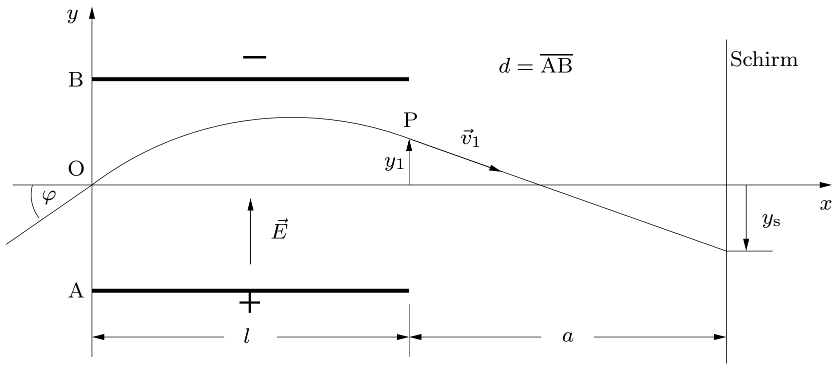
2.10.1. Die Glühkathode K einer Fernsehröhre wird von einer kleinen Heizspannung $U_\text{H} \approx 6\,\text{V}\sim$ zum Glühen gebracht. Die kinetische Energie der Elektronen in der Kathode wird dabei so groß, dass einige das Metall verlassen können. Durch das elektrische Feld zwischen K und der Anode A werden diese freien Elektronen beschleunigt und treten durch ein Loch in der Anode in den feldfreien Raum zwischen A und dem Bildschirm ein. K und A sind 3,0 cm voneinander entfernt, von A zum Bildschirm sind es 30 cm. In welcher Zeit fliegt ein Elektron von der Kathode zum Bildschirm, wenn die Beschleunigungsspannung $U = 1500\,\text{V}$ beträgt? Mit welcher Geschwindigkeit trifft das Elektron auf den Bildschirm?



Schema einer Fernsehröhre

2.10.2. Ein Goldkern ($Q_1 = 79\,e$, $R = 8{,}1 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$) wird mit α-Teilchen ($Q_2 = 2\,e$, $m = 6{,}64 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$) beschossen. Welche Anfangsgeschwindigkeit v_0 muss ein α-Teilchen im Unendlichen mindestens haben, um bis an die Kernoberfläche zu gelangen? Welche Spannung herrscht zwischen der Kernoberfläche und dem Unendlichen?

2.10.3. Am Ort O tritt ein Elektronenstrahl, der von einer Spannung U beschleunigt wurde, unter dem Winkel φ gegen die x-Achse in das homogene Kondensatorfeld E ein, das er bei P $(l|y_1)$ wieder verlässt. Der Strahl trifft den Bildschirm bei $y = y_\mathrm{s}$.



(a) Berechne y_1 und die Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ im Punkt P. Beweise damit die Formel

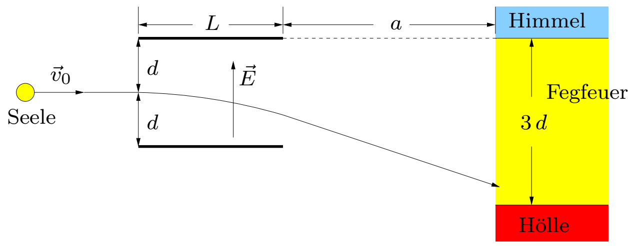
$$\boxed{y_\mathrm{s} = \frac{-E \cdot l}{2\,U\, \cos^2\varphi} \cdot \left(\frac{l}{2} + a\right) + (l + a) \cdot \tan\varphi}$$

(b) Für welchen Eintrittswinkel φ ist y_s zur Spannung U_K zwischen den Kondensatorplatten proportional?

(c) Wie hängt y_s von U ab, wenn $U_\mathrm{k} = U$ gewählt wird?

(d) Welchen Wert muss die Ablenkspannung U_k erreichen können, damit ein quadratischer Bildschirm mit der Seitenlänge 40 cm voll ausgeleuchtet wird?
Verwende $U = 2000\,\mathrm{V}$, $a = 50\,\mathrm{cm}$, $l = 2\,\mathrm{cm}$, $\varphi = 0$ und $d = 1\,\mathrm{cm}$.

2.10.4. Um Arbeitskräfte zu sparen, hat die himmlische Gerichtsbarkeit von der ARGE „HimHöl“ folgenden Seelensortierer bauen lassen: Die Seelen werden zunächst für gute Taten mit positiven und für schlechte Taten mit negativen Ladungen versehen. Danach werden die Seelen mit der Geschwindigkeit $v_0 = 4 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in den Sortierkondensator ($L = 20\,\mathrm{m}$, $d = 5\,\mathrm{m}$) eingeschossen, in dem das Entscheidungsfeld $E = 5000\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ herrscht. Die Eingänge zu den verschiedenen Aufenthaltsorten liegen im Abstand $a = 90\,\mathrm{m}$ hinter dem Sortierkondensator. Die Seele des dahingegangenen Alois Schlauberger hat eine Masse von $m = 10^{-4}\,\mathrm{g}$ und weist eine große positive Ladung $Q_1 = 0{,}02\,\mathrm{C}$ auf, weil er bei seinem Weib zu allem „Ja und Amen“ gesagt hat. Es gibt auch einige negative Ladungen, denn seine Lieblingsbeschäftigung war das Betrügen beim Schafkopfen. Wie oft durfte der Alois beschummeln, wenn er für jeden Betrug die Ladung $Q_2 = -5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{C}$ verpasst bekommt, um

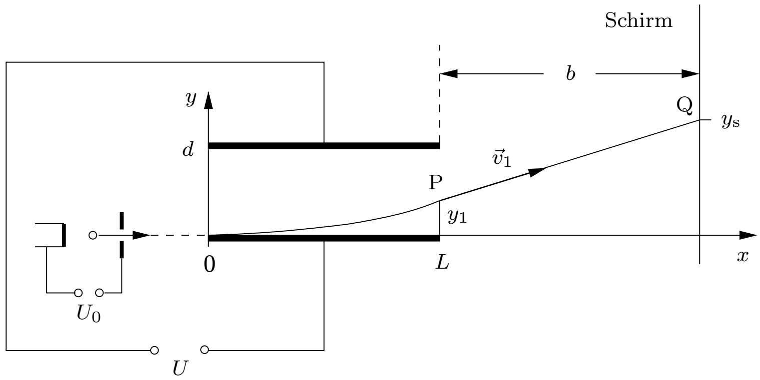


(a) gleich in den Himmel

(b) wenigstens nicht in die Hölle

zu kommen. Da der Alois ein Münchner war, darf seine Seele als kugelförmig und klein angesehen werden.

2.10.5. Nebenstehende Abbildung zeigt schematisch den Aufbau eines schnell reagierenden Spannungsmessgerätes. Die zu messende Spannung U wird an die Kondensatorplatten gelegt. Elektronen, die von der Spannung U_0 beschleunigt wurden, treten knapp über der unteren Platte mit der Geschwindigkeit v_0 in das Kondensatorfeld ein. Am Ort P $(L|y_1)$ verlassen die Elektronen das Kondensatorfeld mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ und treffen bei Q $(L+b|y_s)$ auf einen Leuchtschirm.



(a) Wie sind die Spannungen U und U_0 gepolt?

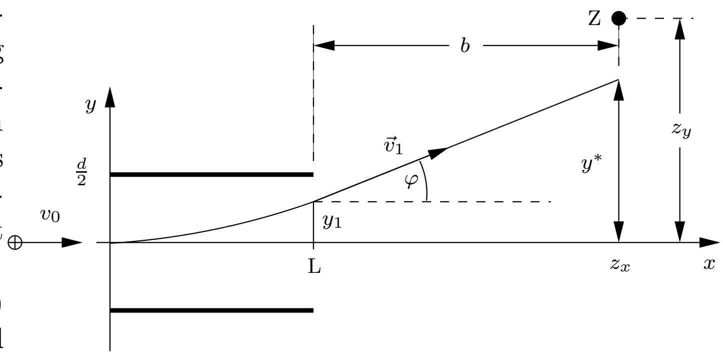
(b) Drücke v_0 durch die Beschleunigungsspannung U_0 aus.

(c) Berechne y_1, ausgedrückt durch U, U_0, L und d.

(d) φ sei der Winkel, den $\vec{v}_1$ mit der x-Achse einschließt. Drücke $\tan\varphi$ durch U, U_0, L und d aus. Beweise, dass die Gerade PQ die x-Achse für beliebige Spannungen (U, U_0) immer im gleichen Punkt S schneidet. Welche Koordinaten hat S?

(e) Jetzt sei $L = 10\,\text{cm}$, $d = 4{,}0\,\text{cm}$ und $b = 35\,\text{cm}$. Drücke U durch U_0 und y_s aus. Welche maximale Spannung U_{max} kann in diesem Fall mit der Anordnung gemessen werden?

2.10.6. In einer Protonenkanone werden Protonen von der Spannung $U = 835\,\text{V}$ beschleunigt und treten dann parallel zu den Platten in das Feld eines Kondensators der Länge $L = 1{,}00\,\text{m}$ ein (siehe Abb.). Der Plattenabstand ist $d = 50{,}0\,\text{cm}$.
Das Ziel Z ist am Ort $(\,z_x\,|\,z_y\,)$ mit $z_x = L + b = 1000{,}5\,\text{m}$ und $z_y = 200{,}0\,\text{m}$.



(a) Berechne die Eintrittsgeschwindigkeit v_0 der Protonen in den Kondensator.

(b) Der Protonenstrahl verlässt den Kondensator bei der y-Koordinate y_1 mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ und unter dem Winkel φ gegen die x-Achse. Drücke y_1, $\vec{v}_1$ und $\tan\varphi$ durch L, d, U und die Kondensatorspannung U_K aus (Naturkonstanten wie e und m_p dürfen natürlich auch noch vorkommen).

(c) Der Protonenstrahl hat bei $x = z_x$ die y-Koordinate y^*. Drücke y^* durch L, d, U und U_K aus. Für welches U_K trifft der Strahl das Ziel Z? [Zur Kontrolle: $U_K = 167\,\text{V}$]

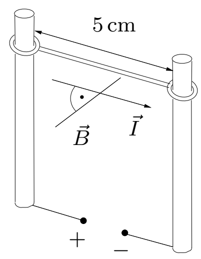
(d) Berechne jetzt die Zahlenwerte von y_1 und $\vec{v}_1$. Um wieviel Prozent ist die Protonengeschwindigkeit $v_1 = |\vec{v}_1|$ größer als die Geschwindigkeit v_0 der Protonen vor dem Eintritt in den Kondensator?

(e) Beweise, dass die rückwärtige Verlängerung der geradlinigen Flugbahn nach dem Kondensator die x-Achse genau im Mittelpunkt des Kondensators schneidet.

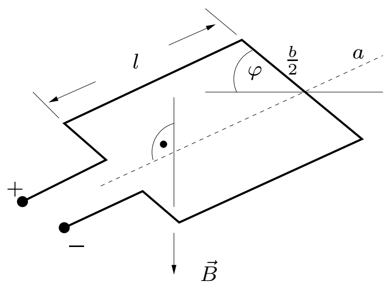
3 Elektrodynamik

3.1 Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter

3.1.1. Eine vertikal frei bewegliche Kupferstange der Masse $m = 4{,}00\,\mathrm{g}$ und der Länge $l = 5{,}00\,\mathrm{cm}$ wird bei einer Stromstärke von $I = 3{,}92\,\mathrm{A}$ genau in der Schwebe gehalten, wenn $\vec{B}$ senkrecht auf $\vec{I}$ steht und $\vec{B}$ sowie $\vec{I}$ horizontal verlaufen. Berechne $B = |\vec{B}|$. Welche Orientierung hat $\vec{B}$?

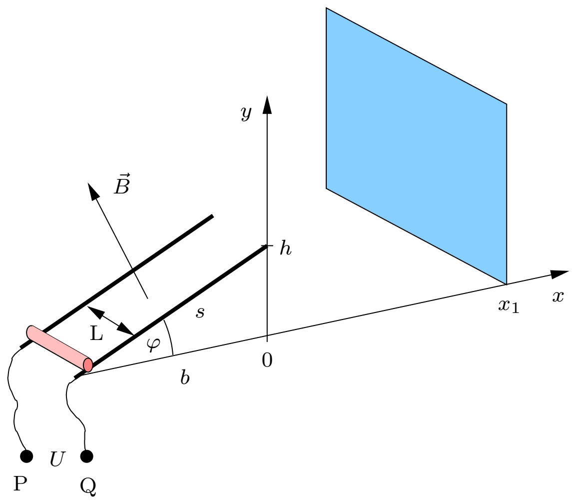


3.1.2. Eine rechteckige Spule ($l = 5{,}0\,\mathrm{cm}$, $b = 4{,}0\,\mathrm{cm}$) mit 200 Windungen ist um die Achse a frei drehbar und wird von dem zu a senkrechten Magnetfeld der Stärke $B = 5{,}0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{T}$ durchsetzt. Berechne den Betrag M des Drehmoments auf die Spule in Abhängigkeit von φ, wenn der Strom durch die Spule $I = 0{,}40\,\mathrm{A}$ beträgt.



3.1.3. In unserer Gegend bildet das magnetische Feld der Erde mit der Horizontalen den Winkel $\varphi = 65°$, zeigt ziemlich genau nach Norden und hat den Betrag $B = 5{,}0 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$. Welche Kraft (vektoriell und Betrag) wirkt pro Meter Länge auf ein Kabel einer Überlandleitung, das in genau westlicher Richtung von einem Strom der Stärke $I = 2000\,\mathrm{A}$ durchflossen wird? Verwende ein Koordinatensystem, in dem die x-Achse nach Osten, die y-Achse nach Norden und die z-Achse nach oben zeigt!

3.1.4. Eine Eisenstange der Masse $m = 26{,}0\,\mathrm{kg}$ liegt auf parallelen Eisenschienen mit dem Abstand $L = 1{,}00\,\mathrm{m}$. Ein Ende der Schienen liegt auf dem Boden ($y = 0$), das andere Ende der $s = 13{,}0\,\mathrm{m}$ langen Schienen befindet sich um $h = 5{,}00\,\mathrm{m}$ über dem Boden. Im Bereich der Schienen herrscht ein Magnetfeld der Stärke $B = 1{,}70\,\mathrm{T}$, das senkrecht auf der von den Schienen gebildeten Ebene steht und schräg nach oben weist. Zwischen den Schienen liegt eine Spannung U, die den Strom $I = 2543\,\mathrm{A}$ in der Eisenstange hervorruft.



(a) Wie muss U gepolt sein, damit sich die Eisenstange auf den Schienen nach oben bewegt?

(b) Die anfänglich am unteren Schienenende ruhende Eisenstange erreicht das obere Schienenende mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_0$. Berechne zuerst $v_0 = |\vec{v}_0|$ und dann die Komponenten v_{x0} und v_{y0} von $\vec{v}_0$.

(c) Die Eisenstange erreicht das obere Schienenende zur Zeit $t_0 = 0$. Wann und in welcher Höhe trifft die Eisenstange auf eine Wand bei $x_1 = 240\,\mathrm{m}$ (siehe Abb.)?

3.2 Die Lorentzkraft

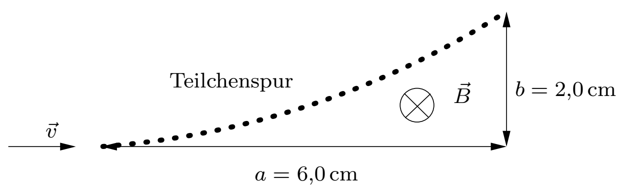
3.2.1. Berechne die Kraft $\vec{F}$ auf ein Teilchen der Ladung q mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ im Feld $\vec{B}$ für $v = 1000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $B = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$ und

$$\text{(a)}\quad q = -e, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad q = e, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.2.2. Ein Neutronenstern hat an seiner Oberfläche ein extrem starkes Magnetfeld mit der Kraftflussdichte $B = 1{,}0 \cdot 10^6\,\mathrm{T}$. Eine Gewehrkugel der Masse $m = 5{,}0\,\mathrm{g}$ wird mit der Geschwindigkeit $v = 400\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ an der Oberfläche des Neutronensterns senkrecht zu den magnetischen Feldlinien abgeschossen, die Kugel trägt die Ladung $1{,}0 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{C}$. Berechne den Flugbahnradius r der Kugel.

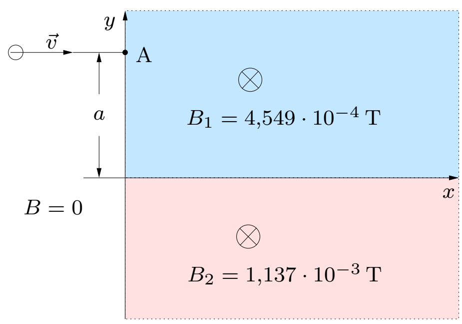
3.2.3. Beweise mit Hilfe einer Energiebetrachtung, dass bei der Bewegung eines geladenen Teilchens in einem *beliebigen* Magnetfeld der Betrag der Geschwindigkeit des Teilchens konstant ist!

3.2.4. (a) In einer sogenannten *Nebelkammer* hinterlassen geladene Teilchen in einer gesättigten Wasserdampfatmosphäre eine feine Spur von Wassertröpfchen. Aus der Zahl der Tröpfchen kann die kinetische Energie des Teilchens berechnet werden, die in unserem Fall $284{,}7\,\mathrm{eV}$ beträgt. Berechne die Masse des Teilchens unter der Annahme, dass der Betrag seiner Ladung e ist ($B = 5{,}690 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$).



(b) Welches Teilchen würde für $B = 0{,}02438\,\mathrm{T}$, unter sonst gleichen Bedingungen wie in Teilaufgabe (a), dieselbe Spur erzeugen?

3.2.5. Ein Elektronenstrahl, der von der Spannung $U = 11{,}37\,\mathrm{V}$ beschleunigt wurde, tritt bei A in das nebenstehend gezeichnete System von zwei homogenen Magnetfeldern $\vec{B}_1$ und $\vec{B}_2$ ein. Zeichne den weiteren Verlauf des Elektronenstrahls für $a = 2{,}5\,\mathrm{cm}$. Berechne zuerst die für die Zeichnung benötigten Größen. Die Elektronen führen in den Magnetfeldern eine periodische Bewegung aus; berechne die Periodendauer. An welchem Ort befindet sich ein Elektron zur Zeit $t = 1{,}1 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}$, das zur Zeit Null den Punkt A passiert?



3.2.6. Ein Proton bewegt sich im Magnetfeld $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{T}$; dabei sind die Anfangswerte

$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{cm}$ und $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -29 \\ 3{,}0 \end{pmatrix} \cdot 10^5\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ bekannt.

(a) Welche Ganghöhe h hat die Schraubenlinie, auf der sich das Proton bewegt?

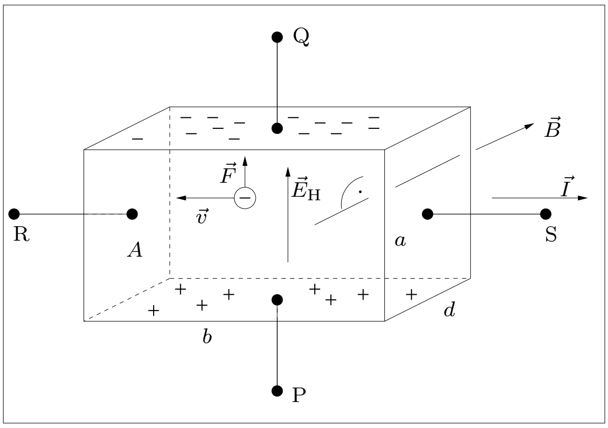
(b) An welchem Ort befindet sich das Teilchen zur Zeit $t = 1{,}0 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}$?

(c) Durch welche Spannung U wurde das Proton beschleunigt?

3.2.7. Der Hall-Effekt

Ein quaderförmiges Leiterstück mit der Querschnittsfläche $A = a \cdot d$ wird von R nach S vom Strom $\vec{I}$ durchflossen. Der Leiter ist von einem Magnetfeld $\vec{B}$ mit $\vec{B} \perp \vec{I}$ und $\vec{B} \perp \mathrm{PQ}$ durchsetzt. Zeige, dass sich im Leiter ein elektrisches Feld $\vec{E}_\mathrm{H}$ (*Hallfeld*) aufbaut und beweise, dass zwischen P und Q die *Hallspannung*

$$\boxed{U_\mathrm{H} = v\,B\,a}$$



liegt, wobei v der Betrag der Elektronengeschwindigkeit ist. Ist N die Zahl der frei beweglichen Elektronen im Leitervolumen V, dann nennt man $n = \frac{N}{V}$ die Ladungsträgerkonzentration. Die materialabhängige Konstante

$$R_\mathrm{H} = \frac{1}{n\,e}$$

heißt *Hallkonstante*. Beweise für die Hallspannung (d ist die Dicke des Leiterplättchens)

$$\boxed{U_\mathrm{H} = R_\mathrm{H} \cdot \frac{I\,B}{d}}$$

Ein Gerät, das über die Hallspannung Magnetfelder misst, heißt *Hallsonde*. Den Kehrwert $\sigma = \frac{1}{\varrho}$ des spezifischen Widerstandes ϱ eines Materials nennt man *Leitfähigkeit*. An einer Hallsonde liegt zwischen R und S die Spannung U. Beweise für die Hallspannung

$$\boxed{U_\mathrm{H} = R_\mathrm{H} \cdot \sigma \cdot \frac{a}{b} \cdot B \cdot U}$$

Welches der Materialien in folgender Tabelle ist am besten zum Bau einer Hallsonde geeignet?

Stoff	Ag	Cu	Bi	Indium-Arsenid	Ge
R_H in $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{A\,s}}$	$9 \cdot 10^{-11}$	$5{,}3 \cdot 10^{-11}$	$5{,}4 \cdot 10^{-7}$	$1{,}0 \cdot 10^{-4}$	0,01
σ in $\frac{1}{\Omega\,\mathrm{m}}$	$6{,}25 \cdot 10^{7}$	$5{,}71 \cdot 10^{7}$	$8{,}55 \cdot 10^{5}$	$3 \cdot 10^{4}$	40

Berechne die Hallspannungen an Hallsonden, die aus den in der Tabelle aufgeführten Materialien hergestellt sind ($a = 5\,\mathrm{mm}$, $b = 10\,\mathrm{mm}$ und $d = 2\,\mathrm{mm}$) für $U = 10\,\mathrm{V}$ und $B = 0{,}4\,\mathrm{T}$.

Von welchem Magnetfeld ist eine Indium-Arsenid-Sonde der Dicke $d = 0{,}8\,\mathrm{mm}$ durchsetzt, die bei bei einer Stromstärke von $I = 1{,}2\,\mathrm{A}$ die Hallspannung $U_\mathrm{H} = 0{,}0135\,\mathrm{V}$ anzeigt?

Ein AD-Wandler ist eine elektronische Schaltung, die ein analoges Eingangssignal (Spannung U_e) in ein digitales Ausgangssignal (Bytefolge) verwandelt. Konstruiere eine Hallsonde aus zwei AD-Wandlern, einem temperaturunabhängigen Präzisionswiderstand R_0, einer Batterie und einem Computer. Schreibe den Kern eines Programms zur Messung von B.

3.3 Relativistische Kinematik

3.3.1. Die im Inertialsystem S ruhenden Punkte A und B haben in S die Entfernung s. Eine Uhr U bewegt sich mit der Geschwindigkeit v relativ zu S von A nach B. Zwei synchronisierte Uhren in A und in B messen für diese Bewegung die Dauer Δt, die Uhr U, die beim Start mit der Uhr in A synchronisiert wurde, ermittelt die Bewegungszeit $\Delta t'$. Bei der Ankunft in B geht U gegen die Uhr in B um $\delta t = \Delta t - \Delta t'$ nach.

(a) Drücke Δt, $\Delta t'$ und δt durch s und $\beta = \dfrac{v}{c}$ aus.

(b) Berechne δt und $\delta_{\text{rel}} = \dfrac{\delta t}{\Delta t}$ näherungsweise für $v \ll c$.

(c) Für Geschwindigkeiten sehr nahe an der Lichtgeschwindigkeit schreiben wir $v = (1-\alpha)\,c$ mit $\alpha \ll 1$. Entwickle für diesen Fall eine Näherungsformel für $\Delta t'$ in Abhängigkeit von s und α.

(d) Berechne Δt, $\Delta t'$, δt und δ_{rel} für

i. eine Autofahrt von Garmisch nach München ($v = 100\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$).

ii. einen Flug mit dreifacher Schallgeschwindigkeit über 1000 km.

iii. eine Ameise, die von Mittenwald nach Garmisch krabbelt ($v = 5\,\dfrac{\text{mm}}{\text{s}}$, $s = 18\,\text{km}$).

(e) Berechne Δt, $\Delta t'$ und $\dfrac{\Delta t'}{\Delta t}$ für

i. einen Flug von der Erde zu unserem Nachbarstern Alpha Centauri ($s = 4\,\text{LJ}$) mit $v = 0{,}8\,c$.

ii. ein Proton, das mit $v = 0{,}999\,999\,999\,999\,999\,999\,c$ von einem $s = 10^9\,\text{LJ}$ entfernten Quasar zur Erde fliegt.

(f) Mit welcher Geschwindigkeit wurde eine Atomuhr über eine 4500 km lange Strecke transportiert, wenn sie nach der Ankunft um 0,50 ns nachgeht?

(g) Freie Neutronen haben die mittlere Lebensdauer $\tau = 10{,}6\,\text{min}$. Mit welcher Geschwindigkeit fliegt ein Neutron von einer $s = 10^5\,\text{LJ}$ entfernten Supernova zur Erde, wenn im System des Neutrons dazu gerade die Zeit τ vergeht?

3.3.2. (a) Erläutere, unter welchen Voraussetzungen die Formel für die Zeitdilatation gilt, veranschauliche die Situation in einem Minkowski- oder Brehmediagramm und leite die Formel her.

(b) Bei einer Supernova, die im System S der Erde ruht, entsteht ein sehr schnelles Neutron, das in der Eigenzeit $\tau = 10\,\text{min}$ die Strecke $s = 6000\,\text{LJ}$ bis zur Erde zurücklegt. Um welchen Bruchteil α weicht die Geschwindigkeit v des Neutrons, gemessen im System S, von der Lichtgeschwindigkeit ab? Gleichzeitig und am gleichen Ort startet mit dem Neutron ein Lichtteilchen (Gammaquant) zur Erde. Welchen zeitlichen (δt) und räumlichen (δx) Vorsprung hat das Gammaquant bei der Ankunft auf der Erde gegenüber dem Neutron?

3.3.3. Eine Rakete (System S$'$) fliegt mit der konstanten Geschwindigkeit v in der Zeit Δt an einer Messstrecke (System S) der Eigenlänge Δx vorbei, d.h. $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Von S$'$ aus gesehen rast die Messstrecke der Länge $\Delta x'$ in der Zeit $\Delta\tau = \Delta t'$ an der Rakete vorbei, und zwar mit der Geschwindigkeit $v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x'}{\Delta \tau}$. Ein Passagier der Rakete legt in seiner Eigenzeit $\Delta\tau$ in S die Strecke Δx zurück, d.h. er bewegt sich in S mit der effektiven Geschwindigkeit (*Eigengeschwindigkeit*) $w = \frac{\Delta x}{\Delta \tau}$.

Drücke v' und w durch $\beta = \frac{v}{c}$ aus und zeichne den Grafen von $w(\beta)$ mit den Einheiten $\beta = 1 \mathrel{\hat{=}} 4\,\text{cm}$ und $c \mathrel{\hat{=}} 2\,\text{cm}$. Für welches β ist $w = c$? Berechne w und v für eine Rakete, die in der Eigenzeit $\Delta\tau = 1\,\text{Woche}$ von der Erde zum Andromedanebel ($\Delta x = 2{,}2 \cdot 10^6\,\text{LJ}$) fliegt.

3.3.4. Ein Raumschiff R (Ursprung des Systems S′) fliegt mit der konstanten Geschwindigkeit v relativ zur Erde (Ursprung des Systems S) zum in S ruhenden Stern Tau Ceti. Der Vorbeiflug des Raumschiffs an der Erde findet zur Zeit $t = t' = 0$ statt. In S dauert der Flug $t_1 = 13\,\mathrm{a}$, die Uhr im Raumschiff zeigt die Flugdauer $t'_1 = 5\,\mathrm{a}$ an.

(a) Berechne $\beta = \frac{v}{c}$ und Tau Cetis Entfernung x_1 von der Erde.

(b) Zeichne ein Brehmediagramm ($1\,\mathrm{LJ} \mathrel{\hat{=}} 1\,\mathrm{cm}$, Ursprung 8 cm vom linken Rand entfernt) der Systeme S und S′. Berechne vorher $\tan\varphi$, wobei 2φ der Winkel zwischen den Ortsachsen ist. Trage die Weltlinien der Erde, des Raumschiffs und Tau Cetis in das Diagramm ein.

(c) Zu welcher Erdzeit t_2 muss von der Erde ein Lichtsignal in Richtung Raumschiff gesandt werden (Ereignis E_2), das gleichzeitig mit dem Raumschiff bei Tau Ceti ankommt? Zeichne die Weltlinie des Signals in das Diagramm. Berechne mit Hilfe des Diagramms die S′-Koordinaten von E_2.

3.3.5. Berechne die fehlenden Koordinaten folgender Ereignisse, die Relativgeschwindigkeit der Systeme ist $v = 0{,}8\,c$:

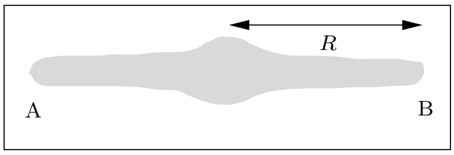
$$\begin{array}{llll} \mathrm{E}_1: & x = -3\,\mathrm{LS}, \quad t = 4\,\mathrm{s}; & \mathrm{E}_2: & x' = 4\,\mathrm{LS}, \quad t' = -2\,\mathrm{s} \\ \mathrm{E}_3: & x = 4\,\mathrm{LS}, \quad t' = 2\,\mathrm{s}; & \mathrm{E}_4: & t = -2\,\mathrm{s}, \quad t' = 3\,\mathrm{s} \end{array}$$

3.3.6. Ein Flugzeug mit der Geschwindigkeit $v = 2160\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ relativ zur Erde feuert in Flugrichtung eine Rakete ab, die sich relativ zum Flugzeug mit der Geschwindigkeit $u' = v$ bewegt. Wie groß ist der relative Fehler δ, wenn die Raketengeschwindigkeit relativ zur Erde mit $2\,v$ angegeben wird? Für welche v ist $\delta > 1\,\%$?

3.3.7. Zwei Raumschiffe fliegen mit den Geschwindigkeitsbeträgen $0{,}8\,c$ und $0{,}7\,c$ einmal in gleicher und einmal in entgegengesetzter Richtung an der Erde vorbei. Mit welchem Geschwindigkeitsbetrag entfernen sich die beiden Raumschiffe voneinander?

3.4 Der Dopplereffekt

3.4.1. Nebenstehende Abbildung zeigt das Fernrohrbild einer Galaxie, Bickrichtung auf deren Schmalseite. Durch die Beobachtung einer Supernova in dieser Galaxie konnte ihre Entfernung zu $r = 5{,}0 \cdot 10^7\,\mathrm{LJ}$ bestimmt werden. Die



Randpunkte A und B der Galaxie erscheinen von der Erde aus unter dem Blickwinkel $\varphi = 0{,}1375°$. Das Licht von der Mitte der Galaxie zeigt die Rotverschiebung $z_0 = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0{,}0035$, die Rotverschiebungen an den Rändern der Galaxie sind $z_\mathrm{A} = 0{,}0012$ und $z_\mathrm{B} = 0{,}0058$.

(a) Berechne den Radius R der Galaxie.

(b) Mit welcher Geschwindigkeit v_0 bewegt sich der Mittelpunkt der Galaxie von uns fort? Mit welcher Geschwindigkeit v rotiert der Rand der Galaxie relativ zu ihrem Mittelpunkt? Welcher Randpunkt bewegt sich dabei vom Mittelpunkt aus gesehen auf die Erde zu?

(c) Um welchen Faktor ist die tatsächliche Masse M der Galaxie größer als die Masse $M_0 = 2 \cdot 10^{11}\,M_\odot$ der Sterne in der Galaxie? Diese nicht sichtbare Masse wird **dunkle Materie** genannt. Die Natur der dunklen Materie ist Gegenstand der aktuellen Forschung.

3.4.2. Auf dem Planeten *Relativistica* bewegt sich das Licht nur mit der sehr kleinen Geschwindigkeit $c^* = 100\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Ein Autofahrer auf *Relativistica* soll Bußgeld zahlen, weil er eine Ampel bei Rot ($f = 4{,}40 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}$) überfahren hat. Der Fahrer behauptet aber, dass die Ampel Grün ($f' = 5{,}65 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}$) gezeigt hat. Auf diese Behauptung hin ändert der Polizist den Bußgeldbescheid auf „überhöhte Geschwindigkeit“ (auch auf *Relativistica* gilt $50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in geschlossenen Ortschaften). Wie schnell war der Autofahrer unterwegs? Wie schnell wäre er bei gleichem Sachverhalt auf der Erde gefahren?

3.5 Relativistische Masse und Energie

3.5.1. Ein Strahl von Teilchen mit der Ladung $q = +e$ durchläuft zunächst ein Wienfilter ($E = 7{,}00 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$, $B = 4{,}00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$) und tritt dann in einen Raumbereich ein, in dem nur noch das Magnetfeld herrscht. Hier beschreibt der Teilchenstrahl eine Kreisbahn mit dem Radius $r = 30{,}6\,\mathrm{cm}$. Um welche Teilchensorte handelt es sich?

3.5.2. (a) Zeige, dass der relativistische Ausdruck für die kinetische Energie für kleine Geschwindigkeiten näherungsweise in die klassische (nichtrelativistische) Formel übergeht.

(b) Zeige, dass man die relativistische Formel für die kinetische Energie *nicht* erhält, wenn man einfach in der nichtrelativistischen Formel m durch γm ersetzt.

3.5.3. Was ist mehr wert, 1 g Gold oder 1 g elektrischer Energie? Den Goldpreis und den Strompreis findet man sicher im Internet.

3.5.4. Mit welcher Geschwindigkeit muss sich ein Körper bewegen, damit seine kinetische Energie gleich seiner Ruhenergie ist?

3.5.5. Beweise: Ein Körper der Masse m und der kinetischen Energie W_k bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = \beta\, c$ mit

$$\beta = \frac{\sqrt{W_\mathrm{k}\,(W_\mathrm{k} + 2\,m\,c^2)}}{W_\mathrm{k} + m\,c^2}$$

3.5.6. Zwei Atomkerne mit den Massen m stoßen mit den Geschwindigkeiten $v_1 = 0{,}6\,c$ und $v_2 = -0{,}6\,c$ total unelastisch zusammen und bilden einen neuen Kern. Berechne die Masse des neuen Kerns.

3.5.7. Zur Erinnerung: $\boxed{1\,\mathrm{eV} = e \cdot 1\,\mathrm{V}}$

(a) Die Masse des Elektrons ist $m_\mathrm{e} = 9{,}10938 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$. Berechne die Ruhenergie des Elektrons in MeV.

(b) Die Ruhenergie des Protons ist $W_\mathrm{p} = 938{,}27\,\mathrm{MeV}$. Berechne die Masse des Protons.

3.5.8. Ein anfänglich ruhendes Teilchen der Ruhmasse m und der Ladung q wird von der Spannung U beschleunigt.

(a) Berechne Formeln für die Endgeschwindigkeit des Teilchens einmal klassisch (nichtrelativistisch) und einmal relativistisch. Berechne im relativistischen Fall auch das Verhältnis $\frac{W}{W_0}$.

(b) Berechne v_kl, v_rel und $\frac{W}{W_0}$ für ein Elektron und für ein Proton, einmal für $U = 2500\,\mathrm{V}$ und einmal für $U = 5{,}000 \cdot 10^6\,\mathrm{V}$. Wie groß ist jeweils der relative Fehler der nichtrelativistischen Rechnung?

3.5.9. Die Erdoberfläche trägt die Ladung $Q = 5{,}77 \cdot 10^5\,\mathrm{C}$. Von der Oberfläche bis zur Ionosphäre in ungefähr 60 km Höhe herrscht ein fast homogenes elektrisches Feld. Berechne die Masse dieses Feldes.

3.5.10. In vielen Büchern findet man folgende Faustregel:

$$\boxed{\text{Bis zu } v = 0{,}1\,c \text{ darf klassisch gerechnet werden.}}$$

(a) Berechne den relativen Fehler der kinetischen Energie, wenn für $v = 0{,}1\,c$ klassisch gerechnet wird.

(b) Bis zu welcher Beschleunigungsspannung U darf nach unserer Faustregel für Elektronen bzw. Protonen klassisch gerechnet werden?

3.5.11. 1991 entdeckte der „Fly's Eye detector“ in Utha, U.S.A., einen Schauer von hochenergetischen Teilchen, die von einem ursprünglichen Teilchen mit der enormen Energie $W = 51{,}2\,\mathrm{J}$ erzeugt wurden. Die Identität des ursprünglichen Teilchens konnte nicht genau ermittelt werden, aber es könnte ein Proton gewesen sein, was wir für die weiteren Rechnungen annehmen. In welcher Eigenzeit hätte das Teilchen die Strecke $s = 2 \cdot 10^6\,\mathrm{LJ}$ von der Andromeda-Galaxie zur Erde zurückgelegt? Um welchen Betrag weicht die Geschwindigkeit v des Teilchens von der Lichtgeschwindigkeit ab?

3.5.12. Welchen Impuls muß ein Teilchen haben, damit seine kinetische Energie das 1,6-fache seiner Ruhenergie beträgt? Rechne einmal mit und einmal ohne Energie-Impuls-Relation.

3.5.13. Eine elektromagnetische Welle transportiert Energie und besitzt daher auch einen Impuls.

(a) Wir betrachten einen Teil einer elektromagnetischen Welle und nennen ihn ein „Lichtteilchen“ (Photon). Welche Masse muss ein Photon haben?

(b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Energie W und dem Impuls p eines Photons?

(c) Welchen Rückstoß erfährt ein Gigawatt-Laser bzw. eine Taschenlampe?

(d) Trifft ein Teilchen auf sein Antiteilchen, dann zerstrahlen die beiden Teilchen in Photonen. Warum müssen dabei mindestens zwei Photonen entstehen? Betrachte den Vorgang im Schwerpunktsystem!

(e) Bei der Photonenrakete wird Materie und Antimaterie im Brennpunkt eines Parabolspiegels zerstrahlt, die Photonen werden dadurch alle in die gleiche Richtung abgestrahlt. Welchen Schub erfährt eine Photonenrakete, die in einer Stunde 1 kg Masse zerstrahlt?

(f) Wieviel Masse muss eine 1000 t schwere Photonenrakete pro Sekunde zerstrahlen, um die Beschleunigung $1\,g$ zu erhalten?

3.5.14. Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einem Inertialsystem mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ und es ist $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Die Gesamtenergie des Teilchens ist W, seine kinetische Energie W_k, seine Ruhenergie W_0 und sein Impuls p. Mit α wird das Verhältnis $\dfrac{W_\mathrm{k}}{W_0}$ abgekürzt.

(a) Beweise in nachvollziehbarer Weise:

$$p = mc\sqrt{\gamma^2 - 1} = mc\sqrt{\alpha(\alpha+2)}$$

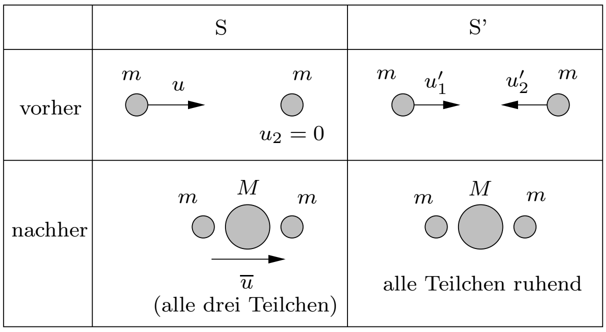
(b) Unser Teilchen der Ladung q tritt senkrecht zu den Feldlinien in ein Magnetfeld mit der Kraftflussdichte B ein und beschreibt eine Kreisbahn mit Radius r. Drücke r durch W_k aus.

(c) Welche Beschleunigungsspannung U hat ein zunächst ruhendes Elektron durchlaufen, das in eiem Beschleuniger bei $B = 5{,}0\,\mathrm{T}$ eine Kreisbahn mit $r = 4{,}0\,\mathrm{km}$ beschreibt?

3.5.15. Von welcher Spannung U muss ein zunächst ruhendes Elektron beschleunigt werden, damit seine dynamische Masse um 25 % größer wird als seine Ruhmasse? Welche Geschwindigkeit hat das Elektron in diesem Fall?

3.5.16. **Teilchenerzeugung**

Im Laborsystem S stößt ein Teilchen der Masse m auf ein ruhendes Teilchen mit der gleichen Masse m. Nach dem Stoß ist ein weiteres Teilchen mit der Masse M vorhanden. Im Schwerpunktsystem S' haben die Teilchen vor dem Stoß die Geschwindigkeiten u_1' und u_2'. Die Relativgeschwindigkeit von S' zu S



sei v. Weiter verwenden wir die Bezeichnungen $\beta = \dfrac{v}{c}$ und $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

W_k	:	kinetische Energie des bewegten Teilchens in S vor dem Stoß
W_k'	:	kinetische Energie **eines** Teilchens in S' vor dem Stoß
W	:	Gesamtenergie in S
W'	:	Gesamtenergie in S'

(a) Beweise: $u_1' = v$ und $u_2' = -v$.

(b) Beweise: Die Masse M des erzeugten Teilchens ist dann maximal, wenn alle drei Teilchen nach dem Stoß in S' ruhen.

Für das Weitere nehmen wir an, dass M maximal ist, d.h. alle drei Teilchen ruhen nach dem Stoß in S'.

(c) Beweise: $\boxed{W = \gamma W'}$, $\boxed{\gamma = 1 + \dfrac{M}{2m}}$ und $\boxed{\gamma^2 = \dfrac{W_\mathrm{k}}{2mc^2} + 1}$

(d) Beweise: $\boxed{\dfrac{M}{2m} = \sqrt{1+\alpha} - 1}$ mit $\alpha = \dfrac{W_\mathrm{k}}{2mc^2}$.

Wie vereinfacht sich diese Beziehung für $W_\mathrm{k} \gg mc^2$?

(e) Elementarteilchen werden meist paarweise erzeugt (Teilchen und Antiteilchen). Welche maximale Masse $\overline{M}$ kann ein Teilchen eines Paares haben, das durch Proton-Proton-Stöße erzeugt wird mit

$W_\mathrm{k} = 6{,}4\,\mathrm{GeV}$ (Bevatron in Berkley, 1954)
$W_\mathrm{k} = 900\,\mathrm{GeV}$ (Tevatron am Fermilab, 80-er-Jahre)
$W_\mathrm{k} = 7\,\mathrm{TeV}$ (LHC, Large-Hadron-Collider, CERN, ca. 2005, 27 km Umfang).

Wie stark muss das Magnetfeld im LHC sein?

(f) Drücke W_k durch M und m aus. Wie groß muss W_k sein, um durch einen Proton-Proton-Stoß

i. ein Proton-Antiproton-Paar

ii. ein Paar von Higgsteilchen ($\overline{M}c^2 \approx 500\,\mathrm{GeV}$)

zu erzeugen?

(g) Die Kosten eines Ringbeschleunigers sind ungefähr zu seinem Umfang proportional (supraleitende Magnetspulen). Man kann die Teilchen eines Beschleunigers auf ruhende Teilchen schießen (Typ 1, Festtarget) oder die Strahlen von zwei Beschleunigern (einer als Speicherring) frontal aufeinander prallen lassen (Typ 2, Collider). Berechne das Verhältnis der Kosten der beiden Typen in Abhängigkeit von M und m. Es darf vorausgesetzt werden, dass $W_\mathrm{k} \gg mc^2$. Wie groß ist dieses Verhältnis speziell für die Erzeugung von Higgsteilchen? Wie groß wäre der Radius eines Festtargetbeschleunigers mit der gleichen Schwerpunktsenergie wie beim LHC?

3.6 Der magnetische Fluss

3.6.1. Berechne den magnetischen Fluss Φ eines homogenen Magnetfeldes der Stärke $B = 0{,}070\,\mathrm{T}$ durch eine Kreisfläche ($r = 5{,}0\,\mathrm{cm}$), die in der xy-Ebene liegt; der Neigungswinkel des Magnetfeldes zur xy-Ebene ist $\varphi = 20°$.

3.7 Bewegungsinduktion

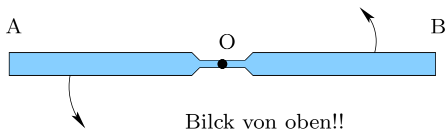
3.7.1. Ein Flugzeug mit der Spannweite $30\,\mathrm{m}$ (Tragflächen horizontal) fliegt mit $v = 800\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ im Magnetfeld der Erde genau nach Norden (siehe Aufgabe 3.1.3).

(a) Welche Spannung U liegt zwischen den Flügelspitzen? Wie ist diese Spannung gepolt?

(b) Wie ändert sich die Spannung U, wenn die Flugrichtung horizontal um den Winkel α geändert wird?

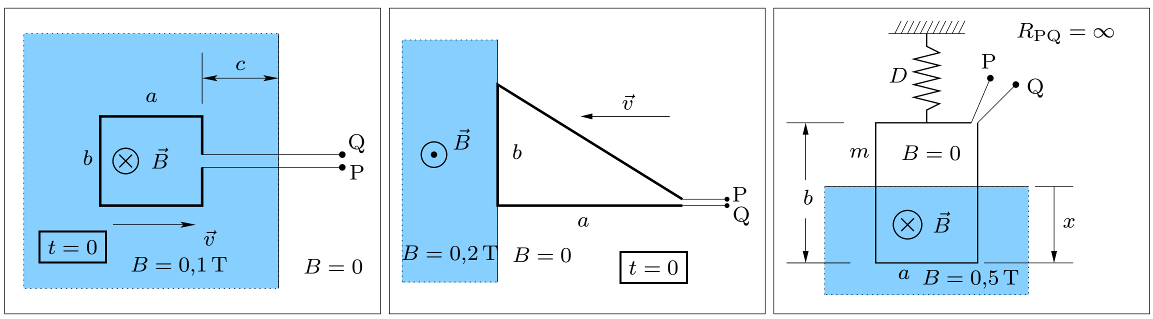
(c) Wie ändert sich U, wenn die Flugrichtung wieder nach Norden zeigt, aber vertikal um den Winkel β geändert wird?

3.7.2. Der elektrisch leitende Rotor eines Hubschraubers ($\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}} = 7\,\mathrm{m}$) dreht sich in der Sekunde achtmal im Magnetfeld der Erde (siehe Aufgabe 3.1.3). Berechne $|U_{\mathrm{OA}}|$ und $|U_{\mathrm{AB}}|$!



3.7.3. Wie kann sich ein gerader Leiter (der Vektor vom Anfang zum Ende des Leiters sei $\vec{l}$) relativ zu einem homogenen Magnetfeld $\vec{B}$ bewegen, damit die zwischen den Leiterenden induzierte Spannung Null ist? Verwende zur Beschreibung ein Koordinatensystem, in dem $\vec{B}$ parallel zur z-Achse liegt! Suche alle Möglichkeiten!

3.7.4. Berechne den magnetischen Fluss $\Phi(t)$ durch die Leiterschleife und die Induktionsspannung $U(t)$ zwischen P und Q! Das Vorzeichen von U sei so gewählt, dass $U > 0$ für P positiv gilt. Zeichne den Verlauf von $\Phi(t)$ und $U(t)$.

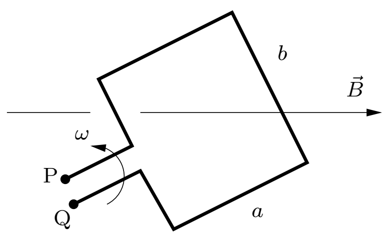


(a) $a = 6\,\mathrm{cm}$, $b = 3\,\mathrm{cm}$
$c = 2\,\mathrm{cm}$, $v = 2\,\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$

(b) $a = 6\,\mathrm{cm}$, $b = 4\,\mathrm{cm}$
$v = 3\,\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$

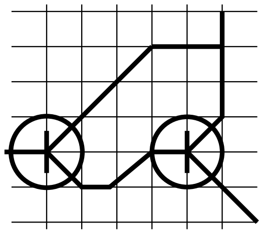
(c) $a = 10\,\mathrm{cm}$, $b = 20\,\mathrm{cm}$
$m = 20\,\mathrm{g}$, $D = 1{,}28\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$
Ruhelage: $x(0) = 10\,\mathrm{cm}$
$v_0 = v(0) = 0{,}64\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

3.7.5. Das homogene Magnetfeld steht zu jeder Zeit senkrecht auf den Drahtstücken mit der Länge a, die Leiterschleife dreht sich mit der Kreisfrequenz ω. Zur Zeit $t = 0$ steht die Leiterschleife senkrecht (P oben). Berechne die Spannung $U(t)$ zwischen P und Q ($U > 0$ für Q positiv). Wie ändert sich U, wenn statt der Leiterschleife eine Spule mit n Windungen verwendet wird? Berechne $U(t)$ speziell für $a = 5\,\mathrm{cm}$, $b = 4\,\mathrm{cm}$, $n = 100$, $B = 0{,}2\,\mathrm{T}$ und der Drehfrequenz $20\,\mathrm{Hz}$.



3.8 Das Induktionsgesetz

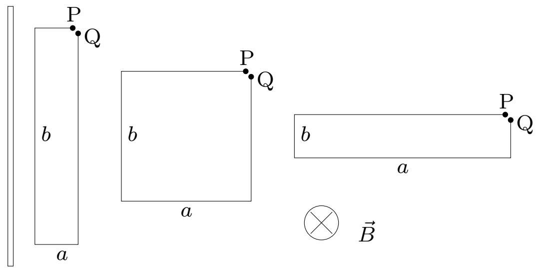
3.8.1. Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus einer älteren elektronischen Schaltung in natürlicher Größe (ein Kästchen entspricht 5 mm). Durch einen Blitzeinschlag in der Nähe wird in der Zeit $t_0 = 10\,\mu\text{s}$ das Magnetfeld $B_0 = B(t_0) = 1\,\text{T}$ nach dem Gesetz $B(t) = \alpha \cdot t^2$ $(0 \leqq t \leqq t_0)$ aufgebaut. U sei die gesamte in der Leiterschleife induzierte Spannung, d.h. an einem der beiden Transistoren liegt mindestens die Spannung $\frac{U}{2}$.



Berechne α, $U(t)$, $U(t_0)$ und die gesamte Flussänderung $\Delta\Phi$ durch die Leiterschleife!

Löse die Aufgabe nocheinmal für einen NEMP (**N**uclear-**E**lectro-**M**agnetic-**P**uls), der elektromagnetischen Begleiterscheinung einer Kernexplosion. Der einzige Unterschied zum Blitzschlag ist die extrem kurze Anstiegszeit $t_0 = 10\,\text{ns}$.

3.8.2. Die Form einer Leiterschleife wird nach folgendem Gesetz geändert: Der Umfang $u = 2\,(a + b)$ ist konstant und $a = v \cdot t$ mit konstantem v. Das Magnetfeld ist (räumlich) homogen. Die Induktionsspannung $U(t) = U_{\text{PQ}}$ ist größer Null, wenn P positiv ist.



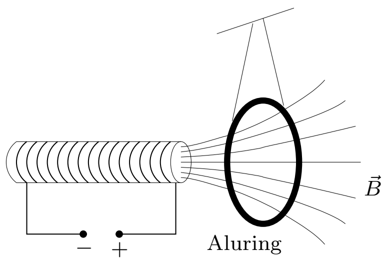
(a) Berechne $U(t)$ im Zeitintervall $0 < t < \dfrac{u}{2\,v}$ für ein zeitlich konstantes Magnetfeld. Zeichne den zeitlichen Verlauf von U und des magnetischen Flusses Φ durch die Leiterschleife für $B = 2\,\text{T}$, $u = 40\,\text{cm}$ und $v = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

(b) Für welches $B(t)$ wäre $U(t) = 0$ für alle t aus obigem Intervall?

3.8.3. In welche Richtung bewegt sich der Aluring (Aluminium ist nicht magnetisierbar)

(a) beim Ausschalten (Einschalten) des Stromes?

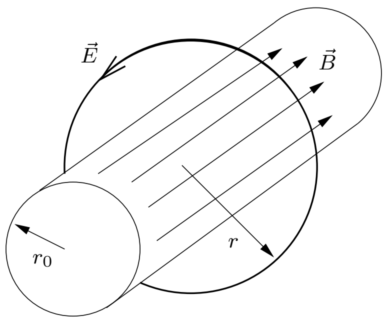
(b) bei einer Bewegung des Elektromagneten nach links (rechts)?



3.9 Wirbelfelder und Wirbelströme

3.9.1. Gegeben ist ein axialsymmetrisches Magnetfeld mit dem Betrag

$$B(t) = \begin{cases} B_0 \cdot \sin\omega t & \text{für} \quad r \leqq r_0 \\ 0 & \text{für} \quad r > r_0 \end{cases}$$



(a) Berechne die Stärke $E(r, t)$ des elektrischen Wirbelfeldes für $r_0 = 4\,\text{cm}$, $B_0 = 0{,}1\,\text{T}$ und $\omega = 6 \cdot 10^6\,\frac{1}{\text{s}}$. Unterscheide die Fälle $r \leqq r_0$ und $r > r_0$. Zeichne $E(r)$ für $t = 0$.

(b) Die ganze Anordung befindet sich jetzt in einem verdünnten Gas. Überschreitet die maximale Stärke des Wirbelfeldes den Wert $E_0 = 10^4\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$, dann tritt eine Ringentladung auf, d.h. es fließt entlang der Feldlinien ein Strom, der die Atome des Gases zum Leuchten anregt. Zwischen welchen Werten von r tritt die Ringentladung auf?

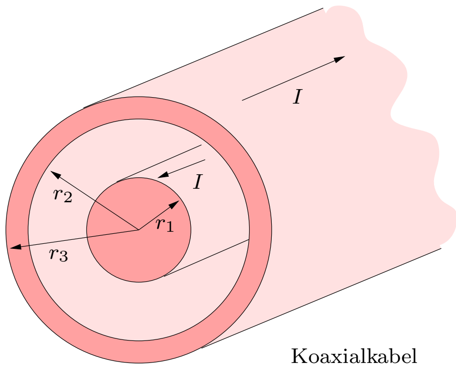
3.10 Das Ampèrsche Durchflutungsgesetz

3.10.1. Ein magnetischer Spannungsmesser mit den Daten $l = 1\,\mathrm{m}$, $A = 1\,\mathrm{cm}^2$ und $c_{\mathrm{ut}} = 10^{-5}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{Skt}}$ umschließt den Strom $I = 10\,\mathrm{A}$. Wie groß muss die Windungszahl n sein, damit das Messgerät beim Ausschalten des Stromes genau einen Skalenteil anzeigt?

3.10.2. Ein magnetischer Spannungsmesser mit den Daten $l = 0{,}5\,\mathrm{m}$, $A = 2\,\mathrm{cm}^2$, $c_{\mathrm{ut}} = 10^{-4}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{Skt}}$ und $n = 3979$ wird als Messgerät für hohe Gleichströme verwendet (Zangenampèremeter). Welchen Strom umschließt die Rogowski-Spirale, wenn beim Ausschalten des Stromes ein ballistischer Ausschlag von genau einem Skalenteil angezeigt wird?

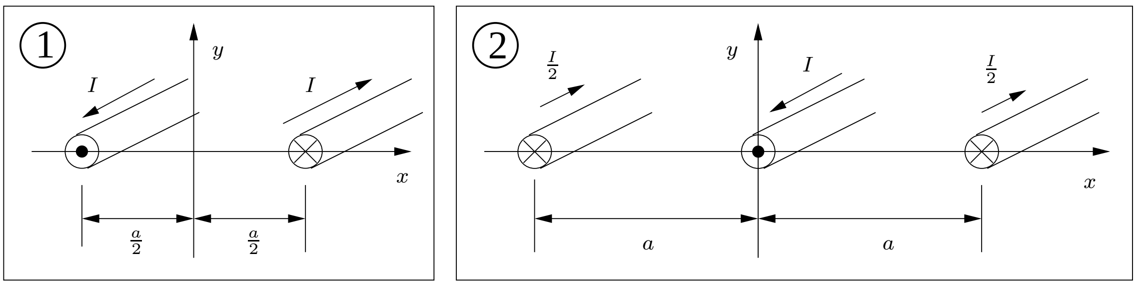
3.10.3. Das Koaxialkabel wird im Kern und im Mantel von entgegengesetzt gerichteten Strömen mit dem gleichen Betrag I durchflossen. Die Stromdichte im jeweiligen Leiter ist konstant.

Berechne $B(r)$ für $0 \leqq r \leqq \infty$ (4 Fälle)! Zeichne $B(r)$ für $r_1 = 1\,\mathrm{cm}$, $r_2 = 2{,}5\,\mathrm{cm}$, $r_3 = 3\,\mathrm{cm}$ und $I = 0{,}2\,\mathrm{A}$!



Koaxialkabel

3.10.4. **Eine Untersuchung zum Elektrosmog:**
Die folgende Abbildung zeigt ein zweifaches und ein dreifaches Paralleldrahtsystem zur Hin- und Rückleitung eines Stromes I von der Stromquelle zum Verbraucher.



(a) Berechne die Kraftflussdichten $\vec{B}_{1x}$, $\vec{B}_{1y}$, $\vec{B}_{2x}$ und $\vec{B}_{2y}$ auf der x-Achse und der y-Achse.

(b) Wie groß sind die Beträge der in (a) berechneten Kraftflussdichten für $x \gg a$ bzw. $y \gg a$?

(c) Berechne die Beträge der vier Kraftflussdichten für eine Haushaltsleitung mit $a = 4\,\mathrm{mm}$ und $I = 10\,\mathrm{A}$ in den Entfernungen $20\,\mathrm{cm}$ und $1\,\mathrm{m}$ vom Ursprung.

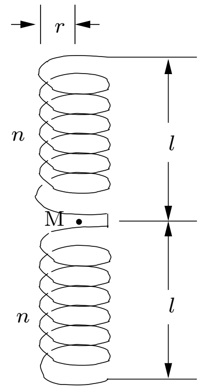
(d) Wie (c), jedoch mit $a = 10\,\mathrm{cm}$ (Halogenlampen-Seilsystem)!

(e) Berechne die Beträge der vier Kraftflussdichten für eine Hochspannungsleitung mit $a = 4\,\mathrm{m}$ und $I = 2000\,\mathrm{A}$ in den Entfernungen $20\,\mathrm{m}$ und $100\,\mathrm{m}$ vom Ursprung.

(f) Berechne $|B_1(x)|$ und $|B_1(x)|$ der Hochspannungsleitungen am Boden (x-Achse), wenn sich das Seilsystem in der Höhe y über dem Boden befindet. Zeichnung für $y = 1\,\mathrm{m}$ und $y = 8\,\mathrm{m}$ im x-Intervall $[-10\,\mathrm{m}, 10\,\mathrm{m}]$.

3.11 Berechnung von Magnetfeldern

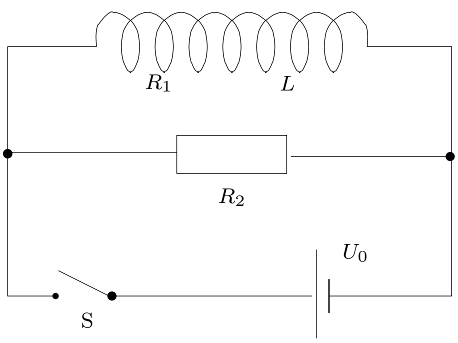
3.11.1. (a) Die Formel für das Magnetfeld eines Solenoids gilt exakt nur im Mittelpunkt der Spule. Im Punkt M zwischen zwei gleichen Spulen mit n Windungen und der Länge l, die sich fast berühren, herrscht das gleiche Feld wie im Mittelpunkt **einer** Spule mit $n' = 2\,n$ und $l' = 2\,l$. Leite daraus eine Formel für die Kraftflussdichte B_{R} am Rand eines Solenoids her (Superposition)!



(b) Für eine große Nebelkammer werden zwei Spulen mit kreisförmigem Querschnitt ($l = 2{,}00\,\mathrm{m}$, $r = 1{,}00\,\mathrm{m}$, $n = 5000$) verwendet. Für welchen Strom I herrscht in M das Feld $B = 4{,}0\,\mathrm{T}$?

3.12 Induktivität und magnetische Feldenergie

3.12.1. Der Schalter S wird zur Zeit $t_0 = 0$ geschlossen und zur Zeit $t_1 \gg \frac{L}{R_1}$ wieder geöffnet. Der Innenwiderstand der Stromquelle darf vernachlässigt werden ($R_{\mathrm{i}} = 0$). I_1, I_2, U_1 und U_2 sind die Ströme durch bzw. die Spannungen an R_1 und R_2.



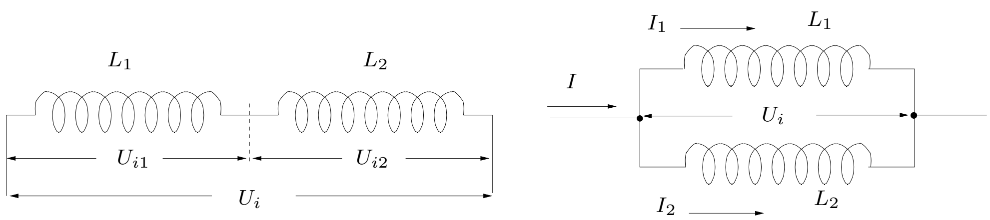
(a) Berechne I_1, I_2, U_1 und U_2 für $0 < t < t_1$ und $t > t_1$.

(b) Die Spule hat jetzt 1000 Windungen, den Querschnitt $A = 20\,\mathrm{cm}^2$, die Länge $l = 10\,\mathrm{cm}$ und den Ohm'schen Widerstand $R_1 = 5{,}03\,\Omega$, $R_2 = 15{,}08\,\Omega$. Zeichne den zeitlichen Verlauf von U_1 und U_2 für $U_0 = 2\,\mathrm{V}$ und $t_1 = 0{,}03\,\mathrm{s}$ ($1\,\mathrm{cm} \mathrel{\widehat{=}} 0{,}004\,\mathrm{s}$)!

(c) In welcher Zeit erreicht I_1 99 % seines Endwertes I_0? In welcher Zeit sinkt I_1 auf 1 % von I_0 ab?

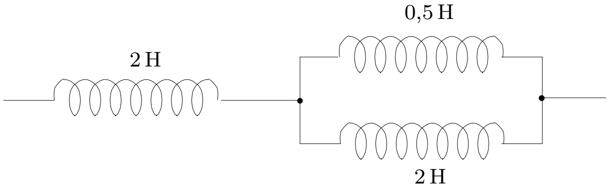
(d) Wird R_2 durch eine Glimmlampe ersetzt oder ganz herausgenommen, dann gibt es direkt nach dem Ausschalten eine sehr hohe Spannung U_2. Gib eine qualitative Erklärung dieses Phänomens. Die quantitative Behandlung dieses Problems gelingt uns erst im Kapitel über den elektrischen Schwingkreis.

3.12.2.

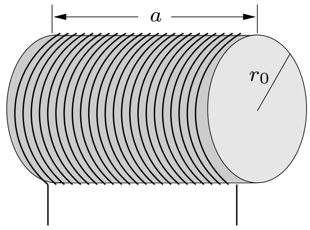


Zeige, dass für Reihen- und Parallelschaltungen von zwei Induktivitäten die gleichen Gesetze gelten wie für Widerstandsschaltungen. Verwende dazu die Beziehung $U_i = -L\,\dot{I}$.

3.12.3. Berechne L_{ges}:



3.12.4. Das CMS (Compact Muon Solenoid) am CERN ist ein riesiger Teilchendetektor für den LHC (Large Hadron Collider). Das Kernstück des CMS ist ein supraleitender Elektromagnet der Länge $a = 13\,\text{m}$ und mit der Induktivität $L = 14\,\text{H}$. Bei der Stromstärke $I_0 = 1{,}95 \cdot 10^4\,\text{A}$ durch die Wicklungen beträgt die Kraftflussdichte im Mittelpunkt der Spule $B_0 = 4{,}0\,\text{T}$.



(a) Berechne die Windungszahl n und den Radius r_0 der Spule.

(b) Zu Testzwecken wird ein von der Spannug U_p beschleunigtes Proton senkrecht zu den Feldlinien in das Magnetfeld im Inneren der Spule geschossen. In einem geeigneten Koordinatensystem wird das Proton an folgenden Orten registriert: $P_1\,(2{,}25\,\text{cm}|-4{,}00\,\text{cm})$, $P_2\,(2{,}25\,\text{cm}|4{,}00\,\text{cm})$ und $P_3\,(10{,}50\,\text{cm}|6{,}50\,\text{cm})$.

Zeichne die drei Punkte in ein Koordinatensystem (Maßstab 1:1), ermittle durch Konstruktion und durch Rechnung den Radius r der Protonenbahn und berechne dann U_p.

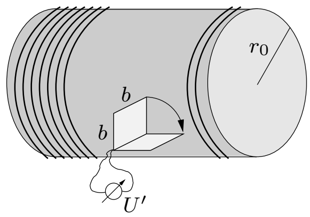
(c) Welchen Energieinhalt W_0 hat das Magnetfeld der Spule? Wie lange kann man tausend 100-Watt-Lampen mit dieser Energie betreiben?

(d) Durch einen Unfall wird zur Zeit $t = 0$ die Spannungsquelle der Spule kurzgeschlossen. Dadurch bricht die Spannung zusammen und zwischen den Enden der Spule liegt der Widerstand $R = 0{,}10\,\text{m}\Omega$ (hauptsächlich der Widerstand der Zuleitungen, die Wicklungen sind ja supraleitend). Stelle die Differentialgleichung für den Strom $I(t)$ auf (kurze Begründung!) und zeige, dass

$$I(t) = I_0\, e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$$

eine Lösung mit den passenden Anfangsbedingungen ist. Zu welcher Zeit t_1 ist der Energieinhalt des Spulenfeldes noch $W_1 = 1{,}0\,\text{MJ}$? Wie groß ist die Stromstärke zu dieser Zeit?

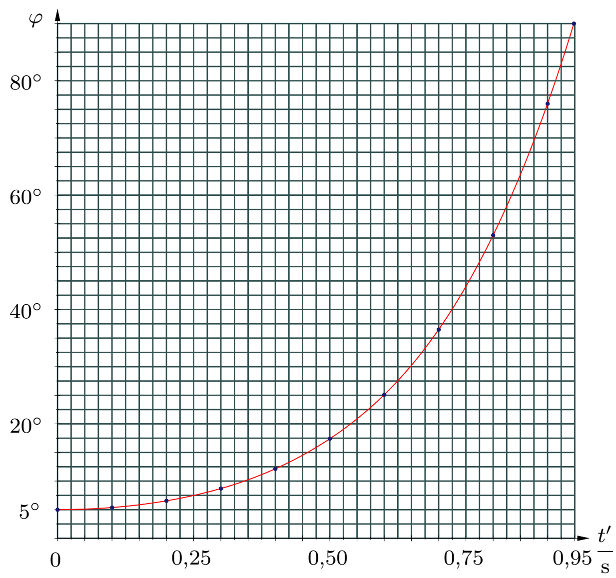
(e) Zur Überwachung des Feldstärkeabfalls nach dem Unfall wird eine quadratische Spule mit der Kantenlänge $b = 1{,}0\,\text{m}$ und $n' = 10^4$ Windungen senkrecht zu den magnetischen Feldlinien ins Innere der Spule gebracht. Berechne den Betrag $U'(t)$ der Induktionsspanung an den Enden der quadratischen Spule. Berechne auch $U_0 = U'(0)$.



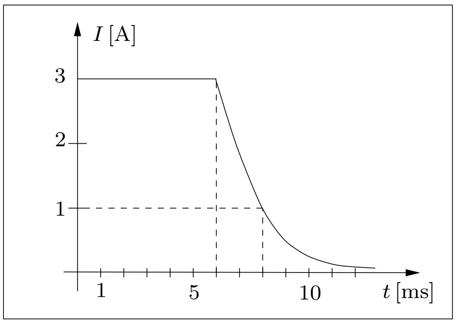
(f) Zur Zeit $t_2 = 10\,\text{h}$ nach dem Unfall wird die quadratische Spule durch einen Stoß um $\varphi_0 = 5°$ aus der vertikalen Position ausgelenkt und kippt dann um. Nebenstehendes Diagramm zeigt den Kippwinkel φ in Abhängigkeit von der Kippzeit $t' = t - t_2$. Zeige, dass während des Kippens die Induktionsspannung

$$U' = b^2 n' B \left(\frac{R}{L} \cos\varphi + \dot{\varphi} \sin\varphi \right)$$

ist und ermittle anhand des Diagramms und einer geeigneten Näherung ihren maximalen Wert.



3.12.5. Ein Oszilloskop zeichnet den Strom I durch eine Spule auf (Ausschalten zur Zeit $t_0 = 6\,\text{ms}$; siehe Abb.). Nach dem Ausschalten der Stromquelle liegt ein Widerstand an den Spulenenden, der Gesamtwiderstand des neuen Stromkreises ist $R = 225\,\Omega$. Welche Energie war vor dem Abschalten im Feld der Spule gespeichert?



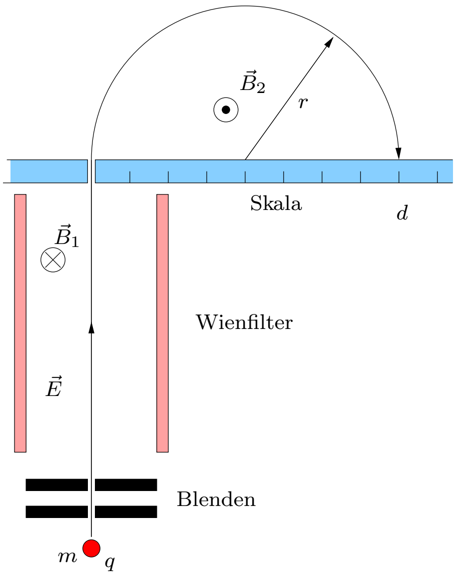
3.13 Massenbestimmung und Zyklotron

3.13.1. **Der Massenspektrograf nach Bainbridge:**

Teilchen mit verschiedenen Ladungen und Geschwindigkeiten gelangen durch das Wien-Filter in den mit $\vec{B}_2$ erfüllten Raum.

(a) Berechne den Auftreffort $d = 2r$ in Abhängigkeit von B_1, B_2, E, m und q! Wie muss das $\vec{E}$-Feld für positive bzw. negative Teilchen orientiert sein?

(b) Ab jetzt sei $E = 2{,}00 \cdot 10^4\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ und $B_1 = 0{,}500\,\text{T}$. Mit welcher Geschwindigkeit treten die Teilchen in den Feldraum von $\vec{B}_2$ ein? B_2 wird so gewählt, dass 1,00 cm auf der Skala für einfach positiv geladene Ionen gerade der Teilchenmasse $1{,}00 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$ entspricht? Berechne B_2!



(c) Wo treffen folgende Ionen auf die Skala: H_2^+, $He4^+$, $He4^{++}$, $He3^+$?

(d) B_1 ist jetzt $1{,}00 \cdot 10^{-4}\,\text{T}$; wie muss die Apparatur sonst noch geändert werden, damit Elektronen, die eine Beschleunigungsspannung von $1{,}00 \cdot 10^3\,\text{V}$ durchlaufen haben, bei $d = 5{,}00\,\text{cm}$ auftreffen? Wo würden die Elektronen ohne Änderung der anderen Feldgrößen auftreffen?

3.13.2. Das erste Zyklotron (Lawrence, 1932) beschleunigte H_2^+-Ionen auf eine maximale Energie von 80 keV. Berechne die Zyklotronfrequenz und den Radius des Gerätes ($B = 0{,}5\,\text{T}$).

3.13.3. Ein großes Zyklotron (z.B. in Berkeley/Kalifornien) hat den Radius $r = 2{,}25\,\text{m}$ und beschleunigt Protonen auf die Endenergie $E_{\text{max}} = 30\,\text{MeV}$.

(a) Welche Stärke muss das magnetische Führungsfeld haben?

(b) Berechne die Zyklotronfrequenz und die Zeit für einen vollen Umlauf!

(c) Die Spannung zwischen den Polen beträgt $U = 100\,\text{kV}$; nach wie vielen Umläufen und in welcher Zeit wird die maximale Energie erreicht?

(d) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit der Protonen? Welche Spannung müsste ein Proton in einem Stück durchlaufen, um diese Geschwindigkeit zu erreichen?

4 Elektromagnetische Schwingungen und Wellen

4.1 Der elektrische Schwingkreis

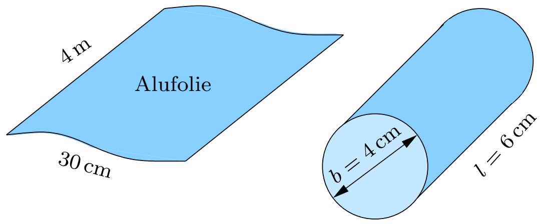
4.1.1. Eine Spule der Länge $l = 5{,}6\,\mathrm{cm}$, mit der Querschnittsfläche $A_\mathrm{L} = 2{,}0\,\mathrm{cm}^2$ und mit $n = 300$ Windungen sowie ein Kondensator mit der Plattenfläche $A_\mathrm{C} = 5{,}0\,\mathrm{cm}^2$ bilden einen Schwingkreis mit der Eigenfrequenz $f = 10\,\mathrm{MHz}$. Welchen Abstand d haben die Kondensatorplatten?

4.1.2. Ein Schwingkreis, bestehend aus einem Solenoid und einem Plattenkondensator, wird räumlich um den Faktor k zentrisch gestreckt. Um welchen Faktor ändert sich die Eigenfrequenz?

4.1.3. Der Empfangsschwingkreis eines Mittelwellenempfängers besteht aus einem Drehkondensator ($50\,\mathrm{pF}$ bis $550\,\mathrm{pF}$) und einem Solenoid ($l = 3\,\mathrm{cm}$, $A = 1\,\mathrm{cm}^2$). Zwischen welchen Werten darf die Windungszahl n der Spule liegen, damit die Eigenfrequenz des Schwingkreises jeden Frequenzwert des Mittelwellenbereiches ($0{,}5\,\mathrm{MHz}$ bis $1{,}5\,\mathrm{MHz}$) annehmen kann?

4.1.4. W_C bzw. W_L sind die Energieinhalte des Kondensator- bzw. Spulenfeldes eines idealen Schwingkreises mit der Induktivität $L = 0{,}200\,\mathrm{H}$, der Schwingungsdauer $T = 4{,}00 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}$ und der maximalen Kondensatorladung $Q_0 = 1{,}62 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{As}$. Berechne die Kapazität C des Kondensators, die Scheitelspannung U_0 und den Scheitelstrom I_0! Zeichne $W_C(t)$, $W_L(t)$ und $W_\mathrm{gesamt}(t)$ in ein Diagramm.

4.1.5. **Elektrische Musik**



Ein Musiker baut sich einen Schwingkreis, der ihm zum Stimmen seiner Gitarre genau die Frequenz $f = 440\,\mathrm{Hz}$ des Kammertons liefern soll. Für den Kondensator verwendet er zwei Alufolien der Breite $30\,\mathrm{cm}$ und der Länge $4{,}0\,\mathrm{m}$ und eine Plastikfolie der gleichen Größe und der Dicke $0{,}1\,\mathrm{mm}$. Das Material der Plastikfolie erhöht ε_0 auf $\varepsilon = 56\varepsilon_0$. Wie viele Windungen eines isolierten Drahtes muss er dazu auf den abgebildeten Plastikzylinder wickeln?

4.1.6. Eine Kugel der Masse $m = 400\,\mathrm{g}$ schwingt an einer Feder mit der Frequenz $f = 0{,}50\,\mathrm{Hz}$ und der Amplitude $A = 10\,\mathrm{cm}$. Mit welcher Amplitude A' schwingt dieses Federpendel, wenn die Energie $\Delta W = 0{,}01\,\mathrm{J}$ durch Reibung verlorengegangen ist?

4.1.7. Wie ändert sich die Frequenz einer mechanischen harmonischen Schwingung, wenn ohne Änderung der Gesamtenergie die Amplitude verdoppelt und die Masse vervierfacht wird?

4.1.8. Eine Kugel der Masse $m = 12{,}00\,\mathrm{kg}$ schwingt an einer Feder mit der Härte $D = 18{,}95\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Die Auslenkung zur Zeit $t = 0{,}000\,\mathrm{s}$ beträgt $x_0 = 1{,}902\,\mathrm{cm}$, die Geschwindigkeit zur selben Zeit ist $v(0) = v_0 = 0{,}7766\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$. Berechne die Kreisfrequenz ω, die Schwingungsdauer T, die Frequenz f, die Amplitude A und die Phase φ in

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi).$$

Zeichne $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ in ein Diagramm.

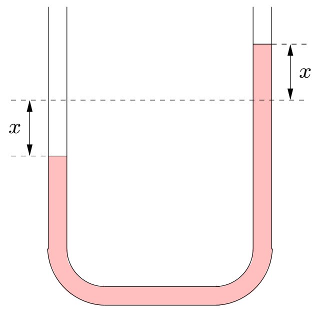
Einheiten: $1\,\mathrm{cm} \mathrel{\hat{=}} 1\,\mathrm{s}$; $1\,\mathrm{cm} \mathrel{\hat{=}} 1\,\mathrm{cm}$ bzw. $1\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ bzw. $1\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$.

4.1.9. Eine Schwingung mit Reibung, eine sogenannte *gedämpfte Schwingung*, wird durch die Gleichung

$$x(t) = A_0 \cdot 10^{-\alpha\, t} \cdot \sin \omega t$$

beschrieben. Zeichne zunächst $h_1(t) = A_0 \cdot 10^{-\alpha\, t}$ und $h_2(t) = -A_0 \cdot 10^{-\alpha\, t}$ (die *Einhüllenden*) und dann $x(t)$ für $A_0 = 5\,\text{cm}$, $\alpha = 0{,}2\,\frac{1}{\text{s}}$ und $\omega = 2\,\pi\,\frac{1}{\text{s}}$ im t-Intervall $[0\,;\,9\,\text{s}]$.

4.1.10. Die Flüssigkeit der Dichte ϱ kann sich in dem U-Rohr reibungsfrei bewegen, das Rohr hat den konstanten Querschnitt A, die Gesamtlänge der Flüssigkeit sei s; damit ist $m = \varrho A s$ die Masse der Flüssigkeit.

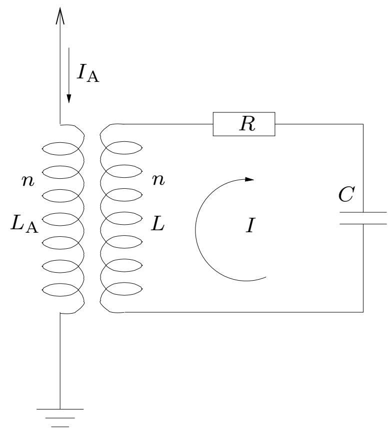


Beweise, dass die Flüssigkeit, einmal aus ihrer Gleichgewichtslage ausgelenkt, harmonisch schwingt.

Berechne die Richtgröße D und die Frequenz f der Schwingung.

4.2 Erzwungene Schwingungen (Resonanz)

4.2.1. Der Schwingkreis eines Radios ist induktiv an den Antennenkreis angekoppelt. Durch die Antennenspule fließt der Strom $I_\text{A} = I_{\text{A}0} \cdot \sin \omega t$. Das k-fache ($k < 1$) des magnetischen Flusses Φ in der Antennenspule durchdringt auch die Schwingkreisspule, im Schwingkreis wirkt also die Spannung (EMK, Elektromotorische Kraft) $U_\text{e} = -k\,\dot{\Phi}$.



(a) Stelle die Differentialgleichung für I auf. Eine Lösung ist (kein Nachweis erforderlich)

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

mit

$$I_0 = \frac{k L_\text{A} I_{\text{A}0} \omega}{\sqrt{R_\text{L}^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}$$

(b) Für welches $C = C_\text{max}$ ist I_0 maximal? Berechne C_max und $I_{0,\text{max}}$ für $L = 2{,}0 \cdot 10^{-5}\,\text{H}$, $L_\text{A} = 4{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{H}$, $\omega = 1{,}0 \cdot 10^8\,\frac{1}{\text{s}}$, $k = \frac{1}{2}$, $R_L = 0{,}020\,\Omega$ und $I_{\text{A}0} = 1{,}0 \cdot 10^{-12}\,\text{A}$.

(c) Um wieviel Prozent weicht I_0 von $I_{0,\text{max}}$ ab, wenn die in (b) berechnete Kapazität um $1\,\%$ geändert wird?

(d) Jetzt sei $C = C_\text{max}$. Berechne die exakte Resonanzfrequenz ω_1 (Maximum von I_0 bei ω_1). Um wieviel Prozent weicht ω_1 von $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ab? Zeichne den Grafen von $I_0(\omega)$ im Intervall $0{,}9997\omega_0 \leqq \omega \leqq 1{,}0003\omega_0$.