Physik Q11

Lösungen zu den Aufgaben

Richard Reindl

Die aktuellste Version der Aufgaben findet man unter

http://www.stbit.de

28. Mai 2014

1 Wiederholung

1.1 Wiederholung Elektrizität

1.1.1. Parallelschaltung aus $3{,}0\,\Omega$ und $1{,}0\,\Omega$ ergibt $R_1 = 0{,}75\,\Omega$.
Reihenschaltung aus $1{,}25\,\Omega$ und R_1 ergibt $2{,}0\,\Omega$.
Parallelschaltung aus $2{,}0\,\Omega$ und $6{,}0\,\Omega$ ergibt $R_{\text{ges}} = 1{,}5\,\Omega$.

1.1.2. (a) Die frei bewegliche Ladung in einem Leiterstück der Länge $\Delta s = v\,\Delta t$ (v ist die Driftgeschwindigkeit der Elektronen) ist $\Delta Q = \varrho\,A\,\Delta s$. Mit $\Delta Q = I\,\Delta t$ folgt

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\varrho\,A\,\Delta t} = \frac{\Delta I}{\varrho\,A} = \frac{j}{\varrho}$$

(b) Die Zahl der Cu-Atome im Leitervolumen ΔV ist $n = \dfrac{\sigma\,\Delta V}{m}$. Damit folgt für die Dichte der frei beweglichen Ladung

$$\varrho = \frac{1{,}27 \cdot n\,e}{\Delta V} = \frac{1{,}27 \cdot \sigma\,e}{m}$$

Mit $j = \dfrac{I}{A}$ ist dann

$$v = \frac{j}{\varrho} = \frac{m\,I}{1{,}27 \cdot \sigma\,e\,A} = 0{,}0467\,\frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

2 Elektrostatik

2.1 Das elektrische Feld

2.1.1. $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{Q\,E}{m} = 0{,}16\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$

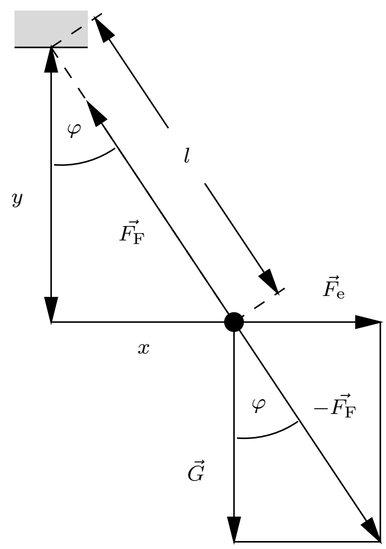
2.1.2. Die Kugel ist in Ruhe, d.h. die Gesamtkraft auf die Kugel ist null ($\vec{F}_{\text{F}}$ ist die Fadenkraft):

$$\vec{F}_{\text{e}} + \vec{G} + \vec{F}_{\text{F}} = 0$$

Damit ist $-\vec{F}_{\text{F}}$ parallel zum Faden und aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt

$$\frac{F_{\text{e}}}{G} = \frac{Q\,E}{m\,g} = \frac{x}{y} = \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}}$$

$$E = \frac{x\,m\,g}{Q\,\sqrt{l^2 - x^2}} = 245\,\frac{\text{N}}{\text{C}}$$



2.1.3. Das Superpositionsprinzip gilt für Kräfte und damit auch für Feldstärken (q ist eine Testladung am Ort $\vec{r}$ und $\vec{F}(\vec{r})$ ist die Kraft auf q):

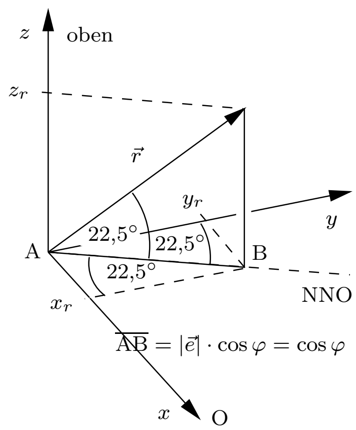
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} = \frac{1}{q} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu(\vec{r}) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\vec{F}_\nu(\vec{r})}{q} = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{E}_\nu(\vec{r})$$

2.1.4. (a) Der Einheitsvektor in Feldrichtung ist $\vec{e} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{|\mathrm{PQ}|} = \frac{1}{3\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{E} = E \cdot \vec{e} = 5000\sqrt{6}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}22 \cdot 10^4 \\ -2{,}45 \cdot 10^4 \\ 1{,}22 \cdot 10^4 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

(b) $\vec{e}$ ist ein Einheitsvektor, der in die Richtung von $\vec{v}$ zeigt. Mit $\varphi = 22{,}5°$ und $|\vec{e}| = 1$ folgt aus der Abbildung $\overline{\mathrm{AB}} = \cos\varphi$ und damit

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\varphi \\ \cos^2\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

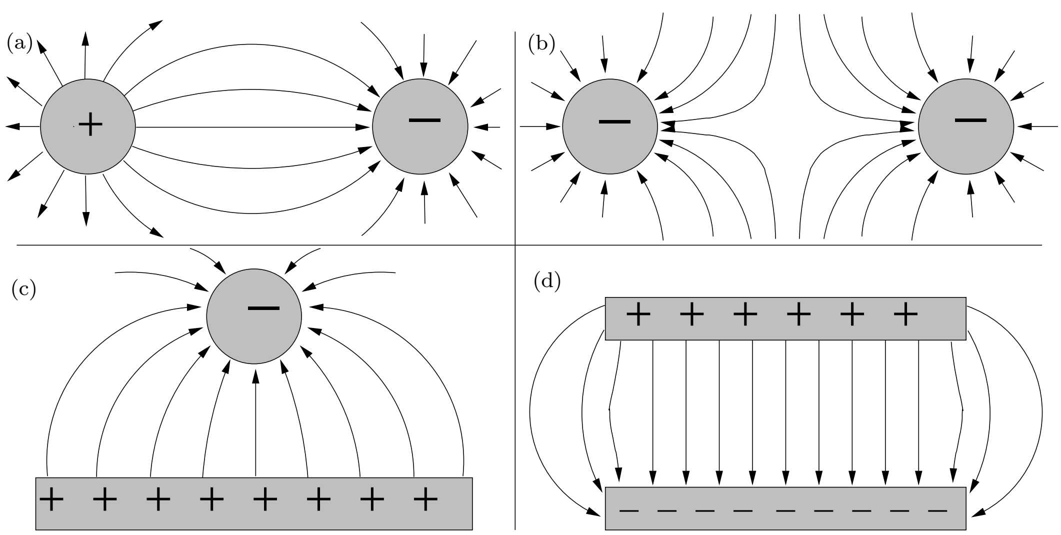


Probe:

$$e = |\vec{e}| = \sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \cos^4\varphi + \sin^2\varphi} = $$
$$= \sqrt{\cos^2\varphi\,\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{1} + \sin^2\varphi} = 1$$

$$\vec{v} = v \cdot \vec{e} = v \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\varphi \\ \cos^2\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81{,}3 \\ 196 \\ 88{,}0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

2.1.5.



2.2 Das Coulombsche Gesetz

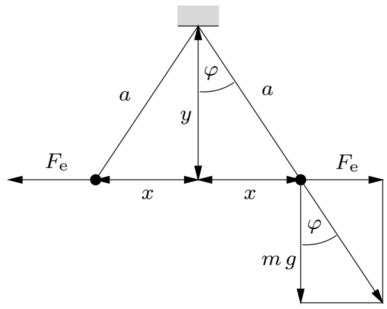
2.2.1. $F = \frac{e^2}{4\,\pi\varepsilon_0\,r^2} = 34\,\mathrm{N}, \quad a = \frac{F}{m_\mathrm{p}} = 2{,}0 \cdot 10^{28}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

2.2.2. (a) $a = \frac{2\,e \cdot e}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2\,m_\mathrm{e}} = 5{,}6 \cdot 10^{21}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

(b) Mit $m = 1\,\mathrm{kg}$, $\varrho_\mathrm{Cu} = 8930\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, der Masse $M = 1{,}06 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}$ eines Kupferatoms und der Ordnungszahl 29 von Kupfer folgt $Q = \frac{29 \cdot e \cdot 1\,\mathrm{kg}}{M} = 4{,}4 \cdot 10^7\,\mathrm{C}$. Der Radius einer Kugel ist $R = \left(\frac{3\,m}{4\,\pi\,\varrho_\mathrm{Cu}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3{,}0\,\mathrm{cm}$.

$$F = \frac{Q^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,(3R)^2} = 2{,}1 \cdot 10^{27}\,\mathrm{N}$$

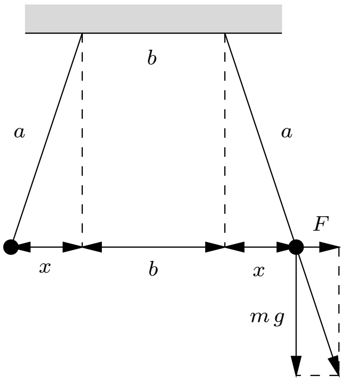
2.2.3. Laden der Kugeln: Mit einem Pol der Spannungsquellen verbinden, den anderen Pol erden!



$$\frac{F_e}{m\,g} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad F_e = \frac{k\,Q^2}{(2\,x)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad Q = \sqrt{\frac{4\,m\,g\,x^3}{k\,\sqrt{a^2 - x^2}}} = 8{,}8 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$$

2.2.4.



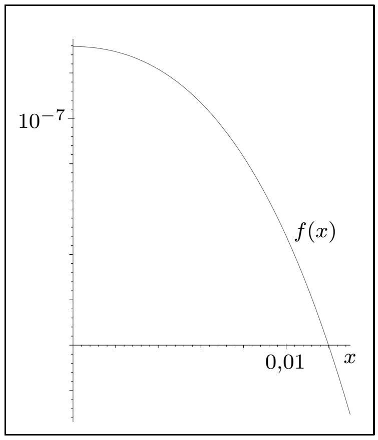
$$\frac{F}{m\,g} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad F = \frac{k\,Q^2}{(2\,x + b)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad F = \frac{m\,g\,x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{k\,Q^2}{(2\,x + b)^2}$$

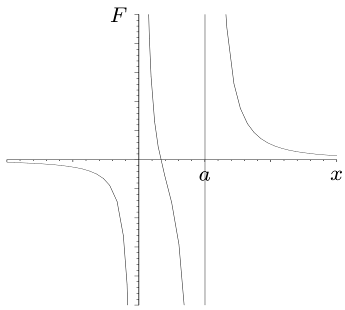
Quadrieren und umformen:

$$f(x) = \left(\frac{k\,Q^2}{m\,g}\right)^2 \cdot \left(a^2 - x^2\right) - x^2 \cdot (2\,x + b)^4 = 0$$

Zur Lösung dieser Gleichung zeichnet man $f(x)$ und verbessert die gefundene Nullstelle durch Probieren mit dem Taschenrechner: $x \approx 1{,}2\,\mathrm{cm}$



2.2.5. (a) $F(x) = \frac{k\,Q_1\,q}{x^2} \cdot \mathrm{sgn}(x) + \frac{k\,Q_2\,q}{(x-a)^2} \cdot \mathrm{sgn}(x - a)$



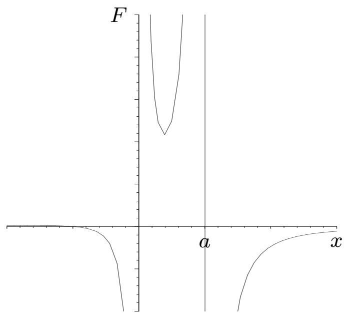
$$F(x) = \begin{cases} -k\,q\,Q_1 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(x-a)^2}\right) & \text{für } x < 0 \\ k\,q\,Q_1 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{(x-a)^2}\right) & \text{für } 0 < x < a \\ k\,q\,Q_1 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(x-a)^2}\right) & \text{für } x > a \end{cases}$$

Für $x < 0$ ist $F(x) < 0$ und für $x > a$ ist $F(x) > 0$, d.h. Nullstelle von F nur im Bereich $0 < x < a$:

$$\Longrightarrow 4\,x^2 = (x - a)^2 \quad \Longrightarrow \quad |2\,x| = |x - a|$$

$$\Longrightarrow 2\,x = a - x \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{a}{3}$$

(b) $F(x) = \dfrac{k\,Q_1\,q}{x^2}\cdot \operatorname{sgn}(x) + \dfrac{k\,Q_2\,q}{(x-a)^2}\cdot \operatorname{sgn}(x-a)$



$$F(x) = \begin{cases} -k\,q\,Q_1\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{(x-a)^2}\right) & \text{für } x<0 \\ k\,q\,Q_1\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{(x-a)^2}\right) & \text{für } 0<x<a \\ k\,q\,Q_1\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{(x-a)^2}\right) & \text{für } x>a \end{cases}$$

Für $0 < x < a$ ist $F(x) > 0$ und für $x > a$ ist $F(x) < 0$, d.h. Nullstelle von F nur im Bereich $x < 0$:

$$\Longrightarrow 4\,x^2 = (x-a)^2 \quad \Longrightarrow \quad |2\,x| = |x-a|$$

$$\Longrightarrow -2\,x = a - x \quad \Longrightarrow \quad x = -a$$

2.2.6. (a) $\vec{e} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{RS}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right|} = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix},\quad \vec{F} = \underbrace{\dfrac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\left|\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right|^2}}_{2{,}34\cdot 10^{-6}\,\mathrm{N}}\cdot\vec{e} = \begin{pmatrix}5{,}39\\7{,}19\\21{,}6\end{pmatrix}\cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$

(b) $\vec{e} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{RS}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right|} = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix}-12\\3\\-4\end{pmatrix},\quad \vec{F} = \underbrace{\dfrac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\left|\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right|^2}}_{-1{,}40\cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}}\cdot\vec{e} = \begin{pmatrix}12{,}9\\-3{,}24\\4{,}31\end{pmatrix}\cdot 10^{-6}\,\mathrm{N}$

2.3 Das Feld von Punktladungen

2.3.1. $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}} = \begin{pmatrix}-3\,\mathrm{cm}\\4\,\mathrm{cm}\end{pmatrix}$, $r = |\vec{r}| = 5\,\mathrm{cm}$, $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} = \begin{pmatrix}-2{,}2\cdot 10^4\\2{,}9\cdot 10^4\end{pmatrix}\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$, $E = 3{,}6\cdot 10^4\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$

2.3.2. (a) Auf der x-Achse gilt

$$E(x) = \frac{4kq}{(x+3a)^2} - \frac{kq}{(x-3a)^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2|x-3a| = |x+3a|$$

Da für die Nullstelle von $E(x)$ sicher $0 < x < a$ gilt, folgt

$$2(3a-x) = 3a + x \quad \Longrightarrow \quad x = a$$

(b) Für P_1, P_2 und P_3 ist $r_1 = r_2 = \sqrt{(3a)^2+(na)^2} = a\sqrt{9+n^2}$:

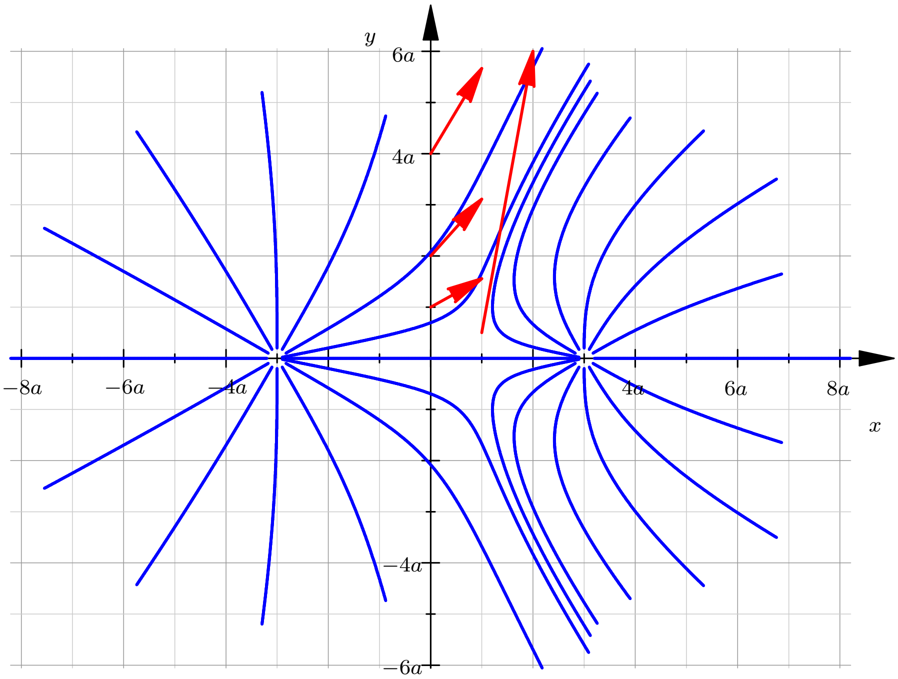
$$\vec{E}(0,na) = \frac{4kq}{a^3(9+n^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}3a\\na\end{pmatrix} + \frac{kq}{a^3(9+n^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}-3a\\na\end{pmatrix} = \frac{kq}{a^2(9+n^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}9\\5n\end{pmatrix}$$

Für P_4 ist $r_1 = \sqrt{(4a)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{65}$ und $r_2 = \sqrt{(2a)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{17}$:

$$\vec{E}(\mathrm{P}_4) = \frac{32kq}{a^3\cdot 65^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}4a\\\frac{a}{2}\end{pmatrix} + \frac{8kq}{a^3\cdot 17^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}-2a\\\frac{a}{2}\end{pmatrix} = \frac{8kq}{a^2}\begin{pmatrix}\frac{16}{65^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{17^{\frac{3}{2}}}\\[1ex] \frac{2}{65^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\cdot 17^{\frac{3}{2}}}\end{pmatrix} = \frac{kq}{125a^2}\begin{pmatrix}2\\11\end{pmatrix}$$

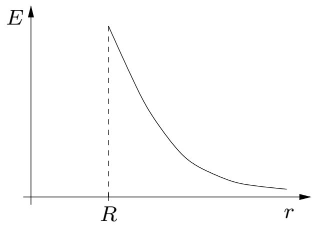
Richtungsvektoren von $\vec{E}$:

$$\vec{v}(\mathrm{P}_1) = \begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix},\quad \vec{v}(\mathrm{P}_2) = \begin{pmatrix}9\\10\end{pmatrix},\quad \vec{v}(\mathrm{P}_3) = \begin{pmatrix}9\\15\end{pmatrix},\quad \vec{v}(\mathrm{P}_4) = \begin{pmatrix}1\\5{,}5\end{pmatrix}$$



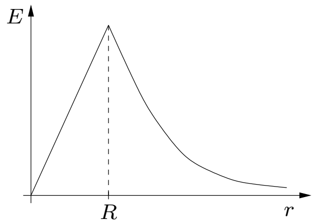
2.4 Der Gauß'sche Satz

2.4.1. $Q(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq r < R \\ Q & \text{für } r > R \end{cases}$



$$E(r) = \frac{Q(r)}{4\,\pi\varepsilon_0\,r^2} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq r < R \\ \dfrac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0\,r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$$

2.4.2. $Q(r) = \begin{cases} Q \cdot \dfrac{r^3}{R^3} & \text{für } 0 \leqq r \leqq R \\ Q & \text{für } r > R \end{cases}$



$$E(r) = \frac{Q(r)}{4\,\pi\varepsilon_0\,r^2} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0\,R^3} \cdot r & \text{für } 0 \leqq r < R \\ \dfrac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0\,r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$$

2.4.3. (a) $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \dfrac{|z|}{z} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \operatorname{sgn}(z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{E} = \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für $0 < z < a$, das Feld ist null für $z < 0$ und $z > a$.

(c) $\sigma = \dfrac{Q}{r^2\,\pi} \quad \Longrightarrow \quad E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0\,\pi\,r^2}$

2.5 Arbeit im elektrischen Feld

2.5.1. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ cm; $\quad W_{\mathrm{AB}} = -q\,\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(a) $W_{\mathrm{AB}} = 1{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{J}$

(b) $\vec{E} = 800\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{\vec{r_0}}{|\vec{r_0}|} = \begin{pmatrix} 288 \\ 384 \\ 640 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

$$W_{\mathrm{AB}} = -3 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{As} \cdot \begin{pmatrix} 288 \\ 384 \\ 640 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}03 \\ -0{,}05 \\ 0{,}02 \end{pmatrix} \mathrm{m} = -6{,}7 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{J}$$

2.5.2. $r_1 = \left| \begin{pmatrix} -3\,\mathrm{cm} \\ 4\,\mathrm{cm} \end{pmatrix} \right| = 5\,\mathrm{cm}, \quad r_2 = \left| \begin{pmatrix} 8\,\mathrm{cm} \\ 6\,\mathrm{cm} \end{pmatrix} \right| = 10\,\mathrm{cm}, \quad W_{12} = -9{,}0 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{J}$

2.6 Das Potential des elektrischen Feldes

2.6.1. (a) $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{P_0A}} = \begin{pmatrix} a_x - x_0 \\ a_y - y_0 \\ a_z - z_0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{P_0B}} = \begin{pmatrix} b_x - x_0 \\ b_y - y_0 \\ b_z - z_0 \end{pmatrix}$

$$\varphi_{\mathrm{A}} = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P_0A}} = (z_0 - a_z)\,E, \quad \varphi_{\mathrm{B}} = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P_0B}} = (z_0 - b_z)\,E$$

$$\varphi_{\mathrm{A}}{}' = (z_0' - a_z)\,E, \quad \varphi_{\mathrm{B}}{}' = (z_0' - b_z)\,E$$

$$U_{\mathrm{AB}} = \varphi_{\mathrm{B}} - \varphi_{\mathrm{A}} = (a_z - b_z)\,E = \varphi_{\mathrm{B}}{}' - \varphi_{\mathrm{A}}{}'$$

(b) $\varphi_{\mathrm{A}} = -6\,\mathrm{V}$, $\varphi_{\mathrm{B}} = -15\,\mathrm{V}$, $\varphi_{\mathrm{A}}{}' = -12\,\mathrm{V}$, $\varphi_{\mathrm{B}}{}' = -21\,\mathrm{V}$, $U_{\mathrm{AB}} = -9\,\mathrm{V}$

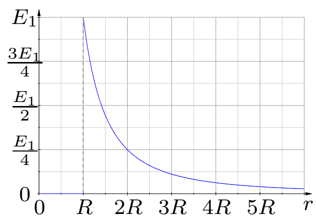
2.6.2. $\varphi_{\mathrm{A}} = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}03 \\ 0{,}01 \end{pmatrix} \mathrm{m} = -0{,}09\,\mathrm{V}$

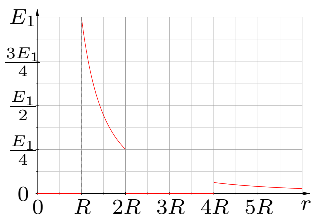
$$\varphi_{\mathrm{B}} = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}04 \\ 0{,}01 \end{pmatrix} \mathrm{m} = 0{,}05\,\mathrm{V}$$

$$U_{\mathrm{AB}} = \varphi_{\mathrm{B}} - \varphi_{\mathrm{A}} = 0{,}14\,\mathrm{V}$$

2.6.3. $E(r) = 0$ für $r < R$ und $E(r) = \frac{kQ}{r^2}$ für $r \geqq R$.

$$E'(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } 2R < r < 4R \\ E(r) & \text{sonst} \end{cases}$$





Da $E'(r) = E(r)$ für $R < r < 2r$ gilt

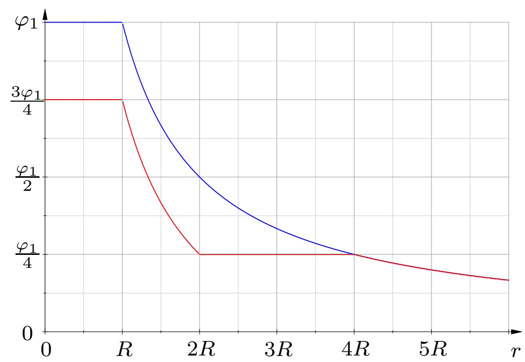
$$\varphi'(R) - \varphi'(2R) = \varphi(R) - \varphi(2R)$$

Wegen $E'(r) = 0$ für $2r < r < 4R$ ist

$$\varphi'(2R) = \varphi'(4R)$$

Zusammenfassend erhält man

$$\varphi'(R) = \varphi(4R) + \varphi(R) - \varphi(2R) = \frac{3}{4}\varphi(R)$$



2.6.4. (a) Für $r \geqq R$ ist das Feld des Kerns gleich dem Feld einer Punktladung Q und damit auch das Potential das einer Punktladung:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = A \cdot \frac{R}{r} = \frac{A}{x} \quad \text{für} \quad r \geqq R \text{ bzw. } x \geqq 1$$

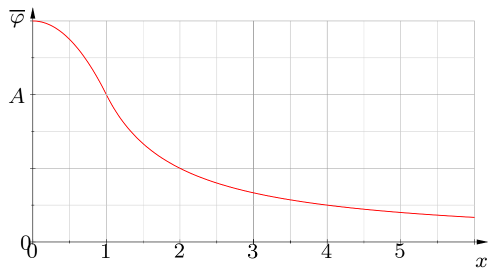
Für $r < R$ ist (siehe Aufgabe **??**)

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot r = \frac{A}{R^2} \cdot r$$

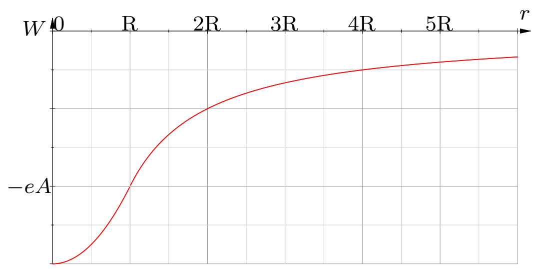
$$\frac{\mathrm{d}\varphi(r)}{\mathrm{d}r} = -E(r) = -\frac{A}{R^2} \cdot r \quad \Longrightarrow \quad \varphi(r) = -\frac{A}{2R^2} \cdot r^2 + C$$

$$\varphi(R) = -\frac{A}{2R^2} \cdot R^2 + C = -\frac{A}{2} + C = A \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{3}{2}A$$

$$\varphi(r) = \frac{3}{2}A - \frac{A}{2R^2} \cdot r^2 \quad \Longrightarrow \quad \overline{\varphi}(x) = \frac{3}{2}A - \frac{A}{2}x^2 = \frac{A}{2}(3 - x^3)$$



(b) $W(r) = -e\varphi(r)$



(c) $U = \varphi(R) = A = 1{,}50 \cdot 10^7\,\mathrm{V}$

$$\frac{m_\mathrm{p}}{2}v_0^2 = e\varphi(R) = eA \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2eA}{m_\mathrm{p}}} = 5{,}4 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

2.6.5. Bezugspunkt ∞:

$$\varphi_\infty(x) = \frac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Bezugspunkt O:

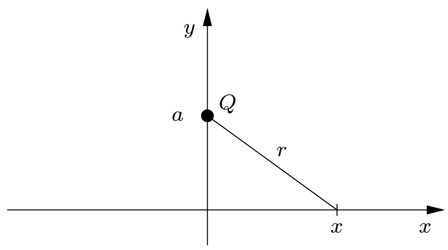
$$\varphi_0(x) = \varphi_\infty(x) + C$$

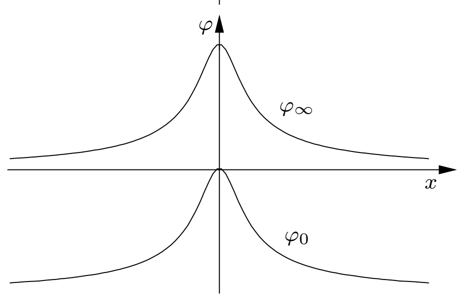
$$\varphi_0(0) = 0 = \varphi_\infty(0) + C$$

$$\Longrightarrow \quad C = -\varphi_\infty(0) = -\frac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0\,a}$$

$$\varphi_0(x) = \frac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{a}\right)$$

$$U_\mathrm{RS} = \varphi_\infty(9\,\mathrm{cm}) - \varphi_\infty(5\,\mathrm{cm}) = 92\,\mathrm{V}$$





2.7 Elektrostatik und Gravitation

2.7.1. Der Fluss des radialsymmetrischen Gravitationsfeldes $g(r)$ durch eine zum Zentrum konzentrische Kugelfläche mit Radius r ist

$$\Phi = g(r) \cdot 4\pi r^2 = 4\pi G M(r) \quad \Longrightarrow \quad g(r) = \frac{GM(r)}{r^2}$$

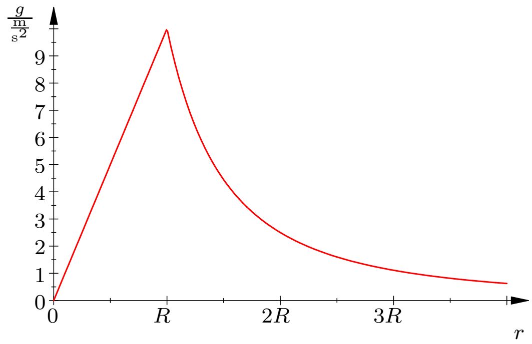
Dabei ist $M(r)$ die Masse innerhalb der Kugelfläche. Aus

$$M(r) = \begin{cases} M & \text{für } r \geqq R \\ M \cdot \dfrac{r^3}{R^3} & \text{für } r < R \end{cases}$$

folgt

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} = \begin{cases} \dfrac{GM}{r^2} & \text{für } r \geqq R \\ \dfrac{GM}{R^3} \cdot r & \text{für } r < R \end{cases}$$

$$g(R) = \frac{GM}{R^2} = 10{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$



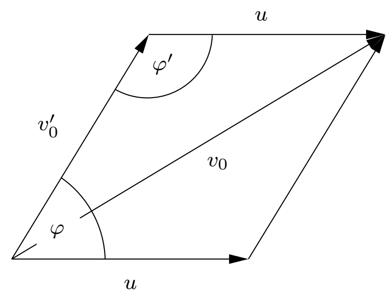
2.7.2. In einem Inertialsystem (nicht beschleunigtes, d.h. auch nicht rotierendes System) gilt: Zentripetalkraft gleich Gravitationskraft. Das nicht rotierende System S, in dem der Erdmittelpunkt ruht, ist näherungsweise ein Inertialsystem.
Mit $R = R_{\text{Erde}} = 6{,}378 \cdot 10^6\,\text{m}$ und $r = R + h = 6{,}578 \cdot 10^6\,\text{m}$ folgt

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 7{,}78\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

v_0 sei die Abschussgeschwindigkeit des Satelliten im Inertialsystem S:

$$\frac{m}{2}v_0^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{m}{2}v^2 - \frac{GMm}{r} \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{v^2 + 2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)}$$

u ist die Geschwindigkeit, mit der sich der Abschussort relativ zu S bewegt, v_0' die Abschussgeschwindigkeit relativ zur Erdoberfläche:



$$v_0^2 = v_0'^2 + u^2 - 2v_0' u \cos\varphi'$$

Wegen $\cos\varphi' = \cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$ ist

$$v_0^2 = v_0'^2 + u^2 + 2v_0' u \cos\varphi$$

$$v_0'^2 + 2v_0' u \cos\varphi = v_0^2 - u^2$$

$$v_0' = -u\cos\varphi \underset{(-)}{+} \sqrt{v_0^2 - u^2 \sin^2\varphi}$$

Abschuss am Nord- oder Südpol ($u = 0$):

$$v_0' = v_0 = 8{,}02\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Am Äquator ist

$$u = \frac{2R\pi}{24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} = 0{,}464\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Abschuss am Äquator senkrecht nach oben ($\varphi = 90°$):

$$v_0' = \sqrt{v_0^2 - u^2} = 8{,}01\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Abschuss am Äquator tangential zur Erdoberfläche nach osten ($\varphi = 0°$):

$$v_0' = v_0 - u = 7{,}56\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Abschuss am Äquator tangential zur Erdoberfläche nach westen ($\varphi = 0°$):

$$v_0' = v_0 u u = 8{,}45\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

2.7.3. (a) $M = \varrho V = \dfrac{4\pi\varrho R^3}{3} \quad\Longrightarrow\quad R = \sqrt[3]{\dfrac{3M}{4\pi\varrho}} = 13{,}8\,\text{km}$

$$g = \frac{GM}{R^2} = 6{,}98 \cdot 10^{11}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 7{,}11 \cdot 10^{10} g$$

(b) $g = \dfrac{GM}{R_0^2} = \dfrac{4\pi\varrho G R}{3} \quad\Longrightarrow\quad R_0 = \dfrac{3g}{4\pi\varrho G} = 1{,}9 \cdot 10^{-7}\,\text{m}$

(c)

$$\Delta g(r) = GM\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+h)^2}\right) = \frac{GM(2rh + h^2)}{r^2(r+h)^2} = \frac{GMh(2r+h)}{r^2(r+h)^2}$$

Für $h \ll r$ gilt $r + h \approx r$ und $2r + h \approx 2r$:

$$\Delta g(r) \approx \frac{2GMh}{r^3} =: \Delta g_n(r)$$

$$\frac{\Delta g(r) - \Delta g_n(r)}{\Delta g(r)} = 1 - \frac{\Delta g_n(r)}{\Delta g(r)} = 1 - \frac{2(r+h)^2}{r(2r+h)} = -\frac{h(3r+2h)}{r(2r+h)} \approx -\frac{3h}{2r}$$

$$r = 100\,\text{km} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\Delta g(r) - \Delta g_n(r)}{\Delta g(r)} = -2{,}7 \cdot 10^{-5}$$

$$\Delta g(r) \approx \frac{2GMh}{r^3} = 100 \cdot g_{\text{Erde}} \quad\Longrightarrow\quad r = \sqrt[3]{\frac{GMh}{50 g_{\text{Erde}}}} = 787\,\text{km}$$

2.7.4. (a) Mit der Erdmasse M und dem Erdradius R ist die Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Aus dem Energiesatz folgt

$$\frac{m}{2} v_n^2 = mgh \quad\Longrightarrow\quad v_n = \sqrt{2gh}$$

$$\frac{m}{2} v^2 = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = \frac{GMmh}{R(R+h)}$$

$$v = \sqrt{\frac{2GMh}{R(R+h)}} = \sqrt{\frac{2GMh}{R^2(1+\frac{h}{R})}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{h}{R}}} = \frac{v_n}{\sqrt{1+\frac{h}{R}}}$$

$$\delta_v = \frac{v_n - v}{v} = \frac{v_n}{v} - 1 = \sqrt{1 + \frac{h}{R}} - 1$$

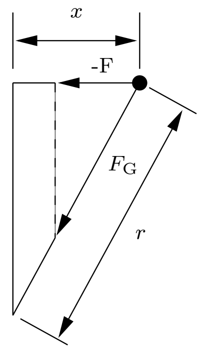
h in m	v_n in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	v in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	δ_v
$1 \cdot 10^3$	140,071	140,060	0,008%
$1 \cdot 10^5$	1401	1390	0,78%
$1 \cdot 10^7$	$1{,}40 \cdot 10^4$	$8{,}74 \cdot 10^3$	60,2%

(b) $h_n = \dfrac{v^2}{2g}$, $\quad h = \dfrac{v^2 R}{2gR - v^2} = \dfrac{h_n}{1 - \frac{v^2}{2gR}}$, $\quad \delta_h = \dfrac{h_n - h}{h} = -\dfrac{v^2}{2gR}$

v in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	h_n in m	h in m	δ_h
$1 \cdot 10^2$	509,684	509,725	−0,008%
$1 \cdot 10^3$	$5{,}097 \cdot 10^4$	$5{,}138 \cdot 10^4$	−0,80%
$1 \cdot 10^4$	$5{,}097 \cdot 10^6$	$2{,}54 \cdot 10^7$	−79,9%

(c) $\delta_v = \sqrt{1 + \dfrac{h}{R}} - 1 > 0{,}01 \quad \Longrightarrow \quad h > 0{,}0201\,R = 128{,}2\,\mathrm{km}$

2.7.5. $F_\mathrm{G}(x) = Dr$ mit $D = \dfrac{GMm}{R^3} = \dfrac{4\pi\varrho Gm}{3}$



$\dfrac{-F}{F_\mathrm{G}} = \dfrac{x}{r} \quad \Longrightarrow \quad F = m\ddot{x} = -F_\mathrm{G} \cdot \dfrac{x}{r} = -Dx \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} = -\dfrac{D}{m}x$

Die Kapsel führt also eine harmonische Schwingung mit

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{3}{4\pi\varrho G}} = \sqrt{\dfrac{3\pi}{\varrho G}} = 5070\,\mathrm{s}$, $\tau = \frac{T}{2} \approx 42\,\mathrm{min}$

Bemerkenswert ist, dass τ nur von der Dichte ϱ abhängt, nicht aber von der Größe des Planeten und auch nicht von der Lage des Kanals!

2.7.6. (a) Energiesatz: Gesamtenergie vorher gleich Gesamtenergie nachher, $m = m_\mathrm{p}$:

$$0 = \frac{m}{2}v_1^2 - \frac{GMm}{R} \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 2{,}00 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

v_1 beträgt schon 67% der Lichtgeschwindigkeit, d.h. eine relativistische Rechnung ist notwendig:

$$W_\mathrm{kin} = (\gamma - 1)mc^2 = \frac{GMm}{R} \quad \Longrightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{GM}{Rc^2} = 1{,}223$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0{,}5755 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \beta c = 1{,}725 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(b) $v_2 < v_1$, d.h. $Q > 0$ (das Proton muss abgestoßen werden):

$$W_\mathrm{kin} - \frac{GMm}{R} + \frac{Qe}{4\pi\varepsilon_0 R} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q = \frac{4\pi\varepsilon_0 Rm}{e}\left(\frac{GM}{R} - \frac{W_\mathrm{kin}}{m}\right)$$

nichtrelativistisch: $W_\mathrm{kin} = \dfrac{m}{2}v_2^2 \quad \Longrightarrow \quad Q = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 Rm}{e}\left(\dfrac{GM}{R} - \dfrac{v_2^2}{2}\right) = 232{,}00\,\mathrm{C}$

relativistisch: $W_\mathrm{kin} = (\gamma - 1)mc^2 \quad \Longrightarrow \quad Q = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 Rm}{e}\left(\dfrac{GM}{R} - (\gamma-1)c^2\right) = 233{,}16\,\mathrm{C}$

2.8 Kondensatoren

2.8.1. $C = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d} = 1{,}99 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{F}$, $\quad U = \dfrac{Q}{C} = 251\,\mathrm{V}$, $\quad E = \dfrac{U}{d} = 6{,}27 \cdot 10^4\,\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

$$F = qE = 1{,}25 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{N}, \quad a = \frac{F}{m} = 0{,}314\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

2.8.2. (a) $C = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d} \quad \Longrightarrow \quad A = \dfrac{Cd}{\varepsilon_0} = 1{,}13 \cdot 10^9\,\mathrm{m}^2 = 1{,}13 \cdot 10^3\,\mathrm{km}^2 = (33{,}6\,\mathrm{km})^2$

(b) $C = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d} = 2{,}78\,\mathrm{pF}$

2.8.3. (a) $C' = \dfrac{\varepsilon_0 A}{nd} = \dfrac{C}{n}$, $\quad Q' = C'U = \dfrac{CU}{n} = \dfrac{Q}{n}$, $\quad E' = \dfrac{U}{d'} = \dfrac{U}{nd} = \dfrac{E}{n}$

(b) $Q' = Q, \quad C' = \frac{\varepsilon_0 A}{nd} = \frac{C}{n}, \quad U' = \frac{Q}{C'} = \frac{nQ}{C} = nU, \quad E' = \frac{U'}{d'} = \frac{nU}{nd} = E$

(c) Da $E = 0$ im Leiter, verkürzt sich die Länge des E-Feldes auf $d' = d - a$, d.h.

$$n = \frac{d'}{d} = \frac{d-a}{d} = 1 - \frac{a}{d}$$

Aus (a) folgt: $C' = \frac{C}{1-\frac{a}{d}}, \quad Q' = \frac{Q}{1-\frac{a}{d}}, \quad E' = \frac{E}{1-\frac{a}{d}}$

(d) Aus (b) folgt: $C' = \frac{C}{1-\frac{a}{d}}, \quad U' = \left(1-\frac{a}{d}\right)U, \quad E' = E$

2.8.4. (a) $C = C_1 + C_2 + C_3 = 7\,\mu\text{F}$ (b) $C = \frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}} + C_3 = 4{,}7\,\mu\text{F}$

(c) $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \implies C = 0{,}57\,\mu\text{F}$

(d) $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3} \implies C = 0{,}86\,\mu\text{F}$

2.9 Energie des elektrischen Feldes

2.9.1. (a) $F = \frac{1}{2}QE = \frac{1}{2}CU \cdot \frac{U}{d} = \frac{CU^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 A U^2}{2d^2} = mg = \varrho A a g$

$$U = \sqrt{\frac{2d^2 \varrho a g}{\varepsilon_0}} = 2{,}95 \cdot 10^4\,\text{V}, \qquad E = \frac{U}{d} = 5{,}90 \cdot 10^6\,\frac{\text{V}}{\text{m}} > E_0$$

(b) $E_0 = \frac{U}{d} \implies \varrho = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2d^2 a g} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2ag} = 5{,}64\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

2.9.2. (a) $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-11}\,\text{F}, \quad W = \frac{1}{2}CU^2 = 1{,}77\,\text{J}, \quad m = \frac{W}{c^2} = 1{,}97 \cdot 10^{-17}\,\text{kg}$

(b) Die Anzeige bleibt gleich, da die Gesamtenergie gleich bleibt.

2.10 Bewegung geladener Teilchen im elektrischen Feld

2.10.1. $\frac{m}{2}v^2 = eU \implies v = \sqrt{\frac{2eU}{m_\text{e}}} = 2{,}30 \cdot 10^7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Unter der Annahme eines homogenen Beschleunigungsfeldes, d.h. einer konstanten Beschleunigung a, folgt mit $s = 3\,\text{cm}$

$$a = \frac{F}{m_\text{e}} = \frac{eE}{m_\text{e}} = \frac{eU}{m_\text{e} s}$$

und für die Beschleunigungszeit

$$t_1 = \frac{v}{a} = \frac{v m_\text{e} s}{eU} = 2{,}61 \cdot 10^{-9}\,\text{s} = 2{,}61\,\text{ns}$$

Die Flugzeit von A zum Bildschirm ist

$$t_2 = \frac{0{,}3\,\text{m}}{v} = 13{,}1\,\text{ns}$$

Die gesamte Flugzeit ist $t_1 + t_2 = 15{,}7\,\text{ns}$

2.10.2. $\frac{m}{2}v^2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} \implies v = \sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{2\pi\varepsilon_0 R m}} = 3{,}68 \cdot 10^7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad U = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R} = 1{,}40 \cdot 10^7\,\text{V}$

2.10.3. (a) $v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}, \quad v_{0x} = v_0 \cos\varphi, \quad v_{0y} = v_0 \sin\varphi, \quad a_\text{e} = -\frac{eE}{m}, \quad t_1 = \frac{l}{v_{0x}} = \frac{l}{v_0 \cos\varphi}$

$$y_1 = v_{0y} t_1 + \frac{a_\text{e}}{2} t_1^2 = l \tan\varphi - \frac{eEl^2}{2mv_0^2 \cos^2\varphi}$$

$$v_{1y} = v_{0y} + a_\mathrm{e} t_1 = v_0 \sin\varphi - \frac{eEl}{mv_0\cos\varphi}$$

Mit $t_2 = \dfrac{a}{v_{0x}}$ ist

$$\begin{aligned} y_\mathrm{s} = y_1 + v_{1y}t_2 &= l\tan\varphi - \frac{eEl^2}{2mv_0^2\cos^2\varphi} + \left(v_0\sin\varphi - \frac{eEl}{mv_0\cos\varphi}\right)\cdot\frac{a}{v_0\cos\varphi} = \\ &= (l+a)\tan\varphi - \frac{eEl}{mv_0^2\cos^2\varphi}\left(\frac{l}{2}+a\right) = (l+a)\tan\varphi - \frac{El}{2U\cos^2\varphi}\left(\frac{l}{2}+a\right) \end{aligned}$$

(b) $E = \dfrac{U_\mathrm{K}}{d}$; y_s ist dann zu U_K proportional, wenn $(l+a)\tan\varphi = 0$, d.h. wenn $\varphi = 0$.

(c) $U_\mathrm{K} = U \quad\Longrightarrow\quad E = \dfrac{U}{d} \quad\Longrightarrow\quad y_\mathrm{s} = (l+a)\tan\varphi - \dfrac{l}{2d\cos^2\varphi}\left(\dfrac{l}{2}+a\right)$

y_s ist also unabhängig von U.

(d) $\varphi = 0 \quad\Longrightarrow\quad y_\mathrm{s} = -\dfrac{U_\mathrm{K}l}{2Ud}\left(\dfrac{l}{2}+a\right) \quad\Longrightarrow\quad |U_\mathrm{K}| = \dfrac{2y_\mathrm{s}Ud}{l\left(\frac{l}{2}+a\right)} = 784\,\mathrm{V}$

2.10.4. Die Beschleunigung der Seele mit der Ladung q im Kondensator in y-Richtung ist $a_q = \dfrac{qE}{m}$, die Flugzeit im Kondensator ist $t_1 = \dfrac{L}{v_0}$. Die y-Koordinate der Seele am Ende des Kondensators ist ($y = 0$ beim Eintritt in den Kondensator)

$$y_1 = \frac{a_q}{2}t_1^2 = \frac{qEL^2}{2mv_0^2}$$

Am Kondensatorende hat die Seele die Geschwindigkeit $v_x = v_0$ und

$$v_y = a_q t_1 = \frac{qEL}{mv_0}$$

Mit der Flugzeit $t_2 = \dfrac{a}{v_0}$ für die Strecke a ist

$$y_\mathrm{s} = y_1 + v_y t_2 = \frac{qEL^2}{2mv_0^2} + \frac{qELa}{mv_0^2} = \frac{qEL}{mv_0^2}\left(a + \frac{L}{2}\right) = q\cdot 625\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{C}}$$

$$q = y_s \cdot 1{,}6\cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}$$

(a) $y_s = 5\,\mathrm{m} \quad\Longrightarrow\quad q = Q_1 + nQ_2 \geqq 0{,}008\,\mathrm{C} \quad\Longrightarrow\quad n \leqq 240$

(b) $y_s = -10\,\mathrm{m} \quad\Longrightarrow\quad q = Q_1 + nQ_2 \geqq -0{,}016\,\mathrm{C} \quad\Longrightarrow\quad n \leqq 720$

2.10.5. (a) U: oben plus, U_0: rechts plus

(b) $\dfrac{m_\mathrm{e}}{2}v_0^2 = eU_0 \quad\Longrightarrow\quad v_0 = \sqrt{\dfrac{2eU_0}{m_\mathrm{e}}}$

(c) $t_1 = \dfrac{L}{v_0}, \quad E = \dfrac{U}{d}, \quad a = \dfrac{F}{m_\mathrm{e}} = \dfrac{eE}{m_\mathrm{e}} = \dfrac{eU}{m_\mathrm{e}d}$

$$y_1 = \frac{a}{2}t_1^2 = \frac{eU}{2m_\mathrm{e}d}\cdot\frac{L^2}{v_0^2} = \frac{L^2}{4dU_0}\cdot U$$

(d) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ at_1 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \tan\varphi = \dfrac{v_y}{v_0} = \dfrac{at_1}{v_0} = \dfrac{eUL}{m_\mathrm{e}dv_0^2} = \dfrac{LU}{2dU_0}$

$$\frac{y_1}{L - x_\mathrm{S}} = \tan\varphi \quad\Longrightarrow\quad L - x_\mathrm{S} = \frac{y_1}{\tan\varphi} = \frac{L^2U\cdot 2dU_0}{4dU_0\cdot LU} = \frac{L}{2} \quad\Longrightarrow\quad x_\mathrm{S} = \frac{L}{2}$$

(e) $y_\mathrm{s} = \left(\dfrac{L}{2}+b\right)\tan\varphi = 40\,\mathrm{cm}\cdot\dfrac{5U}{4U_0} = 50\,\mathrm{cm}\cdot\dfrac{U}{U_0} \quad\Longrightarrow\quad U = \dfrac{y_\mathrm{s}}{50\,\mathrm{cm}}\cdot U_0$

$$\tan\varphi_\mathrm{max} = \frac{d}{\frac{L}{2}} = \frac{2d}{L} = 0{,}8 \quad\Longrightarrow\quad y_\mathrm{s,max} = 40\,\mathrm{cm}\cdot 0{,}8 = 32\,\mathrm{cm} \quad\Longrightarrow\quad U_\mathrm{max} = \frac{16}{25}\cdot U_0$$

2.10.6. (a) $\frac{m_\mathrm{p}}{2}v_0^2 = eU \quad\Longrightarrow\quad v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m_\mathrm{p}}} = 4{,}00 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

(b) $t_1 = \frac{L}{v_0}, \quad E = \frac{U_\mathrm{K}}{d}, \quad a = \frac{F}{m_\mathrm{p}} = \frac{eE}{m_\mathrm{p}} = \frac{eU_\mathrm{K}}{m_\mathrm{p}d}$

$$y_1 = \frac{a}{2}t_1^2 = \frac{eU_\mathrm{K}}{2m_\mathrm{p}d} \cdot \frac{L^2}{v_0^2} = \frac{L^2U_\mathrm{K}}{4dU}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ at_1 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \tan\varphi = \frac{v_y}{v_0} = \frac{at_1}{v_0} = \frac{eU_\mathrm{K}L}{m_\mathrm{e}dv_0^2} = \frac{LU_\mathrm{K}}{2dU}$$

(c) $y^* = y_1 + b\tan\varphi = \frac{LU_\mathrm{K}}{4dU}(L + 2b), \quad y^* = z_y \quad\Longrightarrow\quad U_\mathrm{K} = \frac{z_y \cdot 4Ud}{L(L+2b)} = 167\,\mathrm{V}$

(d) $y_1 = 0{,}100\,\mathrm{m}, \quad v_{y1} = 8{,}00 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 + v_{y1}^2} = 4{,}079 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad \frac{v1 - v_0}{v_0} = 2\%$

(e) $\frac{y_1}{\Delta x} = \tan\varphi \quad\Longrightarrow\quad \Delta x = \frac{y_1}{\tan\varphi} = \frac{L^2U_\mathrm{K} \cdot 2dU}{4dU \cdot LU_\mathrm{K}} = \frac{L}{2}$

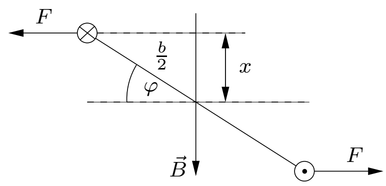
3 Elektrodynamik

3.1 Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter

3.1.1. $\vec{B}$ zeigt nach hinten. $B = \frac{mg}{Il} = 0{,}200\,\mathrm{T}$

3.1.2. Drehmoment M = Kraft mal Kraftarm

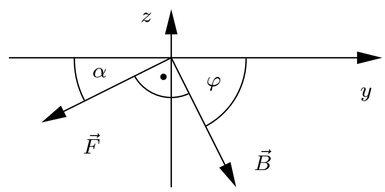
$$M = 2Fx = 2nBIl \cdot \frac{b}{2}\sin\varphi = nBIlb\sin\varphi = 8{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Nm} \cdot \sin\varphi$$



3.1.3. $\vec{B} \perp \vec{I} \quad\Longrightarrow\quad F = ILB = 0{,}10\,\mathrm{N}$

$$\alpha = 90° - \varphi = 25°$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F\cos\alpha \\ -F\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}091 \\ -0{,}042 \end{pmatrix}\,\mathrm{N}$$



3.1.4. (a) Q positiv

(b) Die von der Kraft $F = BIL = 4323\,\mathrm{N}$ an der Eisenstange verrichtete Arbeit wird in potentielle und kinetische Energie verwandelt:

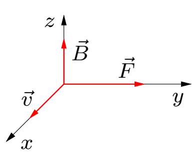
$$Fs = mgh + \frac{m}{2}v_0^2 \quad\Longrightarrow\quad v_0 = \sqrt{\frac{2Fs}{m} - 2gh} = 65{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$b = \sqrt{s^2 - h^2} = 12{,}0\,\mathrm{m}, \quad v_{x0} = v_0 \cdot \frac{b}{s} = 60{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad v_{y0} = v_0 \cdot \frac{h}{s} = 25{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(c) $t_1 = \frac{x_1}{v_{x0}} = 4{,}00\,\mathrm{s}, \quad y(t) = h + v_{y0}t - \frac{g}{2}t^2 \quad\Longrightarrow\quad y_1 = y(t_1) = 26{,}5\,\mathrm{m}$

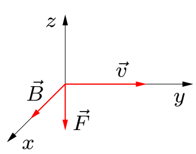
3.2 Die Lorentzkraft

3.2.1. (a)



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}6 \cdot 10^{-19} \\ 0 \end{pmatrix}\,\mathrm{N}$$

(b)



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}6 \cdot 10^{-19} \end{pmatrix}\,\mathrm{N}$$

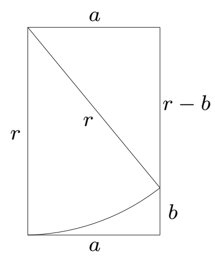
3.2.2. $\dfrac{mv^2}{r} = qvB \quad\Longrightarrow\quad r = \dfrac{mv}{qB} = 20\,\text{cm}$

3.2.3. Da die Lorentzkraft immer senkrecht zur Geschwindigkeit steht, ist die vom Feld in einer sehr kleinen Zeitspanne dt am Teilchen verrichtete Arbeit

$$\mathrm{d}W = Fv\mathrm{d}t\cos 90^\circ = 0$$

Die kinetische Energie und damit auch der Geschwindigkeitsbetrag des Teilchens sind also konstant.

3.2.4. (a) $(r-b)^2 = r^2 - a^2 \quad\Longrightarrow\quad r = \dfrac{a^2+b^2}{2b} = 10\,\text{cm}$



$$\frac{mv^2}{r} = qvB \quad\Longrightarrow\quad mv = reB \quad\Longrightarrow\quad m^2v^2 = r^2e^2B^2$$

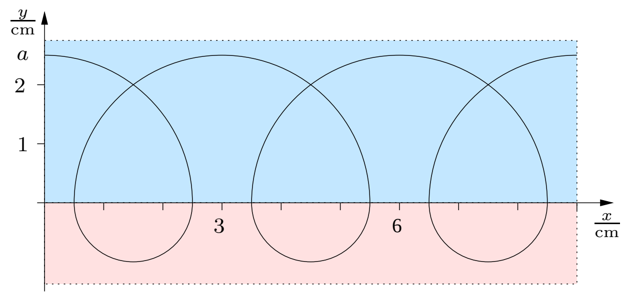
$$W_\mathrm{k} = \frac{m}{2}v^2 \quad\Longrightarrow\quad m^2v^2 = 2mW_\mathrm{k} = r^2e^2B^2$$

$$m = \frac{r^2e^2B^2}{2W_\mathrm{k}} = 9{,}1\cdot 10^{-31}\,\text{kg} = m_\mathrm{e}$$

Da die Ladung $q = +e$ ist, handelt es sich um ein Positron.

(b) $m = m_\mathrm{e}\cdot\dfrac{0{,}02438^2}{5{,}690^2} = 1{,}7\cdot 10^{-27}\,\text{kg} = m_\mathrm{p}$, es handelt sich um ein Proton.

3.2.5. $\dfrac{mv^2}{r} = qvB \quad\Longrightarrow\quad r = \dfrac{mv}{qB}$



$$r_1 = 2{,}5\,\text{cm},\quad r_2 = 1{,}0\,\text{cm}$$

Umlaufdauern für jeweils vollen Kreis:

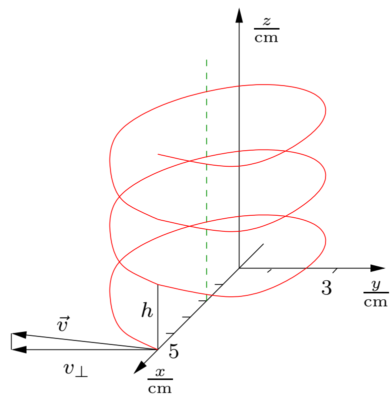
$$T_1 = \frac{2\pi r_1}{v} = 7{,}85\cdot 10^{-8}\,\text{s}$$

$$T_2 = \frac{2\pi r_2}{v} = 3{,}14\cdot 10^{-8}\,\text{s}$$

$$\text{Periode: } T = \frac{T_1+T_2}{2} = 5{,}5\cdot 10^{-8}\,\text{s}$$

$t = 2T \quad\Longrightarrow\quad$ das Elektron befindet sich am Ort $(6{,}0\,\text{cm}\,|\,2{,}5\,\text{cm})$.

3.2.6. (a) Die auf $\vec{B}$ senkrechte Komponente von $\vec{v}$ ist



$$v_\perp = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = 2{,}9\cdot 10^6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\frac{mv_\perp^2}{r} = ev_\perp B \quad\Longrightarrow\quad r = \frac{mv_\perp}{eB} = 3{,}0\,\text{cm}$$

$$T = \frac{2r\pi}{v_\perp} = 6{,}6\cdot 10^{-8}\,\text{s} \quad\Longrightarrow\quad h = v_zT = 2{,}0\,\text{cm}$$

(b) $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 9{,}6\cdot 10^7\,\dfrac{1}{\text{s}}$

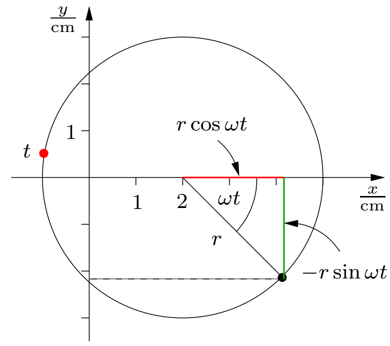
$$x(t) = 2\,\text{cm} + r\cos\omega t = -0{,}99\,\text{cm}$$

$$y(t) = r\cos\omega t = -r\sin\omega t = 0{,}47\,\mathrm{cm}$$

$$z(t) = v_z t = 3{,}0\,\mathrm{cm}$$

(c) $eU = \frac{m_\mathrm{p}}{2}v^2 = \frac{m_\mathrm{p}}{2}(x_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$

$$U = \frac{m_\mathrm{p}}{2e}(x_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = 4{,}4 \cdot 10^4\,\mathrm{V}$$



3.2.7. Durch die Lorentzkraft F_m werden die Elektronen noch oben abgelenkt, die obere Leiterfläche lädt sich negativ, die untere positiv auf. Dadurch entsteht im Leiter ein elektrisches Feld E_H, das von unten nach oben zeigt. Auf die Elektronen wirkt dadurch zusätzlich eine elektrische Kraft F_e von oben nach unten, die Gesamtkraft auf die Elektronen ist dann $F = F_\mathrm{m} - F_\mathrm{e}$. F_e wächst, bis $F = 0$ wird und ein Gleichgewichtszustand erreicht ist:

$$F_\mathrm{m} = F_\mathrm{e} \quad\Longrightarrow\quad evB = eE_\mathrm{e} = e\cdot\frac{U_\mathrm{H}}{a} \quad\Longrightarrow\quad U_\mathrm{H} = vBa$$

Die Elektronen bewegen sich in der Zeit Δt um die Strecke $\Delta x = v\Delta t$. Durch die Querschnittsfläche $A = ad$ des Leiters fließt in der Zeit Δt die Ladung

$$\Delta Q = Ne = nVe = neA\Delta x = neadv\Delta t$$

Damit gilt

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = neadv = \frac{adv}{R_\mathrm{H}} \quad\Longrightarrow\quad v = \frac{IR_\mathrm{H}}{ad} \quad\Longrightarrow\quad U_\mathrm{H} = vBa = R_\mathrm{H}\cdot\frac{IB}{d}$$

Der Widerstand eines Leiters der Länge b und der Querschnittsfläche A ist

$$R = \varrho\cdot\frac{b}{A} = \frac{b}{\sigma A} \quad\Longrightarrow\quad I = \frac{U}{R} = \frac{U\sigma A}{b} = \frac{U\sigma ad}{b}$$

$$U_\mathrm{H} = R_\mathrm{H}\cdot\frac{IB}{d} = R_\mathrm{H}\cdot\frac{U\sigma aB}{b}$$

Die Hallspannung und damit das Produkt $R_\mathrm{H}\sigma$ sollte möglichst groß sein.

$$U_\mathrm{H} = R_\mathrm{H}\sigma\cdot 2{,}0\,\frac{\mathrm{V^2s}}{\mathrm{m^2}}$$

Stoff	Ag	Cu	Bi	Indium-Arsenid	Ge
R_H in $\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{A\,s}}$	$9\cdot 10^{-11}$	$5{,}3\cdot 10^{-11}$	$5{,}4\cdot 10^{-7}$	$1{,}0\cdot 10^{-4}$	0,01
σ in $\frac{1}{\Omega\,\mathrm{m}}$	$6{,}25\cdot 10^{7}$	$5{,}71\cdot 10^{7}$	$8{,}55\cdot 10^{5}$	$3\cdot 10^{4}$	40
$R_\mathrm{H}\sigma$ in $\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$	$5{,}6\cdot 10^{-3}$	$3{,}0\cdot 10^{-3}$	$4{,}6\cdot 10^{-1}$	$3{,}0\cdot 10^{0}$	$4\cdot 10^{-1}$
U_H in V	0,011	0,006	0,92	6,0	0,8

$$B = \frac{U_\mathrm{H}d}{R_\mathrm{H}I} = 0{,}09\,\mathrm{T}$$

3.3 Relativistische Kinematik

3.3.1. (a) $\Delta t = \frac{s}{\beta c}, \quad \Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\beta^2} = \frac{s}{\beta c}\sqrt{1-\beta^2}, \quad \delta t = \frac{s}{\beta c}\left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right)$

(b) $v \ll c \implies \beta \ll 1 \implies \sqrt{1-\beta^2} \approx 1 - \frac{\beta^2}{2}$

$$\delta t \approx \frac{s}{\beta c} \cdot \frac{\beta^2}{2} = \frac{s\beta}{2c}, \quad \delta_{\text{rel}} \approx \frac{\beta^2}{2}$$

(c) $\beta = 1 - \alpha \implies \sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{2\alpha - \alpha^2} \approx \sqrt{2\alpha}$

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1-\beta^2} \approx \frac{s}{\beta c}\sqrt{2\alpha} \approx \frac{s}{c}\sqrt{2\alpha}$$

(d)

	s	v	β	Δt	δt	δ_{rel}
i.	80 km	$27{,}\overline{7}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$9{,}26 \cdot 10^{-8}$	2880 s	$1{,}23 \cdot 10^{-11}$ s	$4{,}3 \cdot 10^{-15}$
ii.	1000 km	$1029\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$3{,}43 \cdot 10^{-6}$	971,8 s	$5{,}72 \cdot 10^{-9}$ s	$5{,}9 \cdot 10^{-12}$
iii.	18 km	$0{,}005\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$1{,}67 \cdot 10^{-11}$	$3{,}6 \cdot 10^{6}$ s	$5{,}0 \cdot 10^{-16}$ s	$1{,}4 \cdot 10^{-22}$

$\Delta t' = \Delta t - \delta t$, für iii. z.B. $\Delta t' = 3599999{,}999\,999\,999\,999\,999\,5\,\text{s}$

(e) i. $\Delta t = \frac{c \cdot 4\,\text{a}}{0{,}8\,c} = 5\,\text{a}, \quad \Delta t' = \Delta t\sqrt{1-0{,}8^2} = 0{,}6\Delta t = 3\,\text{a}, \quad \frac{\Delta t'}{\Delta t} = 0{,}6 = 60\%$

ii. $\beta = 1-\alpha$ mit $\alpha = 10^{-18}$, $\Delta t = 10^9\,\text{a}, \quad \Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{2\alpha} = 1{,}4\,\text{a}, \quad \frac{\Delta t'}{\Delta t} = 1{,}4 \cdot 10^{-9}$

(f) $\delta t \approx \frac{s\beta}{2c} \implies v = \beta c \approx \frac{2c^2\delta t}{s} = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

exakte Lösung: $v = \dfrac{2c^2\delta t}{s\left(1 + \frac{c^2\delta t^2}{s^2}\right)}$

(g) $\tau = \frac{s}{c}\sqrt{2\alpha} \implies \alpha = \frac{c^2\tau^2}{2s^2} = 2{,}0 \cdot 10^{-20} \implies \beta = 1-\alpha = 0{,}999\,999\,999\,999\,999\,999\,98$

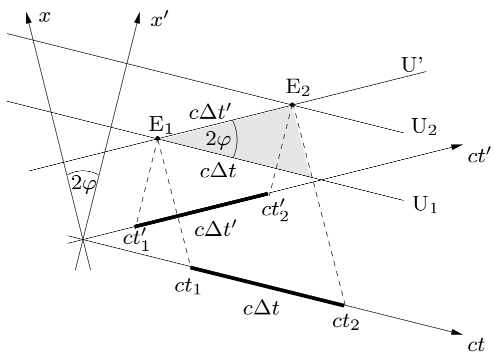
$$v = \beta c = c - \alpha c = \left(299792458 - 6{,}1 \cdot 10^{-12}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}} = 299792457{,}999\,999\,999\,993\,9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

exakte Lösung: $\beta = \left(1 + \dfrac{c^2\tau^2}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Die exakte Lösung für v unterscheidet sich erst in der 31-sten Stelle nach dem Komma von unserer Näherungslösung.

3.3.2. (a) *Eine* Uhr U' (ruhend in S') bewegt sich mit der Geschwindigkeit v an *zwei in S ruhenden Uhren* U_1 und U_2 vorbei.

$$\Delta t' = \Delta t \cos 2\varphi = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}$$



(b) $v \approx c \implies \Delta t = 6000\,\text{a} = 1{,}89 \cdot 10^{11}\,\text{s}$

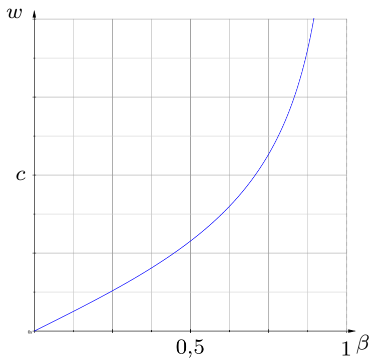
$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\tau}{\Delta t} = 3{,}17 \cdot 10^{-9}$

$1 - \beta^2 = 1{,}0 \cdot 10^{-17}$

$\beta = \sqrt{1 - 1{,}0 \cdot 10^{-17}} \approx 1 - \frac{1}{2}10^{-17} = 1 - 5 \cdot 10^{-18} \implies \alpha = 5 \cdot 10^{-18}$

$\Delta v = c - v = \alpha c \implies \delta x = \alpha c \Delta t = 285\,\text{m} \implies \delta t = \frac{\delta x}{c} = 950\,\text{ns}$

3.3.3. $\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}, \quad \Delta x' = \Delta x\sqrt{1-\beta^2} \implies$



$$v' = \frac{\Delta x'}{\Delta\tau} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v$$

$$w = \frac{\Delta x}{\Delta\tau} = \frac{\Delta x}{\Delta t\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\beta c$$

$$w = c \quad\Longrightarrow\quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Rakete:

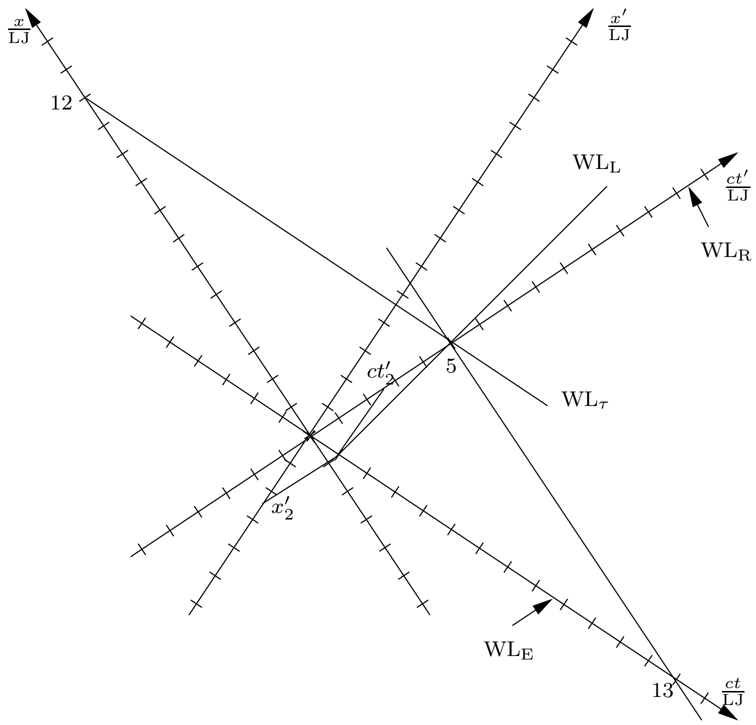
$$w = \frac{2{,}2\cdot 10^6\,\mathrm{LJ}}{1\,\mathrm{Woche}} = 3{,}64\,\frac{\mathrm{LJ}}{\mathrm{s}} = 3{,}44\cdot 10^{16}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underbrace{1{,}15\cdot 10^8}_{\beta^*}\cdot c$$

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \beta^* \quad\Longrightarrow\quad \beta = \frac{\beta^*}{\sqrt{1+{\beta^*}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{{\beta^*}^2}}} \approx 1 - \frac{1}{2{\beta^*}^2} = 1 - 3{,}8\cdot 10^{-17}$$

3.3.4. (a) $t_1' = t_1\sqrt{1-\beta^2} \quad\Longrightarrow\quad 1-\beta^2 = \left(\frac{t_1'}{t_1}\right)^2 = \frac{25}{169} \quad\Longrightarrow\quad \beta = \frac{12}{13}$

$x_1 = vt_1 = \frac{12}{13}\cdot c\cdot 13\,\mathrm{a} = 12\,\mathrm{LJ}$

(b) $\sin 2\varphi = \beta = \frac{12}{13} \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 33{,}69^\circ \quad\Longrightarrow\quad \tan\varphi = \frac{2}{3}$



(c) $c(t_1 - t_2) = x_1 \quad\Longrightarrow\quad t_2 = t_1 - \frac{x_1}{c} = 1\,\mathrm{a}$

$$t_2' = \frac{t_2}{\cos 2\varphi} = \frac{13}{5}\cdot 1\,\mathrm{a} = 2{,}6\,\mathrm{a}, \quad x_2' = -ct_2\cdot\tan 2\varphi = -\frac{12}{5}\,\mathrm{LJ} = -2{,}4\,\mathrm{LJ}$$

3.3.5. E_1: $x' = \frac{-3\,\mathrm{LS} - 0{,}8\cdot 4\,\mathrm{LS}}{0{,}6} = -\frac{31}{3}\,\mathrm{LS}$ $\qquad t' = \frac{4\,\mathrm{s} - \frac{0{,}8}{c}\cdot(-3\,\mathrm{s}\cdot c)}{0{,}6} = \frac{32}{3}\,\mathrm{s}$

E_2: $x = \frac{4\,\mathrm{LS} + 0{,}8\cdot(-2\,\mathrm{LS})}{0{,}6} = 4\,\mathrm{LS}$ $\qquad t = \frac{-2\,\mathrm{s} + \frac{0{,}8}{c}\cdot 4\,\mathrm{s}\cdot c}{0{,}6} = 2\,\mathrm{s}$

E_3: $x = 4\,\mathrm{LS} = \frac{x' + 0{,}8\cdot 2\,\mathrm{LS})}{0{,}6} \quad\Longrightarrow\quad x' = 0{,}8\,\mathrm{LS}$ $\qquad t = \frac{2\,\mathrm{s} + \frac{0{,}8}{c}\cdot 0{,}8\,\mathrm{s}\cdot c}{0{,}6} = 4{,}4\,\mathrm{s}$

E_4: $t' = 3\,\mathrm{s} = \frac{-2\mathrm{s} - \frac{0{,}8}{c}\cdot x}{0{,}6} \quad\Longrightarrow\quad x = -\frac{19}{4}\,\mathrm{LS}$ $\qquad x' = \frac{-4{,}75\,\mathrm{LS} - 0{,}8\cdot(-2)\,\mathrm{LS}}{0{,}6} = -5{,}25\,\mathrm{s}$

3.3.6. $u = \frac{v + u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \approx 2v\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$

$$\delta = \frac{2v - u}{u} = \frac{2v^3}{c^2 u} \approx \frac{2v^3}{c^2 \cdot 2v} = \frac{v^2}{c^2} = 4 \cdot 10^{-12}$$

$$\delta > 1\% \quad \Longrightarrow \quad \frac{v^2}{c^2} > \frac{1}{100} \quad \Longrightarrow \quad v > 0{,}1c$$

3.3.7. gleiche Richtung: $v = 0{,}8c \ominus 0{,}7c = \frac{0{,}1c}{1 - 0{,}56} = 0{,}227c$

entgegenges. Richtung: $v = 0{,}8c \oplus 0{,}7c = \frac{1{,}5c}{1 + 0{,}56} = 0{,}962c$

3.4 Der Dopplereffekt

3.4.1. (a) $R = r \tan\frac{\varphi}{2} = 6{,}00 \cdot 10^4\,\mathrm{LJ} = 5{,}68 \cdot 10^{20}\,\mathrm{m}$

(b) $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}$

$$\beta_0 = \frac{(1+z_0)^2 - 1}{(1+z_0)^2 + 1} = 0{,}003494 \quad \Longrightarrow \quad v_0 = 1{,}048 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\beta_{\mathrm{A}} = \frac{(1+z_{\mathrm{A}})^2 - 1}{(1+z_{\mathrm{A}})^2 + 1} = 0{,}001199 \quad \Longrightarrow \quad v_{\mathrm{A}} = 0{,}360 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\beta_{\mathrm{B}} = \frac{(1+z_{\mathrm{B}})^2 - 1}{(1+z_{\mathrm{B}})^2 + 1} = 0{,}005783 \quad \Longrightarrow \quad v_{\mathrm{B}} = 1{,}735 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Wegen $v_{\mathrm{B}} - v_0 = v_0 - v_{\mathrm{A}} = 6{,}9 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ handelt es sich tatsächlich um eine Rotation mit $v = 6{,}9 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, wobei sich A auf die Erde zu bewegt.

(c) Näherungsweise nehmen wir an, dass sich die ganze Masse der Galaxis in ihrem Zentrum befindet. Mit der Masse m eines Sterns am Rand der Galaxis gilt

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GmM}{R^2} \quad \Longrightarrow \quad M = \frac{v^2 R}{G} = 4{,}0 \cdot 10^{42}\,\mathrm{kg}$$

Mit der Sonnenmasse $M_\odot = 2{,}0 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ folgt $\frac{M}{M_0} = 10.$

3.4.2. $\sqrt{\frac{1+\beta^*}{1-\beta^*}} = \frac{f'}{f} = k \quad \Longrightarrow \quad \beta^* = \frac{k^2-1}{k^2+1} = 0{,}245 \quad \Longrightarrow \quad v^* = \beta^* c = 24{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 88{,}2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

Auf der Erde wäre die Geschwindigkeit $v = \beta c = 7{,}35 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

3.5 Relativistische Masse und Energie

3.5.1. Wienfilter: $v = \frac{E}{B} = 1{,}75 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad \beta = \frac{v}{c} = 0{,}583$

$$\frac{\gamma m v^2}{r} = \frac{mv^2}{r\sqrt{1-\beta^2}} = evB \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{eBr}{v}\sqrt{1-\beta^2} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \quad \Longrightarrow \quad \text{Positron}$$

3.5.2. (a) $W_{\mathrm{kin}} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \approx mc^2\left(\frac{1}{1 - \frac{\beta^2}{2}} - 1\right) \approx mc^2\left(1 + \frac{\beta^2}{2} - 1\right) = \frac{m}{2}v^2$

(b) $W_{\mathrm{kin,falsch}} = \frac{\gamma m}{2}v^2 = \frac{m\beta^2 c^2}{2\sqrt{1-\beta^2}}$

z.B. gilt für $\beta = 0{,}6$:

$W_{\mathrm{kin}} = 0{,}225\,mc^2$, $W_{\mathrm{kin,falsch}} = 0{,}25\,mc^2$, $W_{\mathrm{kin,klassisch}} = 0{,}18\,mc^2$

Man kann auch allgemein zeigen, dass $W_{\text{kin,falsch}} < W_{\text{kin}}$ für $\beta > 0$, d.h. $\gamma > 1$:

$$\frac{W_{\text{kin}}}{W_{\text{kin,falsch}}} = \frac{(\gamma-1)mc^2}{\frac{\mu}{2}v^2} = \frac{2(\gamma-1)}{\gamma\beta^2} = \frac{2(\gamma-1)}{\gamma\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)} = \frac{2(\gamma-1)\gamma}{\gamma^2-1} =$$

$$= \frac{2(\gamma-1)\gamma}{(\gamma-1)(\gamma+1)} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} = \frac{\gamma+\gamma}{\gamma+1} > 1 \quad \text{für} \quad \beta > 0$$

Für $\gamma \gg 1$ ist $W_{\text{kin}} \approx 2W_{\text{kin,falsch}}$.

3.5.3. $W = 0{,}001\,\text{kg}\cdot c^2 = 9\cdot 10^{13}\,\text{J} = 2{,}5\cdot 10^7\,\text{kWh} \mathrel{\widehat{=}} 2{,}5\cdot 10^6$ € bei $10\,\frac{\text{Ct}}{\text{kWh}}$

Der Preis für ein Gramm Gold bewegt sich in der Größenordnung von 10 € bis 20 €.

3.5.4. $W_{\text{kin}} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = mc^2, \quad 1-\beta^2 = \frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}866$

3.5.5. $\frac{W_{\text{k}}}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \quad\Longrightarrow\quad 1-\beta^2 = \frac{1}{\left(1+\frac{W_{\text{k}}}{mc^2}\right)^2} \quad\Longrightarrow\quad$ die Beh.

3.5.6. $Mc^2 = 2\gamma mc^2, \quad M = 2\gamma m = 2\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}m = \frac{2m}{0{,}8} = 2{,}5\,m$

3.5.7. (a) $W_{\text{e0}} = mc^2 = 8{,}18711\cdot 10^{-14}\,\text{J} = 0{,}511\,\text{MeV}$

(b) $m_{\text{p}} = \frac{W_{\text{p0}}}{c^2} = 1{,}67262\cdot 10^{-27}\,\text{kg}$

3.5.8. (a) $v_{\text{kl}} = \sqrt{\frac{2W_{\text{kin}}}{m}} = \sqrt{\frac{2qU}{m}}, \quad v_{\text{rel}} = c\cdot\frac{\sqrt{qU(qU+2mc^2)}}{qU+mc^2}$

$$\frac{W}{W_0} = \frac{W_0 + W_{\text{kin}}}{W_0} = 1 + \frac{W_{\text{kin}}}{mc^2} = 1 + \frac{qU}{mc^2}$$

(b) Elektron:

U	v_{kl}	v_{rel}	$\frac{v_{\text{kl}}-v_{\text{rel}}}{v_{\text{rel}}}$	$\gamma = \frac{W}{W_0}$
2500 V	$0{,}0989c$	$0{,}0986c$	0,37 %	1,0049
$5\cdot 10^6$ V	$4{,}42c > c$!!	$0{,}9957c$	344 %	10,78

Proton:

U	v_{kl}	v_{rel}	$\frac{v_{\text{kl}}-v_{\text{rel}}}{v_{\text{rel}}}$	$\gamma = \frac{W}{W_0}$
2500 V	$0{,}00231c$	$0{,}00231c$	$2\cdot 10^{-4}$ %	$1 + 2{,}6\cdot 10^{-6}$
$5\cdot 10^6$ V	$0{,}1032c$	$0{,}1028c$	0,40 %	1,0053

3.5.9. In erster Näherung verwenden wir einen Plattenkondensator mit der Plattenfläche $A = 4\pi R^2$, $R = 6{,}38\cdot 10^6\,\text{m}$ und $d = h = 6\cdot 10^4\,\text{m}$:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}, \quad W = \frac{1}{2}CU^2, \quad U = \frac{Q}{C}, \quad W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} = 2{,}21\cdot 10^{12}\,\text{J}$$

$$m = \frac{W}{c^2} = 24{,}5\,\text{mg}$$

Genauer ist die Kapazitätsformel für den Kugelkondensator mit $r = R + h$:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R} - \frac{1}{r}} \quad\Longrightarrow\quad m = \frac{W}{c^2} = 24{,}3\,\text{mg}$$

3.5.10. (a) Mit $\beta = 0{,}1$ ist $\delta_{\text{rel}} = \frac{W_{\text{kin}} - W_{\text{kin,klassisch}}}{W_{\text{kin}}}$:

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) - \frac{m}{2}\beta^2 c^2}{mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)} = 1 - \frac{\beta^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)} = 0{,}0075 = 0{,}75\,\%$$

(b) $U = \frac{W_{\text{kin}}}{e} = \frac{mc^2}{e}\left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}1^2}} - 1\right) = 0{,}00504 \cdot \frac{mc^2}{e}$

e^- : $U = 0{,}00504 \cdot 0{,}511 \cdot 10^6\,\text{V} = 2{,}57\,\text{kV}$
p^+ : $U = 0{,}00504 \cdot 938{,}27 \cdot 10^6\,\text{V} = 4{,}73\,\text{MV}$

3.5.11. $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{W}{W_\text{p}} = \frac{W}{m_\text{p}c^2} = 3{,}4 \cdot 10^{11}$

$t = \frac{s}{c} = 2 \cdot 10^6\,\text{a} = 6{,}31 \cdot 10^{13}\,\text{s} \quad \Longrightarrow \quad \tau = t\sqrt{1-\beta^2} = \frac{t}{\gamma} = 185\,\text{s}$

$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} = \frac{1}{(1-\beta)(1+\beta)} \approx \frac{1}{2(1-\beta)} \quad \Longrightarrow$

$\Delta v = c - v = c(1-\beta) \approx \frac{c}{2\gamma^2} = 1{,}3 \cdot 10^{-15}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Bei einem Wettlauf des Teilchens mit einem Lichtstrahl würde das Teilchen nach 10^7 Jahren nur um 4 cm hinter dem Licht zurück bleiben!

3.5.12. Mit Energie-Impuls-Relation:

$$W_0^2 + p^2c^2 = W^2 = (2{,}6W_0)^2 \quad \Longrightarrow \quad p^2c^2 = 5{,}76W_0^2 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{2{,}4W_0}{c} = 2{,}4mc$$

Ohne Energie-Impuls-Relation:

$$W_\text{k} = (\gamma-1)mc^2 = 1{,}6mc^2 \quad \Longrightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2{,}6 \quad \Longrightarrow \quad \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \frac{12}{13}$$

$$p = \gamma mv = \gamma\beta mc = 2{,}4mc$$

3.5.13. (a) Da die Energie des Photons endlich ist und es sich mit c bewegt, muss seine Masse null sein.

(b) Aus der Energie-Impuls-Relation folgt $W^2 = W_0^2 + p^2c^2 = p^2c^2 \quad \Longrightarrow \quad W = pc$.

(c) $F = ma = m\dot{v} = \dot{p} = \frac{\dot{W}}{c} = \frac{P}{c} = \frac{10^9\,\text{W}}{c} = 3{,}3\,\text{N}$ (Laser)

Taschenlampe mit $P = 1\,\text{W}$: $F = 3{,}3 \cdot 10^{-9}\,\text{N}$

(d) Im Schwerpunktsystem ist der Gesamtimpuls aller Teilchen null, d.h. auch der Gesamtimpuls der Photonen nach der Zerstrahlung muss null sein. Da der Impuls eines Photons mit der Energie $W > 0$ wegen $p = \frac{W}{c}$ auch größer als null ist, müssen mindestens zwei Photonen entstehen.

(e) $P = \frac{mc^2}{t} = \frac{1\,\text{kg} \cdot c^2}{3600\,\text{s}} = 2{,}5 \cdot 10^{13}\,\text{W} \quad \Longrightarrow \quad F = \frac{P}{c} = 8{,}3 \cdot 10^4\,\text{N}$

(f) $F = mg = 9{,}81 \cdot 10^6\,\text{N} = \frac{P}{c} \quad \Longrightarrow \quad P = Fc = 2{,}94 \cdot 10^{15}\,\text{W} = \frac{mc^2}{1\,\text{s}} \quad \Longrightarrow \quad m = 32{,}7\,\text{g}$

3.5.14. (a) $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Longrightarrow \quad \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}, \qquad \alpha = \frac{W_\text{k}}{W_0} = \frac{(\gamma-1)W_0}{W_0} = \gamma - 1$

$p = \gamma mv = \gamma\beta mc = mc\sqrt{\gamma^2-1} = mc\sqrt{(\gamma-1)(\gamma+1)} = mc\sqrt{\alpha(\alpha+2)}$

Oder mit der Energie-Impuls-Relation:

$W^2 = W_0^2 + p^2c^2 \quad \Longrightarrow \quad p^2c^2 = (\gamma^2-1)m^2c^4 \quad \Longrightarrow \quad p = mc\sqrt{\gamma^2-1}$

(b) $\frac{\gamma mv^2}{r} = qvB \quad \Longrightarrow$

$$r = \frac{\gamma mv}{qB} = \frac{\gamma\beta mc}{qB} = \frac{p}{qB} = \frac{mc\sqrt{\alpha(\alpha+2)}}{qB} = \frac{mc\sqrt{\frac{W_\text{k}}{mc^2}\left(\frac{W_\text{k}}{mc^2}+2\right)}}{qB} = \frac{\sqrt{W_\text{k}(W_\text{k}+2mc^2)}}{qBc}$$

(c) $W_\mathrm{k}(W_\mathrm{k}+2mc^2)=W_\mathrm{k}^2+2mc^2W_\mathrm{k}=r^2e^2B^2c^2 \quad\Longrightarrow$

$W_\mathrm{k}=-mc^2+\sqrt{m^2c^4+r^2e^2B^2c^2}=9{,}6\cdot 10^{-7}\,\mathrm{J}=6{,}0\cdot 10^{12}\,\mathrm{eV}, \qquad U=6{,}0\cdot 10^{12}\,\mathrm{V}$

oder:

$$p=reB=mc\sqrt{\gamma^2-1} \quad\Longrightarrow\quad \gamma=\sqrt{1+\frac{r^2e^2B^2}{m^2c^2}}=1{,}17\cdot 10^7$$

$W_\mathrm{k}=(\gamma-1)mc^2=1{,}17\cdot 10^7\cdot 0{,}511\,\mathrm{MeV}=6{,}0\cdot 10^{12}\,\mathrm{eV}$

3.5.15. $\gamma=1{,}25 \quad\Longrightarrow\quad eU=W_\mathrm{k}=\frac{m_\mathrm{e}c^2}{4} \quad\Longrightarrow\quad U=\frac{m_\mathrm{e}c^2}{4e}=1{,}3\cdot 10^5\,\mathrm{V}$

$$\beta=\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}=0{,}6 \quad\Longrightarrow\quad v=0{,}6c$$

3.5.16. (a) $u_2=u_2'\oplus v=\frac{u_2'+v}{1+\frac{u_2'v}{c^2}}=0 \quad\Longrightarrow\quad u_2'=-v$, Impulssatz in S': $u_1'=-u_2'=v$

(b) Energiesatz in S': $\quad 2\gamma mc^2=(2m+M)c^2+W_\mathrm{k,ges}$‘

M ist dann maximal, wenn $W_\mathrm{k,ges}$‘ $=0$, d.h. wenn alle Teilchen ruhen.

(c) $\overline{u}=0\oplus v=v \quad\Longrightarrow\quad W=\gamma(2m+M)c^2=\gamma W'$

In S': $\quad 2\gamma mc^2=(2m+M)c^2 \quad\Longrightarrow\quad \gamma=1+\frac{M}{2m}$

In S: $\quad W=2mc^2+W_\mathrm{k}=\gamma(2m+M)c^2=\gamma W'=2\gamma^2mc^2 \quad\Longrightarrow\quad \gamma^2=\frac{W_\mathrm{k}}{2mc^2}+1$

(d) $\frac{M}{2m}=\gamma-1=\sqrt{1+\alpha}-1, \quad W_\mathrm{k}\gg mc^2 \quad\Longrightarrow\quad \alpha\gg 1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{M}{2m}\approx\sqrt{\alpha}$

(e) Mit $m=m_\mathrm{p}$ ist $2mc^2=1{,}877\,\mathrm{GeV}$. $\overline{M}=\frac{M}{2}=m(\sqrt{1+\alpha}-1)\approx m\sqrt{\alpha}$

W_k	α	$\frac{\overline{M}}{m_\mathrm{p}}$	$\frac{\overline{M}c^2}{\mathrm{GeV}}$	$\frac{W_\mathrm{k}}{2\overline{M}c^2}$
6,4 GeV	3,41	1,10	1,03	3,10
900 GeV	480	20,9	19,6	22,9
7 TeV	3730	60,1	56,4	62,1

Mit $\beta_0=\frac{u}{c}$ und $\gamma_0=\sqrt{1-\beta_0^2}$ folgt:

$W=(\gamma_0+1)mc^2=\gamma W'=2\gamma^2mc^2 \quad\Longrightarrow\quad \gamma_0=2\gamma^2-1$

$\gamma_0^2-1=4\gamma^2(\gamma^2-1)=4\alpha(1+\alpha)$

$$\frac{\gamma_0mu^2}{r}=euB \quad\Longrightarrow\quad B=\frac{mc}{re}\gamma_0\beta_0=\frac{mc}{re}\sqrt{\gamma_0^2-1}=\frac{mc}{re}\cdot 2\sqrt{\alpha(1+\alpha)}\approx\frac{mc}{re}\cdot 2\alpha$$

$$B\approx\frac{mc}{re}\cdot\frac{2W_\mathrm{k}}{2mc^2}=\frac{W_\mathrm{k}}{rec}=5{,}43\,\mathrm{T}$$

(f) $W_\mathrm{k}=2mc^2(\gamma^2-1)=2mc^2\left[\left(1+\frac{M}{2m}\right)^2-1\right]=Mc^2\left(2+\frac{M}{2m}\right)=2\overline{M}c^2\left(2+\frac{\overline{M}}{m}\right)$

$\mathrm{p\overline{p}}$: $\overline{M}=m \quad\Longrightarrow\quad W_\mathrm{k}=6mc^2=5{,}63\,\mathrm{GeV}=3\cdot 2\overline{M}c^2$

Higgs: $W_\mathrm{k}=10^3\,\mathrm{GeV}\cdot\left(2+\frac{500}{0{,}938}\right)=535\,\mathrm{TeV}=535\cdot 2\overline{M}c^2$

(g) Der Preis x ist zum Radius der Anlagen proportional:

$$\frac{x}{x'}=\frac{r}{2r'}=\frac{\frac{mc}{eB}\sqrt{\gamma_0^2-1}}{2\cdot\frac{mc}{eB}\sqrt{\gamma^2-1}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\gamma_0^2-1}{\gamma^2-1}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{4\alpha(1+\alpha)}{\alpha}}=\sqrt{1+\alpha}=\gamma=1+\frac{\overline{M}}{m}$$

Für $\overline{M}c^2=500\,\mathrm{GeV}$: $\frac{x}{x'}=534.$

Ein Festtargetbeschleuniger mit der gleichen Schwerpunktsenergie wie der LHC ($\overline{M}c^2 = 7\,\text{TeV}$) würde 7460 mal soviel kosten wie der LHC, sein Umfang wäre ungefähr $4 \cdot 10^5\,\text{km}$.

3.6 Der magnetische Fluss

3.6.1. $\Phi = AB_\perp = r^2\pi B \sin\varphi = 1{,}9 \cdot 10^{-4}\,\text{Vs}$

3.7 Bewegungsinduktion

3.7.1. (a) $U = lvB\sin\varphi = 30\,\text{m} \cdot \frac{800}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \cdot \sin 65° = 0{,}30\,\text{V}$, Minuspol im Osten

(b) Der Fluss durch die von den Tragflächen überstrichene Fläche ändert sich nicht, d.h. für jede Flugrichtung parallel zur Erdoberfläche ist $U = 0{,}30\,\text{V}$.

(c) Bei einer Beibehaltung der Flugrichtung nach Norden ist der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{B}$ durch $\varphi = \beta + 65°$ gegeben, also ist

$$U = lvB\sin(\varphi + 65°)$$

$U = 0$ für $\beta = -65°$, Umpolung für $\beta < -65°$, $U_{\max} = lvB = 0{,}33\text{V}$ für $\beta = 25°$.

3.7.2. Der halbe Rotor überstreicht in der Zeit t die Fläche ($T = \frac{1}{8}\,\text{s}$)

$$A(t) = \frac{\varphi}{2\pi} \cdot r^2\pi = \frac{r^2\omega t}{2} \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 16\pi\,\frac{1}{\text{s}}$$

Mit $B = 5{,}0 \cdot 10^{-5}\,\text{T}$ und $\alpha = 65°$ ist der Fluss durch A

$$\Phi(t) = A(t)B\sin\alpha = \frac{r^2\pi B\sin\alpha}{T} \cdot t$$

und damit

$$|U_{\text{OA}}| = |\dot{\Phi}(t)| = \frac{r^2\pi B\sin\alpha}{T} = 0{,}056\,\text{V}$$

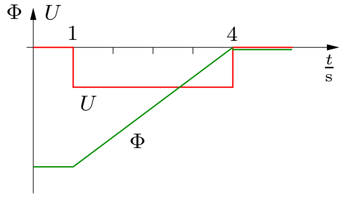
$|U_{\text{OB}}| = |U_{\text{OA}}|$, aber entgegengesetztes Vorzeichen, d.h. $U_{\text{AB}} = 0$.

3.7.3.
- Rotation in einer zur xy-Ebene parallelen Ebene um den Mittelpunkt des Leiters
- $\vec{v} \parallel \vec{l} \implies$ vom Leiter überstrichene Fläche $A = 0 \implies \Phi = 0 \implies |U| = |\dot{\Phi}| = 0$
- $\vec{B}$ liegt in der von $\vec{l}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Ebene E. Dann gilt

$$\vec{B} \parallel E \implies B_\perp = 0 \implies \Phi = 0 \implies |U| = |\dot{\Phi}| = 0$$

Spezialfälle: $\vec{v} \parallel \vec{B}$ und $\vec{l} \parallel \vec{B}$

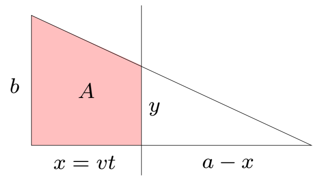
3.7.4. (a) U ist positiv, wenn der Strom im Gegenuhrzeigersinn fließt, d.h. der Normalenvektor $\vec{n}$ zeigt aus der Zeichenebene heraus (entgegen zu $\vec{B}$). Φ ist also negativ. Der rechte Rand der Leiterschleife erreicht zur Zeit $t_1 = 1\,\text{s}$ den Magnetfeldrand, der linke Rand zur Zeit $t_2 = 4\,\text{s}$.



$$\Phi(t) = \begin{cases} -abB = -180\,\mu\text{Vs} & \text{für } t \leqq t_1 \\ -(a - v(t - t_1))\,bB = 60\,\mu\text{V}(t - 4\,\text{s}) & \text{für } t_1 < t_2 \\ 0 & \text{für } t \geqq t_2 \end{cases}$$

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leqq t_1 \text{ und } t \geqq t_2 \\ -vbB = -60\,\mu\text{V} & \text{für } t_1 < t_2 \end{cases}$$

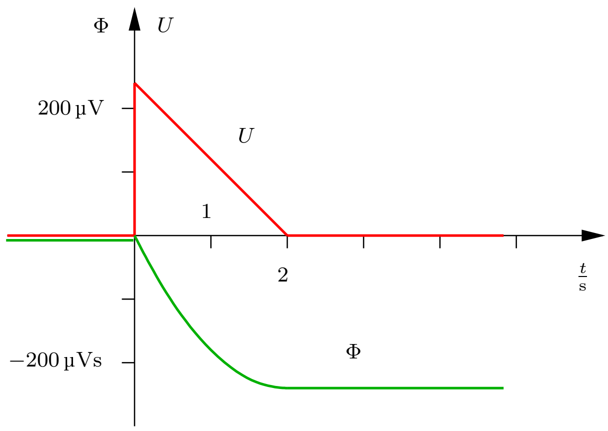
(b) U ist positiv, wenn der Strom im Uhrzeigersinn fließt, d.h. der Normalenvektor $\vec{n}$ zeigt in die Zeichenebene hinein (entgegen zu $\vec{B}$). Φ ist also negativ. Der rechte Rand der Leiterschleife (Spitze des Dreiecks) erreicht zur Zeit $t_1 = 2\,\text{s}$ den Magnetfeldrand. Für $0 \leqq t \leqq t_1$ gilt



$$y = \frac{b}{a}(a - x) = b - \frac{b}{a}x \implies A(t) = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}(a - x)y = bx\left(1 - \frac{x}{2a}\right) = bvt\left(1 - \frac{vt}{2a}\right)$$

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ -A(t)B = -bv\left(t - \frac{vt^2}{2a}\right)B = 6\cdot 10^{-5}\,\frac{\text{V}}{\text{s}}\cdot\left(t^2 - 4\,\text{s}\cdot t\right) & \text{für } 0 \leqq t \leqq t_1 \\ -\frac{1}{2}abB = -2{,}4\cdot 10^{-4}\,\text{Vs} & \text{für } t > t_1 \end{cases}$$

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \text{ und } t > t_1 \\ -\dot{\Phi}(t) = bv\left(1 - \frac{vt}{a}\right)B = 1{,}2\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{V}}{\text{s}}\cdot(2\,\text{s} - t) & \text{für } 0 \leqq t \leqq t_1 \end{cases}$$



(c) Wegen $R_{PQ} = \infty$ fließt kein Strom und es gibt somit keine bremsende Lorentzkraft auf den unteren Leiter. Der Leiterrahmen führt also eine harmonische Schwingung aus:

$$x(t) = x_0 + A_0 \sin\omega t \quad \text{mit} \quad x_0 = 10\,\text{cm} \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 8{,}0\,\frac{1}{\text{s}}$$

$$\frac{m}{2}v_0^2 = \frac{D}{2}A_0^2 \quad \Longrightarrow \quad A_0 = v_0\sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{v_0}{\omega} = 8{,}0\,\text{cm}$$

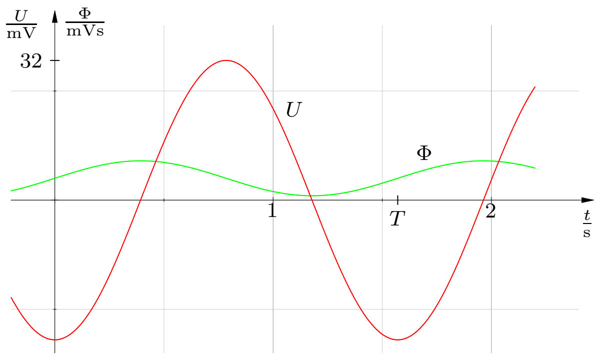
Wegen $A_0 < x_0$ ist die untere Sseite des Leiterrechtecks immer im Magnetfeld. Die Schwingungsdauer ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}785\,\text{s}$$

U ist positiv, wenn der Strom im Uhrzeigersinn fließt, d.h. der Normalenvektor $\vec{n}$ zeigt in die Zeichenebene hinein (gleiche Richtung wie $\vec{B}$). Φ ist also positiv.

$$\Phi = BA = Bax = Ba(x_0 + A_0\sin\omega t) = 5\,\text{mVs} + 4\,\text{mVs}\sin\omega t$$

$$U(t) = -\dot{\Phi} = -BaA_0\omega\cos\omega t = -32\,\text{mV}\cos\omega t$$



3.7.5. Zur Zeit null ist U positiv, wenn der Normalenvektor $\vec{n}$ nach links zeigt (entgegen zu $\vec{B}$), $\Phi(0)$ ist also negativ:

$$\Phi(t) = -abB\cos\omega t \quad \Longrightarrow \quad U(t) = -n\dot{\Phi}(t) = -nabB\omega\sin\omega t$$

Mit $\omega = 2\pi f = 40\pi\,\frac{1}{\text{s}}$ folgt $U(t) = -5{,}0\,\text{V}\cdot\sin\omega t$.

3.8 Das Induktionsgesetz

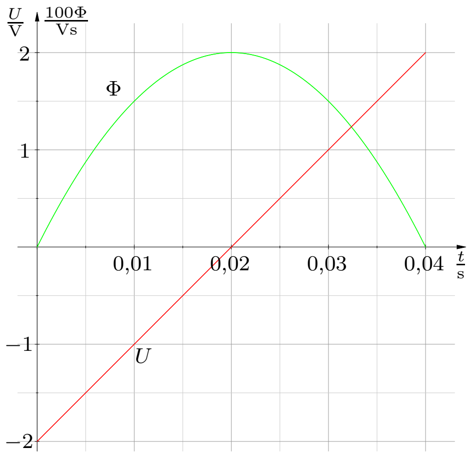
3.8.1. $A = 3\,\text{cm}^2, \quad \alpha = \dfrac{B_0}{t_0^2} = 10^{10}\,\dfrac{\text{V}}{\text{m}^2\text{s}}, \quad |U| = |\dot{\Phi}| = 2A\alpha t, \quad U(t_0) = 60\,\text{V}, \quad \Delta\Phi = AB_0 = 3\cdot 10^{-4}\,\text{Vs}$

NEMP: $\alpha = \dfrac{B_0}{t_0^2} = 10^{16}\,\dfrac{\text{V}}{\text{m}^2\text{s}}, \quad U(t_0) = 6\cdot 10^4\,\text{V}, \quad \Delta\Phi = AB_0 = 3\cdot 10^{-4}\,\text{Vs}$

3.8.2. (a) U ist positiv, wenn der Strom im Uhrzeigersinn fließt, d.h. der Normalenvektor $\vec{n}$ zeigt in die Zeichenebene hinein (gleiche Richtung wie $\vec{B}$), Φ ist also positiv:

$$\Phi(t) = Bab = Bvt\left(\frac{u}{2} - vt\right) = \frac{Buv}{2}\cdot t - Bv^2\cdot t^2 = 2\,\text{V}\cdot t - 50\,\frac{\text{V}}{\text{s}}\cdot t^2$$

$$U(t) = -\dot{\Phi}(t) = -\frac{Buv}{2} + 2Bv^2\cdot t = -2\,\text{V} + 100\,\frac{\text{V}}{\text{s}}\cdot t$$

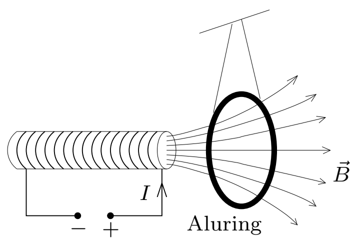


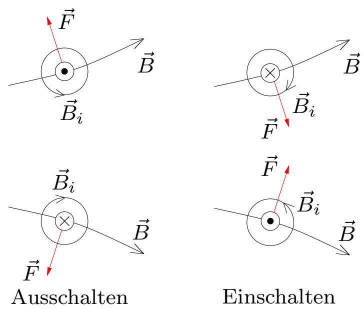
(b) $U = 0$, wenn $\Phi(t) = \Phi_0$ (konstant):

$$\Phi(t) = Bvt\left(\frac{u}{2} - vt\right) = \Phi_0 \quad\Longrightarrow\quad B(t) = \frac{\Phi_0}{vt\left(\frac{u}{2} - vt\right)}$$

3.8.3. Ausschalten: $\dot{B} < 0$, nach links, zum größeren Feld hin.

Einschalten: $\dot{B} > 0$, nach rechts, zum kleineren Feld hin.





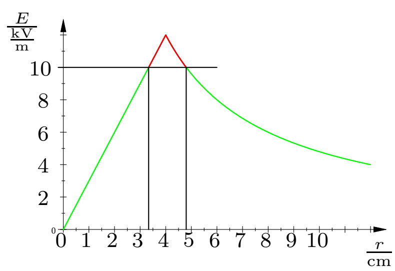
3.9 Wirbelfelder und Wirbelströme

3.9.1. (a) $r < r_0$: $\quad E = \dfrac{|\dot{\Phi}|}{2\pi r} = \dfrac{|r^2\pi\dot{B}|}{2\pi r} = \dfrac{rB_0\omega}{2}\cdot|\cos\omega t|$

Für $t = 0$ gilt: $\quad E(r) = \dfrac{rB_0\omega}{2} = 3\cdot 10^5\,\dfrac{\text{V}}{\text{m}^2}\cdot r$

$r \geqq r_0$: $\quad E = \dfrac{|\dot{\Phi}|}{2\pi r} = \dfrac{|r_0^2\pi\dot{B}|}{2\pi r} = \dfrac{r_0^2B_0\omega}{2r}\cdot|\cos\omega t|$

Für $t = 0$ gilt: $\quad E(r) = \dfrac{r_0^2B_0\omega}{2r} = \dfrac{480\,\text{V}}{r}$



(b) $E(r) = 10^4\,\dfrac{\text{V}}{\text{m}} \quad\Longrightarrow\quad r_1 = \dfrac{10^4}{3\cdot 10^5}\,\text{m} = 3{,}33\,\text{cm}, \quad r_2 = \dfrac{480}{10^4}\,\text{m} = 4{,}8\,\text{cm}$

3.10 Das Ampèrsche Durchflutungsgesetz

3.10.1. $\oint \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 I = \frac{l c_{\mathrm{ut}} a}{nA} \quad\Longrightarrow\quad n = \frac{l c_{\mathrm{ut}} a}{\mu_0 I A} = 7958$

3.10.2. $\oint \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 I = \frac{l c_{\mathrm{ut}} a}{nA} \quad\Longrightarrow\quad I = \frac{l c_{\mathrm{ut}} a}{\mu_0 n A} = 50\,\mathrm{A}$

3.10.3. Der Strom im inneren Leiter sei positiv, der im äußeren damit negativ. Die Stromdichte (Strom pro Fläche) im inneren Leiter sei j_{i}, im äußeren Leiter j_{a}:

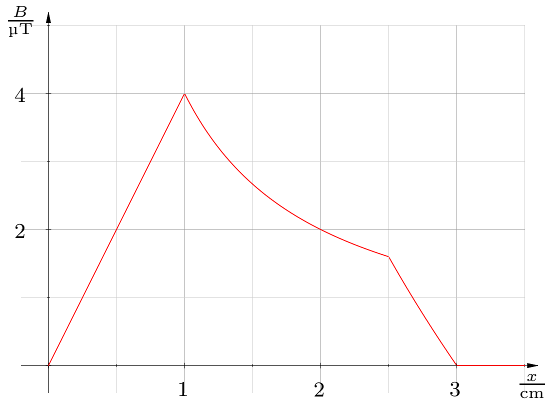
$$j_{\mathrm{i}} = \frac{I}{r_1^2\pi}, \qquad j_{\mathrm{a}} = \frac{I}{(r_3^2 - r_2^2)\pi}$$

Der Strom durch eine kreisförmige Querschnittsfläche mit Radius r ist

$$I(r) = \begin{cases} r^2\pi j_{\mathrm{i}} = \dfrac{Ir^2}{r_1^2} & \text{für } 0 \leqq r \leqq r_1 \\ I & \text{für } r_1 < r \leqq r_2 \\ I - (r^2 - r_2^2)\pi j_{\mathrm{a}} = I - \dfrac{I(r^2 - r_2^2)\pi}{(r_3^2 - r_2^2)\pi} = I \cdot \dfrac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2} & \text{für } r_2 < r \leqq r_3 \\ 0 & \text{für } r > r_3 \end{cases}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r_1^2} \cdot r & \text{für } 0 \leqq r \leqq r_1 \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{für } r_1 < r \leqq r_2 \\ I \cdot \dfrac{\mu_0 I (r_3^2 - r^2)}{2\pi (r_3^2 - r_2^2) r} & \text{für } r_2 < r \leqq r_3 \\ 0 & \text{für } r > r_3 \end{cases}$$

r in cm	B in µT
0	0
1	4
2	2
2,5	1,6
3	0



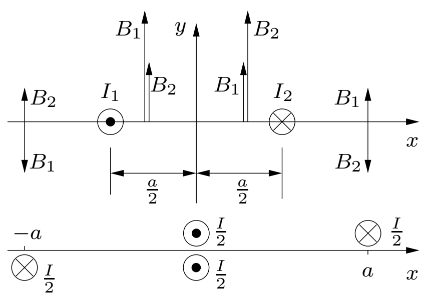
3.10.4. (a) $\vec{B}_{1x} = B_{1x} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{1x} \end{pmatrix}$ und $\vec{B}_{2x} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{2x} \end{pmatrix}$ mit

$$B_{1x}(x) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(-\dfrac{1}{-\frac{a}{2} - x} + \dfrac{1}{\frac{a}{2} - x}\right) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{\frac{a}{2} + x} + \dfrac{1}{\frac{a}{2} - x}\right) & \text{für } x < -\frac{a}{2} \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{\frac{a}{2} + x} + \dfrac{1}{\frac{a}{2} - x}\right) & \text{für } -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{\frac{a}{2} + x} - \dfrac{1}{x - \frac{a}{2}}\right) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{\frac{a}{2} + x} + \dfrac{1}{\frac{a}{2} - x}\right) & \text{für } x > \frac{a}{2} \end{cases}$$

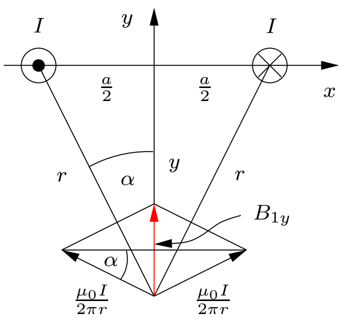
Also gilt für alle x außerhalb der Drähte

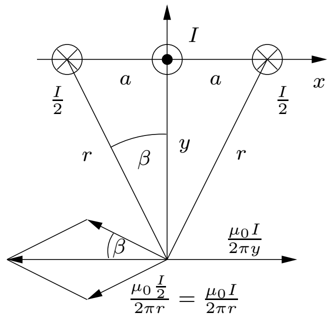
$$B_{1x}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{\frac{a}{2} + x} + \frac{1}{\frac{a}{2} - x}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{4a}{a^2 - 4x^2}$$

$B_{2x}(x)$ erhält man aus $B_{1x}(x)$ durch eine Verschiebung einmal um $\frac{a}{2}$ nach links und einmal um $\frac{a}{2}$ nach rechts. Bei der Verschiebung nach rechts wird I durch $\frac{I}{2}$, bei der Verschiebung nach links durch $-\frac{I}{2}$ ersetzt:



$$B_{2x}(x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{4a}{a^2 - 4\left(x-\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{4a}{a^2 - 4\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}\right) =$$
$$= \frac{\mu_0 I a}{\pi}\left(-\frac{1}{(2x-a)^2 - a^2} + \frac{1}{(2x+a)^2 - a^2}\right) =$$
$$= \frac{\mu_0 I a}{\pi}\left(-\frac{1}{4x^2 - 4ax} + \frac{1}{4x^2 + 4ax}\right) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi x}\left(-\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a}\right) =$$
$$= \frac{\mu_0 I a}{4\pi x}\cdot\frac{-2a}{x^2 - a^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{a^2}{x(a^2 - x^2)}$$





$$B_{1y}(y) = 2\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot\sin\alpha = \frac{\mu_0 I}{\pi r}\cdot\frac{a}{2r} =$$
$$= \frac{\mu_0 I a}{2\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{a}{\frac{a^2}{4} + y^2}$$

$$B_{2y}(y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} - \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot\cos\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}(1 - \cos^2\beta) =$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\sin^2\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{a^2}{y\,(a^2 + y^2)}$$

(b) $|B_{1x}(x)| \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{a}{x^2}, \quad |B_{2x}(x)| \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{a^2}{x^3}, \quad |B_{1y}(y)| \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{a}{y^2}, \quad |B_{2y}(y)| \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{a^2}{y^3}$

(c)

x in m	$\lvert B_{1x}\rvert$ in µT	$\lvert B_{1y}\rvert$ in µT	$\lvert B_{2x}\rvert$ in µT	$\lvert B_{2y}\rvert$ in µT
0,2	2,02	1,98	0,42	0,38
1,0	0,0800	0,0799	0,00321	0,00319

(d)

x in m	$\lvert B_{1x}\rvert$ in µT	$\lvert B_{1y}\rvert$ in µT	$\lvert B_{2x}\rvert$ in µT	$\lvert B_{2y}\rvert$ in µT
0,2	5,33	4,71	3,33	2,00
1,0	0,201	0,200	0,0202	0,0198

(e)

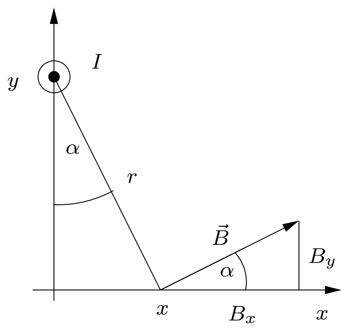
x in m	$\lvert B_{1x}\rvert$ in µT	$\lvert B_{1y}\rvert$ in µT	$\lvert B_{2x}\rvert$ in µT	$\lvert B_{2y}\rvert$ in µT
20	4,04	3,96	0,833	0,769
100	0,160	0,160	0,00641	0,00639

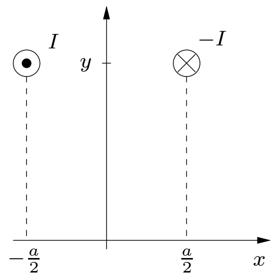
(f) Der Strom I, der durch $(0|y)$ in Richtung der z-Achse fließt, erzeugt auf der x-Achse das Feld

$$\vec{B}(x,y,I) = \begin{pmatrix} B_x(x,y,I) \\ B_y(x,y,I) \end{pmatrix}$$

mit

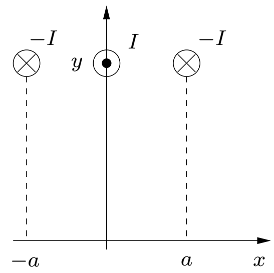
$$B_x(x,y,I) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot\cos\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$B_y(x,y,I) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot\sin\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}$$





$$B_{1x}(x,y,I) = B_x\left(x+\frac{a}{2},y,I\right) + B_x\left(x-\frac{a}{2},y,-I\right) =$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{y}{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2} - \frac{y}{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2}\right)$$

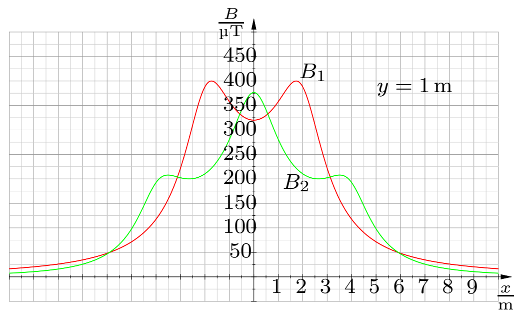
$$B_{1y}(x,y,I) = B_y\left(x+\frac{a}{2},y,I\right) + B_y\left(x-\frac{a}{2},y,-I\right) =$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{x+\frac{a}{2}}{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2} - \frac{x-\frac{a}{2}}{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2}\right)$$

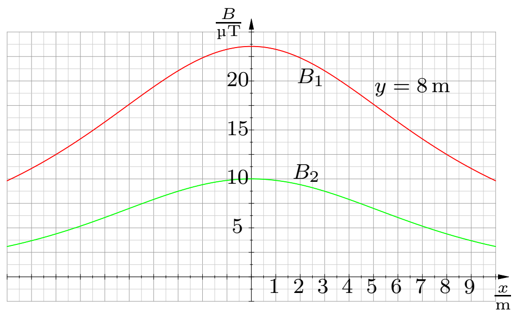


$$B_{2x}(x,y,I) = B_x(x+a,y,-I) + B_x(x,y,I) + B_x(x-a,y,-I) =$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(-\frac{y}{(x+a)^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{y}{(x-a)^2+y^2}\right)$$

$$B_{2y}(x,y,I) = B_y(x+a,y,-I) + B_y(x,y,I) + B_y(x-a,y,-I) =$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(-\frac{x+a}{(x+a)^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2+y^2}\right)$$

$$B_1 = \sqrt{B_{1x}^2 + B_{1y}^2}, \qquad B_2 = \sqrt{B_{2x}^2 + B_{2y}^2}$$





3.11 Berechnung von Magnetfeldern

3.11.1. (a) Die Summe der beiden Randfelder der kleinen Spulen ist gleich dem Feld im Mittelpunkt der großen Spule:

$$B_\mathrm{M} = 2B_\mathrm{R} \quad\Longrightarrow\quad B_\mathrm{R} = \frac{B_\mathrm{M}}{2} = \frac{\mu_0 n I}{2l}$$

(b) $B = \dfrac{\mu_0 n I}{l} \quad\Longrightarrow\quad I = \dfrac{Bl}{\mu_0 n} = 1{,}3 \cdot 10^3\,\mathrm{A}$

3.12 Induktivität und magnetische Feldenergie

3.12.1. (a) Für $0 \leqq t \leqq t_1$ gilt

$$I_2(t) = \frac{U_0}{R_2} \quad\text{und}\quad I_1(t) = \frac{U_0}{R_1}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R_1}{L}\cdot t}\right)$$

Wegen $t_1 \gg \dfrac{L}{R_1}$ ist $\dfrac{R_1 t_1}{L} \gg 1$, $\mathrm{e}^{-\frac{R_1}{L}\cdot t} \ll 1$ und damit $I_1(t_1) \approx \dfrac{U_0}{R_1}$.

Für $t > t_1$ gilt dann in guter Näherung

$$I_1(t) = I_2(t) = I_1(t_1)\,\mathrm{e}^{-\frac{R_1+R_2}{L}\cdot(t-t_1)} = \frac{U_0}{R_1}\,\mathrm{e}^{-\frac{R_1+R_2}{L}\cdot(t-t_1)}$$

$$U_1(t) = R_1 I_1(t) = \begin{cases} U_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R_1}{L}\cdot t}\right) & \text{für } 0 \leqq t \leqq t_1 \\ U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{R_1+R_2}{L}\cdot(t-t_1)} & \text{für } t > t_1 \end{cases}$$

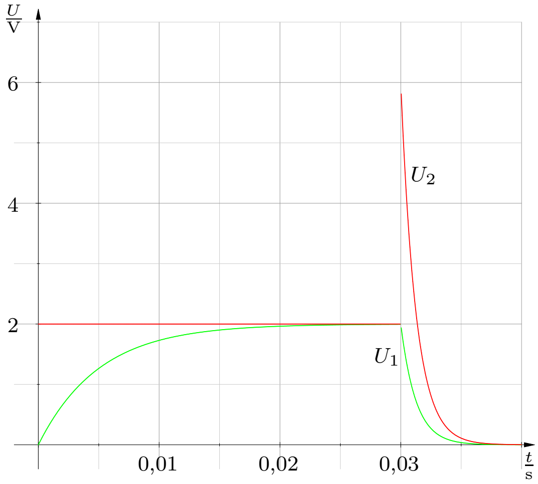
$$U_2(t) = R_1 I_1(t) = \begin{cases} U_0 & \text{für } 0 \leqq t \leqq t_1 \\ R_2 I_2(t) = \frac{R_2}{R_1}\cdot U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{R_1+R_2}{L}\cdot(t-t_1)} & \text{für } t > t_1 \end{cases}$$

(b) $L = \dfrac{\mu_0 A n^2}{l} = 0{,}02513\,\mathrm{H}$, $\dfrac{R_1}{L} = 200\,\dfrac{1}{\mathrm{s}}$, $\dfrac{R_1+R_2}{L} = 800\,\dfrac{1}{\mathrm{s}}$

$$I_1(t) = \begin{cases} 0{,}4\,\mathrm{A}\cdot\left(1 - \mathrm{e}^{-200\,\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot t}\right) & (t \leqq t_1) \\ 0{,}4\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{e}^{-800\,\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot(t-t-1)} & (t \leqq t_1) \end{cases}$$

$$U_1(t) = \begin{cases} 2\,\mathrm{V}\cdot\left(1 - \mathrm{e}^{-200\,\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot t}\right) & (t \leqq t_1) \\ 2\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{e}^{-800\,\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot(t-t-1)} & (t \leqq t_1) \end{cases}$$

$$U_2(t) = \begin{cases} 2\,\mathrm{V} & (t \leqq t_1) \\ 6\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{e}^{-800\,\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot(t-t-1)} & (t \leqq t_1) \end{cases}$$



(c) $I_1(t) = 0{,}99\cdot\dfrac{U_0}{R} \quad\Longrightarrow\quad 1 - \mathrm{e}^{-200\,\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot t} = 0{,}99 \quad\Longrightarrow\quad t = \dfrac{\ln 100}{200\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 0{,}023\,\mathrm{s}$

$$I_1(t_1 + \Delta t) = \frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-800\,\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot\Delta t} = 0{,}01\cdot\frac{U_0}{R} \quad\Longrightarrow\quad \Delta t = \frac{\ln 100}{800\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 5{,}8\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}$$

(d) Wenn R_2 sehr groß ist, dann ist auch der Faktor $\frac{R_2}{R_1}$ in $U_2(t)$ sehr groß (Öffnungsfunke am Schalter!).

3.12.2. L ist die Gesamtinduktivität der Schaltung.

Reihenschaltung:

$$U_i = U_{i1} + U_{i2} \quad\Longrightarrow\quad -L\dot I = -L_1\dot I - L_2\dot I \quad\Longrightarrow\quad L = L_1 + L_2$$

Parallelschaltung:

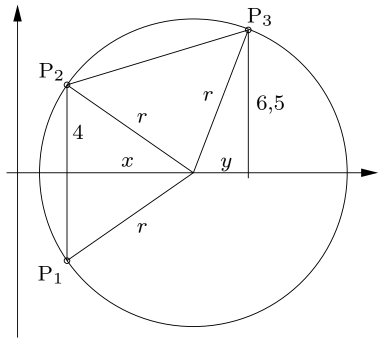
$$I = I_1 + I_2 \quad\Longrightarrow\quad \dot I = \dot I_1 + \dot I_2 \quad\Longrightarrow\quad -\frac{U_i}{L} = -\frac{U_i}{L_1} - \frac{U_i}{L_2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

3.12.3. $L_{\mathrm{ges}} = 2\,\mathrm{H} + \dfrac{1}{\frac{1}{0{,}5\,\mathrm{H}} + \frac{1}{2\,\mathrm{H}}} = 2{,}4\,\mathrm{H}$

3.12.4. (a) $B_0 = \mu_0 \cdot \frac{nI_0}{a} \implies n = \frac{B_0 a}{\mu_0 I_0} = 2{,}1 \cdot 10^3$

$L = \mu_0 \cdot \frac{n^2 A}{a} \implies A = \frac{La}{\mu_0 n^2} = 32\,\mathrm{m}^2 \implies r_0 = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 3{,}2\,\mathrm{m}$

(b) $y = 8{,}25\,\mathrm{cm} - x$



$x^2 + (4\,\mathrm{cm})^2 = r^2$

$y^2 + (6{,}5\,\mathrm{cm})^2 = (8{,}25\,\mathrm{cm} - x)^2 + (6{,}5\,\mathrm{cm})^2 = r^2$

$(8{,}25\,\mathrm{cm})^2 - 16{,}5\,\mathrm{cm} \cdot x + x^2 + (6{,}5\,\mathrm{cm})^2 = x^2 + (4\,\mathrm{cm})^2$

$x = \frac{(8{,}25\,\mathrm{cm})^2 + (6{,}5\,\mathrm{cm})^2 - (4\,\mathrm{cm})^2}{16{,}5\,\mathrm{cm}} = 5{,}72\,\mathrm{cm}$

$r = \sqrt{x^2 + (4\,\mathrm{cm})^2} = 6{,}98\,\mathrm{cm}$

$\frac{mv^2}{r} = evB_0 \implies v = \frac{erB_0}{m} = 2{,}67 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$eU_\mathrm{p} = \frac{m}{2}v^2 \implies U_\mathrm{p} = \frac{mv^2}{2e} = \frac{er^2B_0^2}{2m} = 3{,}7 \cdot 10^6\,\mathrm{V}$

(c) $W_0 = Aa \cdot \frac{B_0^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}LI_0^2 = 2{,}7 \cdot 10^9\,\mathrm{J}, \qquad \Delta t = \frac{W}{P} = \frac{2{,}7 \cdot 10^9\,\mathrm{J}}{10^5\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}} = 2{,}7 \cdot 10^4\,\mathrm{s} = 7{,}5\,\mathrm{h}$

(d) Spannung am Widerstand gleich Induktionsspannung:

$$RI = -L\dot{I} \implies \dot{I} = -\frac{R}{L}I$$

$$\dot{I}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_0\,e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right) = -\frac{R}{L}I_0\,e^{-\frac{R}{L}\cdot t} = -\frac{R}{L}I(t)$$

Die Anfangsbedingung $I(0) = I_0$ passt. $\quad \frac{R}{L} = \frac{1}{140\,000\,\mathrm{s}} = 7{,}14 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{s}}$.

$$W(t_1) = \frac{1}{2}LI(t_1)^2 = \frac{1}{2}LI_0^2 e^{-\frac{2R}{L}\cdot t_1} = W_0\,e^{-\frac{2R}{L}\cdot t_1} = W_1$$

$$t_1 = -\frac{L}{2R}\ln\frac{W_1}{W_0} = \frac{L}{2R}\ln\frac{W_0}{W_1} = 5{,}5 \cdot 10^5\,\mathrm{s} = 1{,}5 \cdot 10^2\,\mathrm{h}$$

$$I_1 = I(t_1) = I_0\,e^{-\frac{R}{L}\cdot t_1} = 3{,}8 \cdot 10^2\,\mathrm{A}$$

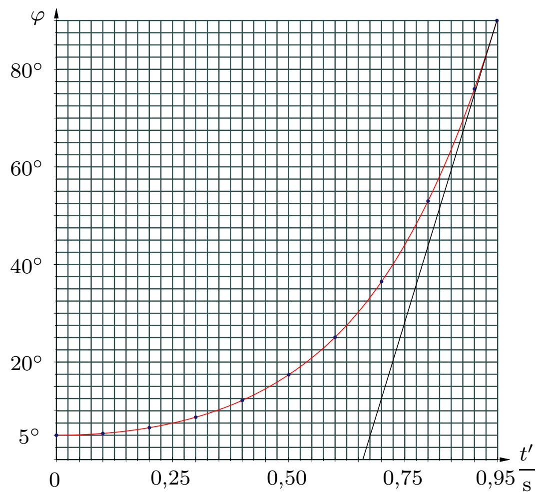
(e) $B(t) = \frac{\mu_0 n}{a} \cdot I(t) = \frac{\mu_0 n}{a} \cdot I_0 e^{-\frac{R}{L}\cdot t} = B_0 e^{-\frac{R}{L}\cdot t} \implies \Phi(t) = b^2 n' B(t) = b^2 n' B_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$

$U'(t) = |\dot{\Phi}(t)| = U_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$ mit $U_0 = \frac{b^2 n' B_0 R}{L} = 0{,}29\,\mathrm{V}$

(f) $\Phi(t) = b^2 n' B(t) \cos\varphi \implies$

$U' = -\dot{\Phi} = -b^2 n'(\dot{B}\cos\varphi - B\dot{\varphi}\sin\varphi) =$

$= b^2 n' B \left(\frac{R}{L}\cos\varphi + \dot{\varphi}\sin\varphi\right)$



Im Intervall $0 < t' < 0{,}95\,\mathrm{s}$ ist $\cos\varphi$ fallend, $\sin\varphi$ steigend und

$$B(t) \approx B(t_2) = 3{,}1\,\mathrm{T}$$

praktisch konstant. Maximales $\dot{\varphi}$:

$\dot{\varphi} \approx \frac{\frac{\pi}{2}}{0{,}29\,\mathrm{s}} = 5{,}4\,\frac{1}{\mathrm{s}} \gg \frac{R}{L}$

$U'_\mathrm{max} \approx b^2 n' B(t_2)\dot{\varphi} = 1{,}7 \cdot 10^5\,\mathrm{V}$

3.12.5. $3\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\cdot 2\,\mathrm{ms}} = 1\,\mathrm{A} \implies \frac{R}{L} = 549\,\frac{1}{\mathrm{s}} \implies L = 0{,}41\,\mathrm{H} \implies W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}LI^2 = 1{,}8\,\mathrm{J}$

3.13 Massenbestimmung und Zyklotron

3.13.1. (a) Die Teilchen verlassen das Wienfilter mit der Geschwindigkeit $v = \frac{E}{B_1}$.

$$\frac{mv^2}{\frac{d}{2}} = |q|vB_2 \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{2Em}{|q|B_1B_2}$$

Für positive und negative Teilchen muss $\vec{E}$ nach rechts orientiert sein.

(b) $v = \dfrac{E}{B_1} = 4{,}00 \cdot 10^4\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad B_2 = \dfrac{2Em}{|q|B_1d} = \dfrac{2E \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}{eB_1 \cdot 0{,}01\,\mathrm{m}} = 4{,}99 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{T}$

(c) Mit der relativen Atommasse A und dem Ionisierungsgrad Z gilt $m = Au$ und $q = Ze$ ($u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ ist die atomare Masseneinheit).

$$d = \frac{m}{|q|} \cdot \frac{2E}{B_1B_2} = 1{,}60 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{As}^2} = \frac{2Eu}{B_1B_2e} \cdot \frac{A}{|Z|} = 1{,}66\,\mathrm{cm} \cdot \frac{A}{Z}$$

$$\mathrm{H}_2^+: \; d = 1{,}66\,\mathrm{cm} \cdot \frac{2}{1} = 3{,}32\,\mathrm{cm} \qquad \mathrm{He}_4^+: \; d = 1{,}66\,\mathrm{cm} \cdot \frac{4}{1} = 6{,}64\,\mathrm{cm}$$

$$\mathrm{He}_4^{++}: \; d = 1{,}66\,\mathrm{cm} \cdot \frac{4}{2} = 3{,}32\,\mathrm{cm} \qquad \mathrm{He}_3^+: \; d = 1{,}66\,\mathrm{cm} \cdot \frac{3}{1} = 4{,}98\,\mathrm{cm}$$

(d) $\dfrac{m}{2}v^2 = eU \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}} = 1{,}88 \cdot 10^7\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \Longrightarrow \quad E = vB_1 = 1{,}88 \cdot 10^3\,\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

$$B_2 = \frac{2Em}{eB_1d} = 4{,}27 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$$

Ohne Änderung würden die Elektronen nicht durch das Wien-Filter kommen, da

$$F_\mathrm{e} = e \cdot 2 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = 1{,}6 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{N} \text{ und } F_\mathrm{m} = e \cdot 1{,}88 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T} = 3{,}0 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{N}$$

Die Elektronen würden im Wien-Filter nach links abgelenkt, da $F_\mathrm{e} > F_\mathrm{m}$.

3.13.2. $m = 2u, \quad q = e \quad \Longrightarrow \quad r_0 = \dfrac{\sqrt{2mW_\mathrm{max}}}{eB} = 11{,}5\,\mathrm{cm}$

$$f = \frac{eB}{2\pi m} = 3{,}8 \cdot 10^6\,\mathrm{Hz}$$

3.13.3. Zuerst muss man untersuchen, ob relativistisch gerechnet werden muss. Mit $m = m_\mathrm{p}$ und

$$W_\mathrm{k} = W_\mathrm{kin,max} = 30\,\mathrm{MeV} \text{ ist } \gamma = \frac{mc^2 + W_\mathrm{k}}{mc^2} = \frac{(30 + 938{,}27)\,\mathrm{MeV}}{938{,}27\,\mathrm{MeV}} = 1{,}0320$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Longrightarrow \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0{,}247 > 0{,}1 \quad \Longrightarrow \quad \text{relativistisch rechnen!}$$

Trotzdem zuerst die klassische Rechnung (Index n für „Näherung“):

(a) $B_n = \dfrac{\sqrt{2mW_\mathrm{k}}}{r_0e} = 0{,}352\,\mathrm{T}$

(b) $f_n = \dfrac{eB_n}{2\pi m} = \dfrac{1}{2\pi r_0}\sqrt{\dfrac{2W_\mathrm{k}}{m}} = 5{,}36 \cdot 10^6\,\dfrac{1}{\mathrm{s}}, \quad T_n = \dfrac{1}{f_n} = 1{,}86 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}$

(c) $\Delta W = 2eU \quad \Longrightarrow \quad n = \dfrac{W_\mathrm{k}}{\Delta W} = \dfrac{3 \cdot 10^7\,\mathrm{eV}}{2 \cdot 10^5\,\mathrm{eV}} = 150, \quad t_n = nT_n = 2{,}80 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}$

(d) $v_n = \sqrt{\dfrac{2W_\mathrm{k}}{m}} = 2\pi r_0 f_n = 7{,}58 \cdot 10^7\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad U = \dfrac{W_\mathrm{k}}{e} = 30{,}0\,\mathrm{MV}$

Jetzt relativistisch:

(a) $\dfrac{\gamma mv^2}{r_0} = evB \quad \Longrightarrow \quad B = \dfrac{\gamma mv}{r_0e} = \gamma\beta\dfrac{mc}{r_0e} = \dfrac{mc}{r_0e}\sqrt{\gamma^2 - 1} = 0{,}355\,\mathrm{T}$

(b) $f = \frac{v}{2\pi r_0} = \frac{eB}{2\pi\gamma m} = \frac{f_n}{\gamma} = 5{,}20 \cdot 10^6\,\frac{1}{\text{s}}, \quad T = \frac{1}{f} = 1{,}92 \cdot 10^{-7}\,\text{s}$

(c) $t = nT = 2{,}89 \cdot 10^{-5}\,\text{s}$

(d) $v = \beta c = 7{,}40 \cdot 10^7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Gegenüberstellung:

$$\frac{B_n}{B} = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} = 0{,}992, \quad \frac{f_n}{f} = \frac{T}{T_n} = \gamma = 1{,}032, \quad \frac{v_n}{v} = \gamma\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} = 1{,}024$$

4 Elektromagnetische Schwingungen und Wellen

4.1 Der elektrische Schwingkreis

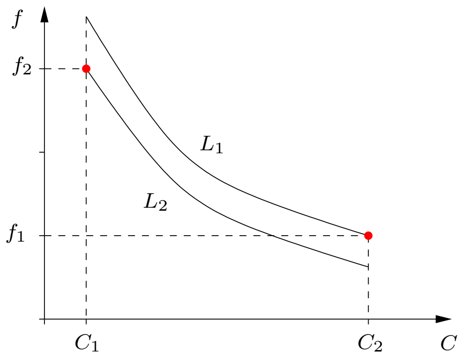
4.1.1. $L = \frac{\mu_0 n^2 A_\text{L}}{l} = 4{,}04 \cdot 10^{-4}\,\text{H}, \quad C = \frac{\varepsilon_0 A_\text{C}}{d}, \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{C} = \frac{d}{\varepsilon_0 A_\text{C}} = 4\pi^2 L f^2$

$$d = \frac{4\pi^2 \varepsilon_0 \mu_0 f^2 n^2 A_\text{L} A_\text{C}}{l} = 7{,}1 \cdot 10^{-3}\,\text{m} = 7{,}1\,\text{mm}$$

4.1.2. $C' = \frac{\varepsilon_0 k^2 A_\text{C}}{kd} = k \cdot \frac{\varepsilon_0 A_\text{C}}{d} = kC, \qquad L' = \frac{\mu_0 n^2 k^2 A_\text{L}}{kl} = k \cdot \frac{\mu_0 n^2 A_\text{L}}{l} = kL$

$$f' = \frac{1}{2\pi\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{k^2 LC}} = \frac{1}{2\pi k\sqrt{LC}} = \frac{f}{k}$$

4.1.3. Die Frequenz f in Abhängigkeit von C und L kann als Funktionenschar dargestellt werden:



$$f_L(C) = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

L_1 sei der minimal und L_2 der maximal mögliche Wert für L. Der Graf von $f_{L_2}(C)$ liegt dann unter dem Grafen von $f_{L_1}(C)$. Nebenstehender Abb. entnimmt man die Bedingungen

$$f_{L_2}(C_1) = f_2 \quad \text{und} \quad f_{L_1}(C_2) = f_1$$

Mit $C_1 = 50\,\text{pF}$, $C_2 = 550\,\text{pF}$, $f_1 = 0{,}5\,\text{MHz}$ und $f_2 = 1{,}5\,\text{MHz}$ folgt

$$f_{L_2}(C_1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C_1}} = f_2 \quad \Longrightarrow \quad L_2 = \frac{1}{4\pi^2 f_2^2 C_1} = 2{,}25 \cdot 10^{-4}\,\text{H}$$

$$f_{L_1}(C_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_2}} = f_1 \quad \Longrightarrow \quad L_1 = \frac{1}{4\pi^2 f_1^2 C_2} = 1{,}84 \cdot 10^{-4}\,\text{H}$$

$$L = \frac{\mu_0 n^2 A}{l} \quad \Longrightarrow \quad n = \sqrt{\frac{Ll}{\mu_0 A}} \quad \Longrightarrow \quad n_1 = 209{,}7 \quad \text{und} \quad n_2 = 231{,}8$$

$$210 \leqq n \leqq 231$$

4.1.4. $T = 2\pi\sqrt{LC} \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{T^2}{4\pi^2 L} = 2{,}03 \cdot 10^{-8}\,\text{F} = 20{,}3\,\mu\text{F}$

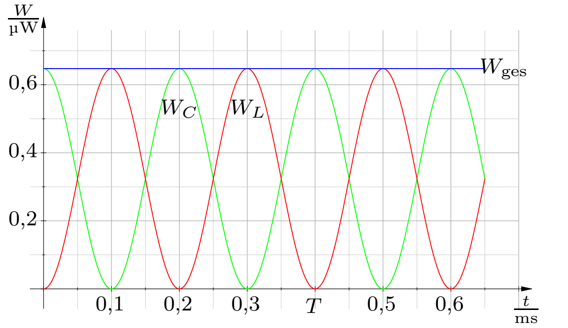
$I(t) = I_0 \sin\omega t, \quad U(t) = U_0 \cos\omega t$

$$U_0 = \frac{Q_0}{C} = 7{,}99\,\text{V}$$

$$I_0 = U_0 C\omega = Q_0\omega = 2{,}54 \cdot 10^{-3}\,\text{A}$$

$$W_0 = \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}LI_0^2 = 6{,}48 \cdot 10^{-7}\,\text{J}$$

$W_L(t) = W_0 \sin^2\omega t, \quad W_C(t) = W_0 \cos^2\omega t$



4.1.5. $C = \frac{56\varepsilon_0 A_\mathrm{C}}{d} = \frac{56\varepsilon_0 \cdot 1{,}2\,\mathrm{m}^2}{10^{-4}\mathrm{m}} = 5{,}95\,\mu\mathrm{F},\ L = \frac{\mu_0 A_\mathrm{L} n^2}{l} = \frac{\mu_0 b^2 \pi n^2}{4l} = \underbrace{2{,}63 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{H}}_{L_0} \cdot n^2$

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi n\sqrt{L_0 C}} \quad\Longrightarrow\quad n = \frac{1}{2\pi f\sqrt{L_0 C}} = 914$$

4.1.6. $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} \quad\Longrightarrow\quad D = 4\pi^2 f^2 m = 3{,}95\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

$$W' = W - \Delta W \quad\Longrightarrow\quad \frac{D}{2}A'^2 = \frac{D}{2}A^2 - \Delta W \quad\Longrightarrow\quad A' = \sqrt{A^2 - \frac{2\Delta W}{D}} = 7{,}0\,\mathrm{cm}$$

4.1.7. $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} \quad\Longrightarrow\quad D = 4\pi^2 f^2 m \quad\Longrightarrow\quad W = \frac{D}{2}A^2 = 2\pi^2 f^2 m A^2$

$$W = W' \quad\Longrightarrow\quad 2\pi^2 f^2 m A^2 = 2\pi^2 f'^2 \cdot 4m \cdot (2A)^2 = 16 \cdot 2\pi^2 f'^2 m A^2$$

$$f^2 = 16 f'^2 \quad\Longrightarrow\quad f' = \frac{f}{4}$$

4.1.8. $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 1{,}257\,\frac{1}{\mathrm{s}} = 0{,}4000\,\pi\,\frac{1}{\mathrm{s}},\quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 0{,}2000\,\frac{1}{\mathrm{s}},\quad T = \frac{1}{f} = 5{,}000\,\mathrm{s}$

Energiesatz: $\frac{D}{2}A^2 = \frac{D}{2}x_0^2 + \frac{m}{2}v_0^2 \quad\Longrightarrow\quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{D}v_0^2} = 2{,}000\,\mathrm{cm}$

$$x(0) = x_0 = A\sin\varphi \quad\Longrightarrow\quad \sin\varphi = \frac{x_0}{A} = 0{,}951 \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 71{,}99^\circ = 0{,}400\,\pi$$

$$x(t) = A\sin\left[\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right] = 2\,\mathrm{cm} \cdot \sin\left[0{,}4\pi\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,(t + 1\,\mathrm{s})\right]$$

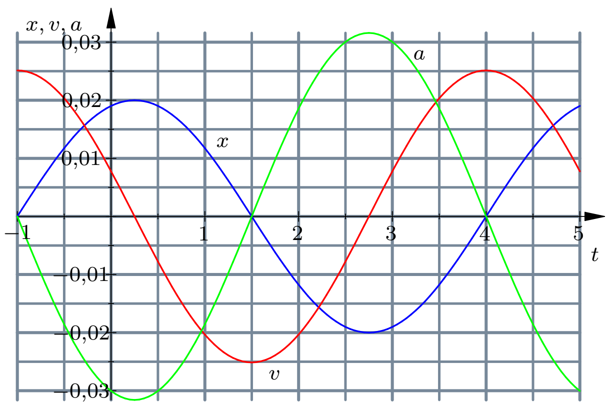
Energiesatz: $\frac{D}{2}A^2 = \frac{m}{2}v_\mathrm{max}^2 \quad\Longrightarrow\quad v_\mathrm{max} = A\sqrt{\frac{D}{m}} = A\omega = 2{,}513\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$

$$v(t) = v_\mathrm{max}\cos\left[\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right] = 2{,}513\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \cdot \cos\left[0{,}4\pi\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,(t + 1\,\mathrm{s})\right]$$

Die maximale Kraft auf die Masse m ist $F_\mathrm{max} = DA$, ihre maximale Beschleunigung ist also

$$a_\mathrm{max} = \frac{DA}{m} = \omega^2 A = 3{,}158\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad\Longrightarrow$$

$$a(t) = -a_\mathrm{max}\sin\left[\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right] = -3{,}158\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \sin\left[0{,}4\pi\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,(t + 1\,\mathrm{s})\right]$$



4.1.9. Für

$$\omega t_k = 2\pi\,\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot t_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

mit $k \in \mathbb{Z}$, d.h. für

$$t_k = \left(\frac{1}{4} + k\right)\ \mathrm{s}$$

ist $\sin\omega t_k = 1$ und damit

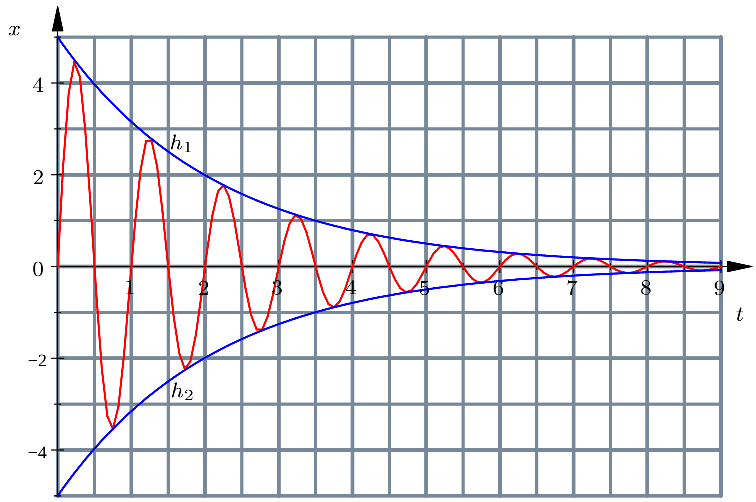
$$x(t_k) = h_1(t_k).$$

Analog gilt

$$x(t'_k) = h_2(t'_k)$$

für

$$t'_k = \left(\frac{3}{4} + k\right)\ \mathrm{s}$$



4.1.10. Die Kraft auf die gesamte Flüssigkeitssäule ist

$$F = -2xA\varrho g = -D\cdot x \quad \text{mit} \quad D = 2A\varrho g$$

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{2A\varrho g}{\varrho A s}} = \sqrt{\frac{2g}{s}} \quad\Longrightarrow\quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{s}}$$

4.2 Erzwungene Schwingungen (Resonanz)

4.2.1. (a) $\Phi = L_\mathrm{A} I = L_\mathrm{A} I_{\mathrm{A}0}\sin\omega t \quad\Longrightarrow$

$$U_\mathrm{e} = -kL_\mathrm{A} I_{\mathrm{A}0}\omega\cos\omega t$$

Die gesamte im Stromkreis wirkende Spannung ist $U_\mathrm{e} - L\dot{I}$:

$$R_L I + \frac{Q}{C} = U_\mathrm{e} - L\dot{I} \quad \Big|\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

$$R_L\dot{I} + \frac{I}{C} = kL_\mathrm{A} I_{\mathrm{A}0}\omega^2\sin\omega t - L\ddot{I}$$

$$\ddot{I} + \frac{R_L}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = \frac{kL_\mathrm{A} I_{\mathrm{A}0}\omega^2}{L}\sin\omega t$$

(b) I_0 ist maximal, wenn der Nenner minimal ist, d.h. wenn

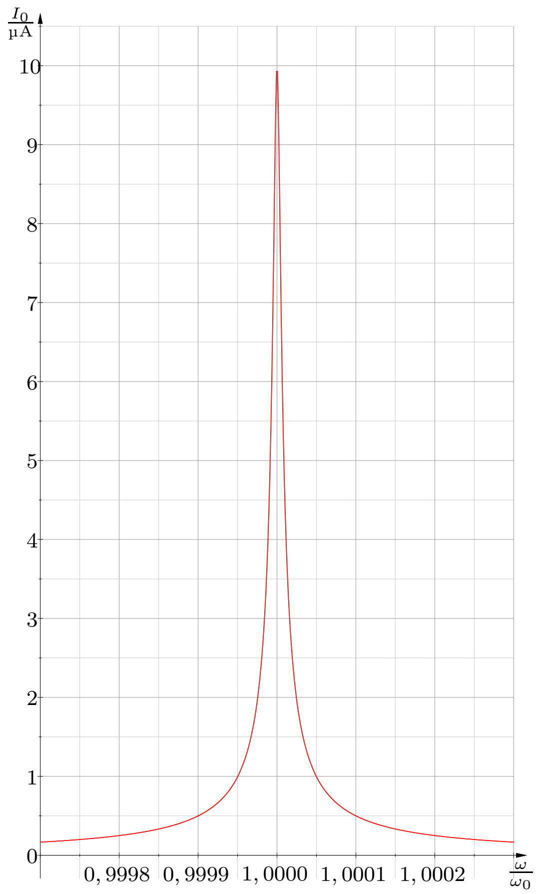
$$\frac{1}{\omega C} = \omega L \;\Longrightarrow\; C = C_\mathrm{max} = \frac{1}{L\omega^2} = 5\,\mathrm{pF}$$

$$I_{0,\mathrm{max}} = \frac{kL_\mathrm{A} I_{\mathrm{A}0}\omega}{R_\mathrm{L}} = 1{,}0\cdot 10^{-5}\,\mathrm{A}$$

(c) $I_0(5{,}05\,\mathrm{pF}) = 1{,}01\cdot 10^{-8}\,\mathrm{A} \approx 0{,}001 I_{0,\mathrm{max}}$
$I_0(4{,}95\,\mathrm{pF}) = 0{,}99\cdot 10^{-8}\,\mathrm{A} \approx 0{,}001 I_{0,\mathrm{max}}$
Die Abweichung beträgt also 99,9%.

(d)

$\frac{\omega}{\omega_0}$	1	0,99999 1,00001	0,9999 1,0001	0,9998 1,0002
$\frac{I_0}{\mu\mathrm{A}}$	10	4,47	0,50	0,25



$$I_0(\omega) = \frac{kL_\mathrm{A}I_\mathrm{A0}}{\sqrt{\frac{R_\mathrm{L}^2}{\omega^2} + \left(\frac{1}{\omega^2 C} - L\right)^2}}$$

$I_0(\omega)$ maximal, wenn $r(\omega) = \dfrac{R_\mathrm{L}^2}{\omega^2} + \left(\dfrac{1}{\omega^2 C} - L\right)^2$ minimal ist:

$$r'(\omega) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\omega} = -\frac{2R_\mathrm{L}^2}{\omega^3} + 2\left(\frac{1}{\omega^2 C} - L\right) \cdot \left(-\frac{2}{\omega^3 C}\right)$$

$$r'(\omega_1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -R_\mathrm{L}^2 - \frac{2}{\omega_1^2 C^2} + \frac{2L}{C} = 0$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC - \frac{1}{2}R_\mathrm{L}^2 C^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{R_\mathrm{L}^2 C}{2L}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 5 \cdot 10^{-11}}} \approx \omega_0\left(1 + 2{,}5 \cdot 10^{-11}\right)$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} = 2{,}5 \cdot 10^{-11} = 2{,}5 \cdot 10^{-9}\%$$