LK Physik 12
Aufgaben zur Relativität

Richard Reindl

Die aktuellste Version der Aufgaben findet man unter

http://www.stbit.de

1 Newtonsche Mechanik in verschiedenen Bezugssystemen

1.1 Bezugssysteme, Ereignisse, Weltlinien

1.1.1. Zeichne in ein ct-x-Diagramm ($1\,\mathrm{cm} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{LS}$ auf beiden Achsen) die Weltlinie eines Lichtsignals, das zur Zeit $t_0 = 2\,\mathrm{s}$ vom Ort $x_0 = -9 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$ in positiver x-Richtung ausgesandt wird. Zeichne in das gleiche Diagramm die Weltlinien von zwei Raketen R_1 und R_2, die zur Zeit $t = 0$ an den Orten $x_1 = 5\,\mathrm{LS}$ und $x_2 = -2\,\mathrm{LS}$ mit den Geschwindigkeiten $v_1 = -\frac{c}{2}$ und $v_2 = \frac{c}{3}$ starten. Stelle die Gleichungen der drei Weltlinien auf. Bestimme aus der Zeichnung und durch Rechnung die Koordinaten folgender Ereignisse:

E_1: R_1 am Ort $x = 0$	E_2: R_2 am Ort $x = 0$	E_3: Licht trifft R_1
E_4: Licht trifft R_2	E_5: R_1 trifft R_2	

1.2 Die Galileitransformation

1.2.1. S ist ein Inertialsystem und S′ bewegt sich mit der Beschleunigung b parallel zur x-Achse relativ zu S. Zur Zeit $t = 0$ sind die Ursprünge O und O′ der beiden Systeme am gleichen Ort und die Relativgeschwindigkeit v von S′ bezüglich S ist null. In S hat ein Teilchen die Ortskoordinate x, die Geschwindigkeit u (parallel zur x-Achse) und die Beschleunigung a. Berechne x', u' und a' des Teilchens in S′. Ist S′ ein Inertialsystem?

1.3 Das Brehmediagramm der Galileitransformation

1.3.1. Zeichne ein Brehmediagramm der Galileitransformation für $v = \frac{c}{2}$. Im Sytem S wird zur Zeit $t_1 = 0$ am Ort $x_1 = 4\,\mathrm{LS}$ ein Lichtsignal in beide Richtungen ausgesandt ($u = \pm c$). Im Sytem S′ wird zur Zeit $t_2' = 2\,\mathrm{s}$ am Ort $x_2' = -3\,\mathrm{LS}$ ein Lichtsignal in beide Richtungen ausgesandt ($u' = \pm c$).

(a) Zeichne die Weltlinien der Lichtsignale ein und beweise allgemein

$$\mathrm{WL}_{u=c} \perp \mathrm{WL}_{u=-c} \quad \text{und} \quad \mathrm{WL}_{u'=c} \perp \mathrm{WL}_{u'=-c}$$

(b) Beweise allgemein, dass die Weltlinie eines Lichtsignals in S ($u = \pm c$) parallel zu einer Winkelhalbierenden der x- und ct-Achse ist.

(c) Beweise allgemein, dass die Weltlinie eines Lichtsignals in S′ ($u' = \pm c$) parallel zu einer Winkelhalbierenden der x- und ct'-Achse ist.

(d) Welchen Winkel α schließen $\mathrm{WL}_{u=c}$ und $\mathrm{WL}_{u'=c}$ miteinander ein?

1.3.2. Zeichne ein Brehmediagramm der Galileitransformation für $v = 0{,}6\,c$. Zeichne die Menge aller Ereignisse ein mit

(a) $x = x'$ (b) $x = -x'$ (c) $t = 5\,\mathrm{s}$
(d) $x = 4\,\mathrm{LS}$ (e) $x' = -3\,\mathrm{LS}$ (f) $x = 0$

1.3.3. Zeichne ein Brehmediagramm der Galileitransformation für $v = 0{,}8\,c$. Zeichne die Weltlinien durch das Ereignis $\mathrm{E}\,(3\,\mathrm{LS}|4\,\mathrm{s})_{\mathrm{S}'}$ mit den Geschwindigkeiten $u = \frac{c}{2}$ und $u' = -0{,}6\,c$ ein. Welche Koordinaten hat E besüglich S?

2 Lichtausbreitung in verschiedenen Bezugssystemen

2.3 Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

2.3.1. Das Satelliten-Navigationssystem GPS (**G**lobal **P**ositioning **S**ystem) bestätigt täglich den Satz von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Wäre dieser Satz falsch, würde die Navigation mit GPS nicht funktionieren. Zum GPS-System gehören 24 Navstar-Satelliten, ein Netz aus Boden-Kontrollstationen und der GPS-Empfänger des Benutzers. Die mit Atomuhren ausgestatteten Kontrollstationen ermitteln über Laufzeitmessungen von Funksignalen die Positionen der Satelliten zur momentanen Zeit und übermitteln diese Daten an die Satelliten. Jeder Satellit sendet Datenpakete der Form $(X_k|Y_k|Z_k|T_k)$ aus, wobei T_k die Zeit des Aussendens und X_k, Y_k, Z_k die Ortskoordinaten des Satelliten (k) zur Zeit T_k sind. Wenn der Empfänger über eine Atomuhr verfügt, kann aus der Empfangszeit t_k des Datenpakets die Signallaufzeit $\Delta t_k = t_k - T_k$ und damit die Entfernung $r_k = c\,\Delta t_k$ berechnet werden. Der Empfänger liegt also auf einer Kugeloberfläche mit Radius r_1 um den Satelliten (1). Mit den Daten eines weiteren Satelliten (2) hat man eine zweite Kugeloberfläche. Der Empfänger liegt dann auf der Schnittmenge der beiden Kugelflächen (Kreis). Mit einem dritten Satelliten (3) erhält man eine dritte Kugelfläche, deren Schnitt mit dem Kreis zwei mögliche Aufenthaltsorte für den Empfänger liefert.

(a) Die Umlaufzeit der Navstar-Satelliten beträgt 11 h 58 min. Berechne die Höhe der Satelliten über der Erdoberfläche. ($M_{\text{Erde}} = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$, $R_{\text{Erde}} = 6378{,}3\,\text{km}$)

(b) Erläutere anhand einer Skizze, warum man einen der beiden möglichen Aufenthaltsorte des Empfängers ausschließen kann.

(c) In der Praxis sind die GPS-Empfänger nicht mit einer Atomuhr, sonderm mit einer Quarzuhr ausgestattet. Der Fehler der Quarzuhr sei δt, d.h. $t_{\text{Quarz}} = t_{\text{Atom}} + \delta t$. Da man jetzt neben den Ortskoordinaten des Empfängers noch δt als weitere Unbekannte hat, braucht man die Daten eines vierten Satelliten. Stelle vier Gleichungen auf, die neben den übermittelten Daten die vier Unbekannten x, y, z und δt enthalten.

(d) Vier Navstar-Satelliten senden zur Zeit $T = 0$ folgende Daten aus, t ist die von der Quarzuhr des Empfängers registrierte Ankunftszeit der Daten:

k	1	2	3	4
X [in m]	801191	20044775	11505259	2306938
Y [in m]	−4543782	−16819563	6642564	3995734
Z [in m]	26166595	4613877	23010518	26166595
t [in s]	2,19816435	2,20251613	2,19196963	2,19612118

Berechne mit einem CAS die Ortskoordinaten des Empfängers und δt.

(e) Wir nehmen jetzt an, dass die Erde eine Kugel ist. Die z-Achse unseres Koordinatensystems zeigt vom Süd- zum Nordpol, der Erdmittelpunkt ist der Ursprung. Der Nullmeridian durch Greenwich trifft den Äquator in P, OP bestimmt die x-Achse. Die y-Achse ergibt sich dann aus der Tatsache, dass x-y-z ein Rechtssystem bildet. Berechne die geografische Länge und Breite des Empfängers und seine Höhe über NN. Suche in der topografischen Karte Bayerns, an welchem markanten Ort sich der Empfänger befindet.

3 Relativistische Kinematik

3.1 Das relativistische Brehmediagramm

3.1.1. Wie groß kann im relativistischen Brehmediagramm die Relativgeschwindigkeit v der beiden Systeme höchstens sein? Zeichne das Diagramm für diese maximale Geschwindigkeit.

3.1.2. Zeichne ein Brehmediagramm für $v = 0{,}5\,c$. Zeichne die Menge aller Ereignisse ein mit

(a) $x = x'$	(b) $t = t'$	(c) $t = 6\,\text{s}$	(d) $t' = 6\,\text{s}$
(e) $x = 5\,\text{LS}$	(f) $x' = -3\,\text{LS}$	(g) $x = 0$	(h) $x' = 0$

Zeichne weiter folgende Weltlinien ein:

(i) WL eines Körpers mit $x = 3\,\text{LS}$ zur Zeit $t = 0$ und $u = \frac{c}{3}$

(j) WL eines Körpers mit $x' = 0$ zur Zeit $t' = -2\,\text{s}$ und $u' = -0{,}8\,c$

(k) WL eines Lichtsignals in beide Richtungen mit Start bei $x = 3\,\text{LS}$ zur Zeit $t' = 4\,\text{s}$

3.2 Die Zeitdilatation

3.2.1. Die im Inertialsystem S ruhenden Punkte A und B haben in S die Entfernung s. Eine Uhr U bewegt sich mit der Geschwindigkeit v relativ zu S von A nach B. Zwei synchronisierte Uhren in A und in B messen für diese Bewegung die Dauer Δt, die Uhr U, die beim Start mit der Uhr in A synchronisiert wurde, ermittelt die Bewegungszeit $\Delta t'$. Bei der Ankunft in B geht U gegen die Uhr in B um $\delta t = \Delta t - \Delta t'$ nach.

(a) Drücke Δt, $\Delta t'$ und δt durch s und $\beta = \dfrac{v}{c}$ aus.

(b) Berechne δt und $\delta_{\text{rel}} = \dfrac{\delta t}{\Delta t}$ näherungsweise für $v \ll c$.

(c) Für Geschwindigkeiten sehr nahe an der Lichtgeschwindigkeit schreiben wir $v = (1-\alpha)\,c$ mit $\alpha \ll 1$. Entwickle für diesen Fall eine Näherungsformel für $\Delta t'$ in Abhängigkeit von s und α.

(d) Berechne Δt, $\Delta t'$, δt und δ_{rel} für

i. eine Autofahrt von Garmisch nach München ($v = 100\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$).

ii. einen Flug mit dreifacher Schallgeschwindigkeit über 1000 km.

iii. eine Ameise, die von Mittenwald nach Garmisch krabbelt ($v = 5\,\dfrac{\text{mm}}{\text{s}}$, $s = 18\,\text{km}$).

(e) Berechne Δt, $\Delta t'$ und $\dfrac{\Delta t'}{\Delta t}$ für

i. einen Flug von der Erde zu unserem Nachbarstern Alpha Centauri ($s = 4\,\text{LJ}$) mit $v = 0{,}8\,c$.

ii. ein Proton, das mit $v = 0{,}999\,999\,999\,999\,999\,999\,c$ von einem $s = 10^9\,\text{LJ}$ entfernten Quasar zur Erde fliegt.

(f) Mit welcher Geschwindigkeit wurde eine Atomuhr über eine 4500 km lange Strecke transportiert, wenn sie nach der Ankunft um 0,50 ns nachgeht?

(g) Freie Neutronen haben die mittlere Lebensdauer $\tau = 10{,}6\,\text{min}$. Mit welcher Geschwindigkeit fliegt ein Neutron von einer $s = 10^5\,\text{LJ}$ entfernten Supernova zur Erde, wenn im System des Neutrons dazu gerade die Zeit τ vergeht?

3.3 Eigenzeit und Zwillingsparadoxon

3.3.1. Ein Raumschiff beschleunigt, von einem Inertialsystem S aus gesehen, nach dem Gesetz $v(t) = c\cdot\sin\omega t$ im S-Zeitintervall $[0\,;\,t_1]$ von $v_0 = 0$ auf $v_1 = \frac{c}{2}$. Danach fliegt das Raumschiff mit konstanter Geschwindigkeit im S-Zeitintervall $[t_1\,;\,2\,t_1]$ und bremst dann symmetrisch zum Beschleunigungsvorgang wieder ab, bis es zur S-Zeit $t_3 = 3\,t_1$ wieder zur Ruhe kommt.

(a) Berechne t_1 und die im Raumschiff gemessene Eigenzeit τ_1 des Beschleunigungsvorgangs. Wie groß ist $\frac{\tau_1}{t_1}$?

(b) Drücke den gesamten vom Raumschiff zurückgelegten Weg s und die im Raumschiff gemessene Flugdauer τ_3 durch ω aus.

(c) Berechne t_3 und τ_3 für einen Flug von der Erde nach Alpha-Centauri ($s = 4\,\text{LJ}$). Wie groß ist die Anfangsbeschleunigung des Raumschiffs bei diesem Flug?

3.3.2. 1971 wiesen Hafele und Keating die Zeitdilatation zum ersten Mal mit makroskopischen Uhren nach. Mit vier Atomuhren an Bord einer Verkehrsmaschine flogen die beiden Wissenschaftler einmal in östlicher und einmal in westlicher Richtung rund um die Erde. Geschwindigkeit und Flughöhe der Maschine wurden dabei von Radarstationen genauestens vermessen.

Da die Erde wegen der täglichen Rotation kein Inertialsystem ist, kann die Zeitdilatationsformel **nicht** zur direkten Umrechnung von Erd- in Flugzeugzeiten verwendet werden. In der Zeit einer Erdumdrehung (ein Tag) kann die Bahn der Erde um die Sonne näherungsweise als geradlinig betrachtet werden, d.h. ein nichtrotierendes, relativ zum Erdmittelpunkt ruhendes System S_0 kann in guter Näherung als Inertialsystem angesehen werden. Wir verwenden folgende Begriffe für die Zeit einer Erdumrundung des Flugzeugs:

t_0 : Zeit einer Erdumrundung, von S_0 aus gesehen
t : Zeit einer Erdumrundung, von der Erdoberfläche (Flughafen) aus gesehen
t' : Zeit einer Erdumrundung, vom Flugzeug aus gesehen (Bordzeit)

Neben der Zeitdilatation (Geschwindigkeitseffekt) muss noch der **Gravitationseffekt** berücksichtigt werden, der eine Folge der allgemeinen Relativitätstheorie (Einstein, 1916) ist. Für kleine Höhen H, für die der Ortsfaktor praktisch konstant bleibt, gilt:

Vergeht am Boden die Zeit t_B, dann zeigt eine Uhr in der Höhe H die Zeitspanne

$$t_H = t_B \cdot \left(1 + \frac{g\,H}{c^2}\right)$$

an. Im stärkeren Gravitationsfeld gehen Uhren also langsamer.

(a) Berechne $\delta = t' - t$ für einen Ost- und einen Westflug am Äquator. Die Geschwindigkeit des Flugzeugs relativ zur Erdoberfläche ist $v = 800\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, die Flughöhe 10 km.

(b) Ein Rennwagen fährt mit $v = 300\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ von einem Ort am Äquator aus einmal 100 km nach Osten, einmal 100 km nach Westen, einmal 100 km nach Norden und einmal 100 km nach Süden. Berechne jeweils die Abweichung der Bordzeit von der mit erdgebundenen Uhren gestoppten Zeit. Wie groß ist die Summe der Abweichungen (Rundreise)?

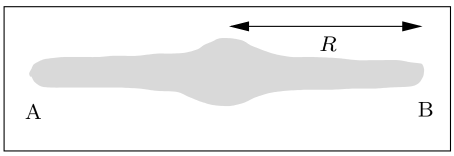
3.4 Die Lorentzkontraktion

3.4.1. Eine Rakete (System S') fliegt mit der konstanten Geschwindigkeit v in der Zeit Δt an einer Messstrecke (System S) der Eigenlänge Δx vorbei, d.h. $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Von S' aus gesehen rast die Messstrecke der Länge $\Delta x'$ in der Zeit $\Delta\tau = \Delta t'$ an der Rakete vorbei, und zwar mit der Geschwindigkeit $v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x'}{\Delta \tau}$. Ein Passagier der Rakete legt in seiner Eigenzeit $\Delta\tau$ in S die Strecke Δx zurück, d.h. er bewegt sich in S mit der effektiven Geschwindigkeit (**Eigengeschwindigkeit**) $w = \frac{\Delta x}{\Delta \tau}$.

Drücke v' und w durch $\beta = \frac{v}{c}$ aus und zeichne den Grafen von $w(\beta)$ mit den Einheiten $\beta = 1 \mathrel{\widehat{=}} 4\,\text{cm}$ und $c \mathrel{\widehat{=}} 2\,\text{cm}$. Für welches β ist $w = c$? Berechne w und v für eine Rakete, die in der Eigenzeit $\Delta\tau = 1$ Woche von der Erde zum Andromedanebel ($\Delta x = 2{,}2 \cdot 10^6$ LJ) fliegt.

3.5 Der Dopplereffekt

3.5.1. Nebenstehende Abbildung zeigt das Fernrohrbild einer Galaxie, Bickrichtung auf deren Schmalseite. Durch die Beobachtung einer Supernova in dieser Galaxie konnte ihre Entfernung zu $r = 5{,}0 \cdot 10^7$ LJ bestimmt werden. Die Randpunkte A und B der Galaxie erscheinen von der Erde aus unter dem Blickwinkel $\varphi = 0{,}1375°$. Das Licht von der Mitte der Galaxie zeigt die Rotverschiebung $z_0 = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0{,}0035$, die Rotverschiebungen an den Rändern der Galaxie sind $z_A = 0{,}0012$ und $z_B = 0{,}0058$.



(a) Berechne den Radius R der Galaxie.

(b) Mit welcher Geschwindigkeit v_0 bewegt sich der Mittelpunkt der Galaxie von uns fort? Mit welcher Geschwindigkeit v rotiert der Rand der Galaxie relativ zu ihrem

Mittelpunkt? Welcher Randpunkt bewegt sich dabei vom Mittelpunkt aus gesehen auf die Erde zu?

(c) Um welchen Faktor ist die tatsächliche Masse M der Galaxie größer als die Masse $M_0 = 2 \cdot 10^{11}\, M_\odot$ der Sterne in der Galaxie? Diese nicht sichtbare Masse wird **dunkle Materie** genannt. Die Natur der dunklen Materie ist Gegenstand der aktuellen Forschung.

3.5.2. Auf dem Planeten *Relativistica* bewegt sich das Licht nur mit der sehr kleinen Geschwindigkeit $c^* = 100\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Ein Autofahrer auf *Relativistica* soll Bußgeld zahlen, weil er eine Ampel bei Rot ($f = 4{,}40 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}$) überfahren hat. Der Fahrer behauptet aber, dass die Ampel Grün ($f' = 5{,}65 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}$) gezeigt hat. Auf diese Behauptung hin ändert der Polizist den Bußgeldbescheid auf „überhöhte Geschwindigkeit“ (auch auf *Relativistica* gilt $50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in geschlossenen Ortschaften). Wie schnell war der Autofahrer unterwegs? Wie schnell wäre er bei gleichem Sachverhalt auf der Erde gefahren?

3.5.3. Ein Astronom beobachtet mit einem Superteleskop eine Uhr im Weltall. Während sich der Sekundenzeiger dieser Uhr einmal voll dreht, sind für den Astronomen genau $30\,\mathrm{s}$ vergangen. Welchen Betrag und welche Richtung hat die Geschwindigkeit der Uhr relativ zum Beobachter?

3.5.4. Kurze Radarimpulse werden im zeitlichen Abstand $\Delta t = 1{,}00\,\mathrm{s}$ von der Erde zu einem Raumschiff gesandt, dort reflektiert und am Ort des Senders wieder empfangen. Welche Geschwindigkeit v hat das Raumschiff, wenn die Empfangsintervalle $\Delta t' = 2{,}00\,\mathrm{s}$ betragen? Wie groß wäre $\Delta t'$ für $v = -0{,}6\,c$?

3.5.5. Zwei kurze Radarimpulse werden im zeitlichen Abstand $\Delta t = 1{,}00\,\mathrm{s}$ auf ein fahrendes Auto geschickt und dort reflektiert. Die Laufzeiten der Impulse (hin und zurück) werden mit einem Oszilloskop zu $\tau_1 = 3{,}00 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}$ und $\tau_2 = 5{,}00 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}$ bestimmt. Welche Geschwindigkeit v hat das Auto? Wie groß wäre τ_2 bei gleichem τ_1, wenn das Auto in entgegengesetzter Richtung, aber mit gleichem Geschwindigkeitsbetrag fahren würde?

3.5.6. Ein Radarstrahl mit der Wellenlänge $\lambda = 0{,}500\,\mathrm{cm}$ wird von hinten auf ein fahrendes Auto geschickt. Der reflektierte Strahl wird am Ort des Senders empfangen, verstärkt und mit der Schwingung des Senders überlagert. Dabei entsteht eine Schwebung im Tonfrequenzbereich mit der Schwebungsfrequenz $\overline{f} = 14400\,\mathrm{Hz}$. Berechne zuerst allgemein und dann für die angegebenen Daten die Geschwindigkeit v des Autos. Auch für die allgemeine Rechnung darf $\beta \ll 1$ angenommen werden.

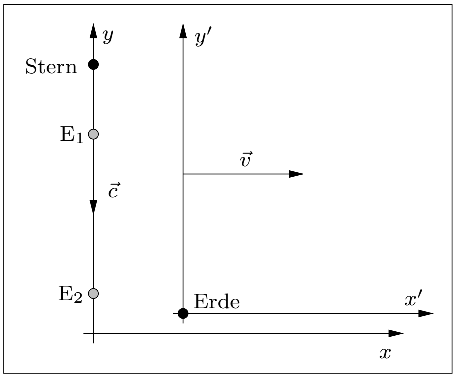
3.6 Die Lorentztransformation

3.6.1. Berechne die fehlenden Koordinaten folgender Ereignisse, die Relativgeschwindigkeit der Systeme ist $v = 0{,}8\,c$:

$$\begin{array}{llllll} \mathrm{E}_1: & x = -3\,\mathrm{LS}, & t = 4\,\mathrm{s}; & \mathrm{E}_2: & x' = 4\,\mathrm{LS}, & t' = -2\,\mathrm{s} \\ \mathrm{E}_3: & x = 4\,\mathrm{LS}, & t' = 2\,\mathrm{s}; & \mathrm{E}_4: & t = -2\,\mathrm{s}, & t' = 3\,\mathrm{s} \end{array}$$

3.6.2. **Aberration des Sternenlichts**

Ein Lichtteilchen bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{c}$ entlang der y-Achse des Inertialsystems S von einem Stern in Richtung Erde. Zwei zum Lichtteilchen gehörende Ereignisse sind
$E_1(\,x = 0\,|\,y = y_1\,|\,t = 0)$ und
$E_2(\,x = 0\,|\,y = y_2\,|\,t = t_2)$.
Die Erde (System S') bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ parallel zur x-Achse von S. Die Geschwindigkeit des Lichtteilchens in S' sei $\vec{c}\,'$.



(a) Berechne den Winkel φ, den $\vec{c}\,'$ mit der y'-Achse einschließt.

(b) Beweise, dass $|\vec{c}\,'| = c$ gilt.

(c) Wie groß ist φ, wenn v aus der Bewegung der Erde um die Sonne resultiert; der Radius der Erdbahn ist $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.

3.7 Das Additionstheorem für Geschwindigkeiten

3.7.1. Zwei Raumschiffe fliegen mit den Geschwindigkeitsbeträgen $0{,}8\,c$ und $0{,}7\,c$ einmal in gleicher und einmal in entgegengesetzter Richtung an der Erde vorbei. Mit welchem Geschwindigkeitsbetrag entfernen sich die beiden Raumschiffe voneinander?

3.7.2. Ein Flugzeug mit der Geschwindigkeit $v = 2160\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ relativ zur Erde feuert in Flugrichtung eine Rakete ab, die sich relativ zum Flugzeug mit der Geschwindigkeit $u = v$ bewegt. Wie groß ist der relative Fehler δ, wenn die Raketengeschwindigkeit relativ zur Erde mit $2\,v$ angegeben wird? Für welche v ist $\delta > 1\,\%$?

3.7.3. S_0, S_1 und S_2 sind Inertialsysteme, S_1 bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v relativ zu S_0 und S_2 bewegt sich in der gleichen Richtung mit der konstanten Geschwindigkeit u relativ zu S_1. Die Relativgeschwindigkeit von S_2 zu S_0 sei w. Beweise, dass aus $|v| \leqq c$ und $|u| \leqq c$ auch $|w| \leqq c$ folgt.

3.7.4. Ein Raumschiff beschleunigt im Inertialsystem S_0 von 0 auf $\frac{c}{2}$ und ruht dann im Inertialsystem S_1. Dann beschleunigt das Raumschiff relativ zu S_1 wieder auf $\frac{c}{2}$ und ruht jetzt in S_2. Dieser Beschleunigungsvorgang auf $\frac{c}{2}$ relativ zum momentanen Ruhsystem wird noch beliebig oft wiederholt. Die Relativgeschwindigkeit des Raumschiffs zu S_0 nach dem n-ten Beschleunigungsvorgang bezeichnen wir mit $v_n = \beta_n\,c$. Berechne β_n bis $n = 5$ und versuche eine allgemeine Formel für β_n zu finden. Zeige dann, dass $\beta_n < 1$ für alle n gilt, die Lichtgeschwindigkeit also nie erreicht werden kann.

Hinweis: Drücke β_{n+1} durch β_n aus, schreibe β_n in der Form $\beta_n = \frac{x_n}{y_n}$ mit $x_n \in \mathbb{N}$ und $y_n \in \mathbb{N}$. Was ist $y_n - x_n$? Wie berechnet sich x_{n+1} aus x_n?

3.8 Die Transformation der Beschleunigung

3.9 Das Linienelement

4 Relativistische Dynamik

4.1 Die relativistische Masse

4.1.1. Stelle dir vor, du wirst in einen großen Beschleuniger am CERN eingeschossen. Welche dynamische Masse hättest du bei der Endgeschwindigkeit $v = 0{,}9994\,c$ und der Masse $m = 70\,\mathrm{kg}$? Würdest du dich schwerer fühlen? Beantworte diese Frage auch für den Fall, dass der Beschleuniger, weit weg von allen Sternen, frei im Weltall schwebt.

4.2 Die relativistische Kraft

4.2.1. (a) Ein Elektron, das zur Zeit $t = 0$ ruht, wird von einem homogenen elektrischen Feld E beschleunigt. Berechne zuerst den Impuls $p(t)$ und dann die Geschwindigkeit $v(t)$ des Elektrons. Berechne $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$. Skizziere $v(t)$.

(b) Drücke die zum Erreichen von v benötigte Zeit t durch $\beta = \frac{v}{c}$ aus. Wie lautet der entsprechende nichtrelativistische Ausdruck für t? Zeige, dass der relativistische Ausdruck für $\beta \ll 1$ in den nichtrelativistischen übergeht. Berechne t_{rel} und t_{nichtrel} speziell für $\beta = 0{,}99$, $\beta = 0{,}5$ und $\beta = 10^{-6}$.

4.2.2. Ein Strahl von Teilchen mit der Ladung $q = +e$ durchläuft zunächst ein Wienfilter ($E = 7{,}00 \cdot 10^5\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$, $B = 4{,}00 \cdot 10^{-3}\,\text{T}$) und tritt dann in einen Raumbereich ein, in dem nur noch das Magnetfeld herrscht. Hier beschreibt der Teilchenstrahl eine Kreisbahn mit dem Radius $r = 30{,}6\,\text{cm}$. Um welche Teilchensorte handelt es sich?

4.2.3. Ein Teilchen mit der Ladung $q = +e$ und der Geschwindigkeit $v = 0{,}999\,999\,8517\,c$ beschreibt in einem homogenen Magnetfeld mit der Kraftflussdichte $B = 2{,}00\,\text{T}$ eine Kreisbahn mit dem Radius $r = 1{,}566\,\text{m}$. Zwei Physiker, von denen aber nur einer richtig rechnet, bestimmen die Art des Teilchens und die von ihm durchlaufene Beschleunigungsspannung U. Der andere Physiker wendet, wohl infolge einer durchzechten Nacht, die Newtonsche Mechanik an. Zu welchen Ergebnissen gelangen die beiden Wissenschaftler?

4.3 Die Äquivalenz von Masse und Energie

4.3.1. (a) Zeige, dass der relativistische Ausdruck für die kinetische Energie für kleine Geschwindigkeiten näherungsweise in die klassische (nichtrelativistische) Formel übergeht.

(b) Zeige, dass man die relativistische Formel für die kinetische Energie **nicht** erhält, wenn man einfach in der nichtrelativistischen Formel m durch γm ersetzt.

4.3.2. Was ist mehr wert, 1 g Gold oder 1 g elektrischer Energie? Den Goldpreis und den Strompreis findet man sicher im Internet.

4.3.3. Ein Eisenwürfel der Kantenlänge 10 cm wird von $\vartheta_1 = 20\,°\text{C}$ auf $\vartheta_2 = 300\,°\text{C}$ erwärmt. Berechne die absolute und relative Massenzunahme.

4.3.4. Um wieviel Prozent ist Wasser der Temperatur $0\,°\text{C}$ schwerer als Eis der Temperatur $0\,°\text{C}$?

4.3.5. Mit welcher Geschwindigkeit muss sich ein Körper bewegen, damit seine kinetische Energie gleich seiner Ruhenergie ist?

4.3.6. Zwei Atomkerne mit den Massen m stoßen mit den Geschwindigkeiten $v_1 = 0{,}6\,c$ und $v_2 = -0{,}6\,c$ total unelastisch zusammen und bilden einen neuen Kern. Berechne die Masse des neuen Kerns.

4.3.7. Beweise: Ein Körper der Masse m und der kinetischen Energie W_k bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = \beta\, c$ mit

$$\beta = \frac{\sqrt{W_\text{k}\,(W_\text{k} + 2\,m\,c^2)}}{W_\text{k} + m\,c^2}$$

4.3.8. Zur Erinnerung: $\boxed{1\,\text{eV} = e \cdot 1\,\text{V}}$

(a) Die Masse des Elektrons ist $m_\text{e} = 9{,}10938 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$. Berechne die Ruhenergie des Elektrons in MeV.

(b) Die Ruhenergie des Protons ist $W_\text{p} = 938{,}27\,\text{MeV}$. Berechne die Masse des Protons.

4.3.9. In vielen Büchern findet man folgende Faustregel:

$\boxed{\text{Bis zu } v = 0{,}1\,c \text{ darf klassisch gerechnet werden.}}$

(a) Berechne den relativen Fehler der kinetischen Energie, wenn für $v = 0{,}1\,c$ klassisch gerechnet wird.

(b) Bis zu welcher Beschleunigungsspannung U darf nach unserer Faustregel für Elektronen bzw. Protonen klassisch gerechnet werden?

4.3.10. Ein anfänglich ruhendes Teilchen der Ruhmasse m und der Ladung q wird von der Spannung U beschleunigt.

(a) Berechne Formeln für die Endgeschwindigkeit des Teilchens einmal klassisch (nichtrelativistisch) und einmal relativistisch. Berechne im relativistischen Fall auch das Verhältnis $\frac{W}{W_0}$.

(b) Berechne v_{kl}, v_{rel} und $\frac{W}{W_0}$ für ein Elektron und für ein Proton, einmal für $U = 2500\,\text{V}$ und einmal für $U = 5{,}000 \cdot 10^6\,\text{V}$. Wie groß ist jeweils der relative Fehler der nichtrelativistischen Rechnung?

4.3.11. Die Erdoberfläche trägt die Ladung $Q = 5{,}77 \cdot 10^5\,\text{C}$. Von der Oberfläche bis zur Ionosphäre in ungefähr 60 km Höhe herrscht ein fast homogenes elektrisches Feld. Berechne die Masse dieses Feldes.

4.3.12. (a) Berechne den Lorentzfaktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ für ein Proton mit $W = 400\,\text{GeV}$ (Superprotonensynchrotron am CERN) und für ein Elektron mit $W = 21\,\text{GeV}$ (Linearbeschleuniger in Stanford, USA). Wie groß ist β in beiden Fällen?

(b) In welcher Eigenzeit legt ein Elektron mit der Energie 1 J die Strecke vom Quasar 3C 48 bis zur Erde ($4{,}8 \cdot 10^9$LJ) zurück? Welche Energie müsste man aufbringen, um ein 100 t schweres Raumschiff in der gleichen Eigenzeit zu diesem Quasar zu schicken?

4.3.13. Um die Schwierigkeiten im Umgang mit beschleunigten Ladungen zu veranschaulichen, denken wir uns ein Proton, das für $t < 0$ am Ort $\mathrm{P}(\,0\,|\,0\,)$ ruht, dann fast augenblicklich nach $\mathrm{Q}(\,3\,\text{m}\,|\,0\,)$ bewegt wird und für $t > 0$ in Q wieder ruht. Zeichne die Feldlinien des Protonenfeldes in vier getrennten Bildern zu den Zeiten $t_1 = 0\,\text{ns}$, $t_2 = 10\,\text{ns}$, $t_3 = 20\,\text{ns}$ und $t_4 = 1\,\text{s}$ ($1\,\text{m} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{cm}$).

4.3.14. 1991 entdeckte der „Fly's Eye detector“ in Utha, U.S.A., einen Schauer von hochenergetischen Teilchen, die von einem ursprünglichen Teilchen mit der enormen Energie $W = 51{,}2\,\text{J}$ erzeugt wurden. Die Identität des ursprünglichen Teilchens konnte nicht genau ermittelt werden, aber es könnte ein Proton gewesen sein, was wir für die weiteren Rechnungen annehmen. In welcher Eigenzeit hätte das Teilchen die Strecke $s = 2 \cdot 10^6\,\text{LJ}$ von der Andromeda-Galaxie zur Erde zurückgelegt? Um welchen Betrag weicht die Geschwindigkeit v des Teilchens von der Lichtgeschwindigkeit ab?

4.3.15. Ein Teilchen der Ladung q und der Masse m bewegt sich mit der Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 0$ und dem Anfangsort $x(0) = 0$ im homogenen elektrischen Feld E.

(a) Berechne die Ortskoordinate $x(t)$. Verwende die Abkürzung $\alpha = \dfrac{m\,c}{e\,E}$ und die Ergebnisse der Aufgabe 4.2.1.

(b) Zeichne $x(t)$ für ein Elektron im Feld $E = 10^5\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$. Verwende die Einheiten $\alpha \mathrel{\widehat{=}} 2\,\text{cm}$ auf der t-Achse und $1\,\text{m} \mathrel{\widehat{=}} 0{,}5\,\text{cm}$ auf der x-Achse.

(c) Durch welche Funktion $\overline{x}(t)$ kann $x(t)$ für $t \gg \alpha$ angenähert werden? Zeichne $\overline{x}(t)$ in das vorhandene Diagramm ein.

4.3.16. Ein überzeugter „Antirelativist“ bringt folgendes Argument: „Ein geladenes Teilchen bewegt sich in einem äußeren elektrischen Feld $\vec{E}$. Das zunächst ruhende Teilchen verliert die potentielle Energie ΔW_{pot} und gewinnt die kinetische Energie ΔW_{kin}. Dabei gilt der Energiesatz $\Delta W_{\text{kin}} + \Delta W_{\text{pot}} = 0$. Die Gesamtenergie des Teilchens ist dann

$$W_{\text{ges}} = m\,c^2 + \Delta W_{\text{kin}} + \Delta W_{\text{pot}} = m\,c^2 \neq \gamma m\,c^2 = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,$$

was einen Widerspruch ergibt.“ Wo steckt der Fehler in dieser Argumentation?

4.3.17. Im LEP (**L**arge **E**lectron-**P**ositron-Collider) am CERN, dem kreisförmigen Beschleuniger mit einem Umfang von 26,7 km, durchlaufen Elektronen die Beschleunigungsspannung $U = 90{,}0\,\text{GV}$ und erreichen dabei die Endgeschwindigkeit $v = \beta\,c$. Die Teilchen werden durch ein Magnetfeld mit der Kraftflussdichte B auf ihre Bahn gezwungen.

(a) Drücke den Lorentzfaktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ durch U und m_{e} aus! Zahlenwert!

(b) Drücke B durch γ, den Bahnradius r und m_{e} aus und berechne dann den Zahlenwert!

4.4 Vierervektoren

4.4.1. Wir nehmen an, dass sich ein Teilchen der Masse m parallel zur x-Achse eines Inertialsystems S bewegt.

(a) Untersuche den Zusammenhang zwischen Viererbeschleunigung $A^\mu = \dfrac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau}$ und Viererkraft F^μ.

(b) Berechne die Invarianten der Vierervektoren X^μ, U^μ, A^μ, P^μ und F^μ.

4.5 Energie-Impuls-Beziehungen

4.5.1. Beweise: Gelten Energie- **und** Impulssatz in einem Inertialsystem S, dann gelten sie in **jedem** Inertialsystem.

Energie und Impuls müssen in der Relativitätstheorie als Einheit betrachtet werden, was ja auch durch den Energie-Impuls-Vierervektor schon deutlich zum Ausdruck kommt. Man spricht also nicht mehr von der Energieerhaltung und der Impulserhaltung, sondern von der **Energie-Impuls-Erhaltung**.

4.5.2. Ein Stoß heißt **elastisch**, wenn die Summe der kinetischen Energien der Teilchen vorher gleich der Summe der kinetischen Energien der Teilchen nachher ist.

Beweise: Ändern sich die Massen der Teilchen bei einem Stoß nicht, dann ist der Stoß elastisch.

4.5.3. Ein Teilchen der Masse m hat im Inertialsystem S die Geschwindigkeit $u = 0{,}6\,c$ und in S' den Impuls $p' = \frac{15}{8}mc$. Berechne die Teilchenenergien W und W' in beiden Systemen, den Impuls p in S, die Geschwindigkeit u' in S' und die Geschwindigkeit v, mit der sich S' relativ zu S bewegt.

4.5.4. Welchen Impuls muß ein Teilchen haben, damit seine kinetische Energie das 1,6-fache seiner Ruhenergie beträgt? Rechne einmal mit und einmal ohne Energie-Impuls-Relation.

4.5.5. Wir betrachten den zentralen, elastischen Stoß von zwei Teilchen mit den Massen m_1 und m_2. Die Geschwindigkeiten der Teilchen vor dem Stoß im Laborsystem L sind v_1 und v_2. Mit S bezeichnen wir das Schwerpunktsystem der beiden Teilchen.

(a) Berechne eine Formel für die Geschwindigkeit v von S relativ zu L.

(b) Welche Geschwindigkeiten V_1 und V_2 haben die Teilchen vor dem Stoß in S?

(c) Schreibe den Energie- und Impulssatz in S hin und berechne die Geschwindigkeiten U_1 und U_2 der Teilchen nach dem Stoß in S. Wie erhält man daraus die Geschwindigkeiten u_1 und u_2 der Teilchen nach dem Stoß in L?

(d) Stelle den Energie- und Impulssatz in L auf und versuche nach u_1 und u_2 aufzulösen. Nach zehn Minuten aufgeben!!

(e) Jetzt sei konkret $v_1 = 0{,}8\,c$, $v_2 = 0$, $m_2 = m$ und $m_1 = 1{,}8\,m$. Berechne wie in den Teilaufgaben (a) bis (c) v, u_1 und u_2. Zeige, dass tatsächlich der Energie- und Impulssatz in L erfüllt ist.

(f) Berechne Formeln für u_1 und u_2 mit einem CAS und überprüfe die Ergebnisse von Teilaufgabe (e).

4.5.6. Eine elektromagnetische Welle transportiert Energie und besitzt daher auch einen Impuls.

(a) Wir betrachten einen Teil einer elektromagnetischen Welle und nennen ihn ein „Lichtteilchen“ (Photon). Welche Masse muss ein Photon haben?

(b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Energie W und dem Impuls p eines Photons?

(c) Welchen Rückstoß erfährt ein Gigawatt-Laser bzw. eine Taschenlampe?

(d) Trifft ein Teilchen auf sein Antiteilchen, dann zerstrahlen die beiden Teilchen in Photonen. Warum müssen dabei mindestens zwei Photonen entstehen? Betrachte den Vorgang im Schwerpunktsystem!

(e) Bei der Photonenrakete wird Materie und Antimaterie im Brennpunkt eines Parabolspiegels zerstrahlt, die Photonen werden dadurch alle in die gleiche Richtung abgestrahlt. Welchen Schub erfährt eine Photonenrakete, die in einer Stunde 1 kg Masse zerstrahlt?

(f) Wieviel Masse muss eine 1000 t schwere Photonenrakete pro Sekunde zerstrahlen, um die Beschleunigung $1\,g$ zu erhalten?

4.5.7. Eine ruhende Rakete der Masse M führt zusätzlich zu M noch Materie und Antimaterie, jeweils der Masse $\frac{m}{2}$, als Treibstoff mit. Nach dem Abbrennen des Treibstoffs hat sich dieser vollständig in Licht (Gammastrahlung) der Energie W_γ verwandelt und die Rakete hat die Geschwindigkeit $v = \beta\, c$ erreicht.

(a) Beweise mit Hilfe des Energie- und Impulssatzes:

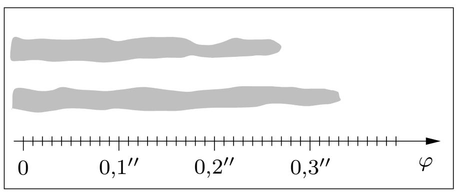
$$\beta = \frac{k^2-1}{k^2+1} \quad \text{mit} \quad k = 1 + \frac{m}{M}$$

(b) Wieviel Treibstoff im Verhältnis zu M muss die Rakete mitführen, um 99,9 % der Lichtgeschwindigkeit zu erreichen?

(c) Wie ändert sich das Ergebnis von Teilaufgabe (b), wenn man berücksichtigt, dass die Rakete auch wieder auf $v = 0$ abbremsen muss?

4.6 Relativistisches Allerlei

4.6.1. Aktive Galaxien senden superschnelle Materieströme (Jets) ins All, die mehrere hunderttausend Lichtjahre lang sein können. Beobachtet werden diese Jets mit Radioteleskopen. Die Abbildung zeigt die Aufnahme einer Jetspitze im



Abstand von genau einem Jahr, die Galaxis ist $1{,}0 \cdot 10^7$ LJ von der Erde entfernt. φ ist der Beobachtungswinkel von der Erde aus. Ermittle die Geschwindigkeit der Jetspitze.

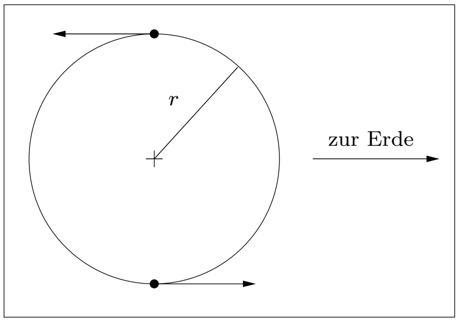
Was kann an diesem Ergebnis nicht stimmen? Die Lösung des Problems liegt darin, dass sich der Jet unter einem Winkel α zur Beobachtungsrichtung auf die Erde zu bewegt. In welchem Bereich muss α liegen, damit es keinen Widerspruch zur Relativitätstheorie gibt?

4.6.2. Doppelsterne senden Gravitationswellen aus

Doppelsternsysteme, deren Komponenten normale Sterne, rote Riesen, weiße Zwerge, Neutronensterne oder schwarze Löcher sein können, senden gemäß der Einsteinschen Gravitationstheorie (allgemeine Relativitätstheorie) Gravitationswellen aus und verlieren dadurch Energie. Die Bahnradien der Sterne werden dabei kleiner (Verlust an potentieller Energie), die Bahngeschwindigkeiten nehmen zu (Gewinn an kinetischer Energie). Insgesamt nimmt also die Umlaufdauer des Systems mit der Zeit ab.

1993 wurde an den Astronomen Joseph Taylor und den Physiker Russel Hulse der Physiknobelpreis verliehen. Sie untersuchten ab 1974 ein System aus zwei Neutronensternen (PSR 1913+16), von denen einer ein Pulsar ist. Pulsare sind schnell rotierende Neutronensterne, die infolge ihres starken Magnetfeldes Radiostrahlung in Richtung der Magnetfeldachse aussenden. Ist die magnetische Achse nicht parallel zur Rotationsachse, dann überstreicht der Radiostrahl wie das Licht eines Leuchtturms ein gewisses Raumgebiet. Befindet sich die Erde in diesem Gebiet, erscheint der Neutronenstern als Pulsar mit einem periodischen Aufblitzen der Radiostrahlung. Die Eigenrotation des Pulsars liegt im Millisekundenbereich (Pulsperiode τ), die Umlaufdauer T des Sterns um den Schwerpunkt im Stundenbereich. Der Dopplereffekt verursacht ein Schwanken der Pulsperiode um einen Mittelwert. Durch eine genaue Analyse der Pulsperiode $\tau(t)$ über einen längeren Zeitraum konnten Taylor und Hulse neben T auch die Umlaufgeschwindigkeiten, die Massen und die Bahndaten der beiden Sterne ermitteln (Keplergesetze). Erschwerend kam hinzu, dass die Bahnen Ellipsen und keine Kreise sind, dass wir von der Erde aus schräg auf die Bahnebene blicken, dass die Laufzeiten der Signale durch die Gravitationsfelder der Sterne verfälcht werden usw. Schließlich konnten sie zeigen, dass die aus den Bahndaten mit Hilfe der Einsteinschen Theorie berechnete Abnahme von $T(t)$ genau den gemessenen Werten entspricht.

Wir betrachten jetzt ein einfacheres System: Zwei Neutronensterne der gleichen Masse m, von denen einer ein Pulsar ist, umrunden ihren gemeinsamen Schwerpunkt auf Kreisbahnen mit dem Radius r, die Bahngeschwindigkeit der Sterne ist $v = \beta\, c$. Weiter nehmen wir an, dass die Erde in der Bahnebene des Systems liegt und 5000 LJ vom System entfernt ist.



(a) Berechne zunächst nichtrelativistisch (klassisch) den Radius r_k der Bahn in Abhängigkeit von β. Berechne (auch klassisch) die freiwerdende Energie ΔW_k, wenn sich der Bahnradius von r_k1 auf r_k2 verringert bzw. die Bahngeschwindigkeit von $v_1 = \beta_1\, c$ auf $v_2 = \beta_2\, c$ erhöht. Wie hängt ΔW_kin mit ΔW_pot zusammen?

(b) Berechne jetzt relativistisch den Radius r der Bahn in Abhängigkeit von β. Berechne dann die freiwerdende Energie ΔW, wenn die Bahngeschwindigkeit von $v_1 = \beta_1\, c$ auf $v_2 = \beta_2\, c$ erhöht wird.

(c) Zeichne den Verlauf von $r(\beta)$ und von $r_\mathrm{k}(\beta)$ in ein Diagramm. Welcher grundsätzliche Unterschied besteht also zwischen der klassischen und der relativistischen Sichtweise?

(d) Auf der Erde misst man zur Zeit $t_0 = 0$ die maximale und minimale Pulsperiode $\tau_\mathrm{max} = 0{,}0590299937\,\mathrm{s}$ und $\tau_\mathrm{min} = 0{,}05892171662\,\mathrm{s}$ sowie die Umlaufdauer $T = 18377{,}0000\,\mathrm{s}$. Berechne die Umlaufgeschwindigkeit $v = \beta\, c$ und die Masse m eines Sterns. Wie groß ist der Bahnradius $r_0 = r(0)$?

(e) Aus der allgemeinen Relativitätstheorie folgt für die Abnahme der Umlaufdauer T mit der Zeit t die Differentialgleichung (G ist die Gravitationskonstante)

$$\dot{T} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha}{T^{\frac{5}{3}}} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{384}{5\,c^2} \cdot \left(2\,\pi^8\, G^5\,(\gamma m)^5\right)^{\frac{1}{3}}$$

Berechne näherungsweise die Änderung Δt der Umlaufdauer nach einem Jahr. Löse die Differentialgleichung nach der Umformung

$$T^{\frac{5}{3}}\,\mathrm{d}T = -\alpha\,\mathrm{d}t$$

durch Integration beider Gleichungsseiten und Anpassung der Integrationskonstanten an den Anfangswert $T(0) = T_0$. Wie groß ist die Lebensdauer t_{max} des Doppelsternsystems, wenn für sein Ende $T = 0$ angenommen wird?

(f) Beweise für unser System das dritte Keplersche Gesetz

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G\,\gamma\,m}{16\,\pi^2}$$

Leite dann für $\beta \ll 1$ die Gleichung

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{(\,G^3\,(\gamma m)^3)}{5\,c^5\,r^3}$$

her und berechne näherungsweise die Verringerung Δr des Bahnradiuses in einem Jahr.

(g) Berechne mit der klassischen Näherung aus Teilaufgabe (a) die durch Gravitationswellen abgestrahlte Leistung des Doppelsterns. Wie groß ist die Intensität der Gravitationswellen am Ort der Erde?

(h) Die Neutronensterne unseres Systems haben den Radius $R = 10\,\mathrm{km}$, d.h. wenn r den Wert $r_1 = r(t_1) = R$ erreicht, wird das System zerstört. Beweise die Gleichung

$$\beta^4 - \beta^6 = k^2 \quad \text{mit} \quad k = \frac{G\,m}{4\,c^2\,r}$$

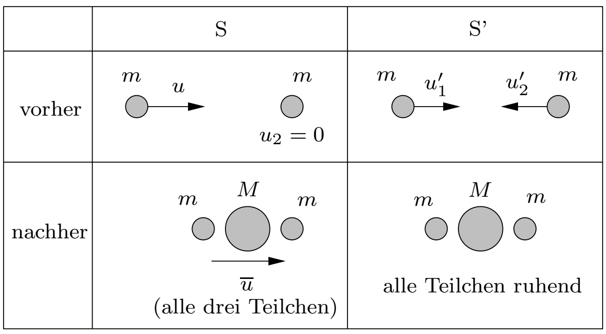
und berechne numerisch $\beta_1 = \beta(t_1)$ unmittelbar vor dem Zusammenstoß. Wie groß sind die Gesamtenergie W_1 und die Umlaufdauer T_1 des Systems beim Zusammenstoß und wann findet er ungefähr statt?

Literatur zum Thema:

H. C. Ohanion, R. Ruffini, *Gravitation and Spacetime*, W. W. Norton & Company, 1994, S. 262
Hubert Gönner, *Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1996, S. 343
K. H. Lotze, *ein Doppelstern sendet Gravitationswellen aus*, in MNU 48/6, 1995, S. 327

4.6.3. Teilchenerzeugung

Im Laborsystem S stößt ein Teilchen der Masse m auf ein ruhendes Teilchen mit der gleichen Masse m. Nach dem Stoß ist ein weiteres Teilchen mit der Masse M vorhanden. Im Schwerpunktsystem S' haben die Teilchen vor dem Stoß die Geschwindigkeiten u_1' und u_2'. Die Relativgeschwindigkeit von S' zu S



sei v. Weiter verwenden wir die Bezeichnungen $\beta = \frac{v}{c}$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

W_k : kinetische Energie des bewegten Teilchens in S vor dem Stoß
W'_k : kinetische Energie **eines** Teilchens in S' vor dem Stoß
W : Gesamtenergie in S
W' : Gesamtenergie in S'

(a) Beweise: $u'_1 = v$ und $u'_2 = -v$.

(b) Beweise: Die Masse M des erzeugten Teilchens ist dann maximal, wenn alle drei Teilchen nach dem Stoß in S' ruhen.

Für das Weitere nehmen wir an, dass M maximal ist, d.h. alle drei Teilchen ruhen nach dem Stoß in S'.

(c) Beweise: $\boxed{W = \gamma W'}$, $\boxed{\gamma = 1 + \frac{M}{2m}}$ und $\boxed{\gamma^2 = \frac{W_\mathrm{k}}{2mc^2} + 1}$

(d) Beweise: $\boxed{\frac{M}{2m} = \sqrt{1+\alpha} - 1}$ mit $\alpha = \frac{W_\mathrm{k}}{2mc^2}$.

Wie vereinfacht sich diese Beziehung für $W_\mathrm{k} \gg mc^2$?

(e) Elementarteilchen werden meist paarweise erzeugt (Teilchen und Antiteilchen). Welche maximale Masse $\overline{M}$ kann ein Teilchen eines Paares haben, das durch Proton-Proton-Stöße erzeugt wird mit
$W_\mathrm{k} = 6{,}4\,\mathrm{GeV}$ (Bevatron in Berkley, 1954)
$W_\mathrm{k} = 900\,\mathrm{GeV}$ (Tevatron am Fermilab, 80-er-Jahre)
$W_\mathrm{k} = 7\,\mathrm{TeV}$ (LHC, Large-Hadron-Collider, CERN, ca. 2005, 27 km Umfang).
Wie stark muss das Magnetfeld im LHC sein?

(f) Drücke W_k durch M und m aus. Wie groß muss W_k sein, um durch einen Proton-Proton-Stoß
  i. ein Proton-Antiproton-Paar
  ii. ein Paar von Higgsteilchen ($\overline{M}c^2 \approx 500\,\mathrm{GeV}$)

zu erzeugen?

(g) Die Kosten eines Ringbeschleunigers sind ungefähr zu seinem Umfang proportional (supraleitende Magnetspulen). Man kann die Teilchen eines Beschleunigers auf ruhende Teilchen schießen (Typ 1, Festtarget) oder die Strahlen von zwei Beschleunigern (einer als Speicherring) frontal aufeinander prallen lassen (Typ 2, Collider). Berechne das Verhältnis der Kosten der beiden Typen in Abhängigkeit von M und m. Es darf vorausgesetzt werden, dass $W_\mathrm{k} \gg mc^2$. Wie groß ist dieses Verhältnis speziell für die Erzeugung von Higgsteilchen? Wie groß wäre der Radius eines Festtargetbeschleunigers mit der gleichen Schwerpunktsenergie wie beim LHC?

4.6.4. Sternzusammenstoß

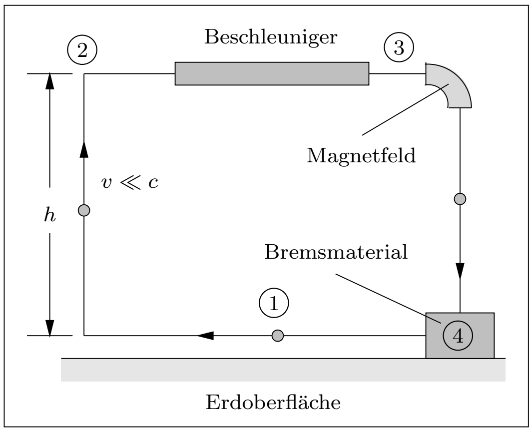
Zwei Sterne mit den Massen $m_1 = 3{,}3 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ und $m_2 = 2{,}6 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ stoßen mit den Geschwindigkeiten $v_1 = 0{,}8\,c$ und $v_2 = -0{,}6\,c$ zusammen und bilden einen neuen Stern.

(a) Berechne die Geschwindigkeit V und die Masse M des neuen Sterns.

(b) Wie groß ist die gesamte kinetische Energie des Systems vor und nach dem Zusammenstoß?

(c) Wir nehmen an, dass die Sterne vor dem Zusammenstoß die gleiche Temperatur haben und die Zunahme der Masse nur auf einer Temperaturerhöhung beruht. Wie groß ist diese Temperaturerhöhung, wenn die spezifische Wärmekapazität der Sternmaterie $c_\mathrm{w} = 25\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg \cdot K}}$ beträgt? Was wird in Wirklichkeit beim Zusammenstoß der Sterne geschehen?

4.6.5. Relativistisches Perpetuum mobile



Ein geladenes Teilchen der Masse m wird mit einer sehr kleinen Geschwindigkeit v von der Erdoberfläche (Lage 1) auf die Höhe h transportiert (Lage 2). Dort wird das Teilchen von einem Beschleuniger auf die Energie $W_3 = \gamma mc^2$ gebracht, von einem Magnetfeld in Richtung Erdoberfläche umgelenkt und am Boden in einem Target (Bremsmaterial) auf $v = 0$ abgebremst. Dann beginnt der Kreislauf von neuem. Pro Kreislauf wird in das Teilchen die Energie

$$W_{\text{in}} = mgh + \underbrace{\gamma mc^2 - mc^2}_{\text{vomBeschleuniger}}$$

gesteckt. Im Target wird pro Kreislauf die Energie

$$W_{\text{out}} = \gamma mc^2 + \gamma mgh - mc^2$$

freigesetzt. Pro Kreislauf wird also die Energie

$$\Delta W = W_{\text{out}} - W_{\text{in}} = (\gamma - 1)mgh$$

gewonnen. Dabei haben wir angenommen, dass sich die relativistische Masse $\mu = \gamma m$ von 3 nach 4 fast nicht vergrößert. Woher stammt ΔW?