

Physik 11. Klasse - Mechanik

Richard Reindl

2007

Die aktuellste Version des Skriptes findet man unter

<http://www.stbit.de>

Das Werk steht unter einer Creative Commons

- Namensnennung
- Nicht-kommerziell
- Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Unported Lizenz

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.de>



8. Oktober 2013

1 Kinematik

1.1 Grundgrößen

1. Basisgröße: Die Zeit (t)

Die Einheiten der Basisgrößen der Physik müssen durch präzise Messverfahren festgelegt werden. 1960 wurde von der 11. Generalkonferenz für Maß und Gewicht das **Internationale Einheitensystem (SI)** eingeführt. Seit 1967 gilt für die Einheit der Zeit:

Eine Sekunde (1 s) ist das 9 192 631 770 fache der Periodendauer der beim Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstruktur-niveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entstehenden Strahlung. (1.1.1)

Die frühere Definition der Sekunde als der 86400ste Teil der Dauer einer Erdrotation ist nicht brauchbar, da die Erdrotation nicht konstant ist (z.B. wegen der Gezeitenreibung).

Die Umsetzung der Sekundendefinition geschieht mit **Atomuhren**:

Die Frequenz f der vom Sender ausgestrahlten Welle ist im Idealfall gleich der Eigenfrequenz $f_0 = 9192631770 \text{ Hz}$ der Cs-Atome. In diesem Fall wird die Strahlung von den Cs-Atomen völlig absorbiert. Weicht f von f_0 ab, dann erreicht ein Teil der Strahlung den Empfänger. In Abhängigkeit von der empfangenen Intensität wird über einen elektronischen Mechanismus f solange reguliert, bis am Empfänger wieder nichts mehr ankommt, d.h. bis f wieder exakt gleich f_0 ist.

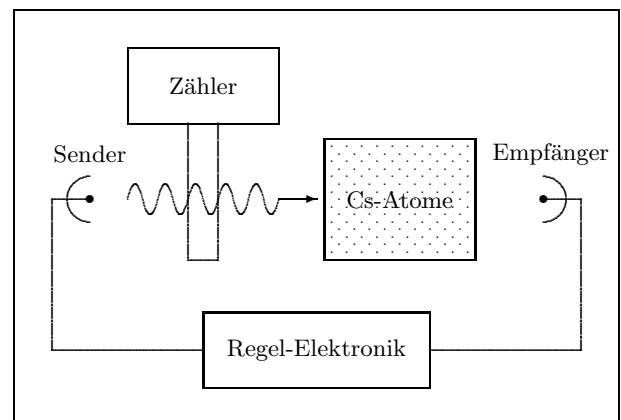


Abb.1.1.1 Atomuhr

Ein Teil der Welle wird vor den Cs-Atomen von einer Antenne aufgenommen und zu einem schnellen elektronischen Zähler geleitet. Die kleinste messbare Zeit beträgt ungefähr eine Periodenlänge $\frac{1}{f_0} \approx 0,1 \text{ ns}$. Bei der Messung von längeren Zeiten wird eine Genauigkeit von $\frac{\Delta t}{t} \approx 10^{-14}$ erreicht, was einer Gangungenauigkeit von 1 s in circa $3 \cdot 10^6$ Jahren entspricht! (Siehe *Physik in unserer Zeit*, 6/77 ($8,5 \cdot 10^{-14}$) und *Die SI-Basiseinheiten*, Physikalisch Technische Bundesanstalt, 1990 ($1,5 \cdot 10^{-14}$))

Neben der Sekunde werden noch folgende Zeiteinheiten verwendet:

1 min = 60 s, 1 h = 3600 s, 1 d = 24 h, 1 a \approx 365,25 d

1 ms = 10^{-3} s (Milli), 1 μ s = 10^{-6} s (Mikro), 1 ns = 10^{-9} s (Nano), 1 ps = 10^{-12} s (Pico).

2. Basisgröße: Die Länge (x, s)

Seit 1983 gilt für die Einheit der Länge:

Ein Meter (1 m) ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum in der Zeit $\Delta t = \frac{1}{299792458} \text{ s}$ zurücklegt. (1.1.2)

Aus (1.1.2) folgt für die Lichtgeschwindigkeit der **exakte** Wert

$$c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1.1.3)$$

Die frühere Definition des Meters als der 40 000 000ste Teil des Erdumfangs ist zu ungenau und messtechnisch schwer umsetzbar.

Für große Entfernungen wird die Längeneinheit

$$1 \text{ Lichtjahr} = 1 \text{ LJ} = c \cdot 1 a \approx 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365,25 s = \underline{\underline{9,4607 \cdot 10^{15} \text{ m}}} \quad (1.1.4)$$

verwendet.

3. Basisgröße: Die Masse (m)

Für die Einheit der Masse gilt seit 1901:

$$\boxed{\text{Ein Kilogramm (1 kg) ist die Masse des Internationalen Kilogrammprototyps.}} \quad (1.1.5)$$

Wägungen durch Vergleich mit dem Kilogrammprototyp sind mit einer relativen Genauigkeit von ca. 10^{-9} möglich. Die Kilogrammdefinition als bestimmtes Vielfaches einer Atommasse (z.B. ^{12}C) ist zur Zeit noch um zwei Größenordnungen ungenauer als die mit dem Prototyp.

1.2 Messfehler

Da die Messung einer physikalischen Größe B immer mit Fehlern behaftet ist, wird zur genauen Bestimmung von B eine Messreihe durchgeführt. B_1, B_2, \dots, B_n seien die n Werte einer Messreihe.

Als genauesten Wert von B nimmt man den **Mittelwert** $[B]$ der einzelnen Messwerte :

$$[B] = \frac{B_1 + B_2 + \dots + B_n}{n} \quad (1.2.1)$$

Die Abweichungen der einzelnen Messwerte vom Mittelwert sind

$$\Delta B_1 = B_1 - [B], \Delta B_2 = B_2 - [B], \dots, \Delta B_n = B_n - [B] \quad (1.2.2)$$

Der Betrag der größten Abweichung vom Mittelwert (**absoluter Fehler**) ist

$$\Delta B = \max(|\Delta B_1|, |\Delta B_2|, \dots, |\Delta B_n|) \quad (1.2.3)$$

Der **relative** oder **prozentuale Fehler** der Messung ist

$$\boxed{\delta_{\text{rel}} = \frac{\Delta B}{[B]} = \frac{\Delta B}{[B]} \cdot 100\%} \quad (1.2.4)$$

Eine ungenaue Größe (z.B. einen Messwert) schreibt man in der Form

$$B = [B] \pm \Delta B \quad (1.2.5)$$

Wir betrachten zwei ungenaue Größen $A = [A] \pm \Delta A$ und $B = [B] \pm \Delta B$. Für die Summe $S = A + B$ gilt

$$S_{\text{min}} = A_{\text{min}} + B_{\text{min}} = [A] - \Delta A + [B] - \Delta B = [A] + [B] - (\Delta A + \Delta B) \quad (1.2.6)$$

$$S_{\text{max}} = A_{\text{max}} + B_{\text{max}} = [A] + \Delta A + [B] + \Delta B = [A] + [B] + (\Delta A + \Delta B) \quad (1.2.7)$$

Damit gilt

$$S = [S] \pm \Delta S \quad \text{mit} \quad [S] = [A] + [B] \quad \text{und} \quad \Delta S = \Delta A + \Delta B \quad (1.2.8)$$

Analog zeigt man für $D = A - B$:

$$D = [D] \pm \Delta D \quad \text{mit} \quad [D] = [A] - [B] \quad \text{und} \quad \Delta D = \Delta A + \Delta B \quad (1.2.9)$$

Der **absolute** Fehler von Summen und Differenzen ungenauer Größen ist die Summe der **absoluten** Fehler der Summanden.

(1.2.10)

Es lässt sich zeigen (siehe Aufgaben)

Der **relative** Fehler von Produkten und Quotienten ungenauer Größen ist ungefähr gleich der Summe der **relativen** Fehler der Faktoren.

(1.2.11)

1.3 Die geradlinig gleichförmige Bewegung

Wir betrachten die Bewegung eines punktförmigen Körpers K entlang einer Geraden (x -Achse). Der Ort x des Körpers ist eine Funktion der Zeit t , das Koordinatensystem (t -Achse nach rechts, x -Achse nach oben) nennt man ein **tx -Diagramm**, der Graf der Funktion $x(t)$ heißt **Weltlinie** (WL) von K.

Eine Bewegung heißt **gleichförmig**, wenn ihr tx -Diagramm eine Gerade ist, d.h. wenn x eine lineare Funktion von t ist:

$$x(t) = x_0 + v \cdot t \quad (1.3.1)$$

mit konstanten Größen v und x_0 .

Den Quotienten aus zurückgelegtem Weg Δx und dazu benötigter Zeit Δt nennt man **Geschwindigkeit**:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \\ &= \frac{x_0 + v \cdot t_2 - (x_0 + v \cdot t_1)}{t_2 - t_1} = \\ &= \frac{v \cdot t_2 - v \cdot t_1}{t_2 - t_1} = v \end{aligned}$$

Die Konstante v in (1.3.1) ist also die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.3.2)$$

v ist die **Steigung** des Grafen von $x(t)$. In der Zeit von t_1 bis t legt der Körper den Weg $\Delta x = v \cdot (t - t_1)$ zurück, d.h. zur Zeit t ist der Körper am Ort

$$x(t) = x(t_1) + v \cdot (t - t_1) \quad (1.3.3)$$

Speziell für $t_1 = 0$ erhält man mit $x(0) = x_0$ wieder (1.3.1):

$$x(t) = x(0) + v \cdot t \quad (1.3.4)$$

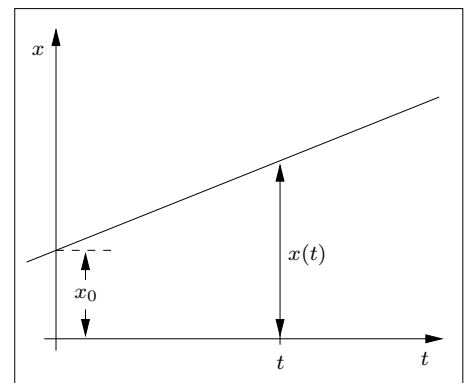


Abb.1.3.1 gleichförmige Bewegung

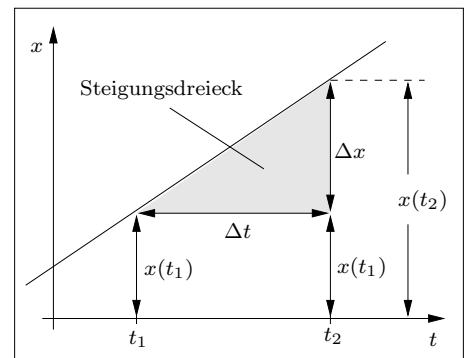


Abb.1.3.2 Δx und Δt

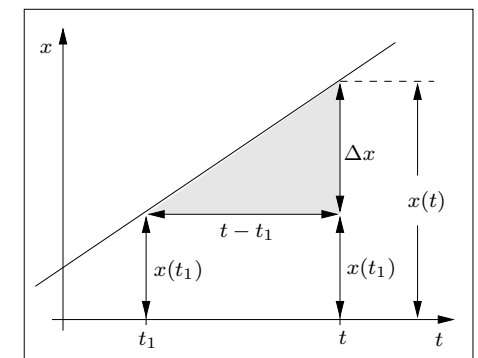


Abb.1.3.3 $x(t) = x(t_1) + v \cdot (t - t_1)$

Und weil es so wichtig ist, noch einmal (1.3.3), zum Einbrennen ins Gehirn:

$$\boxed{\underbrace{x(t)}_{\text{Ort zur Zeit } t} = \underbrace{x(t_1)}_{\text{Startort}} + v \cdot \underbrace{(t - t_1)}_{\text{Fahrzeit}}}$$

(Geradlinig gleichförmige Bewegung, $v = \text{konst.}$)

Die Geschwindigkeit v ist positiv, wenn sich der Körper in Richtung der positiven x -Achse bewegt. Bewegung in Richtung der negativen x -Achse bedeutet ein negatives v .

Zwei Körper mit der gleichen Geschwindigkeit haben parallele Weltlinien.

Eine flache Weltlinie bedeutet eine betragsmäßig kleine Geschwindigkeit, zu einer steilen Weltlinie gehört ein großer Geschwindigkeitsbetrag.

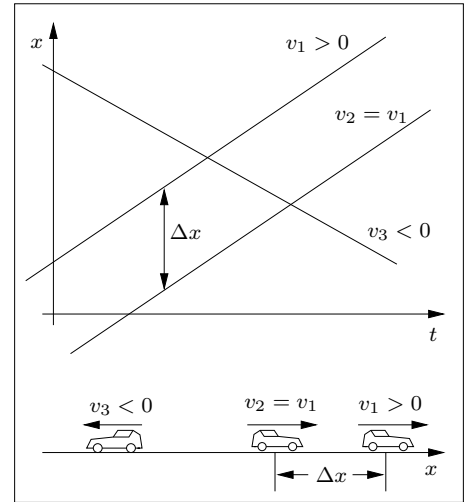


Abb.1.3.4 Vorzeichen von v

Die Weltlinien von zwei Körpern mit $v_2 = -v_1$ (gleicher Geschwindigkeitsbetrag, aber entgegengesetzte Richtung) sind symmetrisch zum Lot vom Schnittpunkt der Weltlinien auf die t -Achse.

Beweis:

$$\begin{aligned} v_2 = -v_1 \wedge v_1 > 0 &\implies |v_2| = v_1 \\ \left. \begin{aligned} \Delta x &= |v_2| \Delta t_2 = v_1 \Delta t_2 \\ \Delta x &= v_1 \Delta t_1 \end{aligned} \right\} &\implies \Delta t_1 = \Delta t_2 \end{aligned}$$

Kongruenz $\implies \varphi_1 = \varphi_2 \implies$ die Beh.

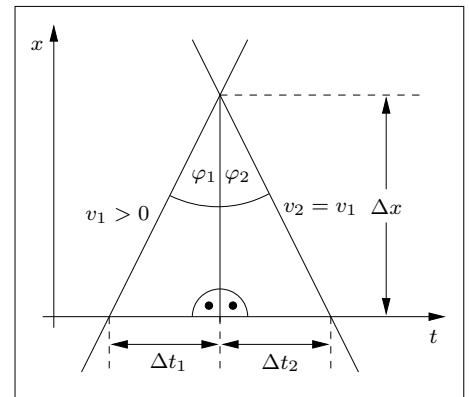


Abb.1.3.5

1.4 Der Weg im tv -Diagramm

Im tv -Diagramm trägt man v als Funktion von t ein. Für die gleichförmige Bewegung ist v konstant, d.h. der Graf von $v(t)$ ist eine Parallele zur t -Achse. Aus (1.3.2) folgt für den Weg Δx , der in der Zeitspanne von t_1 bis t_2 zurückgelegt wird:

$$\boxed{\Delta x = v \cdot \Delta t = v \cdot (t_2 - t_1)} \quad (1.4.1)$$

Abb.1.4.1 entnimmt man, dass Δx gleich der markierten Fläche ist, d.h. es gilt der Satz:

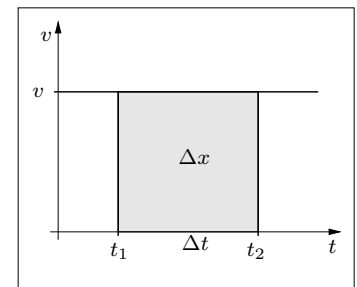


Abb.1.4.1 tv -Diagramm

$$\boxed{\text{Für eine gleichförmige Bewegung ist der Weg gleich der Fläche unter dem } tv\text{-Diagramm.}} \quad (1.4.2)$$

Als Beispiel betrachten wir eine Bewegung mit $x(0) = 0$ und mit der Geschwindigkeit

$$v(t) = \begin{cases} 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} & \text{für } 0 \leq t \leq 5 \text{ s} = t_1 \\ -10 \frac{\text{m}}{\text{s}} & \text{für } 5 \text{ s} \leq t \leq 7 \text{ s} = t_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $0 \leq t \leq 5 \text{ s}$ gilt

$$x(t) = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t \implies x(5 \text{ s}) = 20 \text{ m}$$

Für $5 \text{ s} < t \leq 7 \text{ s}$ gilt

$$x(t) = 20 \text{ m} + \left(-10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot (t - 5 \text{ s}) =$$

$$= 70 \text{ m} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t \implies x(7 \text{ s}) = 0$$

$$\Delta x_{01} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (t_1 - t_0) = \underline{\underline{20 \text{ m}}}, \quad \Delta x_{12} = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (t_2 - t_1) = \underline{\underline{-20 \text{ m}}}$$

Das Beispiel zeigt:

Flächen unterhalb der t -Achse im tv -Diagramm sind negative Wege!

(1.4.3)

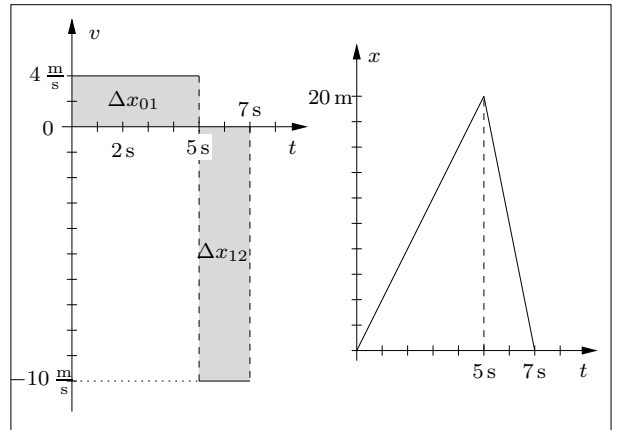


Abb.1.4.2 Fahrtenschreiber

Zur Berechnung des in der Zeit von T_1 bis T_2 zurückgelegten Weges Δx bei einer nicht konstanten Geschwindigkeit $v(t)$ zerlegt man das Zeitintervall $[T_1, T_2]$ in n Teilintervalle der Breite

$$\Delta t = \frac{T_2 - T_1}{n} \quad (1.4.4)$$

Dabei wird n so groß gewählt, dass v in den dann sehr kleinen Teilintervallen nahezu konstant bleibt. Der im ν -ten Teilintervall zurückgelegte

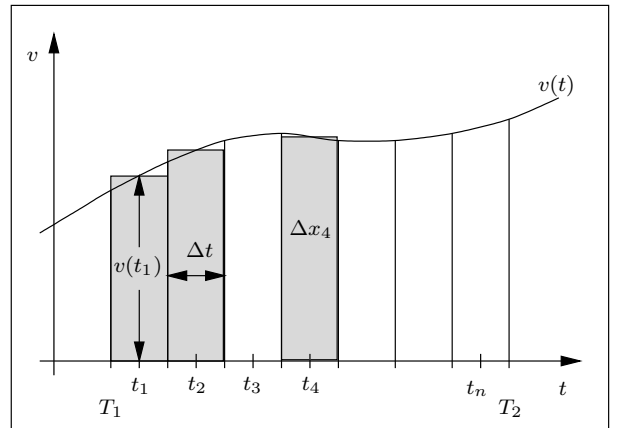


Abb.1.4.3 v nicht konstant

Weg Δx_ν ist dann in guter Näherung (die Näherung ist umso besser, je kleiner Δt ist) gleich Δt mal der Geschwindigkeit zur Zeit t_ν in der Mitte des Intervalls. Die Zeit in der Mitte des ersten Intervalls ist

$$t_1 = T_1 + \frac{\Delta t}{2}, \quad (1.4.5)$$

für die Zeiten in der Mitte der anderen Intervalle gilt

$$t_2 = t_1 + 1 \cdot \Delta t, \quad t_3 = t_1 + 2 \cdot \Delta t, \quad \dots \quad t_n = t_1 + (n - 1) \cdot \Delta t \quad (1.4.6)$$

Mit dem im ν -ten Teilintervall zurückgelegten Weg $\Delta x_\nu \approx v(t_\nu) \cdot \Delta t$ folgt dann für den ganzen in der Zeit von T_1 bis T_2 zurückgelegten Weg

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n \approx \Delta t \cdot [v(t_1) + v(t_2) + \dots + v(t_n)]$$

(1.4.7)

(Mittelpunktsregel oder Mid-Point-Rule)

Wenn Δt immer kleiner gewählt wird, wird (1.4.7) immer genauer. Im Grenzfalle mit $\Delta t \rightarrow 0$ geht das Ungefährzeichen in ein Gleichheitszeichen über:

$$\Delta x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{ \Delta t \cdot [v(t_1) + v(t_2) + \dots + v(t_n)] \} = \text{Fläche unter dem } tv\text{-Diagramm}$$

(1.4.8)

Als Beispiel betrachten wir die Bewegung mit der Geschwindigkeit

$$v(t) = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10^{-\frac{t^2}{100\text{s}^2}}$$

Gesucht ist der Weg, der im Zeitintervall $[0; 5\text{s}]$ zurückgelegt wird. Wir wählen $\Delta t = 0,5\text{s}$:

$$\Delta x = 0,5\text{s} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \left[10^{-\frac{0,25^2}{100}} + 10^{-\frac{0,75^2}{100}} + 10^{-\frac{1,25^2}{100}} + \dots + 10^{-\frac{4,75^2}{100}} \right] = \underline{\underline{16,74894208\text{ m}}}$$

Verglichen mit dem auf zehn geltende Ziffern genauen Wert $\Delta x = 16,74354355\text{ m}$ ist der relative Fehler unseres Näherungswertes nur $\delta_{\text{rel}} = 0,032\%$.

1.5 Momentangeschwindigkeit

Wir betrachten die Bewegung eines punktförmigen Körpers K entlang einer Geraden (x -Achse). Der Ort x des Körpers ist eine beliebige (nicht notwendig lineare) Funktion der Zeit t . t_1 und t_2 sind zwei beliebige Zeiten, $x_1 = x(t_1)$ und $x_2 = x(t_2)$. Meistens wählt man $t_1 < t_2$ (muss aber nicht sein). Mit den Abkürzungen

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad \text{und} \quad \Delta x = x(t_2) - x(t_1) \quad (1.5.1)$$

definiert man die **mittlere Geschwindigkeit** im Intervall $[t_1, t_2]$

$$\bar{v} = v_{12} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (1.5.2)$$

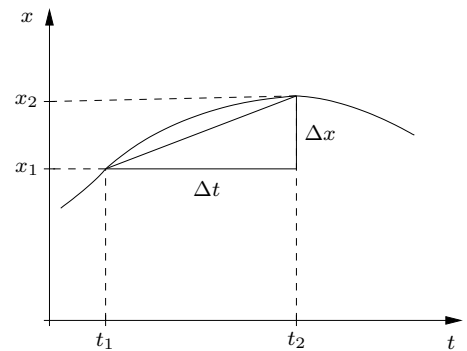


Abb.1.5.1 mittlere Geschwindigkeit

Die mittlere Geschwindigkeit oder auch Durchschnittsgeschwindigkeit gibt an, wie schnell sich K von x_1 nach x_2 bewegen würde, wenn die Geschwindigkeit konstant wäre.

Betrachten wir als Beispiel einen Stein, der zur Zeit t_1 vom Boden (x_1) senkrecht nach oben geworfen wird und zur Zeit t_2 wieder auf dem Boden landet ($x_2 = x_1$). Die mittlere Geschwindigkeit für die ganze Bewegung ist wegen $\Delta x = x_2 - x_1 = 0$ ebenfalls null: $\bar{v} = 0$. Dieses Beispiel zeigt, dass die Angabe der mittleren Geschwindigkeit nicht die ganze Information über das Bewegungsverhalten des Körpers enthält, da der Stein im Intervall $[t_1, t_2]$ ja verschiedenste positive und negative Geschwindigkeiten besitzt.

Wir müssen uns jetzt überlegen, wie wir die **Momentangeschwindigkeit** $v(t)$ zu einer bestimmten Zeit t definieren, das ist die Geschwindigkeit, die z.B. der Tacho eines Autos anzeigt. Dazu betrachten wir als Beispiel eine Bewegung, für deren Ortskoordinate

$$x(t) = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 \quad (1.5.3)$$

gilt. Wir versuchen herauszufinden, wie groß die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 1\text{s}$ und am Ort $x(1\text{s}) = 0,5\text{m}$ ist. Dazu berechnen wir die mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[t, t + \Delta t] = [1\text{s}, 1\text{s} + \Delta t]$ für verschiedene Werte von Δt . Wir beginnen mit $\Delta t = \Delta t_0 = 1\text{s}$:

$$\bar{v} = \frac{x(2\text{s}) - x(1\text{s})}{1\text{s}} = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1.5.4)$$

In folgender Tabelle sind die mittleren Geschwindigkeiten für verschiedene Werte von Δt zusammengestellt:

Δt in s	1	0,5	0,1	0,01
v in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	1,5	1,25	1,05	1,005

Der Tabelle entnimmt man, dass sich \bar{v} immer mehr an den Wert $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ annähert, wenn Δt immer kleiner wird. Eine Tabelle ist aber kein Beweis, daher untersuchen wir \bar{v} etwas genauer:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (t + \Delta t)^2 - 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2}{\Delta t} = \\ &= 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

(1.5.5) zeigt direkt, dass sich \bar{v} mit immer kleiner werdendem Δt immer mehr an $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ annähert. Man sagt dazu, der **Grenzwert** von \bar{v} mit Δt gegen null ist $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ oder in der Formelschreibweise

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(1 \text{ s} + \Delta t) - x(1 \text{ s})}{\Delta t} = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1.5.6)$$

$v(1 \text{ s}) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist die Momentangeschwindigkeit unserer Bewegung zur Zeit 1 s. Geometrisch gesehen ist die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} die Steigung der Sehne \overline{AP} in Abb.1.5.2. Rückt P immer näher an A heran ($\Delta t \rightarrow 0$), dann geht die Gerade AP immer mehr in die Tangente an den Grafen im Punkt A über. Die Momentangeschwindigkeit zur Zeit t ist also die Steigung der Tangente an den Grafen von $x(t)$.

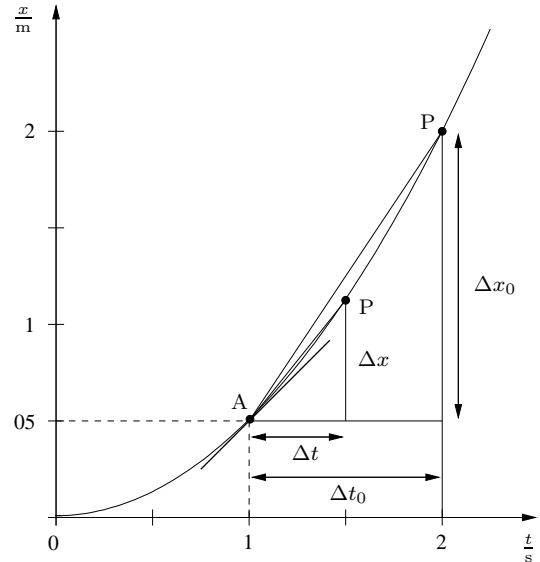


Abb.1.5.2 Momentangeschwindigkeit

Grenzwerte wie in (1.5.6) kommen in der Physik und Mathematik häufig vor. Man definiert für eine Funktion $f(x)$ (Sprechweise: f -Strich von x gleich df nach dx):

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1.5.7)$$

heißt **Ableitung** der Funktion f nach der Variablen x . $f'(x)$ ist die Steigung der Tangente an den Grafen von f im Punkt $(x|f(x))$ oder kurz „die Steigung von f an der Stelle x “. Die Ableitung einer Funktion nach der Zeit t wird nicht mit einem Strich, sondern mit einem Punkt über dem Funktionssymbol bezeichnet. Damit lautet die Definition der Momentangeschwindigkeit

$$\boxed{v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}} \quad (1.5.8)$$

Die Ableitung $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ heißt auch **Differentialquotient** der Funktion $x(t)$, den Bruch $\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ nennt man den **Differenzenquotienten**.

Als Beispiel betrachten wir die Bewegung mit $x(t) = \frac{a}{2} t^2$ und berechnen $v(t)$:

$$\begin{aligned} v(t) = \dot{x}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{2}(t + \Delta t)^2 - \frac{a}{2}t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{a}{2} \cdot \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} \right] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{a}{2} \cdot \frac{t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{a}{2} \cdot (2t + \Delta t) \right] = at \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

$$\boxed{x(t) = \frac{a}{2} t^2 \implies v(t) = at} \quad (1.5.10)$$

1 Kinematik

Zur näherungsweise Berechnung der Momentangeschwindigkeit verwendet man den (einseitigen) Differenzenquotienten mit einem kleinen Δt :

$$v(t) \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (1.5.11)$$

Bei Verwendung des Taschenrechners darf Δt aber nicht zu klein sein, da sonst die Rundungsfehler zu groß werden. Bei einem Rechner mit zehn Stellen ist $\Delta t = 10^{-5}$ Zeiteinheiten eine gute Wahl.

Noch genauer geht die näherungsweise Berechnung der Momentangeschwindigkeit mit dem **beidseitigen** Differenzenquotienten:

$$v(t) \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (1.5.12)$$

Abb.1.5.3 zeigt deutlich, dass die Steigung von AC genauer der Tangentensteigung entspricht als die Steigung von BC.

Als Beispiel berechnen wir die Geschwindigkeit der Bewegung mit $x(t) = 3 \text{ m} \cdot \sin\left(2 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right)$ zur Zeit $t = 1 \text{ s}$ mit $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$:

exakt gilt (10 geltende Ziffern):

$$v(1 \text{ s}) = -2,496881019 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

einseitiger Differenzenquotient:

$$v_e(1 \text{ s}) = \frac{x(1,0001 \text{ s}) - x(1 \text{ s})}{0,0001 \text{ s}} = -2,497426581 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

beidseitiger Differenzenquotient:

$$v_b(1 \text{ s}) = \frac{x(1,0001 \text{ s}) - x(0,9999 \text{ s})}{0,0002 \text{ s}} = -2,496881003 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

v_e stimmt auf vier geltende Ziffern, v_b dagegen auf acht geltende Ziffern mit dem exakten Ergebnis überein. Die relativen Fehler der Näherungen sprechen für sich:

$$\delta_e = 2 \cdot 10^{-4} \quad \text{und} \quad \delta_b = 7 \cdot 10^{-9} \quad (1.5.13)$$

Abb.1.5.4 zeigt einige Zusammenhänge zwischen den Grafen von x und v :

- $v > 0$: x wird größer,
Bewegung in positive x -Richtung
- $v < 0$: x wird kleiner,
Bewegung in negative x -Richtung

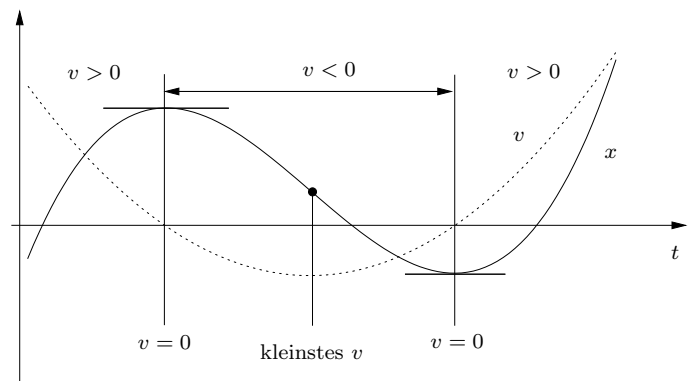


Abb.1.5.4 Zusammenhang zwischen $x(t)$ und $v(t)$

$x(t)$	$v(t)$
waagrechte Tangente (Steigung null)	$v = 0$
steil	großer Geschwindigkeitsbetrag
flach	kleiner Geschwindigkeitsbetrag
steigend	$v > 0$
fallend	$v < 0$

1.6 Die Beschleunigung

Die Geschwindigkeit eines Körpers ist die Ableitung der Ortsfunktion $x(t)$ nach der Zeit. Die Geschwindigkeit $v = \dot{x}$ gibt also an, wie schnell sich der Ort des Körpers mit der Zeit ändert: v ist die **Änderungsrate** des Ortes.

Analog definiert man die **Beschleunigung** a eines Körpers als die Änderungsrate seiner Geschwindigkeit:

$$a(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad (1.6.1)$$

Die Beschleunigung gibt also an, wie schnell sich die Geschwindigkeit eines Körpers ändert.

Die Beschleunigung $a(t)$ ist die Steigung im tv -Diagramm.

Die mittlere Beschleunigung im Intervall $[t, t + \Delta t]$ ist

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad (1.6.2)$$

Als Beispiel berechnen wir die mittlere Beschleunigung eines Autos, das in 10s von null auf $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ beschleunigt:

$$\bar{a} = \frac{100 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{10 \text{s}} = \frac{100 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3,6 \cdot 10 \text{s}} = 2,78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Das Beispiel zeigt, dass die natürliche Einheit der Beschleunigung $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ist.

Aus $a(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv}{dt}$ und $v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ folgt

$$a(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv}{dt} = \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.6.3)$$

Folgende Tabelle stellt die Eigenschaften der Größen Geschwindigkeit und Beschleunigung einander gegenüber:

Geschwindigkeit	Beschleunigung
Die Geschwindigkeit ist die Änderungsrate des Ortes.	Die Beschleunigung ist die Änderungsrate der Geschwindigkeit.
Mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[t, t + \Delta t]$:	Mittlere Beschleunigung im Intervall $[t, t + \Delta t]$:
$\bar{v} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$	$\bar{a} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$
Momentangeschwindigkeit:	Momentanbeschleunigung:
$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$	$a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v}(t)$
Näherung:	Näherung:
$v(t) \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t}$	$a(t) \approx \frac{v(t + \Delta t) - v(t - \Delta t)}{2\Delta t}$
v ist die Steigung im tx -Diagramm	a ist die Steigung im tv -Diagramm
Δx gleich Fläche unter dem tv -Diagramm	Δv gleich Fläche unter dem ta -Diagramm

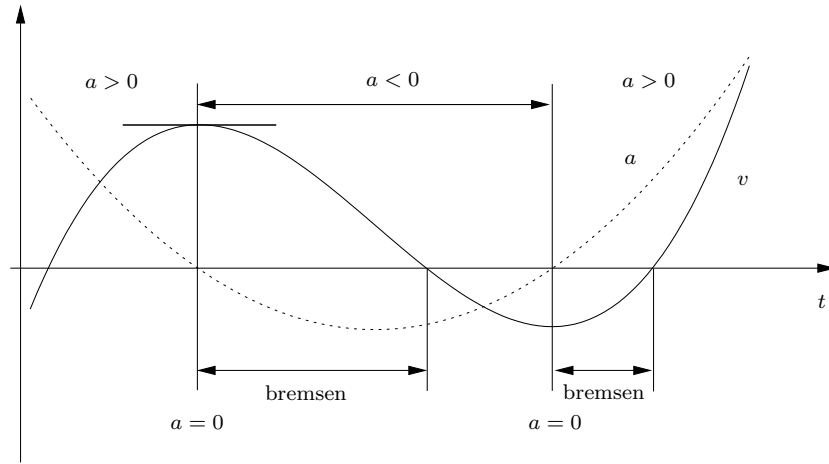


Abb.1.6.1 Zusammenhang zwischen $v(t)$ und $a(t)$

Ein Körper wird **gebremst**, wenn sein Geschwindigkeits**betrag** kleiner wird. Das ist in dann der Fall, wenn entweder $v > 0$ und $a < 0$ ist oder wenn $v < 0$ und $a > 0$ ist:

$$v(1\text{ s}) = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ und } v(4\text{ s}) = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \implies a = \frac{4 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4\text{ s} - 1\text{ s}} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v(1\text{ s}) = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ und } v(4\text{ s}) = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \implies a = \frac{-4 \frac{\text{m}}{\text{s}} - (-10 \frac{\text{m}}{\text{s}})}{4\text{ s} - 1\text{ s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

bremsen \iff $ v $ wird kleiner \iff v und a verschiedene Vorzeichen	(1.6.4)
--	---------

1.7 Die Bewegung mit konstanter Beschleunigung

Wir untersuchen die Bewegung mit konstanter Beschleunigung a . Aus dem Satz

„Geschwindigkeitsänderung gleich Fläche unter dem ta -Diagramm“

folgt

$$\Delta v = v(t) - v(t_1) = a(t - t_1) \quad (1.7.1)$$

oder

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t) - v(t_1)}{t - t_1} \quad (1.7.2)$$

Aus (1.7.1) folgt

$v(t) = v(t_1) + a(t - t_1)$	(1.7.3)
------------------------------	---------

Speziell für $t_1 = 0$, $t_2 = t$ und $v(t_1) = v(0) = v_0$ folgt aus (1.7.3)

$$v(t) = v_0 + at \quad (1.7.4)$$

v ist also eine lineare Funktion von t .

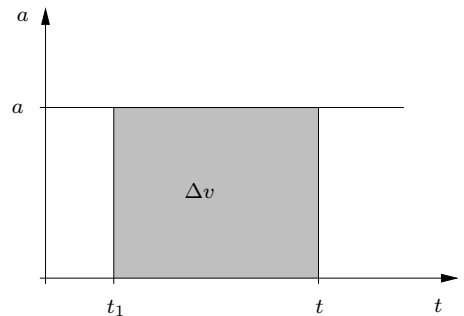


Abb.1.7.1 konstantes a

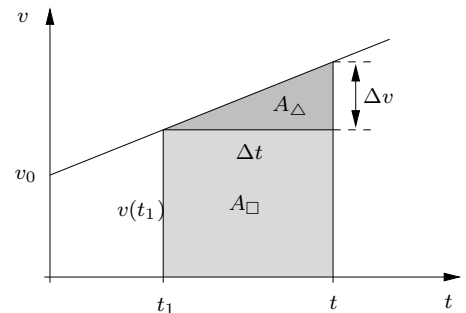


Abb.1.7.2 tv -Diagramm für $a = \text{konst.}$

Aus dem Satz „Wegänderung gleich Fläche unter dem tv -Diagramm“ folgt mit $\Delta v = a(t - t_1)$

$$\begin{aligned} \Delta x = x(t) - x(t_1) &= \underbrace{v(t_1) \cdot (t - t_1)}_{A_{\square}} + \underbrace{\frac{1}{2} \Delta t \Delta v}_{A_{\Delta}} = \\ &= v(t_1) \cdot (t - t_1) + \frac{a}{2} (t - t_1)^2 \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

oder

$$\boxed{x(t) = x(t_1) + v(t_1) \cdot (t - t_1) + \frac{a}{2} (t - t_1)^2} \quad (1.7.6)$$

Das tx -Diagramm der Bewegung mit konstanter Beschleunigung ist also eine Parabel. Die Scheitelkoordinate t_s dieser Parabel findet man aus der Tatsache, dass die Tangente an die Parabel im Scheitel waagrecht ist, also die Steigung null hat. Daher ist $v(t_s) = v(t_1) + a(t_s - t_1) = 0$:

$$\implies t_s = t_1 - \frac{v(t_1)}{a} \quad (1.7.7)$$

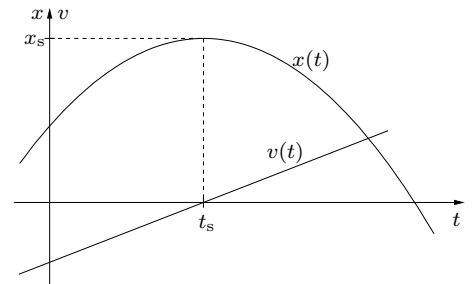


Abb.1.7.3 tx - und tv -Diagramm

Speziell für $t_1 = 0$, $t_2 = t$, $v(t_1) = v(0) = v_0$ und $x(t_1) = x(0) = x_0$ folgt aus (1.7.6)

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2} \quad (1.7.8)$$

Ein noch speziellerer Spezialfall: Beschleunigung aus dem Stand ($v_0 = 0$) vom Ursprung der x -Achse weg ($x_0 = 0$) und Start der Stoppuhr beim Start der Bewegung:

$$\boxed{x(t) = \frac{a}{2} t^2} \quad (1.7.9)$$

Zur Überprüfung unserer Ergebnisse wenden wir die Definitionen (1.5.8) und (1.6.1) auf (1.7.6) an. Mit $x_1 = x(t_1)$ und $v_1 = v(t_1)$ ist

$$\begin{aligned} v(t) = \dot{x}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_1 + v_1(t + \Delta t - t_1) + \frac{a}{2}(t + \Delta t - t_1)^2 - (x_1 + v_1(t - t_1) + \frac{a}{2}(t - t_1)^2)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \Delta t + \frac{a}{2} ((t - t_1)^2 + 2(t - t_1)\Delta t + \Delta t^2) - (t - t_1)^2}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \Delta t + \frac{a}{2} (2(t - t_1)\Delta t + \Delta t^2)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[v_1 + \frac{a}{2} (2(t - t_1) + \Delta t) \right] = v_1 + a(t - t_1) \end{aligned} \quad (1.7.10)$$

in Übereinstimmung mit (1.7.3). Weiter gilt

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 + a(t + \Delta t - t_1) - (v_1 + a(t - t_1))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a \Delta t}{\Delta t} = a \end{aligned} \quad (1.7.11)$$

Die Beschleunigung der durch (1.7.6) gegebenen Bewegung ist also tatsächlich a .

Ein Auto fährt zur Zeit $t < 0$ mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 und beginnt zur Zeit $t_0 = 0$ einen Bremsvorgang mit der konstanten Beschleunigung $a < 0$. Für $t \geq 0$ ist die Geschwindigkeit des Autos

$$v(t) = v_0 + at \quad (1.7.12)$$

Das Auto kommt zur Zeit t_1 zum Stillstand:

$$v(t_1) = v_0 + at_1 = 0 \implies t_1 = -\frac{v_0}{a} \quad (1.7.13)$$

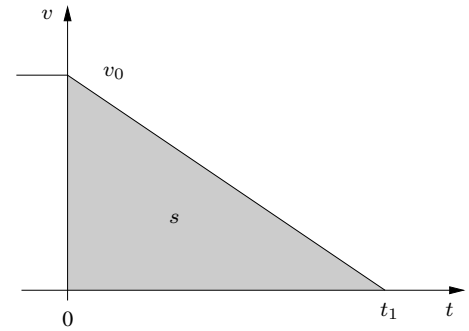


Abb.1.7.4 Bremsweg

Abb.1.7.4 entnimmt man für den Bremsweg s :

$$s = \frac{1}{2}v_0t_1 = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2|a|} \quad (1.7.14)$$

(1.7.14) folgt auch aus (1.7.8) mit $x_0 = 0$:

$$s = x(t_1) = v_0t_1 + \frac{a}{2}t_1^2 = -\frac{v_0^2}{a} + \frac{v_0^2}{2a} = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2|a|} \quad (1.7.15)$$

Zusammenfassung der Formeln für die Bewegung mit konstanter Beschleunigung a :

Anfangsbedingungen	$v(t)$	$x(t)$
$x(t_1) = x_1, v(t_1) = v_1$	$v(t) = v_1 + a(t - t_1)$	$x(t) = x_1 + v_1(t - t_1) + \frac{a}{2}(t - t_1)^2$
$x(0) = x_0, v(0) = v_0$	$v(t) = v_0 + at$	$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{a}{2}t^2$
$x(0) = 0, v(0) = 0$	$v(t) = at$	$x(t) = \frac{a}{2}t^2$

1.8 Der freie Fall

Der Versuch mit der Gänseedaune und dem Bleibatzen im luftleeren Glasrohr zeigt:

$$\text{Im Vakuum, d.h. ohne Luftwiderstand, fallen alle Körper gleich schnell.} \quad (1.8.1)$$

Experimente, z.B. mit dem Stroboskop (siehe Aufgaben), ergeben für die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche den Mittelwert

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (1.8.2)$$

Genauere Messungen zeigen, dass g , abhängig von der geografischen Lage und der Höhe, leichten Schwankungen unterworfen ist (alle Werte auf (Meereshöhe):

Ort	N- oder S-Pol	Äquator	45° nördl. Breite
g	$9,832 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$9,780 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Insbesondere wird g mit zunehmender Höhe immer kleiner. Genaueres dazu erfahren wir später im Kapitel über das Gravitationsgesetz. Bis zu einer Höhe von 30 km wird g ungefähr um ein Prozent kleiner.

Bemerkenswert ist, dass in (1.8.1) und (1.8.2) unser erstes physikalisches Gesetz steckt, alles Bisherige waren nur Definitionen (Geschwindigkeit, Beschleunigung). Natürlich stecken auch schon in der Möglichkeit der eindeutigen Definition der Grundgrößen Zeit, Länge und Masse Gesetzmäßigkeiten der Natur, vor allem die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.

Da g also für kleine Fallhöhen in sehr guter Näherung als Konstante gesehen werden kann, ist der freie Fall ohne Luftwiderstand eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung.

Als Beispiel betrachten wir den freien Fall aus der Höhe h mit der Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 0$. Es gibt zwei sinnvolle Möglichkeiten für die Wahl der x -Achse:

x -Achse zeigt nach oben

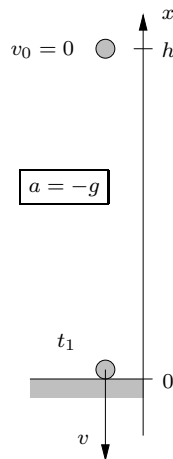


Abb.1.8.1

$$\begin{aligned}
 x(0) = h &\implies x(t) = h - \frac{g}{2} t^2 \\
 x(t_1) = 0 &\implies h - \frac{g}{2} t_1^2 = 0 \\
 t_1 &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \\
 v_1 = v(t_1) &= -gt_1 = -\sqrt{2gh}
 \end{aligned}$$

x -Achse zeigt nach unten

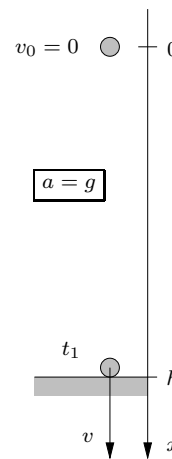


Abb.1.8.2

$$\begin{aligned}
 x(0) = 0 &\implies x(t) = \frac{g}{2} t^2 \\
 x(t_1) = h &\implies \frac{g}{2} t_1^2 = h \\
 t_1 &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \\
 v_1 = v(t_1) &= gt_1 = \sqrt{2gh}
 \end{aligned}$$

1.9 Bewegte Bezugssysteme

Eine Bewegung $x = x(t)$ wird in einem Koordinatensystem S beschrieben. Oft ist es vorteilhaft, die Bewegung in einem relativ zu S bewegten System S' zu beschreiben. Der Ursprung O des Systems S hat in S' die x' -Koordinate η , der Ursprung O' von S' hat in S die x -Koordinate ξ (siehe Abbildung). Die x -

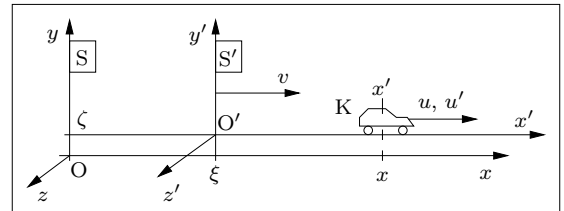


Abb.1.9.1 Bewegte Bezugssysteme

und x' -Achse liegen aufeinander (in der Zeichnung der Deutlichkeit halber etwas versetzt dargestellt), y -Achse \parallel y' -Achse und z -Achse \parallel z' -Achse. Der Abbildung entnimmt man:

$$\begin{array}{|l}
 x = x' + \xi \\
 y = y' \\
 z = z'
 \end{array}
 \quad \text{oder} \quad
 \begin{array}{|l}
 x' = x - \xi \\
 y' = y \\
 z' = z
 \end{array}
 \tag{1.9.1}$$

S' bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = v_{S'/S}$ relativ zu S; v ist gleich der Geschwindigkeit des Ursprungs O' im System S. Da O' in S die x -Koordinate ξ besitzt, ist

$$v = \dot{\xi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \tag{1.9.2}$$

Wegen $\eta = -\xi$ gilt für die Geschwindigkeit $v_{S'}$ von S relativ zu S':

$$v_{S'} = \dot{\eta} = -\dot{\xi} = -v_{S'/S} = -v \tag{1.9.3}$$

Bewegt sich ein Körper K relativ zu S' mit der (nicht notwendig konstanten!) Geschwindigkeit $u' = \dot{x}'$, dann folgt aus (1.9.1) und (1.9.2) für seine Geschwindigkeit $u = \dot{x}$ relativ zu S:

$$\begin{aligned} u &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x'(t + \Delta t) + \xi(t + \Delta t) - (x'(t) + \xi(t))}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{x'(t + \Delta t) - x'(t)}{\Delta t} + \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \right) = u' + v \end{aligned} \quad (1.9.4)$$

$$\boxed{u = u' + v} \quad (1.9.5)$$

Wir haben nebenbei den Satz für die Ableitung einer Summe zweier Funktionen bewiesen:

$$\boxed{a = b + c \implies \dot{a} = \dot{b} + \dot{c}} \quad (1.9.6)$$

Für die Beschleunigungen $a = \dot{u}$ bzw. $a' = \dot{u}'$ des Körpers K in S bzw. S' und die Beschleunigung $b = \dot{v}$ von S' relativ zu S folgt aus (1.9.5) und (1.9.6):

$$\boxed{a = \dot{u} = \dot{u}' + \dot{v} = a' + b} \quad (1.9.7)$$

Bewegt sich S' parallel zur x-Achse mit der **konstanten** Geschwindigkeit $v_{S'S} = v$ relativ zu S und befinden sich O und O' zur Zeit Null am gleichen Ort ($\xi(0) = 0$), dann ist $\xi(t) = v \cdot t$ und (1.9.1) geht über in:

$$\boxed{x = x' + v \cdot t \quad \text{bzw.} \quad x' = x - v \cdot t} \quad (1.9.8)$$

Galilei-Transformation

Für $v = \text{konst.}$ ist $b = \dot{v} = 0$ und aus (1.9.7) folgt:

$$\boxed{a = a'} \quad (1.9.9)$$

1.10 Zweidimensionale Bewegungen

Rechenregeln für Vektoren

Um vom Punkt A($a_x|a_y$) zum Punkt B($b_x|b_y$) zu kommen, muss man sich von A aus um die Strecke $\Delta x = b_x - a_x$ in x-Richtung und um $\Delta y = b_y - a_y$ in y-Richtung bewegen. Diese Bewegung wird durch den **Vektor**

$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \end{pmatrix} \quad (1.10.1)$$

beschrieben. Parallele Vektoren mit gleicher Orientierung und gleicher Länge sind gleich! In Abb.1.10.1 gilt: $\vec{r} = \vec{s}$.

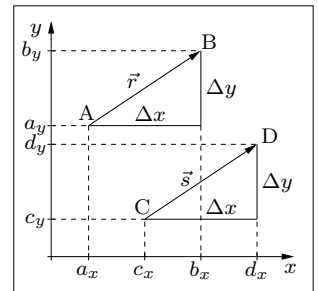


Abb.1.10.1 Definition des Vektors

Die Summe zweier Vektoren

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

wird so definiert, dass dadurch die Hintereinanderausführung der beiden durch \vec{a} und \vec{b} gegebenen Bewegungen beschrieben wird. Dabei gilt (siehe Abb.1.10.2):

$$\boxed{\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}} \quad (1.10.2)$$

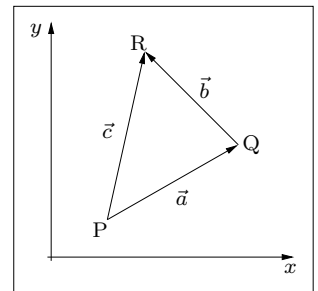


Abb.1.10.2 Summe

Die Differenz zweier Vektoren \vec{b} und \vec{a} ist so definiert, dass

$$\vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b} \quad (1.10.3)$$

gilt. Aus (1.10.2) folgt:

$$\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \end{pmatrix} \quad (1.10.4)$$

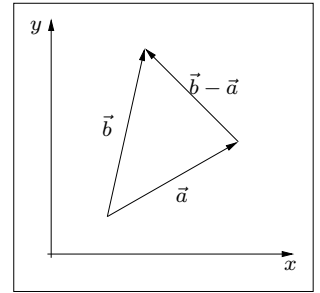


Abb.1.10.3 Differenz

Für die Multiplikation eines Vektors mit einem **Skalar** (einer normalen Zahl) gilt:

$$\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_x \\ \alpha \cdot a_y \end{pmatrix} \quad (1.10.5)$$

Der Betrag eines Vektors ist nichts anderes als seine Länge. Aus dem Pythagoras folgt:

$$a = |\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (1.10.6)$$

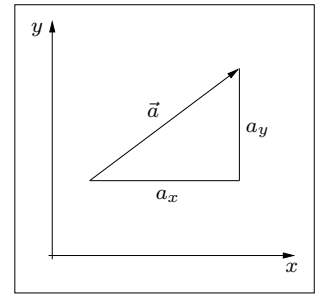


Abb.1.10.4 Betrag

Geschwindigkeit und Beschleunigung

Ein Körper befindet sich zur Zeit t am Ort P(x|y) mit

$$x = x(t) \quad \text{und} \quad y = y(t) . \quad (1.10.7)$$

Der Vektor vom Koordinatenursprung O zum Punkt P heißt **Ortsvektor**:

$$\vec{r}(t) = \vec{OP} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (1.10.8)$$

Die Geschwindigkeit wird im zweidimensionalen Fall genauso wie bei der geradlinigen Bewegung definiert:

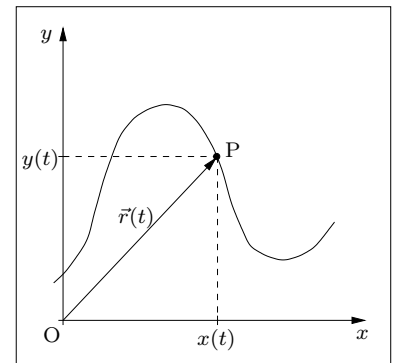


Abb.1.10.5 Bahnkurve

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (1.10.9)$$

Für den Grenzwert von Vektoren gilt

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \begin{pmatrix} f_x(t) \\ f_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow t_1} f_x(t) \\ \lim_{t \rightarrow t_1} f_y(t) \end{pmatrix}, \quad (1.10.10)$$

d.h. Grenzwerte von Vektoren werden komponentenweise gebildet.

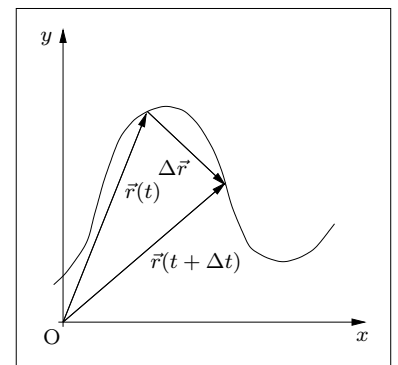


Abb.1.10.6 Geschwindigkeit

Aus den Gleichungen (1.10.4), (1.10.5), (1.10.9) und (1.10.10) folgt:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} x(t + \Delta t) - x(t) \\ y(t + \Delta t) - y(t) \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{pmatrix} \quad (1.10.11)$$

oder in Kurzform

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (1.10.12)$$

Lässt man in Abb.1.10.6 Δt gegen Null gehen, d.h. $\vec{r}(t + \Delta t)$ gegen $\vec{r}(t)$ wandern, dann erkennt man, dass sich $\Delta \vec{r}$ immer mehr einem Tangentialvektor an die Bahnkurve annähert. Im Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0$ erhält man:

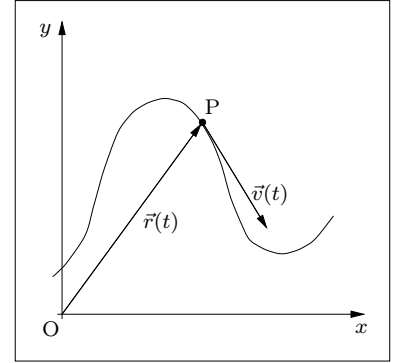


Abb.1.10.7 \vec{v} tangential

$$\vec{v}(t) \text{ liegt tangential zur Bahnkurve im Punkt } P(x(t)|y(t)) ! \quad (1.10.13)$$

Genauso wie die Geschwindigkeit definiert man auch die Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (1.10.14)$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} v_x(t + \Delta t) - v_x(t) \\ v_y(t + \Delta t) - v_y(t) \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \end{pmatrix} \quad (1.10.15)$$

oder in Kurzform

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} \quad (1.10.16)$$

Numerische Berechnung von \vec{v} und \vec{a}

Abb.1.10.8 ist das tx -Diagramm einer Bewegung, keine Bahnkurve! $v(t)$ ist in Abb.1.10.8 die Steigung der Tangente in P. v_+ und v_- sind Näherungswerte für das exakte $v(t)$. Der Abbildung entnimmt man:

$$v_+ = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} < v(t) \quad (1.10.17)$$

$$v_- = \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} > v(t) \quad (1.10.18)$$

Eine wesentlich bessere Näherung für $v(t)$ erhält man durch Mittelwertbildung:

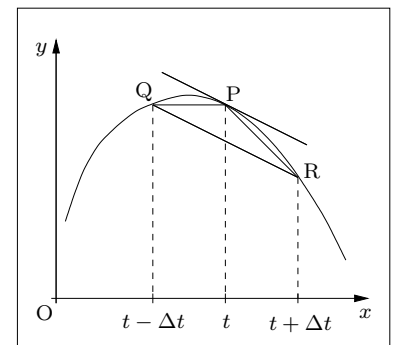


Abb.1.10.8 \vec{v} -Berechnung

$$v^* = \frac{v_+ + v_-}{2} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2 \Delta t} \approx v(t) \quad (1.10.19)$$

v^* ist in Abb.1.10.8 die Steigung der Sehne QR.
In vektorieller Schreibweise erhält man aus (1.10.19)

$$\vec{v}(t) \approx \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t - \Delta t)}{2 \Delta t} \quad (1.10.20)$$

und analog für die Beschleunigung

$$\vec{a}(t) \approx \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t - \Delta t)}{2 \Delta t} \quad (1.10.21)$$

Meistens kennt man nur $\vec{r}(t)$ und nicht $\vec{v}(t)$.
In diesem Fall berechnen wir aus (1.10.20) mit $\Delta t'$ statt Δt

$$\vec{v}(t + \Delta t') \approx \frac{\vec{r}(t + 2\Delta t') - \vec{r}(t)}{2 \Delta t'} \quad (1.10.22)$$

und

$$\vec{v}(t - \Delta t') \approx \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t - 2\Delta t')}{2 \Delta t'} \quad (1.10.23)$$

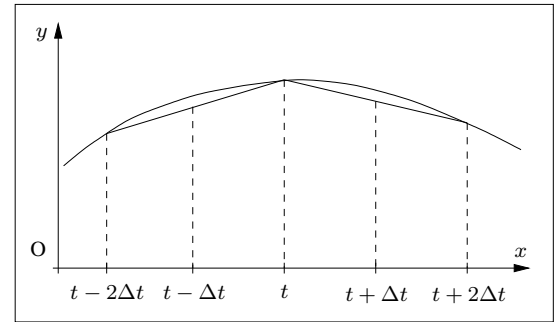


Abb.1.10.9 \vec{a} -Berechnung

Einsetzen von (1.10.22) und (1.10.23) in (1.10.21):

$$\vec{a}(t) \approx \frac{\vec{v}(t + \Delta t') - \vec{v}(t - \Delta t')}{2 \Delta t'} = \frac{\vec{r}(t + 2\Delta t') - 2\vec{r}(t) + \vec{r}(t - 2\Delta t')}{(2 \Delta t')^2} \quad (1.10.24)$$

Mit $\Delta t = 2 \Delta t'$ erhält man

$$\vec{a}(t) \approx \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - 2\vec{r}(t) + \vec{r}(t - \Delta t)}{\Delta t^2} \quad (1.10.25)$$

Der große Vorteil der Formeln (1.10.20), (1.10.21) und (1.10.25) liegt im relativen Fehler, der hier proportional zu Δt^2 ist. Bei den Formeln (1.10.17) und (1.10.18) ist der relative Fehler proportional zu Δt . Grob gesagt erhält man mit den neuen Formeln Ergebnisse, die bei gleichem Δt gegenüber (1.10.17) und (1.10.18) doppelt so viele geltende Ziffern besitzen.

Bei zu kleinem Δt treten starke Rundungsfehler auf, da bei der Berechnung Differenzen von fast gleichen Größen vorkommen. Die Wahl von Δt hängt natürlich von der konkreten Funktion $\vec{r}(t)$ ab: im Intervall $[t - \Delta t; t + \Delta t]$ sollte sich $\vec{r}(t)$ nicht zu stark ändern.

Die Formeln zur numerischen v - und a -Berechnung testen wir an einem eindimensionalen Beispiel, bei dem wir der Einfachheit halber die Benennungen weglassen:

Für $x(t) = \sin t$ soll $v(t)$ und $a(t)$ zur Zeit $t = \frac{\pi}{6}$ berechnet werden. Wir verwenden $\Delta t = 0,01$ und vergleichen die numerisch gewonnenen Ergebnisse mit den exakt bekannten Werten $v(\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = 0,866025$ und $a(\frac{\pi}{6}) = -\sin(\frac{\pi}{6}) = -0,5$.

	$x(t)$	$x(t - \Delta t)$	$x(t + \Delta t)$	v_+	v_-	v^*	a
	0,5	0,491315	0,508635	0,86351	0,86851	0,86601	-0,499996
δ_{rel}				0,29 %	0,29 %	0,0017 %	0,0008 %

Galileitransformation zweidimensional

Das System S' bewegt sich mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ relativ zu S . \vec{r} , \vec{u} und \vec{a} seien Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Körpers in S , \vec{r}' , \vec{u}' und \vec{a}' in S' . Mit $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ gilt wie im

eindimensionalen Fall:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 \quad ; \quad \vec{u} = \vec{u}' + \vec{v} \quad ; \quad \vec{a} = \vec{a}' + \dot{\vec{v}}}$$
 (1.10.26)

Speziell für $\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \text{konst.}$ und $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cdot t \\ 0 \end{pmatrix}$ erhält man

$$\boxed{\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + v \cdot t \\ y' \end{pmatrix}}$$
 (1.10.27)

$$\boxed{\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_x + v \\ u'_y \end{pmatrix}}$$
 (1.10.28)

$$\boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_x + \dot{v} \\ a'_y \end{pmatrix}}$$
 (1.10.29)

Als Beispiel betrachten wir einen Stein, der in einem fahrenden Zug (S') senkrecht nach unten fällt (S ist das Bahndammsystem):

In S' gilt

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ h - \frac{g}{2} t^2 \end{pmatrix}$$
 (1.10.30)

Damit folgt

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ h - \frac{g}{2} t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \cdot t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cdot t \\ h - \frac{g}{2} t^2 \end{pmatrix}$$
 (1.10.31)

(1.10.31) ist die Gleichung der Bahnkurve in Parameterform mit dem Parameter t . Aus $x = v \cdot t$ folgt $t = \frac{x}{v}$; einsetzen in $y = h - \frac{g}{2} t^2$ liefert die Gleichung der Bahnkurve in der Form $y = f(x)$:

$$y = h - \frac{g}{2v^2} \cdot x^2$$

Die Bahnkurve ist also eine Parabel.

Abb.1.10.10 zeigt die Bahnkurve in S für

$h = 1,25 \text{ m}$, $v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

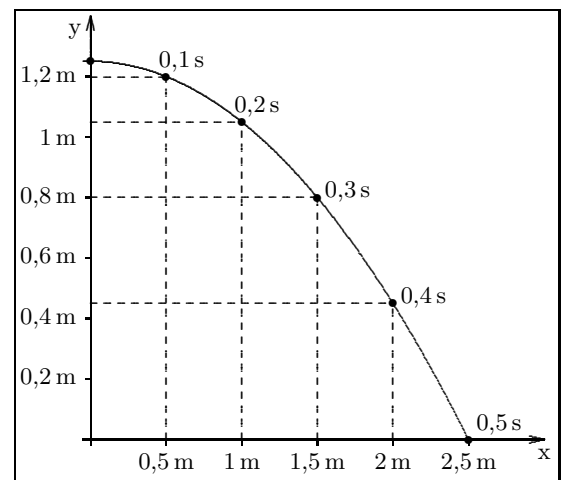


Abb.1.10.10 Flugbahn

2 Dynamik

2.1 Der Trägheitssatz

In der **Kinematik** haben wir Probleme folgender Art untersucht:

- $\vec{r}(t)$ ist gegeben, $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ sind gesucht.
- $\vec{a}(t)$ ist gegeben, $\vec{v}(t)$ und $\vec{r}(t)$ sind gesucht.

Dabei war eine der Funktionen $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ bzw. $\vec{a}(t)$ stets vorgegeben, ohne nach den physikalischen Ursachen dafür zu fragen. Die **Kinematik** ist also eine rein mathematische Theorie, die die Beziehungen zwischen $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ beschreibt. In der **Dynamik** hingegen fragen wir nach den Ursachen für die Bewegungen von Körpern.

Eine experimentelle Grunderfahrung ist, dass sich die Geschwindigkeit eines Körpers nur dann ändert, wenn ein anderer Körper auf ihn einwirkt, d.h. wenn er mit einem anderen Körper in **Wechselwirkung** steht. Ein antriebsloses Raumschiff zum Beispiel, das weit weg von irgendwelchen Himmelskörpern ist, bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit. Ein Körper setzt einer Geschwindigkeitsänderung also einen Widerstand entgegen, den man die **Trägheit** des Körpers nennt.

Ein wechselwirkungsfreier Körper bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} , d.h. seine Beschleunigung ist $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = 0$.

(Trägheitssatz oder 1. Newtonsches Gesetz)

(2.1.1)

Der wesentliche Inhalt des Trägheitssatzes wurde zuerst von **Galilei** (1564-1642) entdeckt und in seiner endgültigen Fassung von **Huygens** (1629-1695) und **Newton** (1643-1727) formuliert. Der Grund für die relativ späte Entdeckung eines so grundlegenden Satzes liegt darin, dass auf der Erde wegen der Erdanziehung und den daraus resultierenden Reibungskräften die Beobachtung einer annähernd wechselwirkungsfreien Bewegung sehr schwierig ist. In der Zeit vor Galilei galt die Lehrmeinung von **Aristoteles** (384-322 v.Ch.), dass zur Aufrechterhaltung einer Bewegung stets eine Kraft erforderlich sei.

Als Beispiel betrachten wir zwei antriebslose Raketen R_1 und R_2 sowie eine Rakete R_3 mit Antrieb. Die fest mit den Raketen verbundenen Bezugssysteme seien S_1 , S_2 und S_3 .

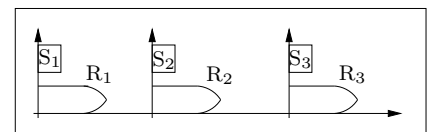


Abb.2.1.1 Raketen

$$\begin{aligned} \text{Geschw. von } R_2 \text{ in } S_1 &= v_{21} = \text{konst.} & \text{Geschw. von } R_1 \text{ in } S_2 &= v_{12} = -v_{21} = \text{konst.} \\ \text{Geschw. von } R_3 \text{ in } S_1 &= v_{31} = \frac{a}{2} t^2 & \text{Geschw. von } R_1 \text{ in } S_3 &= v_{13} = -v_{31} = -\frac{a}{2} t^2 \end{aligned}$$

Obwohl R_1 eine antriebslose und somit wechselwirkungsfreie Rakete ist, ist ihre Geschwindigkeit v_{13} in S_3 nicht konstant.

Der Trägheitssatz (2.1.1) gilt also nicht in jedem Bezugssystem!!

Ein Bezugssystem, in dem der Trägheitssatz gilt, heißt **Inertialsystem**.

(2.1.2)

Der Name **Inertialsystem** stammt aus dem Lateinischen: inertia = Trägheit.

Der Trägheitssatz lautet also endgültig:

Für einen wechselwirkungsfreien Körper gilt bezüglich eines Inertialsystems

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = 0$$

(2.1.3)

2 Dynamik

Wir betrachten jetzt zwei Inertialsysteme S und S' mit der Geschwindigkeit \vec{v} von S' relativ zu S. Ein wechselwirkungsfreier Körper K hat in S die Geschwindigkeit \vec{u} und in S' die Geschwindigkeit \vec{u}' . Aus (2.1.3) folgt, dass

$$\vec{u} = \text{konst.} \quad \text{und} \quad \vec{u}' = \text{konst.}$$

gilt. Aus dem Additionstheorem für Geschwindigkeiten (Galileitransformation!) folgt dann

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v} \quad \text{und damit} \quad \vec{v} = \vec{v}_{S'S} = \vec{u} - \vec{u}' = \text{konst.}$$

Wir haben somit bewiesen:

$\text{Sind S und S' zwei Inertialsysteme, dann ist } \vec{v} = \vec{v}_{S'S} = \text{konst.}$

(2.1.4)

Jetzt sei S ein Inertialsystem und S' ein System mit $\vec{v} = \vec{v}_{S'S} = \text{konst.}$ Für einen wechselwirkungsfreien Körper K gilt dann wegen (2.1.3) $\vec{u} = \text{konst.}$ und man erhält $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v} = \text{konst.}$ Damit ist aber auch S' ein Inertialsystem und es gilt der Satz:

$\text{Ist S ein Inertialsystem und gilt } \vec{v} = \vec{v}_{S'S} = \text{konst.,}$
 $\text{dann ist auch S' ein Inertialsystem!}$

(2.1.5)

Die experimentelle Verwirklichung eines Inertialsystems ist nicht einfach, da es keinen exakt wechselwirkungsfreien Körper gibt (jeder Körper steht zumindest über die Schwerkraft mit jedem anderen Körper des Universums in Wechselwirkung). In großen Entfernungen von Sternen sind aber die von der Gravitation hervorgerufenen Beschleunigungen so klein, dass ein antriebsloses Raumschiff in sehr guter Näherung als Inertialsystem betrachtet werden kann.

Wegen der täglichen Erdrotation und des jährlichen Umlaufs der Erde um die Sonne ist ein Labor an der Erdoberfläche sicher kein Inertialsystem. Wir untersuchen jetzt, welchen Einfluss die Erdrotation z.B. auf die Messung der Erdbeschleunigung an einem Punkt P des Äquators hat. S sei ein nichtrotierendes System mit dem Erdmittelpunkt als Ursprung, S' ein mit der Erde rotierendes System mit P als Ursprung. Mit dem Drehwinkel $\varphi = \omega t$ (ω nennt man **Winkelgeschwindigkeit**, Genaueres im Kapitel über die Kreisbewegung) gilt für den Ortsvektor von P

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \omega t \\ r \cdot \sin \omega t \end{pmatrix}$$

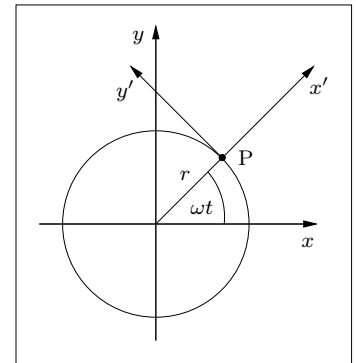


Abb.2.1.2 Erde

Für die Beschleunigung von P im System S zur Zeit $t = 0$ erhält man näherungsweise aus (1.10.25) mit $\Delta t = 0,01 \text{ d}$ und $\omega = \frac{2\pi}{1\text{d}}$

$$\ddot{v}(0) \approx \frac{r}{\Delta t^2} \begin{pmatrix} \cos \omega \Delta t + \cos(-\omega \Delta t) - 2 \cos 0 \\ \sin \omega \Delta t + \sin(-\omega \Delta t) - 2 \sin 0 \end{pmatrix} = \frac{r}{\Delta t^2} \begin{pmatrix} 2 \cos \omega \Delta t - 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r = 6400 \text{ km} \quad \implies \quad \dot{v}_x \approx \frac{2r}{\Delta t^2} \cdot (\cos \omega \Delta t - 1) = -2,53 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{d}^2} \approx -0,034 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die wahre Fallbeschleunigung in S sei $-g$, die in S' gemessene $-g'$. Da in unserem Beispiel ($t = 0$) nur x -Koordinaten auftreten folgt aus (1.10.26)

$$-g' = -g - \dot{v}_x \quad \text{oder} \quad g' = g + \dot{v}_x = g - 0,034 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die Abweichung des gemessenen vom wahren Wert beträgt ungefähr drei Promille, d.h. ein Labor an der Erdoberfläche ist näherungsweise als Inertialsystem zu betrachten.

Eine analoge Rechnung wie im gerade gezeigten Beispiel für die Bewegung der Erde um die Sonne liefert mit $r = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ km}$, $\Delta t = 0,01 \text{ a}$ und $\omega = \frac{2\pi}{1\text{a}}$:

$$g' = g - 0,006 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

d.h. auch ein Labor in der Erdumlaufbahn ist in guter Näherung ein Inertialsystem!

2.2 Masse und Impuls

Zwei zunächst ruhende Luftkissengleiter stehen für kurze Zeit in Wechselwirkung miteinander (Abstoßung durch eine Feder). Nach der Wechselwirkung werden mit Lichtschranken die Verdunklungszeiten Δt_1 und Δt_2 gemessen und daraus die Geschwindigkeitsbeträge $v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t_1}$ bzw. $v_2 = \frac{\Delta x}{\Delta t_2}$ der Gleiter berechnet. Der Versuch wird mit verschiedenen Wechselwirkungen (verschiedene Federspannungen, Magneten statt Federn u.s.w) wiederholt. Die folgende Tabelle zeigt je vier Messungen für zwei verschiedene Wechselwirkungen mit $\Delta x = 8 \text{ cm} = 0,08 \text{ m}$

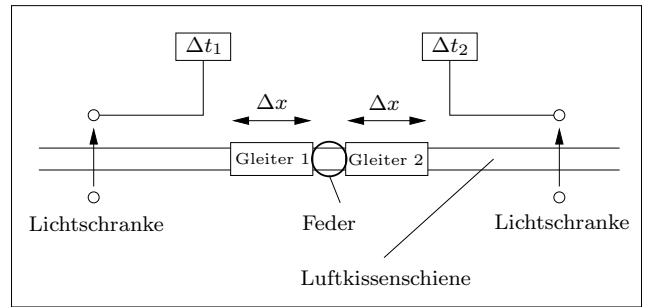


Abb.2.2.1 Skizze zum Versuch

Die folgende Tabelle zeigt je vier Messungen für zwei verschiedene Wechselwirkungen mit $\Delta x = 8 \text{ cm} = 0,08 \text{ m}$

Δt_1	1,23 s	1,20 s	1,28 s	1,29 s	1,96 s	1,99 s	2,06 s	2,01 s
$v_1 \text{ in } \frac{\text{m}}{\text{s}}$	0,0650	0,0667	0,0625	0,0620	0,0408	0,0402	0,0388	0,0398
Δt_2	1,69 s	1,73 s	1,78 s	1,79 s	2,81 s	2,75 s	2,77 s	2,76 s
$v_2 \text{ in } \frac{\text{m}}{\text{s}}$	0,0473	0,0462	0,0449	0,0447	0,0285	0,0291	0,0289	0,0290
$\alpha = \frac{v_1}{v_2}$	1,37	1,44	1,39	1,39	1,43	1,38	1,34	1,37
$\bar{\alpha}$	$1,40 \pm 0,04$				$1,38 \pm 0,05$			

Im Rahmen der Messgenauigkeit folgt aus dem Versuch: $\frac{v_1}{v_2} = \text{konst.}$

Genauere Untersuchungen ergeben:

Stehen zwei zur Zeit Null in einem Inertialsystem ruhende Körper K_1 und K_2 in Wechselwirkung miteinander, dann gilt für jedes $t > 0$

$$\vec{v}_1 \uparrow \downarrow \vec{v}_2 \quad \wedge \quad \frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{v}_2|} = \text{konst.}$$

(2.2.1)

Das Zeichen $\uparrow \downarrow$ bedeutet **antiparallel**, d.h. die beiden Vektoren sind zwar parallel, aber entgegengesetzt orientiert.

Der Körper mit dem kleineren Geschwindigkeitsbetrag setzt der Beschleunigung einen größeren Widerstand entgegen, er hat also eine größere **Trägheit**. Als Maß für die Trägheit ordnet man einem Körper eine Zahl zu, die man **Masse** nennt. Unter den Bedingungen von (2.2.1) **definiert** man die Masse m so, dass

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|} \quad (2.2.2)$$

gilt. Als Einheit der Masse gilt das Kilogramm (kg), das der Masse eines Normkörpers aus Platin-Iridium entspricht, der in Sèvres in der Nähe von Paris aufbewahrt wird.

$1 \text{ kg} = \text{Masse des Kilogrammprototyps}$

(2.2.3)

Die Masse eines beliebigen Körpers K lässt sich dadurch bestimmen, dass man ihn mit dem Normkörper K_0 wechselwirken lässt und die Geschwindigkeitsbeträge v bzw. v_0 nach der Wechselwirkung misst. Wegen (2.2.2) ist dann

$$m = \frac{v_0}{v} \cdot m_0 \quad (2.2.4)$$

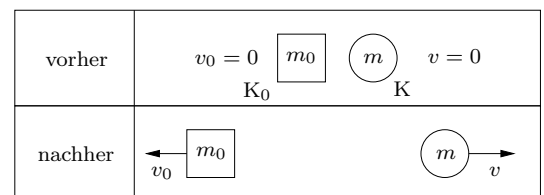


Abb.2.2.2 Messung der Masse

Im Gegensatz zu den anderen Basiseinheiten, die über Naturkonstanten definiert sind, ist die

2 Dynamik

Masseneinheit an einen Normkörper gebunden. Man könnte auch das kg als ein bestimmtes Vielfaches einer bestimmten Atomsorte (vornehmlich ^{12}C) definieren, doch ist beim heutigen Stand der Messtechnik (1993) die momentane Definition die genauere.

In der Praxis geschieht die Messung der Masse nicht nach dem oben beschriebenen Verfahren, sondern über die Gewichtskraft mit Hilfe von Balkenwaagen. Damit können Massen mit einem relativen Fehler von $\approx 10^{-9}$ gemessen werden. Allerdings ist der messtechnische Aufwand zum Erreichen dieser Genauigkeit enorm: Der kg-Prototyp muss z.B. vollkommen frei von Staub und Fingerabdrücken sein und zum Ausschalten des Auftriebs in Luft muss in einem möglichst guten Vakuum gemessen oder eine Korrekturformel zur Berücksichtigung des Auftriebs verwendet werden.

Weitere Einheiten der Masse:

1 t	1 kg	1 g	1 mg	1 μg	1 ng
10^3 kg	1 kg	10^{-3} kg	10^{-6} kg	10^{-9} kg	10^{-12} kg
10^6 g	10^3 g	1 g	10^{-3} g	10^{-6} g	10^{-9} g

(2.2.5)

Beispiele für die Größenordnung von Massen:

Körper	Galaxis	Sonne	Erde	Mond	H – Atom	Elektron
$\frac{\text{Masse}}{\text{kg}}$	$\approx 3 \cdot 10^{41}$	$1,99 \cdot 10^{30}$	$5,98 \cdot 10^{24}$	$7,35 \cdot 10^{22}$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	$9,11 \cdot 10^{-31}$

Zwei in Wechselwirkung stehende Körper K_1 und K_2 der Massen m_1 und m_2 ruhen zur Zeit $t = 0$. Für die Geschwindigkeitsbeträge $v_1(t)$ und $v_2(t)$ zu einer Zeit $t > 0$ gilt wegen (2.2.2) $\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \frac{m_1}{m_2}$. Die Zeitspanne dt sei so klein, dass die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 im Zeitintervall $[t; t + dt]$

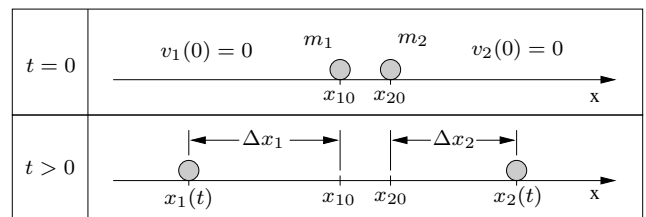


Abb.2.2.3 Messung der Masse

praktisch konstant sind. Dann gilt für die in der Zeit dt zurückgelegten Wege

$$dx_1 = v_1(t) dt \quad \text{und} \quad dx_2 = v_2(t) dt = \frac{m_1}{m_2} \cdot v_1(t) dt = \frac{m_1}{m_2} \cdot dx_1 .$$

In jedem kleinen Zeitintervall dt legt also K_2 die $\frac{m_1}{m_2}$ -fache Strecke von K_1 zurück. Damit gilt auch für den zur Zeit t zurückgelegten Gesamtweg $\Delta x_2 = \frac{m_1}{m_2} \cdot \Delta x_1$ und damit

$$\boxed{\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{m_1}{m_2}} \quad (2.2.6)$$

Gleichung (2.2.2) gilt unter der Voraussetzung zunächst ruhender Körper, d.h. $\vec{v}_1(0) = 0$ und $\vec{v}_2(0) = 0$. Damit gilt natürlich $\Delta \vec{v}_1 = \vec{v}_1(t) - \vec{v}_1(0) = \vec{v}_1(t)$ und $\Delta \vec{v}_2 = \vec{v}_2(t) - \vec{v}_2(0) = \vec{v}_2(t)$. Damit folgt aus (2.2.1) und (2.2.2)

$$\Delta \vec{v}_1 \uparrow \downarrow \Delta \vec{v}_2 \quad \wedge \quad \frac{|\Delta \vec{v}_2|}{|\Delta \vec{v}_1|} = \frac{m_1}{m_2} \quad (2.2.7)$$

Versuche auf einem Luftkissentisch, der auch zweidimensionale Bewegungen erlaubt, zeigen, dass (2.2.7) auch dann gilt, wenn $\vec{v}_1(0) \neq 0$ und $\vec{v}_2(0) \neq 0$. Aus (2.2.7) folgt $m_1 \cdot |\Delta \vec{v}_1| = m_2 \cdot |\Delta \vec{v}_2|$ und unter Berücksichtigung von $\Delta \vec{v}_1 \uparrow \downarrow \Delta \vec{v}_2$

$$m_1 \cdot \Delta \vec{v}_1 = -m_2 \cdot \Delta \vec{v}_2 \quad (2.2.8)$$

Als **Impuls** \vec{p} eines Körpers bezeichnet man das Produkt aus seiner Masse m und seiner Geschwindigkeit \vec{v}

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}} \quad (2.2.9)$$

Mit zwei beliebigen Zeiten t und t' und den Abkürzungen

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1(t) \quad , \quad \vec{p}_1' = \vec{p}_1(t') \quad \text{und} \quad \Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = m_1 \Delta\vec{v}_1$$

sowie

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_2(t) \quad , \quad \vec{p}_2' = \vec{p}_2(t') \quad \text{und} \quad \Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_2' - \vec{p}_2 = m_2 \Delta\vec{v}_2$$

folgt aus (2.2.8) mit (2.2.9):

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = m_1 \cdot \Delta\vec{v}_1 + m_2 \cdot \Delta\vec{v}_2 = 0 \quad (2.2.10)$$

oder

$$\vec{p}_1' - \vec{p}_1 + \vec{p}_2' - \vec{p}_2 = 0$$

und damit

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad (2.2.11)$$

Die Gleichungen (2.2.10) und (2.2.11) stellen einen der wichtigsten Sachverhalte in der ganzen Physik dar und werden als **Impulssatz** bezeichnet:

Stehen zwei Körper K_1 und K_2 mit den Massen m_1 und m_2 zwar untereinander, aber mit keinem weiteren Körper in Wechselwirkung, dann gilt für die Änderung $\Delta\vec{p}$ des Gesamtimpulses $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$

$$\Delta\vec{p} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = m_1 \cdot \Delta\vec{v}_1 + m_2 \cdot \Delta\vec{v}_2 = 0 \quad (2.2.12)$$

d.h. der Gesamtimpuls $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ ist für alle Zeiten konstant:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}'$$

Eine Ansammlung von n Körpern, die alle untereinander, aber mit keinem weiteren Körper in Wechselwirkung stehen, heißt **abgeschlossenes System**. Es gilt folgende Verallgemeinerung des Impulssatzes:

Der Gesamtimpuls

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^n \vec{p}_k = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n$$

eines abgeschlossenen Systems aus n Körpern ist konstant, d.h.

$$\Delta\vec{p} = \sum_{k=1}^n \Delta\vec{p}_k = 0$$

(2.2.13)

Die große Bedeutung des Impulssatzes liegt darin, dass man Aussagen über die Geschwindigkeitsänderungen von Körpern machen kann, ohne die Funktionsweise der beteiligten Wechselwirkungen zu kennen.

Beispiel 1:

Ein Gewehr der Masse $m_1 = 2,5 \text{ kg}$ (mit Kugel) liegt am Boden und geht von selbst los; dabei wird eine Kugel der Masse $m_2 = 10 \text{ g}$ mit dem Geschwindigkeitsbetrag $|\vec{v}_2'| = 400 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ relativ

zum Boden abgefeuert. Mit welchem Geschwindigkeitsbetrag $|\vec{v}_1'|$ schlittert das Gewehr über den Boden?

Da vor dem Schuss Gewehr und Kugel ruhen, ist der Gesamtimpuls vor dem Schuss $\vec{p} = 0$. Der Gesamtimpuls nach dem Schuss ist $\vec{p}' = (m_1 - m_2) \cdot \vec{v}_1' + m_2 \cdot \vec{v}_2'$. Nach dem Impulssatz gilt $\vec{p} = \vec{p}'$ und somit $(m_1 - m_2) \cdot \vec{v}_1' + m_2 \cdot \vec{v}_2' = 0$

$$\implies \vec{v}_1' = -\frac{m_2 \cdot \vec{v}_2'}{m_1 - m_2}$$

oder

$$|v_1'| = \frac{m_2 \cdot |\vec{v}_2'|}{m_1 - m_2} = \frac{0,01 \text{ kg} \cdot 400 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2,49 \text{ kg}} = 1,61 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Beispiel 2:

Wir lösen jetzt die Aufgabe von Beispiel 1 für den Fall, dass das Gewehr schon vor dem Schuss eine Geschwindigkeit \vec{v}_1 mit dem Betrag $v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in x -Richtung hat und die Kugel parallel zur Winkelhalbierenden der positiven x - und y -Achse abgefeuert wird.

Da die Kugel vor dem Schuß relativ zum Gewehr ruht, ist $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$.

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} m_1 v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

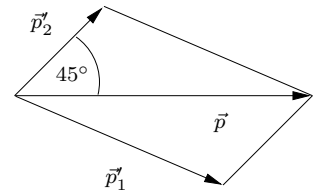


Abb.2.2.4 Impulse

$$\vec{p}_2' = \begin{pmatrix} m_2 |v_2'| \cos 45^\circ \\ m_2 |v_2'| \sin 45^\circ \end{pmatrix} = \frac{m_2 |v_2'| \sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus dem Impulssatz $\vec{p} = \vec{p}'$ folgt

$$(m_1 - m_2) \cdot \vec{v}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}$$

und daraus

$$\begin{aligned} \vec{v}_1' &= \frac{\vec{p} - \vec{p}_2'}{m_1 - m_2} = \\ &= \frac{1}{m_1 - m_2} \cdot \left(\begin{pmatrix} m_1 v_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{m_2 |v_2'| \sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 0,872 \\ -1,136 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

$$|\vec{v}_1'| = \sqrt{0,872^2 + 1,136^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,43 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Überprüfe das Ergebnis durch eine maßstäblich richtige Zeichnung der Impulsvektoren!

2.3 Die Kraft

Die Ursache für Impulsänderungen eines Körpers nennt man Kraft. Man definiert die Kraft auf einen Körper als seine Impulsänderung pro Zeiteinheit.

Definition: Auf einen punktförmigen Körper mit dem Impuls $\vec{p}(t)$ wirkt die Kraft

$$\boxed{\vec{F}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \dot{\vec{p}}} \quad (2.3.1)$$

Ist die Masse m des Körpers konstant, dann gilt

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t) = m v(t + \Delta t) - m v(t) = m \Delta v$$

und damit

$$\boxed{\vec{F}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = m \cdot \vec{a}(t)} \quad (2.3.2)$$

Die Gleichungen

$$\boxed{\vec{F} = \dot{\vec{p}}} \quad (2.3.3)$$

bzw. für konstantes m

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}} \quad (2.3.4)$$

werden als **2. Newton'sches Gesetz** bezeichnet.

Einstein hat in seiner Relativitätstheorie gezeigt, dass die Masse mit der Geschwindigkeit zunimmt; diese Massenzunahme ist aber erst bei Geschwindigkeiten in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ deutlich spürbar. Für Geschwindigkeiten, die sehr klein gegen c sind, ist die Masse eines Körpers praktisch konstant und wir können mit Gleichung (2.3.4) arbeiten (**Newton'sche Mechanik**). In diesem Fall ist die Kraft ein Vektor, der in die gleiche Richtung zeigt wie die Beschleunigung und dessen Betrag zur Masse des Körpers und zum Betrag der Beschleunigung proportional ist.

Aus (2.3.4) folgt für die Einheit der Kraft

$$\boxed{[F] = [m][a] = 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ Newton} = 1 \text{ N}} \quad (2.3.5)$$

Stehen die Körper K_1 und K_2 in Wechselwirkung miteinander, dann folgt aus dem in Inertialsystemen gültigen Impulssatz

$$\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0 \quad \implies \quad \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2 \quad (2.3.6)$$

und damit

$$\vec{F}_{12} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} = -\vec{F}_{21} \quad (2.3.7)$$

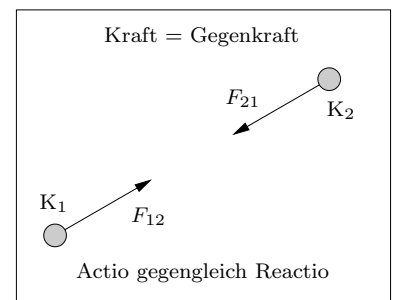


Abb.2.3.1 Gegenkraft

Dabei ist \vec{F}_{12} die Kraft von K_2 auf K_1 und \vec{F}_{21} die Kraft von K_1 auf K_2 . In einem **Inertialsystem** gilt also:

$$\boxed{\text{Stehen zwei Körper in Wechselwirkung miteinander, dann gilt für die gegenseitig aufeinander ausgeübten Kräfte}} \quad (2.3.8)$$

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

3. Newton'sches Gesetz oder actio gegengleich reactio

Wenn in Zukunft von einem Bezugssystem gesprochen wird und nichts anderes vermerkt ist, dann setzen wir voraus, dass es sich um ein Inertialsystem handelt!

Wir betrachten ein abgeschlossenes System von drei Körpern K_1 , K_2 und K_3 , wobei K_3 mit K_1 und K_2 in Wechselwirkung steht, K_1 jedoch nicht mit K_2 (siehe Abb.2.3.2). Aus dem Impulssatz folgt:

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 + \Delta\vec{p}_3 = 0 \quad (2.3.9)$$

und damit

$$\Delta\vec{p}_3 = -\Delta\vec{p}_1 - \Delta\vec{p}_2 \quad (2.3.10)$$

Die Gesamtkraft auf K_3 ist also

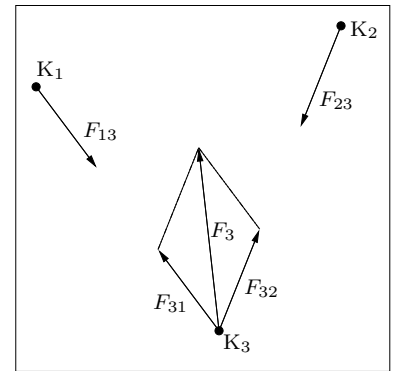


Abb.2.3.2 Addition von Kräften

$$\vec{F}_3 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{p}_3}{\Delta t} = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} = -\vec{F}_{13} - \vec{F}_{23} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} \quad (2.3.11)$$

Allgemein gilt:

Steht ein Körper K mit n weiteren Körpern in Wechselwirkung, die auf ihn die Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$ und \vec{F}_n ausüben, dann gilt für die auf K ausgeübte Gesamtkraft \vec{F} :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \quad (2.3.12)$$

4. Newton'sches Gesetz oder Superposition von Kräften

Kennt man die Gesamtkraft auf einen Körper K der konstanten Masse m als Funktion des Ortes \vec{r} und der Zeit t , dann folgt aus (2.3.4) mit $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{x}}(t)$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}, t) \quad (2.3.13)$$

(2.3.13) heißt **Bewegungsgleichung** für den Körper K . Die Lösung von (13) für ein vorgegebenes $\vec{F}(\vec{r}, t)$ ist ein meist schwieriges Unterfangen und oft nicht in geschlossener Form möglich, d.h. die Lösung kann nicht in der Form $\vec{x}(t) = \text{Term mit bekannten Funktionen}$ angegeben werden. In einem späteren Kapitel lernen wir aber eine Methode kennen, wie (2.3.13) für jedes noch so komplizierte $\vec{F}(\vec{r}, t)$ numerisch mit dem Computer gelöst werden kann, d.h. wie man für jede Zeit t den Ortsvektor $\vec{x}(t)$ und die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ mit beliebiger Genauigkeit berechnen kann. Mit dem Kraftbegriff ist eine quantitative Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Körpern möglich. **Wenn** $\vec{F}(\vec{r}, t)$ bekannt ist, dann kennt man auch $\vec{x}(t)$ und $\vec{v}(t)$. Das Ziel der Physik ist es nun, die Kraftgesetze für alle möglichen Wechselwirkungen zwischen Körpern zu finden. Da alle Körper aus **Elementarteilchen** wie Elektronen, Protonen, Neutronen u.s.w. bestehen, genügt es, die Wechselwirkungen zwischen diesen Elementarteilchen zu erforschen. Es hat sich herausgestellt, dass es nur **vier** fundamentale Wechselwirkungen gibt:

1. Die **Gravitation** (Schwerkraft); sie wirkt zwischen **allen** Teilchen.
2. Die **elektromagnetische** Wechselwirkung; sie wirkt nur zwischen geladenen Teilchen.
3. Die **schwache** Wechselwirkung; sie regelt den radioaktiven Zerfall.
4. Die **starke** Wechselwirkung; sie hält z.B. die Atomkerne zusammen, die ja wegen der Abstoßung der positiv geladenen Protonen sonst auseinanderfliegen würden.

Alle anderen Wechselwirkungen lassen sich auf die vier Grundkräfte zurückführen. Fast alle Kräfte, die im täglichen Leben beobachtet werden, sind, außer der Gravitation, auf die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen den Elektronen der Atome untereinander bzw. zwischen Elektronen und Atomkernen zurückzuführen. Dazu gehören so verschieden anmutende Kräfte wie die Kraft einer zusammengedrückten Feder, die Muskelkraft, die Reibungskräfte, die Antriebskraft eines Benzinmotors u.s.w.

Die erste Wechselwirkung, die wir bisher untersucht haben, ist die der Gravitation in der Nähe der Erdoberfläche. Da jeder Körper an der Erdoberfläche die Beschleunigung $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ erfährt, gilt für die Wechselwirkungskraft von der Erde auf einen Körper (y -Achse senkrecht nach oben), eben für die **Gewichtskraft** des Körpers:

$$\vec{G} = m \vec{g} = m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m g \end{pmatrix} \quad (2.3.14)$$

oder nur mit Beträgen notiert

$$G = m g \quad (2.3.15)$$

Die Gewichtskraft eines Körpers der Masse $m = 1 \text{ kg}$ an der Erdoberfläche ist also

$$G = 1 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,81 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = 9,81 \text{ N} \quad (2.3.16)$$

Aus dem 3. Newton'schen Gesetz folgt, dass umgekehrt der Körper auf die Erde die Kraft $-\vec{G}$ ausübt.

Als Beispiel einer ortsabhängigen Kraft betrachten wir die Federkraft: Eine Körper K , der mit einer Feder der Richtgröße (Federkonstante) D verbunden ist, ist um $\Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0$ aus seiner Ruhelage \vec{x}_0 ausgelenkt. Nach dem Hook'schen Gesetz gilt für die Kraft auf K

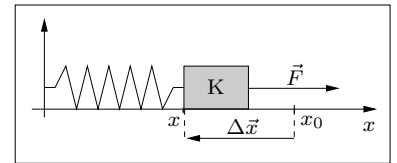


Abb.2.3.3 Feder

$$F = D \cdot \Delta x \quad \text{oder vektoriell} \quad \vec{F} = -D \cdot \Delta \vec{x} \quad (2.3.17)$$

Gleitet ein Körper K mit der Geschwindigkeit \vec{v} über eine ebene Unterlage, dann wirkt auf ihn die Reibungskraft \vec{R} . Dabei gilt

$$R = |\vec{R}| = \mu \cdot N \quad \text{und} \quad \vec{R} \updownarrow \vec{v} \quad (2.3.18)$$

mit der Reibungszahl μ und dem Betrag N der Normalkraft \vec{N} . Die Normalkraft ist diejenige Kraft, mit der K senkrecht auf die Unterlage drückt. Aus (2.3.4) folgt:

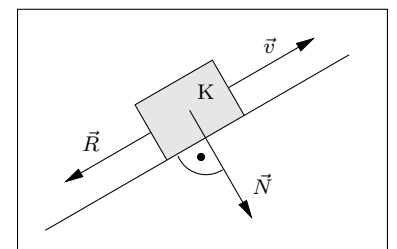


Abb.2.3.4 Schiefe Ebene

$$\text{Ein Körper befindet sich in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit genau dann, wenn die auf ihn wirkende Gesamtkraft Null ist!} \quad (2.3.19)$$

oder kurz

$$\vec{v} = \text{konst.} \iff \vec{F} = 0 \quad (2.3.20)$$

(Trägheitssatz)

Es folgen einige Beispiele zur richtigen Anwendung von $\vec{F} = m \vec{a}$:

Kräfte können durch flexible Seile und reibungsfrei gelagerte Rollen umgelenkt werden, ohne ihren Betrag zu ändern. In nebenstehender Anordnung sei der Körper K in Ruhe. K steht mit der Erde in Wechselwirkung. Dabei wird von der Erde auf K die Gewichtskraft \vec{G} und von K auf die Erde die Reaktionskraft \vec{F}_1 ausgeübt. Da K in Ruhe ist, muss die Gesamtkraft auf K Null sein. Dies wird von der Haltekraft \vec{F}_2 des Seils bewirkt ($\vec{G} + \vec{F}_2 = 0$). Die Reaktionskraft von \vec{F}_2 ist letztendlich \vec{F}_7 (Befestigung des Seils). Wegen der Seilspannung wirken auf die Rolle die Kräfte \vec{F}_3 und \vec{F}_4 sowie auf die Feder \vec{F}_5 und \vec{F}_6 . Wegen $\vec{F}_5 + \vec{F}_6 = 0$ bleibt die Feder in Ruhe. Da auch die Rolle unbewegt ist, muss neben den Seilkräften \vec{F}_3 und \vec{F}_4 noch die Kraft $\vec{F}_8 = -\vec{F}_3 - \vec{F}_4$ auf sie einwirken; diese Kraft wird von der Erde über die Befestigungsstange auf die Rolle ausgeübt. Die Reaktionskraft von \vec{F}_8 von der Rolle auf die Erde ist $\vec{F}_9 = -\vec{F}_8$. Insgesamt wirkt auf die Erde die Kraft $\vec{F}_E = \vec{F}_1 + \vec{F}_7 + \vec{F}_9 = 0$ (die Erde bleibt in Ruhe). Beachte, dass die Dehnung der Feder $\Delta x = \frac{m \cdot g}{D}$ und nicht $\Delta x' = \frac{2 \cdot m \cdot g}{D}$ ist, obwohl doch links und rechts an der Feder die Kraft mg angreift! Würde die rechte Kraft \vec{F}_6 nicht angreifen, dann würde die Feder nicht gedehnt, sondern beschleunigt!

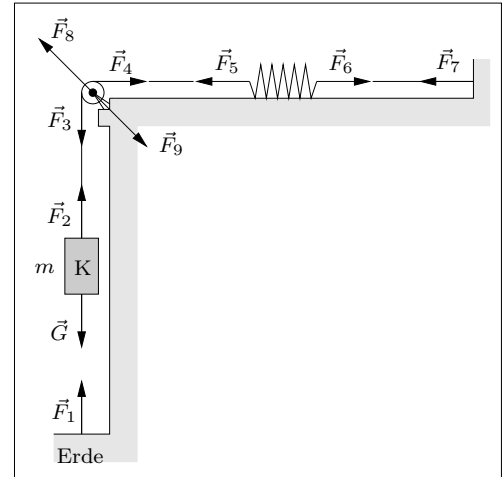


Abb.2.3.5 Umlenkrolle

Die Atwood'sche Fallmaschine:

In nebenstehender Anordnung sei $m_2 > m_1$. Gesucht ist der Beschleunigungsbetrag a von K_1 (der ja bei einem undehnbaren Seil gleich dem von K_2 ist) sowie die Kräfte F_S und F_T , die von Federwaagen in den Punkten S und T angezeigt würden. Wir gehen von einem masselosen Seil und einer reibungsfreien und masselosen Rolle aus.

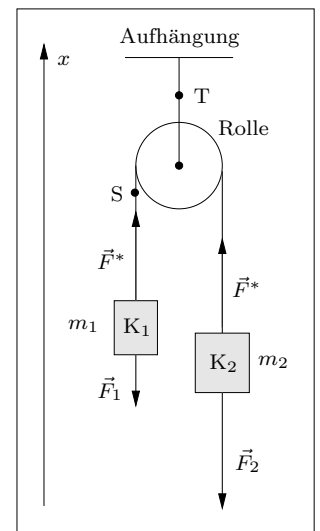


Abb.2.3.6 Atwood

Lösungsweg 1:

Wir betrachten die beiden mit dem Seil verbundenen Körper K_1 und K_2 als einen Körper K, auf den die Antriebskraft $F_2 = m_2 g$ und die Bremskraft $F_1 = m_1 g$ wirkt. Die Gesamtkraft auf K ist demnach $F = F_2 - F_1 = (m_2 - m_1) g$, die Gesamtmasse von K ist $m = m_1 + m_2$. Damit ist $a = \frac{F}{m} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$. Die Seilspannung ist gleich der Kraft F^* , die vom Seil auf K_1 bzw. K_2 ausgeübt wird. Wendet man Newton2 z.B. auf K_1 an, erhält man

$$F^* - F_1 = m_1 a \implies F^* = F_1 + m_1 a = m_1(g + a) = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$F_S = F^* \quad \text{und} \quad F_T = 2 F^* = \frac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Weise nach, dass $F_T < m_1 g + m_2 g$ ist und gib den physikalischen Grund dafür an!

Lösungsweg 2:

Newton2 auf K_1 bzw. K_2 angewandt: $F^* - F_1 = m_1 a$, $F_2 - F^* = m_2 a$

Löse dieses Gleichungssystem selbst nach F^* und a auf!

Welche Größe läßt sich mit der Atwood'schen Maschine bequem messen?

2.4 Kräfte an der schiefen Ebene

Ein Körper K der Masse m liegt auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel φ . Die Steigung der schiefen Ebene ist (siehe Abb.2.4.1)

$$\sigma = \frac{h}{b} = \tan \varphi \quad (2.4.1)$$

Die Steigung (bzw. das Gefälle) wird meistens in Prozent angegeben. Aus $\sigma = 15\%$ folgt z.B. $\tan \varphi = 15\% = 0,15$ und damit $\varphi = 8,53^\circ$ (INV TAN bzw. TAN⁻¹ auf dem Taschenrechner!). Zunächst vernachlässigen wir die Reibung ($\mu = 0$):

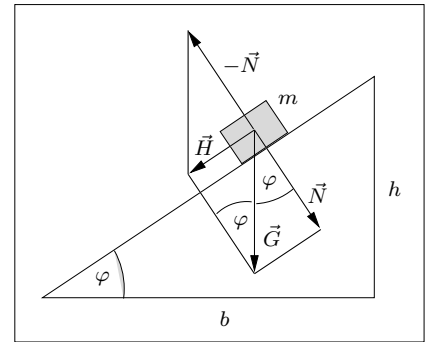


Abb.2.4.1 Schiefe Ebene

K drückt mit der Kraft \vec{N} (Normalkraft) senkrecht auf die Unterlage. Damit wirkt von der Unterlage auf K die Kraft $-\vec{N}$. Mit der Gewichtskraft \vec{G} wirkt damit auf K die Gesamtkraft

$$\vec{H} = \vec{G} + (-\vec{N}) = \vec{G} - \vec{N} \quad (2.4.2)$$

Da K die schiefe Ebene hinabgleitet, muss die Beschleunigung \vec{a} von K parallel zur Ebene sein. Aus **Newton 2** folgt dann, dass auch $\vec{H} = m \vec{a}$ parallel zur Ebene ist (siehe Abb.2.4.1). \vec{H} nennt man den **Hangabtrieb** von K. Wegen (siehe (2.4.2)!)

$$\vec{G} = \vec{H} + \vec{N} \quad (2.4.3)$$

haben wir jetzt ein geometrisches Verfahren zur Bestimmung von \vec{H} und \vec{N} aus \vec{G} :

Konstruktion von \vec{H} und \vec{N} :

Man zeichnet die Parallelen zur schiefen Ebene sowie die Senkrechten auf die schiefe Ebene durch den Anfangspunkt und den Endpunkt von \vec{G} (siehe Abb.2.4.1).

(2.4.4)

Die Gesamtkraft auf die Erde setzt sich aus der Reaktionskraft von \vec{G} und der Normalkraft zusammen:

$$\vec{F}_{Erde} = -\vec{G} + \vec{N} = -(\vec{G} - \vec{N}) = -\vec{H} \quad (2.4.5)$$

Die Gesamtkraft auf die Erde ist also die Reaktionskraft der Gesamtkraft \vec{H} auf K!

Rechnerisch folgt aus Abb.2.4.1 für die Beträge des Hangabtriebs und der Normalkraft:

$$H = |\vec{H}| = G \cdot \sin \varphi = m g \sin \varphi \quad (2.4.6)$$

$$N = |\vec{N}| = G \cdot \cos \varphi = m g \cos \varphi \quad (2.4.7)$$

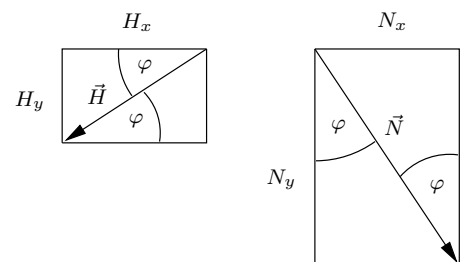


Abb.2.4.2 \vec{H} und \vec{N}

Abb.2.4.2 entnimmt man:

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} -H \cos \varphi \\ -H \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m g \sin \varphi \cos \varphi \\ -m g \sin^2 \varphi \end{pmatrix} \quad (2.4.8)$$

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} N \sin \varphi \\ -N \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m g \sin \varphi \cos \varphi \\ -m g \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \quad (2.4.9)$$

Ist $\mu \neq 0$, dann gilt für die Gesamtkraft \vec{F} auf K:

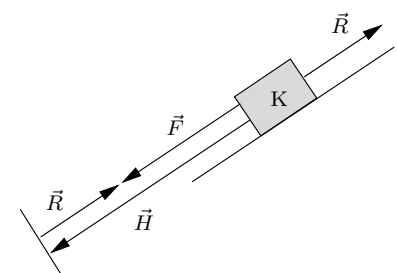


Abb.2.4.3 Gesamtkraft \vec{F}

$$\boxed{\vec{F} = \vec{H} + \vec{R}} \quad (2.4.10)$$

oder für Beträge

$$\boxed{F = H - R = m g (\sin \varphi - \mu \cos \varphi)} \quad (2.4.11)$$

K gleitet die schiefe Ebene mit konstanter Geschwindigkeit hinab, wenn $F = 0$ ist; wegen (2.4.11) ist das genau dann der Fall, wenn

$$\sin \varphi - \mu \cos \varphi = 0 \quad (2.4.12)$$

und damit

$$\mu = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi \quad (2.4.13)$$

(2.4.11) gilt nur, solange K abwärts gleitet. Wird K von einer Antriebskraft \vec{A} aufwärts bewegt, dann zeigt \vec{R} in die gleiche Richtung wie \vec{H} . Die Gesamtkraft auf K ist dann

$$\vec{F} = \vec{A} + \vec{H} + \vec{R} \quad (2.4.14)$$

oder mit Beträgen

$$F = A - H - R \quad (2.4.15)$$

Wenn K ruht, dann ist die Gesamtkraft auf K Null. Mit dem Betrag A einer in Bewegungsrichtung zeigenden Antriebskraft gilt also zusammenfassend für den Betrag der Gesamtkraft F auf K:

$$F = \begin{cases} A - H - R & \text{für Aufwärtsbewegung} \\ A + H - R & \text{für Abwärtsbewegung} \\ 0 & \text{für Stillstand} \end{cases} \quad (2.4.16)$$

In (2.4.16) gilt $H > 0$ und $R > 0$ sowie $A > 0$ für \vec{A} in Bewegungsrichtung und $A < 0$ für \vec{A} entgegen der Bewegungsrichtung.

Als Beispiel berechnen wir das Verhältnis der Bremswege eines Autos, das einmal bergauf und einmal bergab fährt. Die Bremskraft beim Blockieren der Räder ist die Reibungskraft R mit $\mu = 0,4$, das Gefälle betrage 20% und es sei $R > H$.

Talfahrt:

$$a_T = \frac{F_T}{m} = \frac{H - R}{m} = g (\sin \varphi - \mu \cos \varphi) \quad (2.4.17)$$

$$s_T = \frac{v_0^2}{2|a_T|} = \frac{v_0^2}{2g(\mu \cos \varphi - \sin \varphi)} \quad (2.4.18)$$

Bergfahrt:

$$a_B = \frac{F_B}{m} = \frac{-H - R}{m} = -g (\sin \varphi + \mu \cos \varphi) \quad (2.4.19)$$

$$s_B = \frac{v_0^2}{2|a_B|} = \frac{v_0^2}{2g(\mu \cos \varphi + \sin \varphi)} \quad (2.4.20)$$

$$\frac{s_T}{s_B} = \frac{\mu \cos \varphi + \sin \varphi}{\mu \cos \varphi - \sin \varphi} = \frac{\cos \varphi (\mu + \tan \varphi)}{\cos \varphi (\mu - \tan \varphi)} \quad (2.4.21)$$

$$\frac{s_T}{s_B} = \frac{\mu + \tan \varphi}{\mu - \tan \varphi} = \frac{0,4 + 0,2}{0,4 - 0,2} = 3 \quad (2.4.22)$$

Bei der Talfahrt ist der Bremsweg also dreimal so lang wie bei der Bergfahrt!

2.5 Der Kraftstoß

Auf einen Körper der Masse m , der sich zur Zeit $t < t_1$ mit der konstanten Geschwindigkeit v_1 bewegt, wirkt die Kraft

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_1 \\ F_0 & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{für } t > t_2 \end{cases} \quad (2.5.1)$$

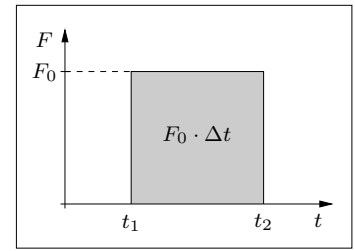


Abb.2.5.1 konst. Kraft

Folgende Tabelle zeigt die Größen der Bewegung im Überblick:

	$t < t_1$	$t_1 < t < t_2$	$t > t_2$
$F(t)$	0	F_0	0
$a(t)$	0	$a_0 = \frac{F_0}{m}$	0
$v(t)$	v_1	$v_1 + a_0(t - t_1)$	$v_2 = v_1 + a_0(t_2 - t_1) = v_1 + a_0 \Delta t$

Für die Geschwindigkeitsänderung des Körpers im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ erhält man

$$\Delta v = v_2 - v_1 = a_0 \Delta t \quad (2.5.2)$$

und damit für die Impulsänderung

$$\Delta p = p_2 - p_1 = m v_2 - m v_1 = m \Delta v = m a_0 \Delta t = F_0 \Delta t \quad (2.5.3)$$

Für **konstantes** F_0 gilt also

$$\boxed{\Delta p = F_0 \Delta t} \quad (2.5.4)$$

Das Produkt $F_0 \Delta t$ nennt man den **Kraftstoß**. Damit folgt aus (2.5.4)

$$\boxed{\text{Impulsänderung} = \text{Kraftstoß}} \quad (2.5.5)$$

Für beliebiges (nicht notwendig konstantes) $F(t)$ erhält man aus

$$\boxed{\Delta v = \text{Fläche unter dem } ta\text{-Diagramm}} \quad (2.5.6)$$

bzw. mathematisch exakter

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt \quad (2.5.7)$$

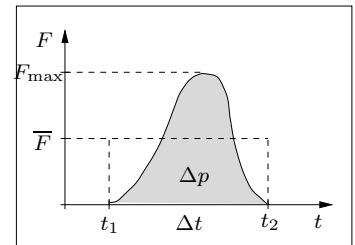


Abb.2.5.2 beliebige Kraft

durch Multiplikation mit m

$$\boxed{\Delta p = \int_{t_1}^{t_2} m a(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt} \quad (2.5.8)$$

oder anschaulich

$$\boxed{\Delta p = \text{Kraftstoß} = \text{Fläche unter dem } tF\text{-Diagramm}} \quad (2.5.9)$$

Eine konstante Kraft \bar{F} mit $\bar{F} \Delta t = \Delta p$ heißt **mittlere** Kraft.

$$\boxed{\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt} \quad (2.5.10)$$

(2.5.10) bedeutet, dass die gestrichelte Rechtecksfläche ($\bar{F} \cdot \Delta t$) in Abb.2.5.2 gleich der getönten Fläche (Δp) ist.

2.6 Wurfbewegungen

Ein Körper K führt in der Nähe der Erdoberfläche eine Wurfbewegung aus. Zur Zeit Null starte er am Ort

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} \quad (2.6.1)$$

mit der Anfangsgeschwindigkeit

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \end{pmatrix}. \quad (2.6.2)$$

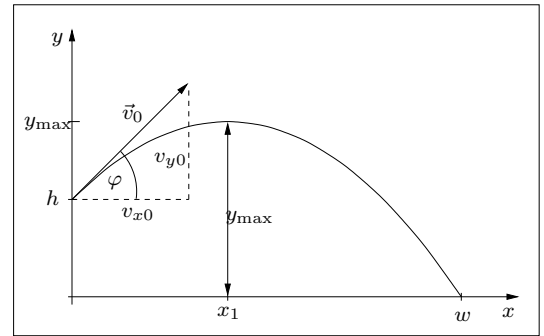


Abb.2.6.1 schräger Wurf

Für den Betrag v_0 der Anfangsgeschwindigkeit gilt

$$v_0 = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}, \quad (2.6.3)$$

der Zusammenhang mit dem Anstellwinkel φ lautet

$$\begin{array}{l} v_{x0} = v_0 \cdot \cos \varphi \\ v_{y0} = v_0 \cdot \sin \varphi \end{array} \quad (2.6.4)$$

Während des Fluges wirkt auf K die konstante Kraft

$$\vec{F} = \vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \quad (2.6.5)$$

und damit die konstante Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}. \quad (2.6.6)$$

Für die Geschwindigkeit zur Zeit t erhält man

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} - g \cdot t \end{pmatrix} \quad (2.6.7)$$

und für den Ort

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{a}}{2} \cdot t^2 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \frac{t^2}{2} = \\ &= \begin{pmatrix} v_{x0} \cdot t \\ h + v_{y0} \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

Aus (2.6.7) folgt

$$\begin{array}{l} v_x(t) = v_{x0} = \text{konst.} \\ v_y(t) = v_{y0} - g \cdot t \end{array} \quad (2.6.9)$$

und aus (2.6.8)

$$\begin{array}{l} x(t) = v_{x0} \cdot t \\ y(t) = h + v_{y0} \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \end{array} \quad (2.6.10)$$

Die Bewegung in x -Richtung ist also eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, die Bewegung in y -Richtung ist ein freier Fall mit der Anfangsgeschwindigkeit v_{y0} .

2 Dynamik

Die Gleichung der Bahnkurve erhält man durch Berechnung von t aus der ersten Gleichung von (2.6.10) und Einsetzen des Ergebnisses in die zweite Gleichung von (2.6.10):

$$t = \frac{x}{v_{x0}} \quad (2.6.11)$$

$$\boxed{y = h + \frac{v_{y0}}{v_{x0}} \cdot x - \frac{g}{2 v_{x0}^2} \cdot x^2} \quad (2.6.12)$$

$y(x)$ ist eine quadratische Funktion, d.h. die Flugbahn ist eine **Parabel**! Der höchste Punkt $P(x_1|y_1)$ der Flugbahn wird zur Zeit t_1 erreicht. Die Koordinaten von P erhält man aus der Bedingung $v_y(t_1) = 0$:

$$v_y(t_1) = v_{y0} - g \cdot t_1 = 0 \quad \implies \quad t_1 = \frac{v_{y0}}{g} \quad (2.6.13)$$

Einsetzen von t_1 in (2.6.10) liefert

$$x_1 = \frac{v_{x0} v_{y0}}{g} \quad (2.6.14)$$

und

$$y_1 = y_{\max} = h + \frac{v_{y0}^2}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{v_{y0}^2}{g^2} = h + \frac{v_{y0}^2}{2g} \quad (2.6.15)$$

Der Körper K trifft zur Zeit t_2 auf den Boden:

$$y(t_2) = -\frac{g}{2} \cdot t_2^2 + v_{y0} \cdot t_2 + h = 0 \quad (2.6.16)$$

Lösen der quadratischen Gleichung ergibt

$$t_2 = \frac{v_{y0}}{g} \begin{matrix} (+) \\ (-) \end{matrix} \frac{1}{g} \sqrt{v_{y0}^2 + 2gh} \quad (2.6.17)$$

Es muss die Lösung mit dem „+“-Zeichen verwendet werden, da sicher $t_2 > t_1 = \frac{v_{y0}}{g}$ gilt. Welche Bedeutung hat die Lösung mit dem „-“-Zeichen?

Die Wurfweite w ist:

$$w = x(t_2) = v_{x0} \cdot t_2 = \frac{v_{x0} v_{y0}}{g} + \frac{v_{x0}}{g} \sqrt{v_{y0}^2 + 2gh} \quad (2.6.18)$$

Aus (2.6.4) und (2.6.18) erhält man die Wurfweite in Abhängigkeit vom Abwurfwinkel φ :

$$w = \frac{v_0 \cos \varphi}{g} \cdot \left(v_0 \sin \varphi + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \varphi + 2gh} \right) \quad (2.6.19)$$

2.7 Die gleichförmige Kreisbewegung

Eine punktförmige Masse m am Ort $P(x(t)|y(t))$ bewegt sich auf einem Kreis mit Radius r und Mittelpunkt $(0|0)$. Der Winkel φ zwischen \vec{OP} und der x -Achse wächst linear mit der Zeit, d.h.

$$\boxed{\varphi = \omega \cdot t} \quad (2.7.1)$$

mit der konstanten **Winkelgeschwindigkeit** oder **Kreisfrequenz** ω . Abb.2.7.1 entnimmt man

$$\boxed{\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}} \quad (2.7.2)$$

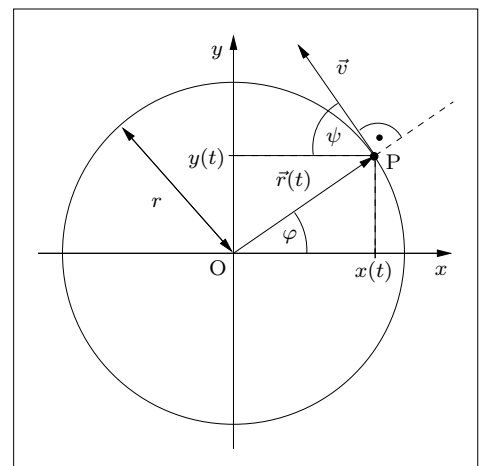


Abb.2.7.1 Kreisbewegung

T sei die Zeit für eine volle Umdrehung:

$$\varphi = \omega \cdot T = 2\pi \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \quad (2.7.3)$$

Der Kehrwert der Umlaufdauer T heißt **Frequenz**:

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}} \quad (2.7.4)$$

Die Einheit der Frequenz ist

$$\boxed{[f] = \frac{1}{s} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ Hertz}} \quad (2.7.5)$$

Beträgt die Frequenz z.B. $f = 5 \text{ Hz}$, dann ist $T = \frac{1}{f} = 0,2 \text{ s}$. In 1 s gibt es dann genau 5 Umläufe.

Die Frequenz f gibt also die Zahl der Umläufe pro Zeiteinheit an!

Der Punkt P legt in der Zeit T den vollen Kreisumfang $U = 2r\pi$ zurück. Für den Betrag v der Geschwindigkeit von P erhält man daher

$$\boxed{v = \frac{2r\pi}{T} = r \cdot \frac{2\pi}{T} = r \cdot \omega} \quad (2.7.6)$$

Mit den Formeln

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi} \quad \text{und} \quad \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi} \quad (2.7.7)$$

und der Tatsache, dass \vec{v} tangential zur Bahnkurve liegt (siehe (1.10.13)) und somit senkrecht auf \vec{r} steht, folgt aus Abb.2.7.1 mit $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \cos \psi \\ v \sin \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \sin \omega t \\ v \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (2.7.8)$$

Aus (2.7.6) und (2.7.8) folgt mit der Definition der Geschwindigkeit und den Abkürzungen $s(t) = \sin \omega t$ bzw. $c(t) = \cos \omega t$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \dot{c}(t) \\ r \dot{s}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \omega s(t) \\ r \omega c(t) \end{pmatrix} \quad (2.7.9)$$

Teilt man (2.7.9) durch r , dann sieht man unmittelbar die Differentiationsformeln

$$\boxed{s(t) = \sin \omega t \quad \Longrightarrow \quad \dot{s}(t) = \omega \cos \omega t} \quad (2.7.10)$$

und

$$\boxed{c(t) = \cos \omega t \quad \Longrightarrow \quad \dot{c}(t) = -\omega \sin \omega t} \quad (2.7.11)$$

Mit (2.7.10) und (2.7.11) kann man jetzt leicht die Beschleunigung berechnen. Aus

$$\boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \sin \omega t \\ v \cos \omega t \end{pmatrix} = r \omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix}} \quad (2.7.12)$$

folgt nämlich

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} = r \omega \begin{pmatrix} -\omega \cos \omega t \\ -\omega \sin \omega t \end{pmatrix} = -r \omega^2 \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t) \quad (2.7.13)$$

oder zusammengefaßt

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t) \quad (2.7.14)$$

Der Beschleunigungsvektor ist also antiparallel zum Ortsvektor und hat den Betrag

$$a = |\vec{a}| = r \omega^2 = \frac{v^2}{r} \quad (2.7.15)$$

Beispiel: Wir betrachten die Bahn der Erde um die Sonne näherungsweise als Kreisbahn mit dem Radius $r = 1,5 \cdot 10^8$ km. Wir wählen ein Koordinatensystem, in dem sich die Erde am 1. Januar um 0.00 Uhr ($t = 0$) am Ort ($r | 0$) befindet und sich im Gegenuhrzeigersinn dreht.

$$T = 1 \text{ a} = 365,25 \text{ d} = 3,1558 \cdot 10^7 \text{ s} \quad , \quad f = \frac{1}{T} = 1 \frac{1}{\text{a}} = 3,1688 \cdot 10^{-8} \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 1,9910 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{s}} \quad , \quad v = \omega \cdot r = 29,865 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 1,075 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Am 5. März um 12.00 Uhr ($t = 63,5 \text{ d} = 5,4864 \cdot 10^6 \text{ s}$) ist die Erde am Ort

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \omega t \\ r \cdot \sin \omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,9061 \cdot 10^7 \text{ km} \\ 1,3316 \cdot 10^8 \text{ km} \end{pmatrix}$$

Die Zentripetalbeschleunigung der Erde ist $a = \omega^2 r = 5,946 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Die Kraft \vec{F}_Z , die den Körper der Masse m auf seine Kreisbahn zwingt, nennt man **Zentripetalkraft**.

Nach Newton2 gilt

$$\vec{F}_Z = m \vec{a} = -m \omega^2 \cdot \vec{r}(t) \quad (2.7.16)$$

oder

$$F_Z = |\vec{F}_Z| = m r \omega^2 = \frac{m v^2}{r} \quad (2.7.17)$$

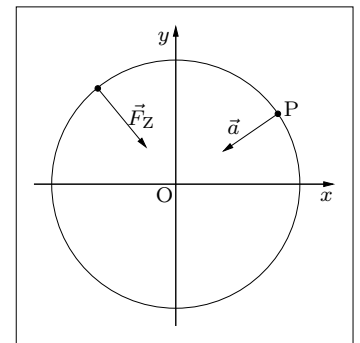


Abb.2.7.2 Zentripetalkraft

Als Beispiel betrachten wir ein Motorrad bei einer Kurvenfahrt. Längs der Achse vom Schwerpunkt S zum Berührungspunkt B von Rad und Boden drückt das Motorrad mit der Kraft \vec{F}_A auf die Straße. \vec{F}_A hat eine zum Boden senkrechte Komponente \vec{F}_N und eine dazu parallele Komponente \vec{F}_P . Auf den Schwerpunkt S wirkt die Gewichtskraft \vec{G} und von B aus die Reaktionskraft $-\vec{F}_A$. Der Neigungswinkel φ des Motorrads zur Vertikalen muss genau so groß sein, dass die Gesamtkraft $-\vec{F}_A + \vec{G}$ gleich der Zentripetalkraft \vec{F}_Z ist. Dem oberen Kräfteparallelogramm entnimmt man

$$F_Z = m g \tan \varphi = \frac{m v^2}{r} \quad (2.7.18)$$

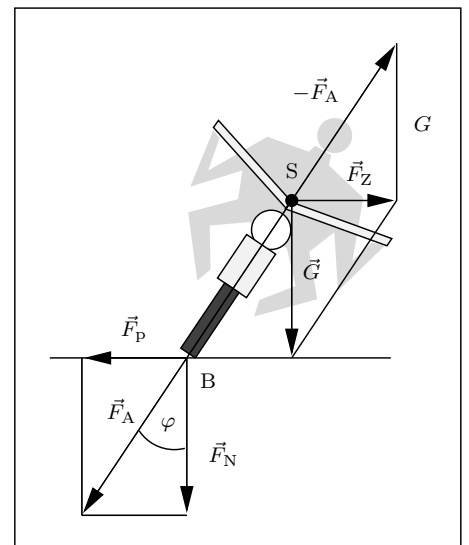


Abb.2.7.3 Kurvenfahrt

d.h.

$$\tan \varphi = \frac{v^2}{r g} \quad (2.7.19)$$

Wegen

$$F_A = \frac{m g}{\cos \varphi} \quad (2.7.20)$$

ist

$$F_N = F_A \cdot \cos \varphi = G \quad (2.7.21)$$

Damit der Reifen nicht seitlich wegrutscht, muss

$$F_p = m g \tan \varphi = F_Z \quad (2.7.22)$$

kleiner sein als die Haftkraft

$$F_H = \mu_H N = \mu_H G \quad (2.7.23)$$

d.h.

$$F_Z = \frac{m v^2}{r} < \mu_H m g \implies \underline{\underline{v < \sqrt{\mu_H r g}}} \quad (2.7.24)$$

2.8 Trägheitskräfte

Ein Bezugssystem S' bewegt sich mit der Beschleunigung \vec{b} relativ zu einem Inertialsystem S . Ein Körper K der Masse m bewegt sich relativ zu S' mit der Beschleunigung \vec{a}' . Nach (1.9.7) bzw. (1.10.26) hat K in S die Beschleunigung

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{b} \quad (2.8.1)$$

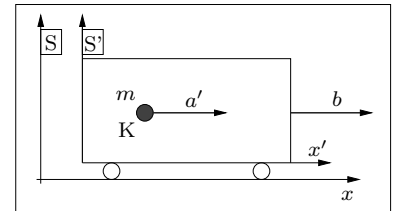


Abb.2.8.1 beschl. System

Von S aus gesehen wirkt auf K die Kraft $\vec{F} = m \vec{a}$, die von der Wechselwirkung mit anderen Körpern herrührt. In S' wirkt auf K die Kraft

$$\vec{F}' = m \vec{a}' = m (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{F} - m \vec{b} \quad (2.8.2)$$

In einem System S' , das sich relativ zu einem Inertialsystem mit der Beschleunigung \vec{b} bewegt, wirkt auf einen Körper der Masse m die Gesamtkraft

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_T = \vec{F} - m \vec{b} \quad (2.8.3)$$

wobei \vec{F} die Wechselwirkungskraft und

$$\vec{F}_T = -m \vec{b} \quad (2.8.4)$$

die **Trägheitskraft** ist.

Als Beispiel betrachten wir ein frei fallendes Flugzeug (System S'). Die Beschleunigung von S' relativ zu einem Inertialsystem ist $\vec{b} = \vec{g}$. Auf einen Passagier wirkt im Inertialsystem die Gewichtskraft $\vec{F} = m \vec{g}$. Im Flugzeug spürt er die Kraft

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_T = m \vec{g} - m \vec{b} = m \vec{g} - m \vec{g} = 0$$

Der Passagier verspürt im frei fallenden Flugzeug also **keine Kraft (Schwereelosigkeit)!!**

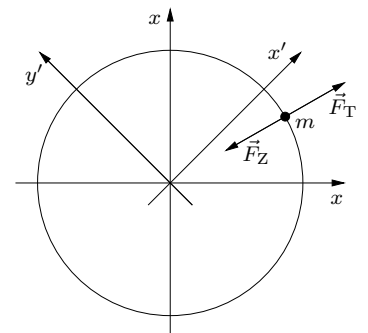


Abb.2.8.2 Zentrifugalkraft

Als weiteres Beispiel betrachten wir ein in einem Inertialsystem S mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierendes System S' . Ein in S' in der Entfernung r vom Drehpunkt ruhender Körper der Masse m erfährt in S die Zentripetalbeschleunigung $\vec{b} = -\omega^2 \vec{r}$. In S' wirkt also auf m die Trägheitskraft

$$\vec{F}_T = -m\vec{b} = m\omega^2 \vec{r} \quad (\text{Zentrifugalkraft}) \quad (2.8.5)$$

Die Zentripetalkraft \vec{F}_Z ist die im **Inertialsystem** wirkende Kraft, die m die Zentripetalbeschleunigung erteilt, d.h. m auf die Kreisbahn zwingt. Die Zentrifugalkraft, die betragsmäßig gleich der Zentripetalkraft ist, ist eine im **rotierenden System** wirkende Trägheitskraft.

Mit den neuen Erkenntnissen schauen wir uns noch einmal das Beispiel des Motorradfahrers in der Kurve an. Der Motorradfahrer kippt nicht um, wenn das Drehmoment um den Drehpunkt B gleich Null ist. Das Drehmoment ist die auf BS senkrecht stehende Komponente der auf den Schwerpunkt S wirkenden Gesamtkraft \vec{F}_A , multipliziert mit \overline{BS} . Das Drehmoment ist also Null, wenn $\vec{F}_A = \vec{G} + \vec{F}_T$ parallel zu BS ist, d.h. wenn

$$\tan \varphi = \frac{F_T}{G} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{rg}$$

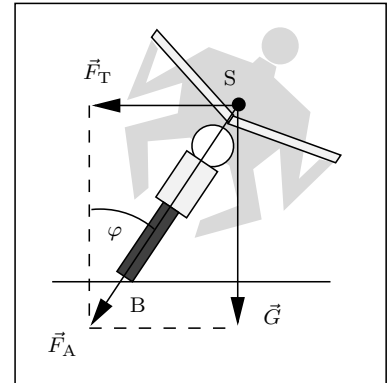


Abb.2.8.3 Kurvenfahrt

2.9 Der Schwerpunkt

Wir betrachten ein System von n Punktmassen m_i an den Orten $\vec{r}_i(t)$. Für den Gesamtimpuls des Systems erhält man

$$\vec{p}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 + \dots + m_n \dot{\vec{r}}_n \quad (2.9.1)$$

Mit welcher Geschwindigkeit \vec{v}_S müsste sich ein Massenpunkt der Masse

$$m = m_{\text{ges}} = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{i=1}^n m_i \quad (2.9.2)$$

bewegen, damit sein Impuls

$$\vec{p}_S = m \vec{v}_S \quad (2.9.3)$$

gleich dem Impuls \vec{p}_{ges} des Systems der n Teilchen ist? Aus (2.9.1), (2.9.2) und (2.9.3) folgt

$$\dot{\vec{r}}_S = \vec{v}_S = \frac{\vec{p}_S}{m} = \frac{\vec{p}_{\text{ges}}}{m} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \quad (2.9.4)$$

Gleichung (2.9.4) ist sicher erfüllt, wenn

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad (2.9.5)$$

Der Punkt S mit $\overrightarrow{OS} = \vec{r}_S$ heißt **Schwerpunkt** des Systems von Massenpunkten. Zusammenfassend halten wir fest:

Der Gesamtimpuls eines Systems von n Punktmassen ist gleich dem Impuls eines fiktiven Teilchens im Schwerpunkt des Systems, dessen Masse gleich der Gesamtmasse m des Systems ist:

$$\vec{p}_{\text{ges}} = \vec{p}_S = m \vec{v}_S$$

(2.9.6)

In einem abgeschlossenen System, d.h. wenn die Teilchen nur untereinander in Wechselwirkung stehen, ist der Gesamtimpuls und damit auch \vec{p}_S konstant.

Abgeschlossenes System $\implies \vec{p}_{\text{ges}} = \vec{p}_S = m \vec{v}_S = \text{konst.} \implies \vec{v}_S = \text{konst.}$

(2.9.7)

Der Schwerpunkt eines Teilchensystems kann allein durch Kräfte zwischen den Teilchen nicht beschleunigt werden!

Der Schwerpunkt der Bruchstücke einer im Weltall explodierten Rakete zum Beispiel bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.

Beispiel: $m_1 = 2 \text{ kg}$ am Ort $P_1(1 \text{ m} | 3 \text{ m})$, $m_2 = 1 \text{ kg}$ am Ort $P_2(-2 \text{ m} | 3 \text{ m})$,
 $m_3 = 3 \text{ kg}$ am Ort $P_3(3 \text{ m} | -2 \text{ m})$.

$$\vec{r}_S = \frac{1}{6 \text{ kg}} \cdot \left[2 \text{ kg} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ m} + 1 \text{ kg} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ m} + 3 \text{ kg} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ m} \right] = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \text{ m}}}$$

Wir betrachten jetzt eine massive Scheibe der Gesamtmasse m , die in einem Punkt $D(x_D | y_D)$ drehbar gelagert ist. Das i -te Atom der Scheibe habe die Masse m_i und befinde sich am Ort $\vec{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$, die Gewichtskraft zeige in Richtung der negativen y -Achse.

Das Drehmoment (Kraft mal Kraftarm!) des i -ten Atoms ist

$$M_i = G_i \cdot b_i \quad \text{mit} \quad b_i = x_i - x_D \quad (2.9.8)$$

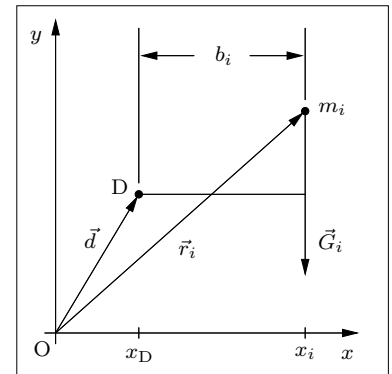


Abb.2.9.1 Drehmoment

Das gesamte Drehmoment der Scheibe bezüglich des Drehpunktes D ist dann

$$M = \sum_{i=1}^n G_i b_i = \sum_{i=1}^n m_i g (x_i - x_D) = g \sum_{i=1}^n m_i x_i - g x_D \sum_{i=1}^n m_i = g \sum_{i=1}^n m_i x_i - m g x_D \quad (2.9.9)$$

Aus (2.9.5) folgt

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i = m x_S \quad (2.9.10)$$

und damit aus (2.9.9)

$M = m g (x_S - x_D)$

(2.9.11)

Das Gesamtdrehmoment der Scheibe berechnet sich so, wie wenn die Gesamtmasse m im Schwerpunkt S konzentriert wäre!

Der Angriffspunkt der Gewichtskraft ist der Schwerpunkt!

(2.9.12)

Der Schwerpunkt eines massiven Körpers bewegt sich unter dem Einfluss der Schwerkraft so, wie wenn sich die gesamte Masse im Schwerpunkt befinden würde!

(2.9.13)

Ein Körper heißt **homogen**, wenn er überall die gleiche Dichte hat. In folgender Tabelle sind die Schwerpunkte einiger homogener Körper zusammengestellt:

Körper	Schwerpunkt
Kugel	Mittelpunkt
Zylinder	Mittelpunkt der Achse
Quader	Schnittpunkt der Raumdiagonalen
Dreieck	Schnittpunkt der Seitenhalbierenden
Kreisscheibe	Mittelpunkt

Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1!

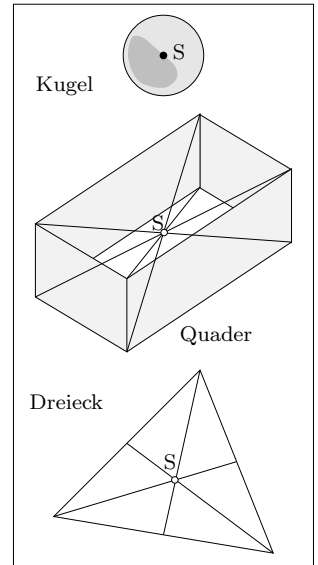


Abb.2.9.2 Körper

Den Schwerpunkt eines Körpers findet man oft, indem man sich die Massen von Teilkörpern in den Schwerpunkten dieser Teilkörper konzentriert denkt!

Beispiel:

Eine Eisenkugel mit Radius R ist im Mittelpunkt einer Seitenfläche auf einen Eisenwürfel der Kantenlänge $2R$ geschweißt.

$$m_1 = \frac{4\pi}{3} \rho R^3 \quad m_2 = 8 R^3 \rho$$

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{m_1 R + m_2 \cdot 3 R}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{4\pi}{3} \rho R^4 + 24 \rho R^4}{\frac{4\pi}{3} \rho R^3 + 8 \rho R^3} = \\ &= \frac{4\pi + 72}{4\pi + 24} R = \underline{\underline{2,31 R}} \end{aligned}$$

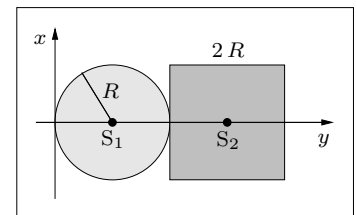


Abb.2.9.3 Beispiel

2.10 Der Schwerpunkt des Dreiecks

Wir suchen die Schwerpunktskoordinaten eines Dreiecks mit konstanter „Flächendichte“

$$\sigma = \frac{\Delta m}{\Delta A} \quad (2.10.1)$$

Zunächst berechnen wir die Schwerpunktskoordinaten eines **rechtwinkligen** Dreiecks mit den Katheten p und h (siehe Abb.2.10.1). Dazu zerlegen wir das Dreieck in n senkrechte Streifen der Breite

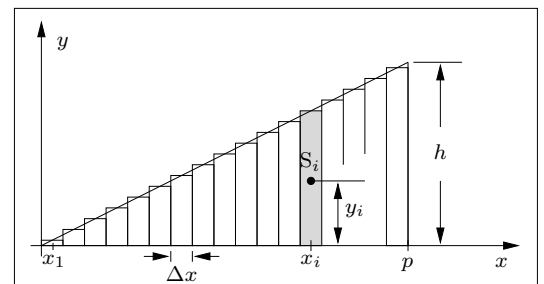


Abb.2.10.1 Ein Streifen

$$\Delta x = \frac{p}{n} \quad (2.10.2)$$

2 Dynamik

Der erste Streifen geht auf der x -Achse von 0 bis Δx , d.h. sein Schwerpunkt S_1 hat die x -Koordinate $x_1 = \frac{\Delta x}{2}$. Der Schwerpunkt jedes weiteren Streifens liegt um Δx weiter rechts, d.h. der Schwerpunkt des i -ten Streifens hat die x -Koordinate

$$x_i = \frac{\Delta x}{2} + (i-1) \cdot \Delta x = \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta x = \left(i - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{p}{n} \quad (2.10.3)$$

Die Höhe h_i des i -ten Streifens errechnet sich aus den Strahlensätzen zu

$$h_i = h \cdot \frac{x_i}{p} \quad (2.10.4)$$

Der Schwerpunkt S_i des i -ten Streifens hat dann die y -Koordinate

$$y_i = \frac{h_i}{2} = \frac{h x_i}{2p} = \left(i - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{h}{2n} \quad (2.10.5)$$

Die Masse des i -ten Streifens ist

$$m_i = \sigma \cdot A_i = \sigma \cdot \Delta x \cdot h_i = \sigma \frac{p}{n} \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{h}{n} = \sigma \frac{p h}{n^2} \left(i - \frac{1}{2}\right) \quad (2.10.6)$$

Die Gesamtmasse des Dreiecks ist

$$m = \sigma \cdot \frac{1}{2} p h \quad (2.10.7)$$

Für die x -Koordinate x_S des Schwerpunkts des Dreiecks erhält man aus (2.10.3), (2.10.6) und (2.10.7)

$$\begin{aligned} x_S &\approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i = \frac{2}{\sigma p h} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma p^2 h}{n^3} \left(i - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2p}{n^3} \sum_{i=1}^n \left(i - \frac{1}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{2p}{n^3} \sum_{i=1}^n \left(i^2 - i + \frac{1}{4}\right) = \frac{2p}{n^3} \left(\sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} \right) = \\ &= \frac{2p}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{4} \right) = \\ &= \frac{2p}{n^3} \cdot \frac{4n^3 - n}{12} = \frac{p}{6} \left(4 - \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned} \quad (2.10.8)$$

Die rechte Seite von (2.10.8) ist der exakte Wert der Schwerpunktskoordinate für das in rechteckige Streifen zerlegte Dreieck. Das Ungleichheitszeichen geht in ein Gleichheitszeichen über, wenn der Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$, d.h. $n \rightarrow \infty$ ausgeführt wird:

$$x_S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{6} \left(4 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{p}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3} p \quad (2.10.9)$$

Aus (2.10.5) folgt

$$y_i = \frac{h}{2p} x_i \quad (2.10.10)$$

und damit für die Schwerpunktskoordinate in y -Richtung

$$y_S = \frac{h}{2p} x_S = \frac{h}{2p} \cdot \frac{2}{3} p = \frac{1}{3} h \quad (2.10.11)$$

Um die Lage des Schwerpunkts im allgemeinen Dreieck $\triangle ABC$ mit $A(-p|0)$, $B(q|0)$ und $C(0|h)$ zu ermitteln, zerlegen wir in zwei rechtwinklige Dreiecke $\triangle AOC$ und $\triangle BOC$ mit den Schwerpunkten S_1 und S_2 . Die Massen der Teildreiecke sind

$$m_1 = \frac{1}{2} \sigma p h \quad (2.10.12)$$

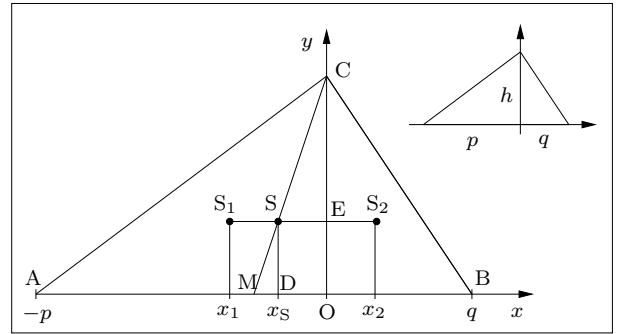


Abb.2.10.2 allgemeines Dreieck

und

$$m_2 = \frac{1}{2} \sigma q h \quad (2.10.13)$$

Unter Berücksichtigung der neuen Lage des Koordinatenursprungs folgt aus (2.10.9) und (2.10.11) für die Koordinaten von S_1 und S_2

$$x_1 = -\frac{p}{3}, \quad x_2 = \frac{q}{3}, \quad y_1 = y_2 = \frac{h}{3} \quad (2.10.14)$$

Damit folgt für die Koordinaten des Gesamtschwerpunktes S

$$x_S = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{-\frac{1}{2} \sigma p h \frac{p}{3} + \frac{1}{2} \sigma q h \frac{q}{3}}{\frac{1}{2} \sigma p h + \frac{1}{2} \sigma q h} = \frac{-\frac{p^2}{3} + \frac{q^2}{3}}{p + q} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(q - p)(q + p)}{q + p} \quad (2.10.15)$$

$$\boxed{x_S = \frac{1}{3} \cdot (q - p)} \quad (2.10.16)$$

$$y_S = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} = y_1 = \frac{h}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_S = \frac{h}{3}} \quad (2.10.17)$$

Es fehlt noch der Nachweis, dass die Gerade CS tatsächlich eine Seitenhalbierende des Dreiecks ist. Mit dem Schnittpunkt M von CS und AB entnimmt man der Zeichnung

$$\frac{\overline{MO}}{\overline{SE}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{CE}} = \frac{h}{\frac{2h}{3}} = \frac{3}{2} \quad (2.10.18)$$

Mit $\overline{SE} = |x_S| = \frac{1}{3}(p - q)$ folgt

$$\overline{MB} = \overline{MO} + q = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}(p - q) + q = \frac{p - q}{2} + q = \frac{p + q}{2} = \frac{\overline{AB}}{2} \quad (2.10.19)$$

Zusammenfassend gesehen haben wir bewiesen:

Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.
Die Seitenhalbierenden teilen sich im Verhältnis 2 : 1.

3 Energie

3.1 Arbeit und Leistung

Ein Körper K wird unter dem Einfluss der konstanten Kraft \vec{F} um $\Delta\vec{x}$ verschoben. \vec{F}_{\parallel} sei die Komponente von \vec{F} parallel zu $\Delta\vec{x}$. Mit dem Winkel φ zwischen \vec{F} und $\Delta\vec{x}$ definieren wir

$$F_{\parallel} = |\vec{F}| \cdot \cos \varphi \quad (3.1.1)$$

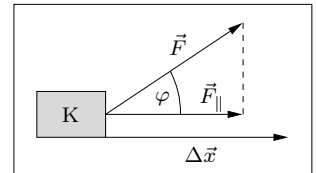


Abb.3.1.1 Arbeit

F_{\parallel} ist **nicht** der Betrag von \vec{F}_{\parallel} , da $F_{\parallel} < 0$ für $\cos \varphi < 0$!!

Definition der Arbeit:

Wird K unter dem Einfluss der konstanten Kraft \vec{F} um $\Delta\vec{x}$ verschoben, dann wird an K die **Arbeit**

$$W = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{x}| \cdot \cos \varphi = F_{\parallel} \cdot |\Delta\vec{x}| \quad (3.1.2)$$

verrichtet.

Δx_{\parallel} ist die Komponente von $\Delta\vec{x}$ parallel zu \vec{F} und

$$\Delta x_{\parallel} = |\Delta\vec{x}| \cos \varphi \quad (3.1.3)$$

Aus (3.1.2) und (3.1.3) folgt

$$W = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{x}| \cdot \cos \varphi = F_{\parallel} \cdot |\Delta\vec{x}| = |\vec{F}| \cdot \Delta x_{\parallel} \quad (3.1.4)$$

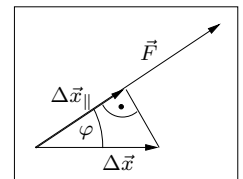


Abb.3.1.2

Arbeit = „Kraft in Wegrichtung“ mal Weg =
= Kraft mal „Weg in Kraftrichtung“

Ist $\vec{F} \parallel \Delta\vec{x}$, dann ist natürlich $\vec{F}_{\parallel} = \vec{F}$ und wegen $\cos 0 = 1$ bzw. $\cos 180^\circ = -1$ folgt

$$W = \begin{cases} |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{x}| & \text{für } \varphi = 0 \\ -|\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{x}| & \text{für } \varphi = 180^\circ \end{cases} \quad (3.1.5)$$

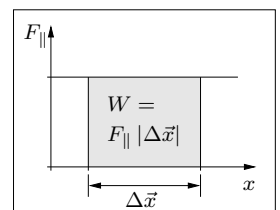


Abb.3.1.3

Für $\vec{F} = \text{konst.}$ entnimmt man Abb.3.1.3, dass

$$W = F_{\parallel} \cdot |\Delta\vec{x}| = \text{Fläche unter dem } xF_{\parallel}\text{-Diagramm} \quad (3.1.6)$$

(3.1.6) nimmt man als Anlass für die Definition der Arbeit bei beliebigem, d.h. nicht notwendig konstantem \vec{F} :

$$W = \text{Fläche unter dem } xF_{\parallel}\text{-Diagramm} \quad (3.1.7)$$

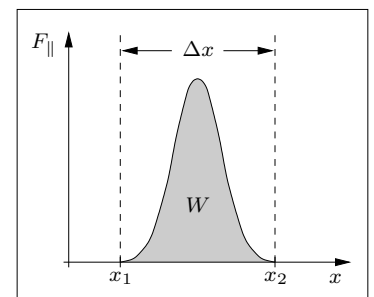


Abb.3.1.4 x - F_{\parallel} -Diagramm

Für das Vorzeichen von W bzw. F_{\parallel} gilt dabei

$$\begin{array}{l} W > 0 \quad \text{und} \quad F_{\parallel} > 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq \varphi < 90^\circ \\ W = 0 \quad \text{und} \quad F_{\parallel} = 0 \quad \text{für} \quad \varphi = 90^\circ \\ W < 0 \quad \text{und} \quad F_{\parallel} < 0 \quad \text{für} \quad 90^\circ < \varphi \leq 180^\circ \end{array} \quad (3.1.8)$$

$W < 0$ bedeutet, dass die Arbeit nicht von außen am Körper verrichtet werden muss, sondern vom Körper selbst verrichtet wird (Beispiel siehe nächste Seite bei der Hubarbeit).

Einheit der Arbeit:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Joule} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ Nm} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} \quad (3.1.9)$$

Die Hubarbeit:

Ein Körper der Masse m wird mit konstanter Geschwindigkeit vertikal um die Strecke h bewegt. Während des Vorgangs muss wegen $v = \text{konst.}$ die Gesamtkraft auf den Körper Null sein. Zur Kompensation der Gewichtskraft $G = -mg$ muss also die konstante Kraft $F = +mg$ auf den Körper einwirken. Mit $\Delta x = h$ und $\varphi = 0$ (heben) bzw. $\varphi = 180^\circ$ (senken) folgt $F_{\parallel} = \pm F$ und damit

$$W_{\text{Hub}} = \begin{cases} mgh & \text{(nach oben)} \\ -mgh & \text{(nach unten)} \end{cases} \quad (\text{Hubarbeit}) \quad (3.1.10)$$

Ein Körper der Masse m wird einmal reibungsfrei über eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel φ und einmal senkrecht um die Höhe h gehoben. Auf der schiefen Ebene muss dabei der Hangabtrieb \vec{H} durch $\vec{F}_1 = -\vec{H}$ mit $|\vec{F}_1| = |\vec{H}| = mg \sin \varphi$ kompensiert werden. Mit $\Delta x = \frac{h}{\sin \varphi}$ folgt für die verrichtete Arbeit auf der schiefen Ebene

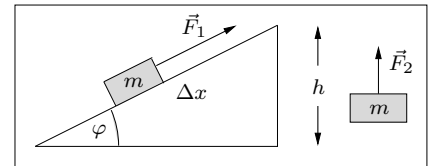


Abb.3.1.5 Hubarbeit

$$W_1 = |\vec{F}_1| \cdot \Delta x = mg \sin \varphi \cdot \frac{h}{\sin \varphi} = mgh = W_2 \quad (3.1.11)$$

Allgemein gilt:

$$\boxed{\text{Wird ein Körper der Masse } m, \text{ ganz gleich auf welchem Weg, um die Höhe } h \text{ gehoben, dann wird dabei die Hubarbeit } W_{\text{Hub}} = mgh \text{ verrichtet.}} \quad (3.1.12)$$

Die Reibungsarbeit:

Ein Körper der Masse m wird unter Reibungseinfluss um die Strecke Δx bewegt. Während des Vorgangs muss zur Kompensation der Reibungskraft $R = -\mu N$ die konstante Kraft $F = \mu N$ mit $\vec{F} \parallel \Delta \vec{x}$ auf den Körper einwirken. Mit $\varphi = 0$ folgt $F_{\parallel} = F$ und damit

$$\boxed{W_{\text{Reib}} = \mu N |\Delta \vec{x}|} \quad (\text{Reibungsarbeit}) \quad (3.1.13)$$

Ist \vec{F} nicht parallel zu $\Delta \vec{x}$, dann muss berücksichtigt werden, dass die zur Unterlage senkrechte Komponente von \vec{F} die Normalkraft N verändert!

Die Beschleunigungsarbeit:

Ein Körper K der Masse m wird mit **konstanter** Kraft aus der Ruhe heraus in der Zeit Δt auf die Geschwindigkeit v beschleunigt. Dabei legt K den Weg $\Delta x = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$ zurück. An K wird während des Beschleunigungsvorgangs die Arbeit

$$W = F \cdot \Delta x = ma \cdot \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} m (a \Delta t)^2 = \frac{1}{2} m v^2 \quad (3.1.14)$$

3 Energie

verrichtet. Wird K zunächst von Null auf v_A und dann von v_A auf v_E beschleunigt, dann gilt

$$W_{0,v_A} + W_{v_A,v_E} = W_{0,v_E} \quad (3.1.15)$$

oder

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + W_{v_A,v_E} = \frac{1}{2} m v_E^2 \quad (3.1.16)$$

Daraus folgt

$$W_{v_A,v_E} = \frac{1}{2} m v_E^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m (v_E^2 - v_A^2) \quad (3.1.17)$$

Bisher sind wir von einer konstanten Beschleunigung ausgegangen. Ist die Beschleunigung nicht konstant, dann zerlegen wir den Beschleunigungsvorgang in so kleine Teile, dass für jeden Teil die Beschleunigung als konstant angesehen werden kann und somit (3.1.17) für jedes Intervall gilt:

$$\begin{aligned} W_{v_A,v_E} &= W_{v_A,v_1} + W_{v_1,v_2} + W_{v_2,v_3} + \dots + W_{v_n,v_E} = \\ &= \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_A^2 + v_2^2 - v_1^2 + v_3^2 - v_2^2 + v_4^2 - v_3^2 + \dots + v_n^2 - v_{n-1}^2 + v_E^2 - v_n^2) = \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2} m (v_E^2 - v_A^2)}} \end{aligned}$$

Für beliebige Beschleunigungen gilt also:

Um einen Körper der Masse m von v_A auf v_E zu beschleunigen, muss die Beschleunigungsarbeit

$$W_{v_A,v_E} = \frac{1}{2} m (v_E^2 - v_A^2) \quad (3.1.18)$$

verrichtet werden.

Die Spannarbeit bei einer Feder:

Eine Feder sei bei $x = x_0$ entspannt (Ruhelage). Nach dem Hook'schen Gesetz wirkt auf die Feder in der Lage x die Kraft

$$F = D \cdot \Delta x = D \cdot (x - x_0) \quad (3.1.19)$$

mit der Federkonstanten (Federhärte) D . Für das Dehnen und das Zusammendrücken der Feder zeigt \vec{F} in die gleiche Richtung wie $\Delta \vec{x}$, d.h. $F_{\parallel} = |F| = D |\Delta x|$. Die Spannarbeit W_S ist die Arbeit, die man aufwenden muss, um die Feder von der Ruhelage x_0 aus um Δx zu dehnen bzw. zu stauchen. Abb.3.1.6 entnimmt man mit Hilfe von (3.1.7):

$$W_S = \frac{1}{2} F_{\parallel} |\Delta x| = \frac{1}{2} D (\Delta x)^2 \quad (3.1.20)$$

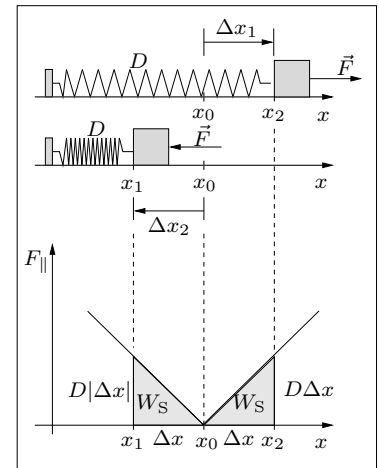


Abb.3.1.6 Spannarbeit

Die Arbeit pro Zeit nennt man **Leistung**. Für die mittlere Leistung im Zeitintervall Δt gilt:

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (\text{mittlere Leistung}) \quad (3.1.21)$$

Die **momentane Leistung** definiert man wie die Momentangeschwindigkeit:

$$P = \dot{W} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W(t + \Delta t) - W(t)}{\Delta t} \quad (\text{momentane Leistung}) \quad (3.1.22)$$

3 Energie

Die Einheit der Leistung ist

$$\boxed{1 \text{ W} = 1 \text{ Watt} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{N m}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3}} \quad (3.1.23)$$

Wir wollen jetzt die Leistung P berechnen, die man aufbringen muss, um einem Körper der Masse m die Beschleunigung a zu verleihen. Mit den Abkürzungen

$$v(t) = v \quad \text{und} \quad v(t + \Delta t) = v + \Delta v \quad (3.1.24)$$

erhält man

$$W(t) = \frac{1}{2} m v^2 \quad (3.1.25)$$

und

$$W(t + \Delta t) = \frac{1}{2} m (v + \Delta v)^2 = \frac{1}{2} m (v^2 + 2 v \Delta v + (\Delta v)^2) \quad (3.1.26)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \Delta W &= W(t + \Delta t) - W(t) = \\ &= \frac{1}{2} m (v^2 + 2 v \Delta v + (\Delta v)^2) - \frac{1}{2} m v^2 = \\ &= \frac{1}{2} m (2 v \Delta v + (\Delta v)^2) \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

Für die Beschleunigung gilt

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (3.1.28)$$

Einsetzen von (3.1.27) in (3.1.22) liefert mit (3.1.28)

$$\begin{aligned} P &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{m}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 v \Delta v + (\Delta v)^2}{\Delta t} = \\ &= \frac{m}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(2 v \frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \Delta v \right) = \\ &= \frac{m}{2} \left(2 v \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta v \right) = \\ &= \frac{m}{2} \left(2 v a + a \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta v \right) = \\ &= \frac{m}{2} (2 v a + a \cdot 0) = \underline{\underline{m v a}} \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Um einem Körper der Masse m und der Momentangeschwindigkeit v die Beschleunigung a zu erteilen, muss die momentane Leistung

$$P = m v a \quad (3.1.30)$$

aufgebracht werden.

Die gerade erfolgte Herleitung von (3.1.30) kann noch viel eleganter und allgemeiner geschehen:

In einem kurzen Zeitintervall Δt , in dem die auf den Körper wirkende Kraft F als konstant angesehen werden kann, ist die verrichtete Arbeit

$$\Delta W = F \cdot \Delta x \quad (3.1.31)$$

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F \cdot \Delta x}{\Delta t} = F \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = F \cdot v \quad (3.1.32)$$

Wirkt auf einen Körper der Masse m und der Momentangeschwindigkeit v die Kraft F , dann wird am Körper die momentane Leistung

$$P = F \cdot v$$

verrichtet.

(3.1.33)

(3.1.30) folgt aus (3.1.33) mit $F = m \cdot a!$

3.2 Die potentielle Energie

Eine nur vom Ort \vec{r} und nicht von der Geschwindigkeit abhängige Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ nennt man ein **Kraftfeld**. Das einfachste Beispiel für ein Kraftfeld ist die Gewichtskraft in der Nähe der Erdoberfläche:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \text{konst.} \quad (3.2.1)$$

An jedem Ort \vec{r} herrscht die gleiche Kraft.

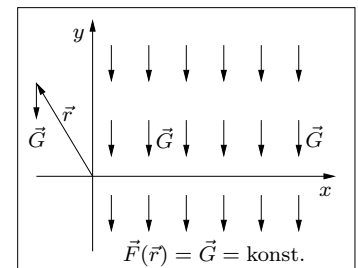


Abb.3.2.1 Gravitation

Ein Kraftfeld mit $\vec{F}(\vec{r}) = \text{konst.}$ heißt **homogenes** Feld. Die Gewichtskraft in der Nähe der Erdoberfläche ist also ein Beispiel für ein homogenes Feld.

Wir wählen in unserem Feld (3.2.1) einen beliebigen Punkt P_0 . Die Arbeit zum Verschieben einer Masse m von P_0 zu irgend einem Punkt P_1 ist wegen (3.1.12)

$$W_{01} = m g (y_1 - y_0) = m g \Delta y \quad (3.2.2)$$

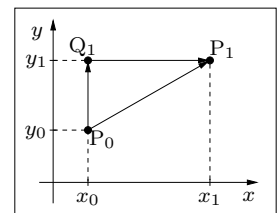


Abb.3.2.2

W_{01} hängt nur von $\Delta y = y_1 - y_0$ und nicht vom speziell gewählten Transportweg ab. Auf dem Weg von P_0 über Q_1 nach P_1 z.B. setzt sich die gesamte Arbeit aus der Arbeit

$$W_{P_0, Q_1} = m g \Delta y \quad (3.2.3)$$

zum senkrechten Heben und der Arbeit

$$W_{Q_1, P_1} = m g \Delta x \cdot \cos 90^\circ = 0 \quad (3.2.4)$$

zum horizontalen Verschieben zusammen.

Die Körper K_1 und K_2 in Abb.3.2.3 haben beide die gleiche Masse m . Unter der Annahme einer reibungsfreien Rolle und eines masselosen Seils ist K_2 nach einem leichten Anstoß in der Lage, K_1 nach oben zu ziehen und somit die Arbeit $W = m g h$ an K_1 zu verrichten. Die Fähigkeit von K_2 , Arbeit zu verrichten, nennt man **Energie**. Diese Energie wurde K_2 dadurch verliehen, dass K_2 zunächst selbst auf die Höhe h gebracht wurde.

Analysieren wir den ganzen Vorgang genauer:

- K_1 und K_2 liegen am Boden (Höhe Null).

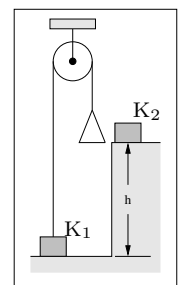


Abb.3.2.3

- K_2 wird auf die Höhe h gebracht, d.h. an K_2 wird die Arbeit $W = m g h$ verrichtet.

- Auf Grund seiner neuen Lage (Höhe h) ist in K_2 die Arbeit W gespeichert.

K_2 hat jetzt die **potentielle Energie** (Lageenergie) $W_{P_2} = W = m g h$.

3 Energie

- K_2 bewegt sich nach unten, verliert seine potentielle Energie und verrichtet dabei an K_1 die Arbeit $W = m g h$.
- K_2 liegt am Boden (potentielle Energie $W_{p2} = 0$),
 K_1 in der Höhe h (potentielle Energie $W_{p1} = m g h$)

$\vec{F}(\vec{r})$ sei die Kraft auf einen Körper K , P_0 ein beliebiger Punkt. $W_{P_0,P}$ ist die Arbeit, die an K bei der Bewegung von P_0 nach P verrichtet wird. Ist $W_{P_0,P}$ vom speziellen Weg von P_0 nach P unabhängig, d.h. auf allen Wegen gleich, dann nennt man $\vec{F}(\vec{r})$ **konservativ**. Die Gewichtskraft in der Nähe der Erdoberfläche z.B. ist eine konservative Kraft.

In einem konservativen Kraftfeld ist die potentielle Energie eines Körpers K im Punkt P bezüglich des Punktes P_0 definiert als die Arbeit, die verrichtet werden muss, um K mit konstanter Geschwindigkeit von P_0 nach P zu überführen:

$$\boxed{W_p(P) = W_{P_0,P}} \quad (3.2.5)$$

In einem nichtkonservativen Kraftfeld ist die Definition der potentiellen Energie sinnlos, da es in einem Punkt P mehrere Werte für W_p geben würde!

Da nach Definition der potentiellen Energie die Verschiebung von K mit konstanter Geschwindigkeit erfolgen soll, muss die Gesamtkraft auf K Null sein. Die zur Verschiebung notwendige Kraft \vec{F}^* muss also $\vec{F}(\vec{r})$ genau aufheben, d.h. $\vec{F}^* = -\vec{F}$. Für eine kleine Verschiebung $\Delta\vec{r}$, für die \vec{F} als konstant angesehen werden kann, gilt somit für die Verschiebungsarbeit

$$\Delta W = |\vec{F}^*| \cdot |\Delta\vec{r}| \cdot \cos \varphi = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{r}| \cdot \cos \varphi \quad (3.2.6)$$

Dabei ist φ der Winkel zwischen \vec{F}^* und $\Delta\vec{r}$!

Überführt man K in einem konservativen Kraftfeld zunächst von P_0 nach P_1 und dann von P_1 nach P_2 , dann gilt für die Arbeit

$$W_{P_0,P_2} = W_{P_0,P_1} + W_{P_1,P_2} \quad (3.2.7)$$

oder

$$W_p(P_2) = W_p(P_1) + W_{P_1,P_2} \quad (3.2.8)$$

und damit

$$\boxed{W_{P_1,P_2} = W_p(P_2) - W_p(P_1)} \quad (3.2.9)$$

oder in Worten

$$\boxed{\text{Überführungsarbeit} = \text{Differenz der potentiellen Energien}} \quad (3.2.10)$$

$W_{P_0}(P)$ ist die potentielle Energie in P bezüglich P_0 , $W_{Q_0}(P)$ ist die potentielle Energie in P bezüglich Q_0 .

$$W_{Q_0}(P) = W_{Q_0,P} = W_{Q_0,P_0} + W_{P_0,P} = W_{Q_0,P_0} + W_{P_0}(P) \quad (3.2.11)$$

$$\boxed{W_{Q_0}(P) = W_{Q_0,P_0} + W_{P_0}(P)} \quad (3.2.12)$$

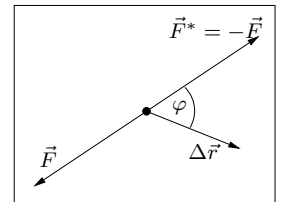


Abb.3.2.4

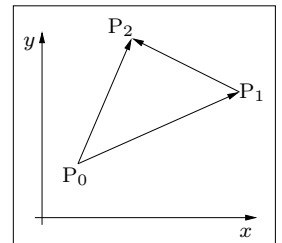


Abb.3.2.5

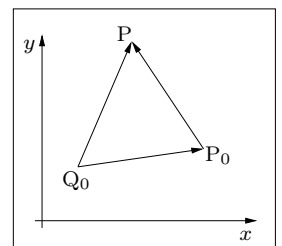


Abb.3.2.6

(3.2.12) ist die Umrechnungsformel für die potentielle Energie bei Änderung des Bezugspunktes.

Beispiel: $\vec{F}(\vec{r})$ ist die Gewichtskraft in der Nähe der Erdoberfläche.

$$P_0(0|0), \quad Q_0(x_0|y_0), \quad P(x|y)$$

$$W_{Q_0, P_0} = m g (0 - y_0) = -m g y_0$$

$$W_{P_0}(P) = m g y$$

$$W_{Q_0}(P) = m g (y - y_0) = m g y - m g y_0 = W_{P_0}(P) + W_{Q_0, P_0}$$

Damit ist (3.2.12) für dieses Beispiel bestätigt!

3.3 Die Zentralkraft

Alle Kräfte in der Physik lassen sich auf die Wechselwirkung zwischen Elementarteilchen zurückführen. Die meisten Kräfte zwischen zwei Elementarteilchen haben folgende Eigenschaften:

1. Die Wirkungslinie der Kräfte ist die Verbindungsgerade der beiden Teilchen.
2. Der Betrag der Wechselwirkungskraft ist nur von der Entfernung der beiden Teilchen abhängig, nicht aber von der Richtung des Vektors von Teilchen 1 zu Teilchen 2.

Befindet sich das eine Teilchen im Ursprung eines Koordinatensystems und das andere Teilchen am Ort \vec{r} , dann gilt für die Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ auf das zweite Teilchen:

Die Wirkungslinie von \vec{F} geht durch O

(3.3.1)

Der Betrag von \vec{F} ist eine Funktion von $r = |\vec{r}|$

(3.3.2)

Mit dem Einheitsvektor $\vec{e}_{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{r}$ in Richtung von \vec{r} gilt dann

$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r} = F(r) \cdot \vec{e}_{\vec{r}} \quad \text{mit} \quad r = |\vec{r}|$

(Zentralkraft) (3.3.3)

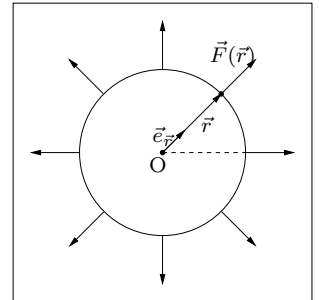


Abb.3.3.1 Zentralkraft

Das Feld der Zentralkraft heißt auch **radialsymmetrisch**.

Für $F(r) > 0$ zeigt $\vec{F}(\vec{r})$ von O weg, für $F(r) < 0$ zeigt $\vec{F}(\vec{r})$ zu O hin!

(3.3.4)

$F(r)$ ist auf einer Kugelschale um O konstant.

(3.3.5)

Unser Teilchen wird jetzt mit konstanter Geschwindigkeit vom Punkt P zum Punkt Q ($\vec{PQ} = \Delta\vec{x}$) bewegt. Dabei wirkt auf das Teilchen die Kraft $\vec{F}^*(\vec{r}) = -\vec{F}(\vec{r})$. S liege auf der Geraden OP mit $\overline{OS} = \overline{OQ} = r + \Delta r$. Wie wählen $|\Delta\vec{x}|$ so klein, dass der Kreisbogen SQ praktisch gleich dem Lot von Q auf OP wird und \vec{F} während der Bewegung als konstant betrachtet werden kann. Damit erhält man für die von \vec{F}^* verrichtete Arbeit

$\Delta W = |\vec{F}^*| \cdot |\Delta\vec{x}| \cdot \cos \varphi = F^* \cdot \Delta r = -F \cdot \Delta r$

(3.3.6)

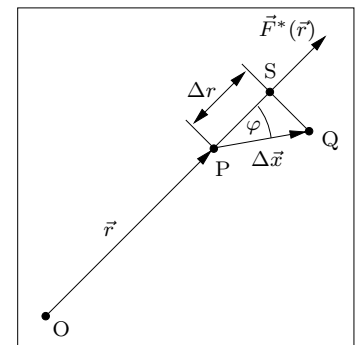


Abb.3.3.2

Beweise die Richtigkeit des Vorzeichens von (3.3.6) für die vier Möglichkeiten $F^* \ll \gg 0$ und

$\varphi \ll 90^\circ$! Für ein beliebig großes Δx erhält man

$$\boxed{\Delta W = \text{Fläche unter dem } r\text{-}F^*\text{-Diagramm}} \quad (3.3.7)$$

Da ΔW nur von r abhängt, ist ΔW wegunabhängig, d.h. das Feld einer Zentralkraft ist konservativ! Da für $\Delta r = 0$ aus (3.3.6) auch $\Delta W = 0$ folgt, gilt für die potentielle Energie im Feld einer Zentralkraft

$$\boxed{W_p(r) = \text{konst. für } r = \text{konst.}} \quad (3.3.8)$$

d.h. W_p ist auf Kugelschalen um O konstant!

3.4 Der Energiesatz

Ein **abgeschlossenes System** ist eine Ansammlung von n Körpern, die zwar untereinander, aber mit keinen anderen Körpern, in Wechselwirkung stehen. Zwei Kugeln zum Beispiel, die durch eine Feder verbunden sind und frei im Weltall schweben, bilden ein abgeschlossenes System.

Die **kinetische Energie** W_{kin} eines Körpers der Masse m mit dem Geschwindigkeitsbetrag v ist definiert als die Arbeit, um den Körper von Null auf v zu beschleunigen.

Aus (3.1.18) folgt:

$$\boxed{W_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2} \quad (3.4.1)$$

Die gesamte kinetische Energie eines Systems von n Teilchen mit den Massen m_i und den Geschwindigkeiten v_i ist dann

$$\boxed{W_{\text{kin,ges}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} v_i^2} \quad (3.4.2)$$

Um die potentielle Energie eines Systems von Teilchen zu definieren, muss man zuerst eine Ausgangslage L_0 vereinbaren, in der die potentielle Energie Null sein soll.

$L_0 = \{\vec{r}_{10}, \vec{r}_{20}, \dots, \vec{r}_{n0}\}$ bedeutet: Teilchen 1 am Ort \vec{r}_{10}, \dots , Teilchen n am Ort \vec{r}_{n0}

Verschiebt man die Teilchen von der Ausgangslage L_0 in eine Endlage $L = \{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n\}$, dann muss dazu eine gewisse Gesamtarbeit W aufgebracht werden. Ist W für alle möglichen Wege von L_0 nach L gleich (konservatives System), dann definiert man W als potentielle Energie des Teilchensystems in der Lage L bezüglich der Lage L_0 :

$$W_{\text{pot}}(L) = \text{Arbeit, um das System von } L_0 \text{ nach } L \text{ zu überführen} \quad (3.4.3)$$

Mit \vec{F}_i bezeichnen wir die Gesamtkraft, die alle anderen Teilchen auf das i -te Teilchen ausüben. Wir untersuchen jetzt, wie sich die Lage des Systems in einer sehr kurzen Zeitspanne Δt ändert:

$$L(t) = L = \{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n\} \quad ; \quad L(t + \Delta t) = \{\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n + \Delta\vec{r}_n\} \quad (3.4.4)$$

Wegen der Kürze von Δt sind auch die $\Delta\vec{r}_i$ so klein, dass \vec{F}_i in dieser Zeit als praktisch konstant angesehen werden kann. Wird das i -te Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit um $\Delta\vec{r}_i$ verschoben, dann muss auf das Teilchen die äußere Kraft $\vec{F}_i^* = -\vec{F}_i$ einwirken. Die vom i -ten Teilchen hervorgerufene Änderung der potentiellen Energie, d.h. die am i -ten Teilchen verrichtete Arbeit, ist dann

$$\Delta W_{i,\text{pot}} = |\vec{F}_i^*| \cdot |\Delta\vec{r}_i| \cdot \cos \psi_i \quad (3.4.5)$$

Wegen

$$|\vec{F}_i^*| = |\vec{F}_i| \quad (3.4.6)$$

und

$$\cos \psi_i = \cos(180^\circ - \varphi_i) = -\cos \varphi_i \quad (3.4.7)$$

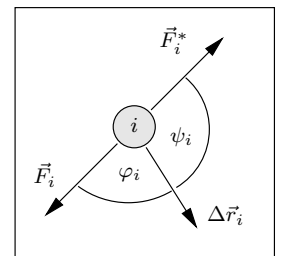


Abb.3.4.1

3 Energie

ist

$$\Delta W_{i,\text{pot}} = -|\vec{F}_i^*| \cdot |\Delta \vec{r}_i| \cdot \cos \varphi_i \quad (3.4.8)$$

Es ist zu beachten, dass \vec{F}_i^* nur eine fiktive Kraft ist, um die potentielle Energie zu berechnen. In Wirklichkeit ist unser System abgeschlossen, d.h. \vec{F}_i ist die Gesamtkraft auf das i -te Teilchen. Die von \vec{F}_i am i -ten Teilchen verrichtete Arbeit ist die Änderung der kinetischen Energie des i -ten Teilchens:

$$\Delta W_{i,\text{kin}} = |\vec{F}_i| \cdot |\Delta \vec{r}_i| \cdot \cos \varphi_i = -\Delta W_{i,\text{pot}} \quad (3.4.9)$$

Aus (3.4.9) folgt

$$\Delta W_{i,\text{kin}} + \Delta W_{i,\text{pot}} = 0 \quad (3.4.10)$$

Die **Gesamtenergie** eines Teilchensystems ist die Summe aus der potentiellen Energie des Systems und der gesamten kinetischen Energie. Die Änderung ΔW der Gesamtenergie W des abgeschlossenen Systems von n Teilchen ist also die Summe aus den Änderungen der potentiellen und der kinetischen Energien

$$\Delta W = \sum_{i=1}^n \Delta W_{i,\text{kin}} + \sum_{i=1}^n \Delta W_{i,\text{pot}} = \sum_{i=1}^n [\Delta W_{i,\text{kin}} + \Delta W_{i,\text{pot}}] = \sum_{i=1}^n [0] = 0 \quad (3.4.11)$$

Die Änderung der Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems ist Null.

(3.4.12)

oder

Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems ist konstant.

(3.4.13)

(3.4.12) bzw. (3.4.13) ist der **Energieerhaltungssatz** oder kurz **Energiesatz**.

In Formeln ausgedrückt lautet der Energiesatz

$$\Delta W = \sum_{i=1}^n \Delta W_{i,\text{kin}} + \sum_{i=1}^n \Delta W_{i,\text{pot}} = 0$$

(3.4.14)

bzw.

$W = W_{\text{pot}} + W_{\text{kin}} = \text{konst.}$

(3.4.15)

(3.4.15) bedeutet, dass W zu allen Zeiten den gleichen Wert hat. Greift man zwei spezielle Zeiten t_1 und t_2 heraus, dann lautet (3.4.15)

$W(t_1) = W(t_2)$

(3.4.16)

oder

$W_{\text{vorher}} = W_{\text{nachher}}$

(3.4.17)

Als Beispiel betrachten wir den freien Fall eines Steines der Masse $m = 6 \text{ kg}$ aus der Höhe $h = 4,905 \text{ m}$. Die Masse der Erde ist $M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Die Anfangsgeschwindigkeiten von Erde und Stein seien Null, die potentielle Energie sei Null, wenn der Stein den Boden berührt. Die Geschwindigkeiten von Stein und Erde beim Aufprall seien v bzw. v_E .

h ist so klein, dass die Gewichtskraft mg während des Falls als konstant angesehen werden kann. Die potentielle Energie des Systems Stein-Erde ist

$$m g h_S + m g h_E = m g (h_S + h_E) = m g h \quad (3.4.18)$$

3 Energie

wobei h_S und h_E die Entfernungen von Stein bzw. Erde zum Schwerpunkt des Systems sind. Der Energiesatz liefert

$$m g h + \frac{m}{2} \cdot 0^2 + \frac{M}{2} \cdot 0^2 = m g \cdot 0 + \frac{m}{2} v^2 + \frac{M}{2} v_E^2 \quad (3.4.19)$$

oder vereinfacht

$$m g h = \frac{m}{2} v^2 + \frac{M}{2} v_E^2 \quad (3.4.20)$$

Um die beiden Unbekannten v und v_E berechnen zu können, muss neben (3.4.20) noch eine zweite Gleichung gegeben sei. Der Impulssatz hilft hier weiter:

$$0 = m \cdot 0 + M \cdot 0 = m \cdot v + M \cdot v_E \quad (3.4.21)$$

Aus (3.4.21) folgt

$$v_E = -\frac{m}{M} \cdot v \quad (3.4.22)$$

Einsetzen von (3.4.22) in (3.4.20) liefert

$$m g h = \frac{m}{2} v^2 + \frac{M}{2} \cdot \frac{m^2}{M^2} v^2 = \frac{m}{2} v^2 \cdot \left(1 + \frac{m}{M}\right) \quad (3.4.23)$$

Auflösen nach v :

$$v = \sqrt{\frac{2 g h}{1 + \frac{m}{M}}} \quad ; \quad v_E = -\frac{m}{M} \sqrt{\frac{2 g h}{1 + \frac{m}{M}}} \quad (3.4.24)$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt

$$\frac{m}{M} = 10^{-24} \quad (3.4.25)$$

d.h. $1 + \frac{m}{M} = 1 + 10^{-24}$ ist praktisch gleich 1. Damit ist

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4,905 \text{ m}} = \sqrt{9,81^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}}}} \quad (3.4.26)$$

und

$$v_E = -9,81 \cdot 10^{-24} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx \underline{\underline{0}} \quad (3.4.27)$$

Für die kinetischen Energien beim Aufprall gilt:

$$W_{\text{kin},M} = \frac{M}{2} v_E^2 = \frac{M}{2} \cdot \frac{m^2}{M^2} v^2 = \frac{m}{M} \cdot \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{M} \cdot W_{\text{kin},m} \quad (3.4.28)$$

oder mit Zahlenwerten

$$W_{\text{kin},m} = 289 \text{ J} \quad ; \quad W_{\text{kin},M} = 2,89 \cdot 10^{-22} \text{ J} \approx 0 \quad (3.4.29)$$

Allgemein gilt: Stehen zwei Körper mit den Massen m und M in Wechselwirkung miteinander und gilt $M \gg m$, dann ist $W_{\text{kin},M} \approx 0$, d.h. $W_{\text{kin,ges}} \approx W_{\text{kin},m}$

Bei der Bewegung eines Körpers K mit Reibung wird die aufgebrachte Reibungsarbeit ΔW_R in Energieformen umgewandelt, die nicht mehr in kinetische Energie von K zurückverwandelt werden können. Diese Energieformen fassen wir unter dem Sammelbegriff **innere Energie** zusammen. Die innere Energie W_i besteht hauptsächlich aus Wärmeenergie, die wiederum nichts anderes ist als kinetische Energie der Atome und Moleküle der beteiligten Körper. In der inneren

3 Energie

Energie stecken auch irreversible, d.h. nicht umkehrbare Veränderungen der Oberflächenstruktur der aneinander reibenden Flächen. Der Energiesatz lautet bei Anwesenheit von Reibung

$$\boxed{W = W_{\text{kin}} + W_{\text{pot}} + W_{\text{i}} = \text{konst.}} \quad (3.4.30)$$

oder

$$\boxed{\Delta W = \Delta W_{\text{kin}} + \Delta W_{\text{pot}} + \Delta W_{\text{i}} = 0} \quad (3.4.31)$$

mit der nie negativen Änderung der inneren Energie

$$\boxed{\Delta W_{\text{i}} = \Delta W_{\text{R}} \geq 0} \quad (3.4.32)$$

Als Beispiel berechnen wir den Bremsweg s eines Autos mit dem Energiesatz:

$$\frac{m}{2} v^2 = \mu m g \cdot s \quad \Longrightarrow \quad s = \underline{\underline{\frac{v^2}{2 \mu g}}} \quad (3.4.33)$$

3.5 Stoßprozesse

Zwei Körper der Massen m_1 und m_2 bewegen sich mit den Geschwindigkeiten \vec{v}_1 und \vec{v}_2 aufeinander zu und treten in Wechselwirkung. Die Geschwindigkeiten der Körper nach dem Stoß seien \vec{u}_1 und \vec{u}_2 . Wir betrachten zunächst den **zentralen Stoß**, bei dem sich die ganze Bewegung auf einer Geraden abspielt und somit alle auftretenden Geschwindigkeiten parallel sind:

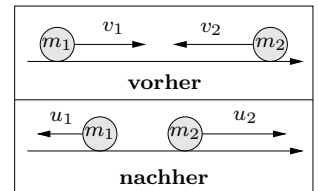


Abb.3.5.1 Zentraler Stoß

$$\boxed{\text{zentraler Stoß} \iff \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \parallel \vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2} \quad (3.5.1)$$

Für die weiteren Rechnungen verwenden wir die Bezeichnungen

$$\text{Impulse vorher:} \quad p_1 = m_1 v_1 \quad \text{und} \quad p_2 = m_2 v_2 \quad (3.5.2)$$

$$\text{Impulse nachher:} \quad q_1 = m_1 u_1 \quad \text{und} \quad q_2 = m_2 u_2 \quad (3.5.3)$$

Beim Stoß verwandelt sich ein Bruchteil der anfänglichen kinetischen Energie

$$W = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 = \frac{p_1^2}{2 m_1} + \frac{p_2^2}{2 m_2} \quad (3.5.4)$$

in die innere Energie W_{i} (Verformung, Wärme).

Mit dem Energiesatz

$$\frac{p_1^2}{2 m_1} + \frac{p_2^2}{2 m_2} = \frac{q_1^2}{2 m_1} + \frac{q_2^2}{2 m_2} + W_{\text{i}} \quad (3.5.5)$$

und dem Impulssatz

$$p_1 + p_2 = q_1 + q_2 \quad (3.5.6)$$

hat man zwei Gleichungen, aus denen bei bekanntem p_1 , p_2 und W_{i} die Impulse und damit auch die Geschwindigkeiten nach dem Stoß berechnet werden können. Das Auflösen von (3.5.5) und (3.5.6) nach q_1 und q_2 ist aber sehr rechenintensiv. Mit viel weniger Aufwand gelangt man zum Ziel, wenn man im Schwerpunktsystem S der beiden Körper rechnet. Mit dem Index s bezeichnen wir die entsprechenden Größen in S, z.B. p_{1s} . Die Geschwindigkeit v_s des Schwerpunktsystems relativ zum Laborsystem L ist nach (2.9.6)

$$v_s = \frac{p_{\text{ges}}}{m_1 + m_2} = \frac{p_1 + p_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (3.5.7)$$

3 Energie

Mit der Galileitransformation rechnet man die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 des Laborsystems ins Schwerpunktsystem um:

$$v_{1s} = v_1 - v_s \quad ; \quad v_{2s} = v_2 - v_s \quad (3.5.8)$$

Der große Vorteil des Schwerpunktsystems ist die Tatsache, dass der Gesamtimpuls in S Null ist:

$$p_{1s} + p_{2s} = q_{1s} + q_{2s} = 0 \quad \implies \quad p_{2s} = -p_{1s} \quad \text{und} \quad q_{2s} = -q_{1s} \quad (3.5.9)$$

Die Gesamtenergie in S ist wegen (3.5.9)

$$W_s = \frac{p_{1s}^2}{2m_1} + \frac{p_{2s}^2}{2m_2} = \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) p_{1s}^2 = \frac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2} p_{1s}^2 \quad (3.5.10)$$

Analog erhält man für die kinetische Energie W'_s nach dem Stoß

$$W'_s = \frac{q_{1s}^2}{2m_1} + \frac{q_{2s}^2}{2m_2} = \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) q_{1s}^2 = \frac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2} q_{1s}^2 \quad (3.5.11)$$

Die innere Energie, d.h. die Energie einer bleibenden Verformung und die den Körpern zugeführte Wärme, ist in S genauso groß wie in L. Damit lautet der Energiesatz in S:

$$W_s = \frac{p_{1s}^2}{2m_1} + \frac{p_{2s}^2}{2m_2} = \frac{q_{1s}^2}{2m_1} + \frac{q_{2s}^2}{2m_2} + W_i = W'_s + W_i \quad (3.5.12)$$

W'_s liegt irgendwo zwischen 0 und W_s . Vorteilhaft für die weitere Rechnung ist die Einführung der **Stoßzahl** k über

$$W'_s = k^2 \cdot W_s \quad \text{mit} \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (3.5.13)$$

Aus (3.5.10), (3.5.11) und (3.5.13) folgt

$$W'_s = \frac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2} q_{1s}^2 = k^2 \cdot \frac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2} p_{1s}^2 \quad (3.5.14)$$

Aus (3.5.14) folgt, wobei wir die Vorzeichen Abb.3.5.2 entnehmen (kein Durchdringen der Körper):

$$q_{1s} = -k \cdot p_{1s} \quad \text{und} \quad q_{2s} = -k \cdot p_{2s} \quad (3.5.15)$$

oder

$$u_{1s} = -k \cdot v_{1s} \quad \text{und} \quad u_{2s} = -k \cdot v_{2s} \quad (3.5.16)$$

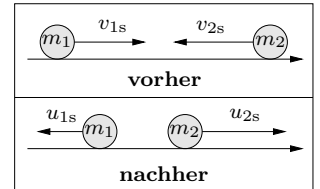


Abb.3.5.2 Im Schwerpunktsystem

Die Umrechnung auf das Laborsystem geschieht wieder mit der Galileitransformation mit Hilfe von (3.5.7) und (3.5.8):

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{1s} + v_s = -k v_{1s} + v_s = -k (v_1 - v_s) + v_s = \\ &= -k \cdot \left(v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right) + \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{-k m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + k m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Analog berechnet sich u_2 und man erhält das Endergebnis

$$\boxed{u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + k m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}} \quad \boxed{u_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + k m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}} \quad (3.5.17)$$

(teilelastischer, zentraler Stoß)

Ist die kinetische Energie nach dem Stoß gleich der kinetischen Energie vorher, dann spricht man von einem **elastischen Stoß**. Dabei gilt

$$W_i = 0 \implies W'_s = k^2 W_s = W_s \implies k = 1 \quad (3.5.18)$$

Setzt man $k = 1$ in (3.5.18) ein, erhält man:

$$\boxed{u_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}} \quad \boxed{u_2 = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}} \quad (3.5.19)$$

(elastischer, zentraler Stoß)

Die innere Energie $W_i = W_s - W'_s = (1 - k^2) W_s$ ist maximal, wenn $k = 0$. Mit (3.5.18) folgt:

$$\boxed{u_1 = u_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}} \quad (3.5.20)$$

(total unelastischer, zentraler Stoß; Verbundkörper nach dem Stoß)

Wir untersuchen den Zusammenhang zwischen der Gesamtenergie W im Laborsystem und W_s im Schwerpunktsystem. Aus (3.5.7), (3.5.8) und (3.5.10) folgt

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{m_1 + m_2}{2 m_1 m_2} p_{1s}^2 = \frac{m_1 + m_2}{2 m_1 m_2} m_1^2 (v_1 - v_s)^2 = \\ &= \frac{(m_1 + m_2) m_1}{2 m_2} \left(v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = \\ &= \frac{(m_1 + m_2) m_1}{2 m_2} \left(\frac{m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{m_1 m_2}{2 (m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 \end{aligned} \quad (3.5.21)$$

Damit erhält man nach kurzer Rechnung

$$W - W_s = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 - \frac{m_1 m_2}{2 (m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 = \frac{p^2}{2 M} \quad (3.5.22)$$

mit

$$p = p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad \text{und} \quad M = m_1 + m_2 \quad (3.5.23)$$

$$\boxed{W_s = W - \frac{p^2}{2 M}} \quad (3.5.24)$$

Aus (3.5.13) folgt

$$W_i = W - W' = W_s - W'_s = W_s - k^2 W_s \quad (3.5.25)$$

und damit

$$\boxed{W_i = W_s (1 - k^2) = \left(W - \frac{p^2}{2 M} \right) (1 - k^2)} \quad (3.5.26)$$

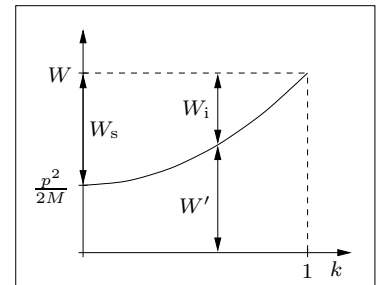


Abb.3.5.3

Die maximale innere Energie erhält man für $k = 0$, d.h. für den total unelastischen Stoß

$$W_{i,\max} = W_s \quad (3.5.27)$$

3 Energie

Für die kinetische Energie W' im Laborsystem nach dem Stoß erhält man

$$W' = W - W_s + k^2 W_s = \frac{p^2}{2M} + k^2 W_s \quad (3.5.28)$$

Die grafische Veranschaulichung von (3.5.27) findet sich in Abb.3.5.3.

Beispiel: Zwei Holzkugeln der Massen $m_1 = 2 \text{ kg}$ und $m_2 = 3 \text{ kg}$ stoßen zentral mit $v_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $v_2 = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ aufeinander, wobei 45% der ursprünglichen kinetischen Energie in innere Energie verwandelt werden.

$$\begin{aligned} M &= m_1 + m_2 = 5 \text{ kg} & p &= m_1 v_1 + m_2 v_2 = -10 \text{ Ns} \\ W &= \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 = 25 \text{ J} & W_s &= W - \frac{p^2}{2M} = 25 \text{ J} - \frac{10^2 \text{ N}^2 \text{ s}^2}{10 \text{ kg}} = 15 \text{ J} \\ W_i &= W \cdot 0,45 = 25 \text{ J} \cdot 0,45 = 11,25 \text{ J} = W_s \cdot (1 - k^2) \\ 1 - k^2 &= \frac{W_i}{W_s} = \frac{11,25}{15} = 0,75 & \implies & k = 0,5 \\ u_1 &= \frac{p + k m_2 (v_2 - v_1)}{M} = \frac{-10 + 0,5 \cdot 3 \cdot (-4 - 1)}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{-3,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}} \\ u_2 &= \frac{p + k m_1 (v_1 - v_2)}{M} = \frac{-10 + 0,5 \cdot 2 \cdot (1 - (-4))}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{-1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}} \end{aligned}$$

4 Schwingungen

4.1 Die harmonische Schwingung

Auf einen Körper der Masse m , der sich längs der x -Achse bewegen kann, wirkt die Kraft

$$F = -D \cdot x \quad (4.1.1)$$

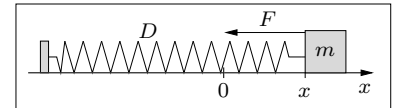


Abb.4.1.1 $F = -D \cdot x$

Die Kraft (1) wirkt z.B. von einer Feder der Härte D auf eine Masse m , wenn der Körper um die Strecke x aus seiner Ruhelage ausgelenkt ist (siehe Abb.4.1.1). Mit Newton2

$$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x} \quad (4.1.2)$$

folgt aus (4.1.1) die Bewegungsgleichung

$$m \cdot \ddot{x} = -D \cdot x \quad (4.1.3)$$

bzw.

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{D}{m} \cdot x} \quad (4.1.4)$$

(Schwingungsgleichung)

Für $x > 0$ zeigt \vec{F} nach links, für $x < 0$ nach rechts. Der Körper wird also, einmal von seiner Ruhelage ausgelenkt, eine Hin-und-Herbewegung (**Schwingung**) um den Nullpunkt ausführen. Um diese Schwingung zu beschreiben, müssen wir eine Lösung $x(t)$ der Schwingungsgleichung (4.1.4) suchen. Die einfachste Funktion $x(t)$, die eine Schwingung beschreibt, ist eine Sinusfunktion

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.1.5)$$

mit der **Amplitude** A , der **Kreisfrequenz** ω und der **Phase** φ .

Wir untersuchen jetzt, ob (4.1.5) tatsächlich eine Lösung von (4.1.4) ist. Dazu wird (4.1.5) zweimal differenziert:

$$\dot{x}(t) = \omega \cdot A \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.1.6)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot A \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.1.7)$$

Ein Vergleich von (4.1.7) mit (4.1.5) ergibt

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot x(t) \quad (4.1.8)$$

Aus (4.1.8) und (4.1.4) folgt, dass (4.1.5) tatsächlich eine Lösung der Schwingungsgleichung ist, wenn man

$$\omega^2 = \frac{D}{m} \quad (4.1.9)$$

bzw.

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}} \quad (4.1.10)$$

wählt. Eine Schwingung der Form (4.1.5) heißt **harmonische** Schwingung.

4 Schwingungen

Die Konstanten A und φ erhält man aus den Anfangsbedingungen

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{und} \quad v(t_0) = \dot{x}(t_0) = v_0 \quad (4.1.11)$$

Zusammenfassung:

Wirkt auf einen Körper der Masse m die Kraft $F = -D \cdot x$, dann gilt

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.1.12)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = A \omega \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.1.13)$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.1.14)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (4.1.15)$$

Die Bedeutung der Größen A , ω und φ in

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.1.16)$$

entnehmen wir Abb.4.1.2. Ein Blick genügt, um zu erkennen:

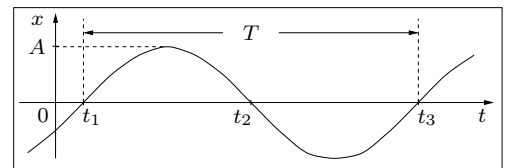


Abb.4.1.2 $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

Die Amplitude A ist die maximale Auslenkung aus der Ruhelage! (4.1.17)

t_1 , t_2 und t_3 seien drei aufeinanderfolgende Nullstellen von $x(t)$, d.h. es gilt

$$\omega t_3 + \varphi - (\omega t_1 + \varphi) = \omega (t_3 - t_1) = 2\pi \quad (4.1.18)$$

Mit der Abkürzung $T = t_3 - t_1$ für die **Schwingungsdauer** erhält man

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \quad (4.1.19)$$

Die **Frequenz** f der Schwingung ist definiert durch

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}} \quad (4.1.20)$$

f gibt an, wie viele Schwingungen der Körper in der Zeiteinheit ausführt. Die Einheit der Frequenz ist

$$\boxed{1 \text{ Hz} = 1 \text{ Hertz} = \frac{1}{\text{s}}} \quad (4.1.21)$$

$f = 20 \text{ Hz}$ bedeutet also 20 Schwingungen in einer Sekunde.

Für t_1 in Abb.4.1.2 ist das Argument der Sinusfunktion Null, d.h.

$$\omega t_1 + \varphi = 0 \quad \implies \quad t_1 = -\frac{\varphi}{\omega} \quad (4.1.22)$$

Die Phase φ bedeutet also eine Verschiebung der Sinusfunktion parallel zur t -Achse um $-\frac{\varphi}{\omega}$ nach rechts. Diese Verschiebung ist nur von Bedeutung, wenn die Überlagerung mehrerer Schwingungen untersucht wird. Bei der Untersuchung nur einer Schwingung wählen wir den Zeitnullpunkt stets so, dass $\varphi = 0$ gilt. Damit vereinfachen sich die Formeln für $x(t)$ und $v(t)$ zu

$$x(t) = A \sin \omega t \quad (4.1.23)$$

4 Schwingungen

$$\boxed{v(t) = \dot{x}(t) = A \omega \cos \omega t} \quad (4.1.24)$$

Für die Gesamtenergie der Schwingung gilt

$$W(t) = \underbrace{\frac{m}{2} v^2}_{W_{\text{kin}}} + \underbrace{\frac{D}{2} x^2}_{W_{\text{pot}}} = \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + \frac{D}{2} A^2 \sin^2 \omega t \quad (4.1.25)$$

Mit (4.1.15) folgt aus (4.1.25)

$$W(t) = \frac{m}{2} A^2 \frac{D}{m} \cos^2 \omega t + \frac{D}{2} A^2 \sin^2 \omega t = \frac{D}{2} A^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) \quad (4.1.26)$$

Mit

$$\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1 \quad (4.1.27)$$

folgt aus (4.1.26)

$$\boxed{W(t) = \frac{D}{2} A^2 = \text{konst.}} \quad (4.1.28)$$

Die Gesamtenergie der harmonischen Schwingung ist also gleich der potentiellen Energie bei der maximalen Auslenkung $x = A$! Die maximale Geschwindigkeit des schwingenden Körpers erhält man für $W_{\text{pot}} = 0$, d.h. beim Durchgang durch die Ruhelage $x = 0$:

$$\frac{m}{2} v_{\text{max}}^2 + \underbrace{W_{\text{pot}}}_0 = \frac{D}{2} A^2 \quad \Longrightarrow \quad v_{\text{max}} = A \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} = A \omega \quad (4.1.29)$$

Dieses Ergebnis erhält man auch direkt aus (4.1.23) und (4.1.24):

$$x(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega t = k \cdot \pi \quad \Longrightarrow \quad v_{\text{max}} = v(k \cdot \pi) = A \omega \underbrace{\cos k\pi}_{\pm 1} = \pm A \omega \quad (4.1.30)$$

Beispiel:

Eine Masse $m = 100 \text{ g}$ wird an eine Feder der Richtgröße D gehängt; dabei dehnt sich die Feder um $d = 4,36 \text{ cm}$. Aus der Ruhelage ($x = 0$) wird die Masse um $A = 8 \text{ cm}$ nach unten ausgelenkt und losgelassen. Nach welcher Zeit Δt und mit welcher Geschwindigkeit v_0 erreicht die Masse erstmalig die Ruhelage?

$$D \cdot d = m \cdot g \quad \Longrightarrow \quad \frac{D}{m} = \frac{g}{d}$$

Auf m wirkt die Gewichtskraft $G = -m g$ und die Federkraft $F_F = D(d - x)$, d.h.

$$F = G + F_F = -m g + D d - D x = -D x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{g}{d}} = \sqrt{\frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,0436 \text{ m}}} = \underline{\underline{15 \frac{1}{\text{s}}}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,419 \text{ s} \quad \Longrightarrow \quad \Delta t = \frac{T}{4} = \underline{\underline{0,105 \text{ s}}}$$

$$v_0 = A \omega = 0,08 \text{ m} \cdot 15 \frac{1}{\text{s}} = \underline{\underline{1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Die Schwingungsenergie ist $W = \frac{m}{2} v_0^2 = \frac{0,1 \text{ kg}}{2} \cdot 1,2^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \underline{\underline{0,072 \text{ J}}}$

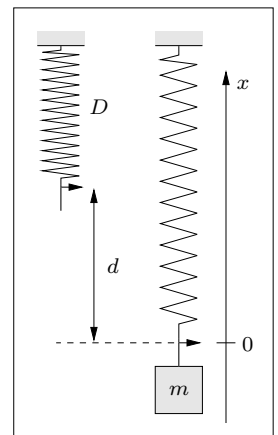


Abb.4.1.3 Ruhelage

4.2 Beispiele harmonischer Schwingungen

Für eine differenzierbare Funktion $f(x)$ gilt

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{für } |h| \ll 1 \quad (4.2.1)$$

Aus (4.2.1) folgt

$$\boxed{f(x+h) \approx f(x) + h \cdot f'(x)} \quad \text{für } |h| \ll 1 \quad (\text{lineare Näherung}) \quad (4.2.2)$$

Speziell mit $f(x) = \sin x$ erhält man aus (4.2.2)

$$\sin(x+h) \approx \sin x + h \cdot \cos x \quad (4.2.3)$$

Mit $x = 0$ geht (4.2.3) über in

$$\boxed{\sin h \approx h} \quad \text{für } |h| \ll 1 \quad (4.2.4)$$

Als Beispiel betrachten wir ein Pendel der Länge L und der Masse m :

Abb.4.2.1 entnimmt man für die rücktreibende Kraft

$$F = -G \cdot \sin \psi \quad (4.2.5)$$

Für die Bogenlänge s (Auslenkung aus der Ruhelage) gilt

$$s = \psi \cdot L \quad (4.2.6)$$

Damit erhält man für die Beschleunigung

$$\ddot{s} = \frac{F}{m} = -\frac{G}{m} \sin \psi = -g \sin \psi \quad (4.2.7)$$

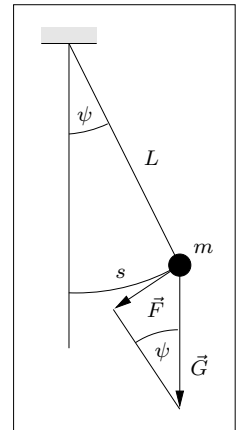


Abb.4.2.1

Aus (4.2.6) und (4.2.7) folgt

$$\ddot{\psi} = -\frac{g}{L} \cdot \sin \psi \quad (4.2.8)$$

(4.2.8) ist **keine** Gleichung einer harmonischen Schwingung! Für kleine Auslenkungen ($\psi \ll 1$) gilt jedoch näherungsweise wegen (4.2.4)

$$\ddot{\psi} \approx -\frac{g}{L} \cdot \psi \quad (4.2.9)$$

Aus dem letzten Kapitel kennen wir die Lösung von (4.2.9):

$$\boxed{\psi \approx \psi_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)} \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (4.2.10)$$

Die Schwingungsdauer des Pendels bei kleinen Auslenkungen ist also

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}} \quad (4.2.11)$$

Ein Pendel mit $T = 1$ s (Sekundenpendel) hat die Länge

$$L = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2} = \underline{\underline{24,8 \text{ cm}}} \quad (4.2.12)$$

Weitere Beispiele harmonischer Schwingungen findet man in den Aufgaben.

4.3 Die erzwungene Schwingung

Auf einen Körper K der Masse m wirken folgende Kräfte:

$$\begin{aligned} \text{Lineare Kraft} & : F_{rml} = -D \cdot x \\ \text{Reibungskraft} & : F_R = -\mu \cdot \dot{x} \quad (\text{Luftwiderstand für kleine Geschw.}) \\ \text{äußere Kraft} & : F_A = F_0 \cdot \sin \omega t \end{aligned}$$

Mit Newton2 folgt für die Gesamtkraft auf K

$$F(t) = m \ddot{x} = -D \cdot x - \mu \cdot \dot{x} + F_0 \cdot \sin \omega t \quad (4.3.1)$$

Für $\rho = 0$ und $F_0 = 0$ führt K eine harmonische Schwingung mit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (4.3.2)$$

aus. Die zu ω_0 gehörende Frequenz $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ heißt **Eigenfrequenz** der Schwingung. Mit den Abkürzungen

$$\frac{D}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{\mu}{m} = \rho \quad \text{und} \quad \frac{F_0}{m} = a \quad (4.3.3)$$

folgt aus (4.3.1)

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \rho \dot{x} + a \sin \omega t} \quad (4.3.4)$$

Als Lösung von (4.3.4) versuchen wir den Ansatz

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.3.5)$$

$$\dot{x}(t) = A \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.3.6)$$

$$\ddot{x}(t) = -A \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \quad (4.3.7)$$

Einsetzen von (4.3.5), (4.3.6) und (4.3.7) in (4.3.4):

$$-\omega^2 x = -\omega_0^2 x - \rho A \omega \cos(\omega t + \varphi) + a \sin \omega t \quad (4.3.8)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A \sin(\omega t + \varphi) + \rho A \omega \cos(\omega t + \varphi) - a \sin \omega t = 0 \quad (4.3.9)$$

Die Anwendung der Additionstheoreme liefert

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)(\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) + \rho A \omega (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) - a \sin \omega t = 0 \quad (4.3.10)$$

$$\sin \omega t \underbrace{[A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - \rho A \omega \sin \varphi - a]}_{\alpha} + A \cos \omega t \cdot \underbrace{[(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + \rho \omega \cos \varphi]}_{\beta} = 0 \quad (4.3.11)$$

(4.3.11) muss für **alle** t erfüllt sein. Wir setzen die speziellen Werte $t = 0$ und $t = \frac{\pi}{2\omega}$ in (4.3.11) ein:

$$t = 0 \quad \implies \quad \alpha = A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - \rho A \omega \sin \varphi - a = 0 \quad (4.3.12)$$

$$t = \frac{\pi}{2\omega} \quad \implies \quad \beta = (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + \rho \omega \cos \varphi = 0 \quad (4.3.13)$$

Aus (4.3.13) folgt

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{\rho \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (4.3.14)$$

Mit den trigonometrischen Formeln

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} \quad \text{und} \quad \sin \varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} \quad (4.3.15)$$

4 Schwingungen

folgt aus (4.3.12)

$$A \cdot \left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} - \frac{\rho \omega \tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} \right] = a \quad (4.3.16)$$

Aus (4.3.14) folgt

$$-\rho \omega \tan \varphi = (\omega_0^2 - \omega^2) \tan^2 \varphi \quad (4.3.17)$$

und damit aus (4.3.16)

$$A \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \tan^2 \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = a \quad (4.3.18)$$

$$A \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)(1 + \tan^2 \varphi)}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = A \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} = a \quad (4.3.19)$$

Mit (4.3.14) folgt aus (4.3.19)

$$A \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \sqrt{1 + \frac{\rho^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}} = A \cdot \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \rho^2 \omega^2} = a \quad (4.3.20)$$

und damit

$$A = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \rho^2 \omega^2}} \quad (4.3.21)$$

Zusammenfassung:

Wirkt auf einen Körper K der Masse m die Gesamtkraft

$$F = \underbrace{-D \cdot x}_{\text{lin. Kraft}} \quad \underbrace{-\mu \cdot \dot{x}}_{\text{Reibung}} \quad \underbrace{+F_0 \cdot \sin \omega t}_{\text{äußere Kraft}} \quad , \quad (4.3.22)$$

dann gilt mit den Abkürzungen

$$\frac{D}{m} = \omega_0^2 \quad , \quad \frac{\mu}{m} = \rho \quad \text{und} \quad \frac{F_0}{m} = a \quad (4.3.23)$$

die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \rho \dot{x} + a \sin \omega t \quad . \quad (4.3.24)$$

Eine Lösung von (4.3.24) ist

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.3.25)$$

mit

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \rho^2 \omega^2}} \quad (4.3.26)$$

und

$$\tan \varphi = -\frac{\rho \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (4.3.27)$$

Die allgemeinste Lösung von (4.3.24) enthält noch weitere Terme, die aber alle den Faktor e^{-Ct} enthalten und somit nach einer gewissen Zeit T („Einschwingzeit“) praktisch gleich Null sind.

Für

$$\omega = \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\rho^2}{2}} \approx \omega_0 \quad (4.3.28)$$

4 Schwingungen

ist $A(\omega)$ maximal (Beweis!!); in diesem Fall spricht man von **Resonanz** und $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$ heißt **Resonanzfrequenz**.

In komplexeren Systemen (z.B. mehrere durch Federn verbundene Massen, gekoppelte elektrische Schwingkreise, Festkörper wie Musikinstrumente oder Gebäude) gibt es mehrere Resonanzfrequenzen.

Viele physikalische Geräte und Effekte beruhen auf der Resonanz, wie Empfänger von elektromagnetischen Wellen (Radio, Fernsehen), Emission und Absorption von Licht, Musikinstrumente und raffiniert konstruierte Messinstrumente (Mößbauereffekt, Kernspintomografie u.s.w.).

Unerwünschte Resonanzeffekte sind z.B. Schwingungen von Hochhäusern und Brücken, die bis zum Einsturz führen können (Resonanzkatastrophe, Soldaten sollen nicht im Gleichschritt über eine Brücke marschieren).

Es wird auch von Motorradunfällen, bedingt durch Resonanz an äquidistanten Bodenwellen, berichtet. Epileptische Anfälle können, resonanzbedingt, durch periodische optische oder akustische Reize ausgelöst werden.

5 Gravitation

5.1 Das Gravitationsgesetz

Der Mond umrundet die Erde, von einem Inertialsystem aus gesehen, in einem **siderischen** Monat:

$$T = 27 \text{ d } 7 \text{ h } 43 \text{ min } 11,5 \text{ s} = 2360591,5 \text{ s} \quad (5.1.1)$$

Die Bahn des Mondes um die Erde ist in guter Näherung eine Kreisbahn mit dem Radius

$$r = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m} \quad (5.1.2)$$

Die Zentripetalkraft F_Z , die den Mond auf seine Kreisbahn zwingt, ist die **Gravitationskraft** (Massenanziehungskraft) $F_G(r)$ zwischen Erde und Mond.

Mit

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \approx 2,66 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{s}} \quad (5.1.3)$$

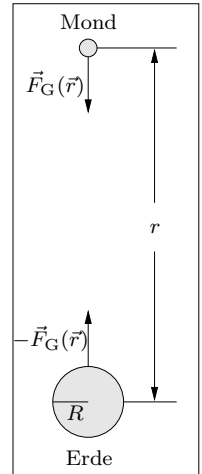


Abb.5.1.1

und der Masse m_M des Mondes gilt dann

$$F_G(r) = F_Z = m_M r \omega^2 \quad (5.1.4)$$

$F_G(r)$ ist nichts anderes als die Gewichtskraft, die die Erde auf den Mond ausübt, der sich in der Entfernung r vom Erdmittelpunkt befindet. An der Erdoberfläche ($R = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$) würde auf den Mond die Gewichtskraft

$$F_G(R) = m_M \cdot g \quad \text{mit} \quad g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (5.1.5)$$

wirken. Aus (5.1.3), (5.1.4) und (5.1.5) folgt

$$\frac{F_G(r)}{F_G(R)} = \frac{m_M r \omega^2}{m_M g} = \frac{r \omega^2}{g} = \underline{\underline{2,77 \cdot 10^{-4}}} \quad (5.1.6)$$

und

$$\frac{R^2}{r^2} = \underline{\underline{2,76 \cdot 10^{-4}}} \quad (5.1.7)$$

Die beiden berechneten Zahlenwerte sind nicht ganz gleich, da die Mondbahn keine exakte Kreisbahn ist. Würde man die ellipsenförmige Umlaufbahn des Mondes in die Rechnung mit einbeziehen, dann wären die in (5.1.6) und (5.1.7) berechneten Zahlenwerte exakt gleich, d.h. es gilt

$$\boxed{\frac{F_G(r)}{F_G(R)} = \frac{R^2}{r^2}} \quad (5.1.8)$$

oder

$$F_G(r) = F_G(R) \cdot \frac{R^2}{r^2} = \frac{m_M g R^2}{r^2} \quad (5.1.9)$$

Ausführlich lautet (5.1.9)

$$\text{Kraft von Erde auf Mond} = \frac{m_{\text{Mond}} \cdot g_{\text{Erde}} \cdot R_{\text{Erde}}^2}{r^2} \quad (5.1.10)$$

Vertauscht man in (5.1.10) **Erde** und **Mond** (Symmetrie der Naturgesetze!!), dann erhält man

$$\text{Kraft von Mond auf Erde} = \frac{m_{\text{Erde}} \cdot g_{\text{Mond}} \cdot R_{\text{Mond}}^2}{r^2} \quad (5.1.11)$$

Wegen „Kraft von Mond auf Erde = Kraft von Erde auf Mond“ (Actio = Reactio) folgt aus (5.1.10) und (5.1.11)

$$m_{\text{Erde}} \cdot g_{\text{Mond}} \cdot R_{\text{Mond}}^2 = m_{\text{Mond}} \cdot g_{\text{Erde}} \cdot R_{\text{Erde}}^2 \quad (5.1.12)$$

oder nach Division durch $m_{\text{Erde}} \cdot m_{\text{Mond}}$

$$G = \frac{R_{\text{Erde}}^2 \cdot g_{\text{Erde}}}{m_{\text{Erde}}} = \frac{R_{\text{Mond}}^2 \cdot g_{\text{Mond}}}{m_{\text{Mond}}} = \text{konst.} \quad (5.1.13)$$

Mit der Konstanten G lautet (5.1.9)

$$F_G(r) = G \cdot \frac{m_{\text{Erde}} \cdot m_{\text{Mond}}}{r^2} \quad (5.1.14)$$

Allgemein gilt für die Anziehungskraft zwischen zwei Massen m_1 und m_2 , deren gegenseitige Entfernung r ist, das von ISAAC NEWTON 1666 gefundene Gravitationsgesetz:

$$\boxed{F_G(r) = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}} \quad (5.1.15)$$

Die Länge des Vektors

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad , \quad (5.1.16)$$

der von m_1 zu m_2 zeigt, sei r . Damit gilt für den Einheitsvektor in Richtung von m_1 nach m_2

$$\vec{e}_{12} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r} \quad (5.1.17)$$

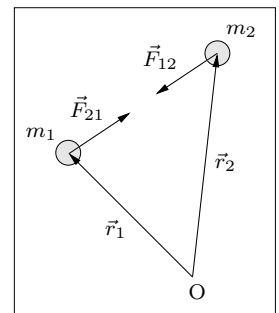


Abb.5.1.2

Die Kraft, die von m_2 auf m_1 ausgeübt wird, ist dann

$$\boxed{\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \vec{e}_{12} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^3} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\vec{F}_{12}} \quad (5.1.18)$$

Die **Gravitationskonstante** G wäre nach (5.1.13) bekannt, wenn man entweder m_{Erde} oder m_{Mond} kennen würde. Da man aber weder die Erde noch den Mond einfach auf eine Waage legen kann, muss G mit bekannten Massen m_1 und m_2 bestimmt werden. Man erhält G dann durch Messung der Kraft zwischen den beiden Massen. Da diese Kraft jedoch sehr klein ist (ungefähr 10^{-6}N bei Massen von ein paar kg), muss man mit raffinierten Methoden arbeiten.

CAVENDISH (1731 - 1810) entwickelte eine sogenannte **Drehwaage**, mit der man sehr kleine Kräfte messen kann:

Zwei gleiche Massen m sind an den Enden einer Stange befestigt, die Stange hängt frei drehbar an einem Faden F . Durch die Wirkung der großen Massen M verdrillt sich der Faden in eine Richtung. Werden die Positionen der großen Massen vertauscht, verdrillt sich der Faden in die andere Richtung. Diese sehr kleinen Auslenkungen

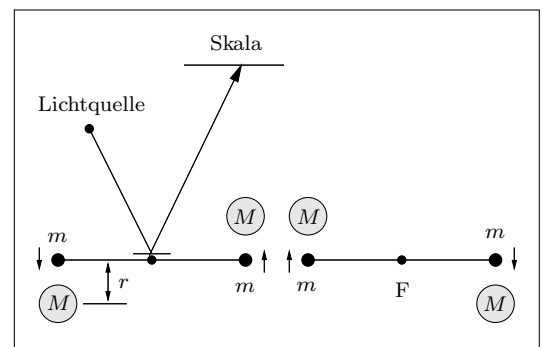


Abb.5.1.3 Drehwaage nach Cavendish

werden mittels eines Lichtzeigers an einer Skala abgelesen (Reflexion an einem Spiegel, der an der Stange befestigt ist). Die Durchführung des Versuches ist sehr schwierig, da die Waage einerseits geeicht werden muss und andererseits wegen ihrer großen Empfindlichkeit auf geringste Störungen (z.B. vorbeifahrendes Auto) reagiert. Die Gravitationskonstante ist daher auch die „ungenaueste“ Konstante in der ganzen Physik. Der zur Zeit beste Wert (4 geltende Ziffern) stammt von GUNDLACH und MERKOWITZ (2000):

$$G = (6,6742 \pm 0,0010) \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \quad (5.1.19)$$

5.2 Das Gravitationsfeld

Im Ursprung O eines Koordinatensystems sitzt die Masse M , am Ort \vec{r} befinde sich eine Testmasse m . Die Gravitationskraft von M auf m ist

$$\vec{F}_G(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (5.2.1)$$

mit dem Betrag

$$F_G(\vec{r}) = F_G(r) = \frac{GMm}{r^2} \quad (5.2.2)$$

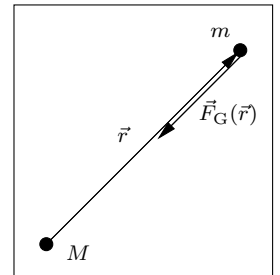


Abb.5.2.1

Der Quotient $\vec{g}(\vec{r})$ aus $\vec{F}_G(\vec{r})$ und m ist eine von m unabhängige Größe und heißt **Gravitationsfeldstärke** der Masse M am Ort \vec{r} :

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_G(\vec{r})}{m} = -\frac{GM}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (5.2.3)$$

$$g(r) = |\vec{g}(\vec{r})| = \frac{GM}{r^2} \quad (5.2.4)$$

Wegen **Newton 2** ist $\vec{g}(\vec{r})$ nichts anderes als die Beschleunigung, die eine Masse m aufgrund der Schwerkraft am Ort \vec{r} erhält:

$$\boxed{\text{Gravitationsfeldstärke} = \text{Schwerebeschleunigung}} \quad (5.2.5)$$

Da $\vec{g}(\vec{r})$ nicht von m abhängt, gilt ganz allgemein der Satz:

$$\boxed{\text{Am gleichen Ort fallen alle Körper gleich schnell!}} \quad (5.2.6)$$

Die Masse M erzeugt das **Gravitationsfeld** mit der Stärke $\vec{g}(\vec{r})$. Der Begriff „Gravitationsfeld“ ist etwas schwammig definiert und bedeutet soviel wie die Eigenschaft des Raumes, an einem bestimmten Ort \vec{r} auf einen beliebigen Körper die Beschleunigung $\vec{g}(\vec{r})$ auszuüben. Oft wird der Begriff „Gravitationsfeld“ auch abkürzend für „Gravitationsfeldstärke“ verwendet.

Aus der Definition (5.2.3) der Gravitationsfeldstärke folgt für die Kraft $\vec{F}_G(\vec{r})$ auf eine Masse m

$$\boxed{\vec{F}_G(\vec{r}) = m \cdot \vec{g}(\vec{r})} \quad (5.2.7)$$

Die Gravitationsfeldstärke ist also nichts anderes als unser altbekannter Ortsfaktor.

Die **Feldlinien** des Gravitationsfeldes geben an jedem Ort die Richtung des Feldes an, d.h. $\vec{g}(\vec{r})$ ist in jedem Raumpunkt tangential zu einer Feldlinie. Die Feldlinien des Feldes einer Punktmasse M im Punkt P sind alle Geraden durch P .

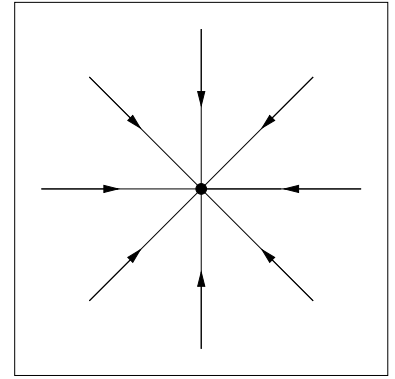


Abb.5.2.2 Radialsymmetrisches Feld einer Punktmasse

Die Kraft $\vec{F}_G(\vec{r})$, die von den Massen M_1, \dots, M_n an den Orten $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ auf eine Masse m am Ort \vec{r} ausgeübt wird, ist

$$\vec{F}_G(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{G M_i m}{r^3} \cdot \vec{r}_i \right) \quad (5.2.8)$$

Damit gilt für die Feldstärke am Ort \vec{r}

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_G(\vec{r})}{m} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{G M_i}{r^3} \cdot \vec{r}_i \right) = \sum_{i=1}^n \vec{g}_i(\vec{r}) \quad (5.2.9)$$

Gravitationsfeldstärken addieren sich vektoriell!

(5.2.10)

5.3 Der Gauß'sche Satz

Wir betrachten eine ebene Fläche mit dem Inhalt dA , die so klein ist, dass die Gravitationsfeldstärke \vec{g} auf jedem Punkt der Fläche praktisch den gleichen Wert hat. Der Vektor $d\vec{a}$, der senkrecht auf der Fläche steht und dessen Betrag gleich dA ist, heißt **Flächenvektor**. Die Komponente von \vec{g} , die senkrecht auf der Fläche steht und somit parallel zu $d\vec{a}$ ist, nennen wir \vec{g}_\perp :

$$|\vec{g}_\perp| = |\vec{g}| \cdot |\cos \varphi| \quad (5.3.1)$$

Die Größe

$$d\Phi = |\vec{g}| \cdot |d\vec{a}| \cdot \cos \varphi = |\vec{g}| \cdot dA \cdot \cos \varphi \quad (5.3.2)$$

heißt **Fluss** des Gravitationsfeldes durch dA .

$$|d\Phi| = dA \cdot |\vec{g}| \cdot |\cos \varphi| = dA \cdot |\vec{g}_\perp| \quad (5.3.3)$$

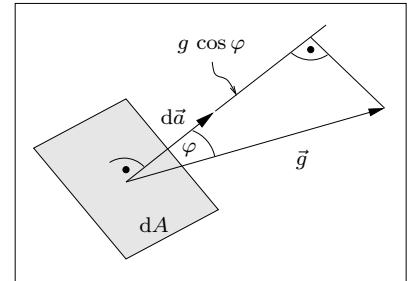


Abb.5.3.1 Flächenvektor

Wir berechnen den Fluss Φ des Feldes einer Punktmasse M durch eine Kugelfläche mit Radius r um M ; dabei wählen wir die Orientierung von $d\vec{a}$ so, dass $d\vec{a}$ immer nach innen (zum Kugelmittelpunkt) zeigt:

Für jede kleine Teilfläche dA ist der Winkel φ zwischen \vec{g} und $d\vec{a}$ gleich 0° , d.h. der Fluss durch dA ist

$$d\Phi = |\vec{g}| \cdot dA \cdot \cos 0^\circ = g dA \quad (5.3.4)$$

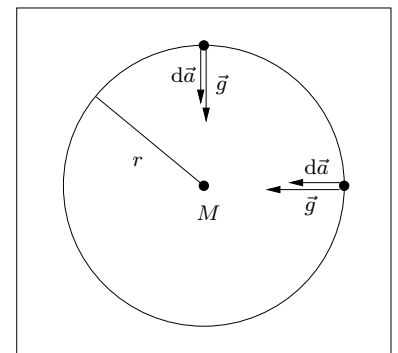


Abb.5.3.2

Addiert man alle $d\Phi$'s, dann erhält man

$$\Phi = g \cdot A = g \cdot 4\pi r^2 \quad (5.3.5)$$

oder mit

$$g = \frac{GM}{r^2} \tag{5.3.6}$$

$$\Phi = \frac{GM}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi GM \tag{5.3.7}$$

Der Fluss des Feldes einer Punktmasse durch eine zur Masse konzentrische Kugelfläche mit Radius r ist für alle Radien gleich!

A sei jetzt eine beliebige geschlossene Fläche, die eine Punktmasse M einschließt und A_0 eine zu M konzentrische Kugelfläche mit Radius r_0 . Für den Fluss durch eine kleine Teilfläche dA erhält man (siehe Abb.5.3.3)

$$d\Phi = g \cdot dA \cdot \cos \varphi = g \cdot dA^* = \frac{GM}{r^2} \cdot \frac{dA_0 r^2}{r_0^2} = \frac{GM}{r_0^2} \cdot dA_0 \tag{5.3.8}$$

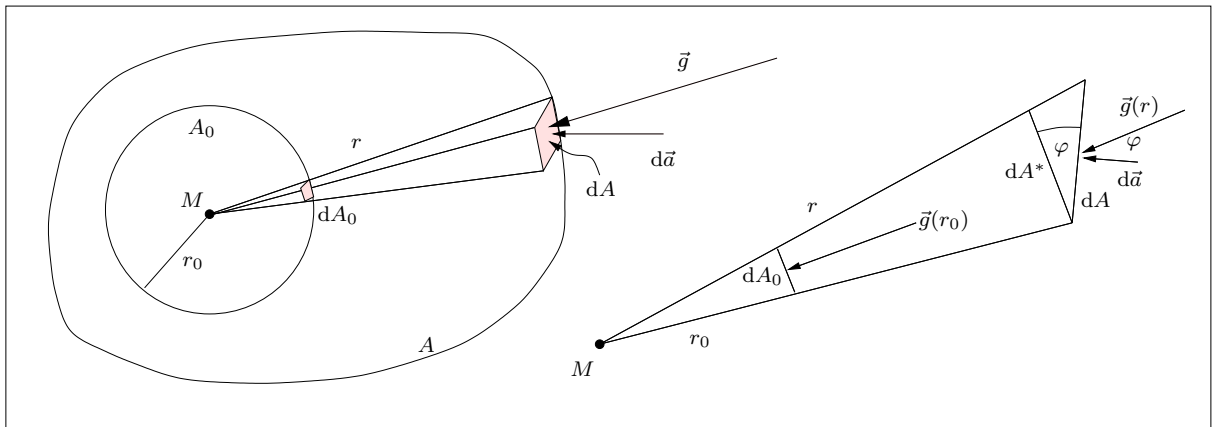


Abb.5.3.3 M innerhalb von A

Der Fluss durch dA ist also genauso groß wie der Fluss durch die Teilfläche dA_0 von A_0 . Daher muss auch der gesamte Fluss Φ_A durch A genauso groß sein wie der gesamte Fluss Φ_{A_0} durch A_0 . Letzterer ist aber nach (5.3.7) gleich $4\pi GM$. Somit haben wir bewiesen:

Der Fluss Φ_A des Gravitationsfeldes einer Punktmasse M durch eine beliebige geschlossene Fläche A , die M einschließt, ist

$$\Phi_A = 4\pi GM \tag{5.3.9}$$

Da sich die Gravitationsfelder von mehreren Punktmassen addieren, addieren sich auch die Flüsse dieser Felder zu einem Gesamtfluss durch eine Fläche. (5.3.9) gilt also nicht nur für eine Punktmasse, sondern für eine beliebige Masse M innerhalb der geschlossenen Fläche A .

Wir wollen jetzt den Fluss des Feldes einer Punktmasse M durch eine geschlossene Fläche A berechnen, die M **nicht** umschließt. Zu jeder Teilfläche dA_1 gibt es nach Abb.5.3.4 eine entsprechende Teilfläche dA_2 auf der „anderen“ Seite von A . A_0 sei wieder eine zu M konzentrische Kugelfläche. Für die Winkel φ_1 und φ_2 zwischen den

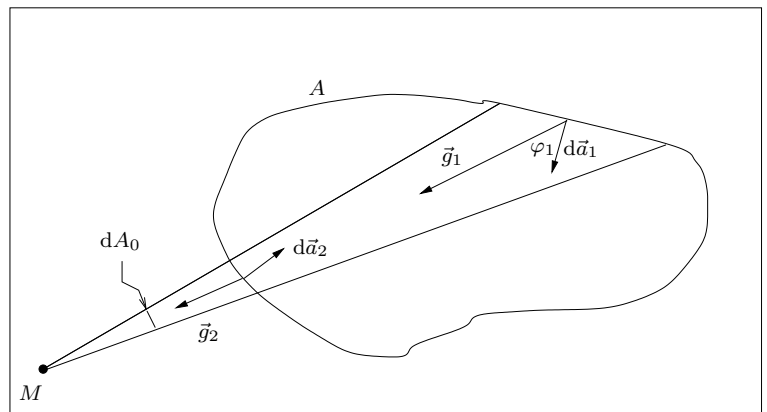


Abb.5.3.4 M außerhalb von A

Flächenvektoren $d\vec{a}_1$ bzw. $d\vec{a}_2$ und dem Feldvektor \vec{g} gilt

$$0 \leq \varphi_1 \leq 90^\circ \quad \text{bzw.} \quad 90^\circ \leq \varphi_2 \leq 180^\circ \quad (5.3.10)$$

Wie wir weiter oben gezeigt haben (Gleichung (5.3.8)), sind die Flüsse $d\Phi_1$ und $d\Phi_2$ durch dA_1 und dA_2 betragsmäßig gleich dem Fluss $d\Phi_0$ durch dA_0 . Wegen (5.3.10) und den Eigenschaften des Kosinus haben $d\Phi_1$ und $d\Phi_2$ aber verschiedene Vorzeichen, so dass

$$d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0 \quad (5.3.11)$$

gilt. Aufsummieren aller Teilflüsse ergibt, dass der Gesamtfluss Φ_A gleich Null ist. Wie oben kann man auch hier von einer Punktmasse auf eine beliebige Masse verallgemeinern und erhält:

Der Fluss einer beliebigen Massenverteilung M durch eine geschlossene Fläche A ist Null, wenn M außerhalb von A liegt.	(5.3.12)
---	----------

Die Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse liefert den **Gauß'schen Satz**:

Der Fluss Φ_A durch eine beliebige geschlossene Fläche A ist	(5.3.13)
$\Phi_A = 4 \pi G M$,	
wobei M die gesamte von A eingeschlossene Masse ist.	

Für eine radialsymmetrisch verteilte Masse ist auch das von ihr erzeugte Gravitationsfeld radialsymmetrisch (Zentralfeld), d.h. $\vec{g}(\vec{r})$ zeigt an jedem Ort \vec{r} zum Zentrum Z der Masse und der Betrag g von \vec{g} ist nur von $r = |\vec{r}|$, nicht aber von der Richtung abhängig. Für eine Kugelfläche mit dem Mittelpunkt Z und dem Radius r haben wir somit die gleichen Verhältnisse wie in Abb.5.3.2 und genauso wie Gleichung (5.3.5) folgt

$$\Phi_A = g(r) \cdot 4 \pi r^2 \quad (5.3.14)$$

Kombiniert mit dem Gauß'schen Satz folgt, wenn $M(r)$ die gesamte Masse innerhalb der Kugel vom Radius r bezeichnet

$$4 \pi G M(r) = g(r) \cdot 4 \pi r^2 \quad (5.3.15)$$

und damit

$g(r) = \frac{G M(r)}{r^2}$	(5.3.16)
-----------------------------	----------

(Feldstärke im radialsymmetrischen Feld)

Aus (5.3.16) folgt:

Befindet man sich außerhalb einer radialsymmetrischen Massenverteilung (z.B. außerhalb eines Planeten), dann herrscht dort das gleiche Gravitationsfeld, das von einer Punktmasse gleicher Größe im Zentrum der Massenverteilung erzeugt würde!
--

5.4 Das Gravitationspotential

Im Ursprung eines Koordinatensystems ruht die Masse M . Die Kraft auf eine Masse m am Ort \vec{r} ist dann eine Zentralkraft (siehe Kap. 3.3):

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2} \quad (5.4.1)$$

mit $r = |\vec{r}|$. Mit $W(r)$ bezeichnen wir die potentielle Energie der Masse m in der Entfernung r vom Ursprung. Die Arbeit, um m von r nach $r + \Delta r$ zu verschieben, ist gleich der Änderung der potentiellen Energie und mit (3.3.6) erhält man

$$\Delta W = W(r + \Delta r) - W(r) = -F(r) \Delta r \quad (5.4.2)$$

Aus (5.4.2) erhält man nach Division durch Δr und anschließendem Grenzübergang $\Delta r \rightarrow 0$ für die Ableitung von W nach r

$$W'(r) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta r} = \frac{dW}{dr} = -F(r) = \frac{GMm}{r^2} \quad (5.4.3)$$

Aus (5.4.3) folgt

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} W'(r) = -\lim_{r \rightarrow 0^+} F(r) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} W'(r) = -\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = 0^+ \quad (5.4.4)$$

Die einfachste Funktion mit dieser Eigenschaft ist

$$W(r) = \frac{\alpha}{r} + C \quad (5.4.5)$$

mit $\alpha < 0$ und einer beliebigen Konstanten C . Aus (5.4.5) folgt

$$W(r+h) - W(r) = \frac{\alpha}{r+h} - \frac{\alpha}{r} = -\frac{\alpha h}{(r+h)r} \quad (5.4.6)$$

und damit

$$\frac{W(r+h) - W(r)}{h} = -\frac{\alpha}{(r+h)r} \quad (5.4.7)$$

bzw.

$$W'(r) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{W(r+h) - W(r)}{h} = -\frac{\alpha}{r^2} \quad (5.4.8)$$

(5.4.5) ist also tatsächlich die Lösung von (5.4.3), wenn man

$$\alpha := -GMm \quad (5.4.9)$$

wählt. Aus (5.4.5) und (5.4.9) folgt

$$W(r) = -\frac{GMm}{r} + C \quad (5.4.10)$$

Da $W(r)$ im Nenner r enthält, kann $r = 0$ nicht als Bezugspunkt für die potentielle Energie verwendet werden. Wir wählen daher einen unendlich fernen Punkt als Bezugspunkt:

$$W(\infty) = 0 \quad \implies \quad W(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(-\frac{GMm}{r} + C\right) = C = 0 \quad (5.4.11)$$

Damit gilt

$$\boxed{W(r) = -\frac{GMm}{r}} \quad (5.4.12)$$

Die Arbeit zum Verschieben der Masse m von r_1 nach r_2 ist dann

$$\boxed{\Delta W = W(r_2) - W(r_1) = -\frac{GMm}{r_2} + \frac{GMm}{r_1} = GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \quad (5.4.13)$$

Das **Potential** $\varphi(r)$ des Gravitationsfeldes ist die potentielle Energie einer Masse m geteilt durch m :

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{W(r)}{m}} \quad \text{oder} \quad \boxed{W(r) = \varphi(r) \cdot m} \quad (5.4.14)$$

Aus (5.4.12) folgt

$$\boxed{\varphi(r) = -\frac{GM}{r}} \quad (\text{Potential einer Punktmasse } M) \quad (5.4.15)$$

An den Orten $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ befinden sich die felderzeugenden Massen m_1, m_2, \dots, m_n . Da die Gesamtkraft auf eine Testmasse m am Ort \vec{r} gleich der Summe der Einzelkräfte \vec{F}_i ist, ist die potentielle Energie im Gesamtfeld auch gleich der Summe der potentiellen Energien in den Einzelfeldern. Nach Division durch m erhält man dann für das Gesamtpotential der n Massen

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{G m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) = -G \cdot \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}} \quad (5.4.16)$$

wobei $|\vec{r} - \vec{r}_i|$ die Entfernung zwischen den Massen m und m_i ist.

Der Energiesatz für eine Masse m in einem beliebigen Gravitationspotential $\varphi(\vec{r})$ lautet

$$W_{\text{pot}}(\vec{r}) + W_{\text{kin}}(\vec{r}) = W_{\text{pot}}(\vec{r}') + W_{\text{kin}}(\vec{r}') \quad (5.4.17)$$

bzw.

$$m \cdot \varphi(\vec{r}) + \frac{m}{2} v(\vec{r})^2 = m \cdot \varphi(\vec{r}') + \frac{m}{2} v(\vec{r}')^2 \quad (5.4.18)$$

oder nach Division durch m

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) + \frac{1}{2} v(\vec{r})^2 = \varphi(\vec{r}') + \frac{1}{2} v(\vec{r}')^2} \quad (5.4.19)$$

Die Geschwindigkeit v_{Flucht} , die man einem Körper an der Oberfläche eines Planeten (Masse M , Radius R) mindestens erteilen muss, damit er den Planeten vollständig verlassen kann, heißt **Fluchtgeschwindigkeit**. „Vollständig verlassen“ bedeutet, dass der Körper im Unendlichen noch mit einer Geschwindigkeit $v_\infty \geq 0$ ankommt. Damit muss auch die kinetische Energie des Körpers im Unendlichen noch größer oder gleich Null sein:

$$\text{Energiesatz:} \quad W_{\text{kin}}(R) + W_{\text{pot}}(R) = W_{\text{kin}}(\infty) + \underbrace{W_{\text{pot}}(\infty)}_0 \quad (5.4.20)$$

$$W_{\text{kin}}(\infty) = W_{\text{kin}}(R) + W_{\text{pot}}(R) \geq 0 \quad (5.4.21)$$

Verläßt der Körper den Planeten an seiner Oberfläche mit der Geschwindigkeit v_0 , dann folgt aus (5.4.21) als Bedingung für das Verlassen des Planeten

$$W_{\text{kin}}(\infty) = \frac{m}{2} v_0^2 - \frac{GMm}{R} \geq 0 \quad (5.4.22)$$

oder

$$\boxed{v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}} =: v_{\text{Flucht}}} \quad (5.4.23)$$

Für die Erde ist die Fluchtgeschwindigkeit

$$v_{\text{Flucht}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,6742 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6,378 \cdot 10^6 \text{ m}}} = \underline{\underline{11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}}} \quad (5.4.24)$$

Abb.5.4.1 zeigt das Potential einer Punktmasse M im Koordinatenursprung. Die potentielle Energie einer Masse m ist dann

$$W_{\text{pot}}(r) = m \cdot \varphi(r) \quad (5.4.25)$$

Startet m bei r_1 mit der Geschwindigkeit v_1 , dann folgt aus (5.4.19) für die Geschwindigkeit v_2 von m bei r_2 :

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2 \Delta\varphi} = \sqrt{v_1^2 + 2(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (5.4.26)$$

Für den freien Fall aus der Höhe h an der Erdoberfläche berechnet sich die Aufprallgeschwindigkeit v aus (5.4.26) mit $v = v_2$,

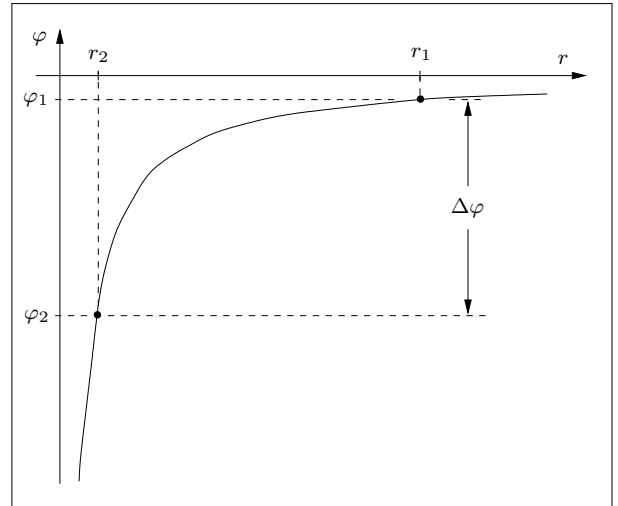


Abb.5.4.1 Potential einer Punktmasse M

$v_1 = 0$, $r_1 = R + h$ und $r_2 = R$ ($R = R_{\text{Erde}}$):

$$v = \sqrt{2 \Delta\varphi} = \sqrt{\frac{-2GM}{R+h} + \frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2GMh}{R^2} \cdot \frac{R}{R+h}} = \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{R}{R+h}} \quad (5.4.27)$$

Dabei ist $g = \sqrt{\frac{GM}{R^2}}$ der Ortsfaktor an der Erdoberfläche (siehe (5.2.4)).