Mathematik – Abitur g8 2011
Lösungen

Richard Reindl

2011

Analysis I Teil 1

$\boxed{4}$ 1. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{4}{5} \right\}$, $\quad f'(x) = \frac{2(4x+5) - 4(2x+3)}{(4x+5)^2} = \frac{8x + 10 - 8x - 12}{(4x+5)^2} = \frac{-2}{(4x+5)^2}$

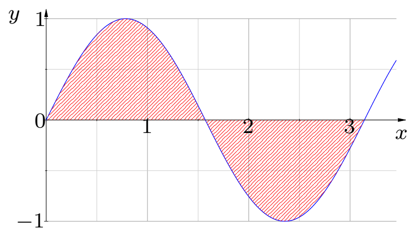
$\boxed{5}$ 2. $F'(x) = \frac{1}{2} x (2 \ln x - 1) + \frac{1}{4} x^2 \cdot \frac{2}{x} = x \ln x - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x \ln x$

$$F_C(x) = F(x) + C, \quad F_C(1) = \frac{1}{4}(2 \ln 1 - 1) + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{1}{4}$$

$\boxed{5}$ 3. $N(2000) = N_0 \cdot \mathrm{e}^0 = N_0 = 6{,}1 \cdot 10^9$, $\quad N(2010) = 6{,}1 \cdot 10^9 \cdot \mathrm{e}^{10k} = 6{,}9 \cdot 10^9$

$$\mathrm{e}^{10k} = \frac{69}{61} \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{1}{10} \cdot \ln \frac{69}{61} = 0{,}0123$$

$\boxed{3}$ 4. (a) Gleiche Flächeninhalte ober- und unterhalb der x-Achse.



$\boxed{3}$ (b) $f(x) = \sin(2x)$, $\quad F(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x)$

$$\int_0^{\pi} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = F(\pi) - F(0) = -\frac{1}{2} \cos 2\pi + \frac{1}{2} \cos 0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Analysis I Teil 2

$\boxed{2}$ 1. (a) $x+3 \geqq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqq 3$

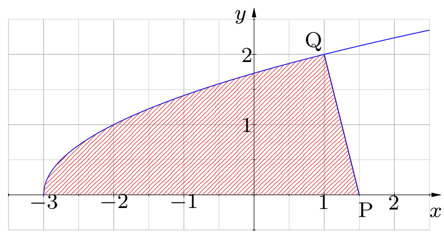
Durch eine Verschiebung parallel zur x-Achse um 3 nach links.

$\boxed{4}$ (b) $d(x)=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+f(x)^2}=\sqrt{x^2-3x+\frac{9}{4}+3+x}=\sqrt{x^2-2x+5{,}25}$

$\boxed{7}$ (c) d ist minimal, wenn der Radikand $g(x)=x^2-2x+5{,}25$ minimal ist:

$g'(x)=2x-2, \quad g'(x_{\mathrm{E}})=0 \quad \Longrightarrow \quad x_{\mathrm{E}}=1$

Da G_g eine nach oben geöffnete Parabel ist, Minimum von d bei $\mathrm{Q_E}(1|2)$.



$\boxed{5}$ (d) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$, Steigung der Tangente: $f'(1)=\dfrac{1}{4}$, Steigung von QP: $m_{\mathrm{QP}}=-4$

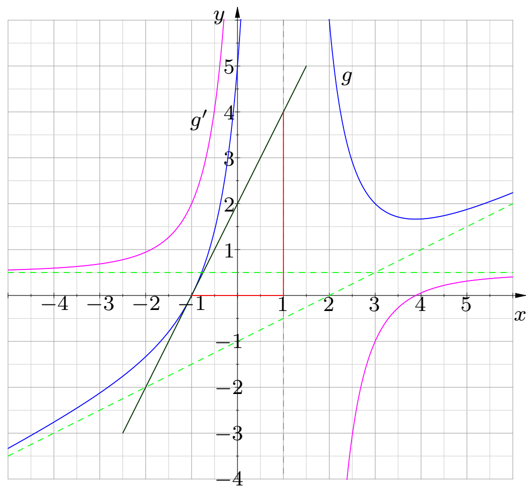
$$f'(1)=-\frac{1}{m_{\mathrm{QP}}} \quad \Longrightarrow \quad \text{Tangente senkrecht auf QP}$$

$\boxed{6}$ (e) $A=\displaystyle\int\limits_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\left[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^{1}+\frac{1}{2}=\frac{35}{6}$

$\boxed{6}$ 2. (a) $g'(-1)=\dfrac{4-0}{1-(-1)}=2$

Mit der Gleichung $a(x)=\frac{x}{2}-1$ der Asymptote gilt

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x)=\lim_{x\to\pm\infty} a'(x)=\frac{1}{2}$$



$\boxed{5}$ (b) I hat die Asymptote $y=x-1$ und bei II hat der Pol bei $x=1$ einen Vorzeichenwechsel.

$$f(-1)=\frac{1}{2}\cdot(-1)-1+\frac{a}{(-1-1)^2}=-\frac{3}{2}+\frac{a}{4}=0 \quad \Longrightarrow \quad a=6$$

$\boxed{5}$ (c) $g(x)>0 \quad \Longrightarrow \quad D_h=]-1,1[\cup]1,+\infty[$

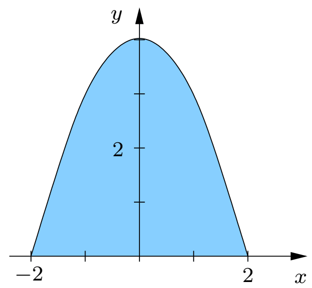
$$\lim_{x\to(-1)^+} h(x)=\lim_{g\to 0^+}\ln g=-\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} h(x)=\lim_{g\to\infty}\ln g=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=\lim_{g\to\infty}\ln g=\infty$$

$$h(x)=0 \Longleftrightarrow g(x)=1 \quad \Longrightarrow \quad x\approx -0{,}6$$

Analysis II Teil 1

$\boxed{5}$ 1. $A = 2 \cdot \int\limits_0^2 (4 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \left[4x - \dfrac{x^3}{3}\right]_0^2 = \dfrac{32}{3}$



$\boxed{4}$ 2. $D_f = \mathbb{R}_0^+, \quad F(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + C, \quad F(1) = 2 + C = 4, \quad C = 2$

$\boxed{3}$ 3. (a) $x_{0k} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$\boxed{3}$ (b) $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{(-x)^2} = -\dfrac{\sin x}{x^2} = -f(x) \quad \Longrightarrow$ punktsymmetrisch zum Ursprung

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \left(\frac{-1 \leqq y \leqq 1}{\infty} \right) = 0$$

$\boxed{2}$ (c) $f'(x) = \dfrac{x^2 \cos x - 2x \sin x}{x^4} = \dfrac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3}$

$\boxed{3}$ 4. z.B. $f(x) = \dfrac{2x^2}{(x+1)^2}$ oder $f(x) = 2 + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2 + 4x + 3}{(x+1)^2}$

allgemein: $f(x) = \dfrac{2x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-2} + ... + a_{2n}}{(x+1)^{2n}}$

Analysis II Teil 2

$\boxed{10}$ 1. (a) $f'(x) = 1 - 3e^{-\frac{x}{2}}, \qquad f''(x) = \frac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}} > 0$ für alle $x \implies G_f$ linksgekrümmt in $\mathbb{R}$.

$$f'(x_E) = 0 \implies e^{-\frac{x_E}{2}} = \frac{1}{3} \implies -\frac{x_E}{2} = -\ln 3 \implies x_E = 2\ln 3$$

$$\text{Tiefpunkt}: \quad E(2\ln 3 \,|\, 2 + 2\ln 3) \approx E(2{,}2 \,|\, 4{,}2)$$

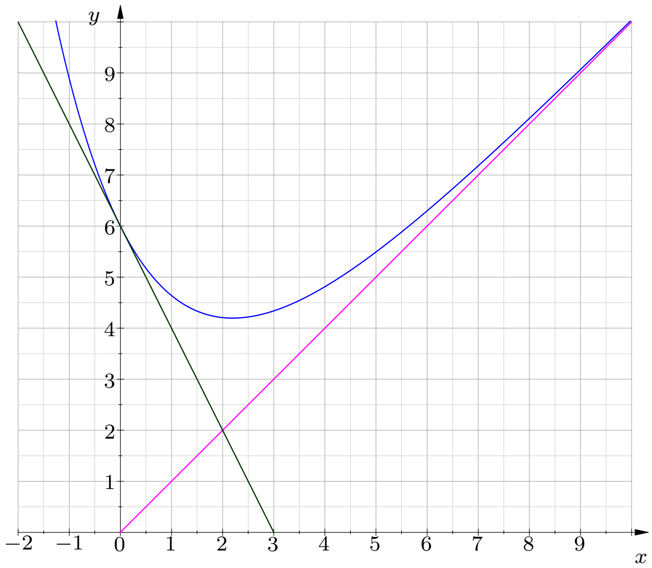
Aus der Linkskrümmung folgt G_f streng fallend in $]-\infty, x_E[$ und streng steigend in $]x_E, \infty[$.

$\boxed{3}$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = (6 \cdot e^{\infty} - \infty) = +\infty$, da e^x „stärker gegen Unendlich geht“ als x.

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} 6 \cdot e^{-\frac{x}{2}} = 0$$

$\boxed{6}$ (c) $f'(0) = -2 \implies$

$t(x) = 6 - 2x$



$\boxed{4}$ 2. (a) Spiegeln an der y-Achse – Streckung in x-Richtung mit dem Faktor 2 – Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 6 – Verschiebung in y-Richtung um 1,5

$\boxed{3}$ (b) Die Schadstoffausstoßrate nimmt laufend ab und nähert sich an den Grenzwert $1{,}5\,\frac{\text{mg}}{\text{min}}$ an.

$\boxed{6}$ (c) $A = \int\limits_0^5 f(x)\,dx = \left[-12e^{-\frac{x}{2}} + \frac{3x}{2}\right]_0^5 = 19{,}5 - 12e^{-2{,}5} \approx 18{,}5$

Der Schadstoffausstoß in den ersten fünf Minuten beträgt ungefähr 18,5 mg.

$\boxed{5}$ 3. (a) $f_a(0) = 6 \implies (0|6) \in G_{f_a}, \quad f_a'(x) = -3e^{-\frac{x}{2}} - a < 0$ wegen $a > 0$

$$\lim_{x\to\infty} f_a(x) = \left(6 \cdot e^{-\infty} - \infty\right) = (0 - \infty) = -\infty$$

$\boxed{3}$ (b) $x_1 = 0 - \frac{f_a(0)}{f_a'(0)} = -\frac{6}{-3-a} = \frac{6}{3+a}$

Stochastik I

$\boxed{4}$ 1. (a)

Ω	N	$\overline{N}$	
W	1062	27	1089
$\overline{W}$	660	231	891
	1722	258	1980

Niederberg: $\dfrac{|\overline{W} \cap N|}{|N|} = \dfrac{660}{1062} = 38{,}3\%$

Oberberg: $\dfrac{|\overline{W} \cap \overline{N}|}{|\overline{N}|} = \dfrac{231}{258} = 89{,}5\%$

$\boxed{4}$ (b) $p_1 = \dfrac{|\overline{W} \cap \overline{N}|}{|W \cup \overline{W}|} = \dfrac{231}{1980} = 11{,}7\%$, $\quad p_2 = P_{\overline{W}}(\overline{N}) = \dfrac{|\overline{W} \cap \overline{N}|}{|\overline{W}|} = \dfrac{231}{891} = 25{,}9\%$

$\boxed{2}$ (c) Wegen $|W \cup \overline{W}| \geqq |\overline{W}|$ ist $p_1 = \dfrac{|\overline{W} \cap \overline{N}|}{|W \cup \overline{W}|} \leqq \dfrac{|\overline{W} \cap \overline{N}|}{|\overline{W}|} = p_2$

$\boxed{5}$ 2. (a)

Kategorie	1	2	3	4
Unkosten	10	5	0	0
Gewinn G	$-7{,}5$	$-2{,}5$	$2{,}5$	$2{,}5$
p	0,1	0,2	0,3	0,4

$$E(G) = 0{,}1 \cdot (-7{,}5) + 0{,}2 \cdot (-2{,}5) + \\ + 0{,}3 \cdot 2{,}5 + 0{,}4 \cdot 2{,}5 = \\ = 0{,}5$$

Mittlerer Gewinn: 0,5 €

$\boxed{5}$ (b) $P(A) = 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^5$, $\quad P(B) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^5$, $\quad P(C) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}1^5$

$\boxed{5}$ 3. $1 - (1-p)^{10} \geqq 0{,}99$, $\quad (1-p)^{10} \leqq 0{,}01$, $\quad p \geqq 1 - 0{,}01^{\frac{1}{10}} \approx 36{,}9\%$

$\boxed{5}$ 4. Ablehnungsbereich für H_0 : $\quad K = \{0, ..., k\}$. Der maximale Fehler, sich fälschlicherweise gegen H_0 zu entscheiden, ist für $p = 0{,}55$ gegeben und muss $\leqq 0{,}05$ sein:

$$F_{0,55}^{200}(k) \leqq 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad k = 97$$

H_0 wird abgelehnt, wenn höchstens 97 Gegener unter den Befragten sind.

Stochastik II

$\boxed{4}$ 1. (a) $P(20 \leqq X \leqq 25) = F_{0,1}^{200}(25) - F_{0,1}^{200}(19) = 0{,}89954 - 0{,}46554 = 0{,}434 = 43{,}4\%$

$\boxed{3}$ (b) $P(X = 20) = \binom{240}{20} \cdot 0{,}1^{20} \cdot 0{,}9^{220} = 6{,}28\%$

$\boxed{4}$ (c)

Ω	W	$\overline{W}$	
V	6	14	20
$\overline{V}$	$w-6$	$226-w$	220
	w	$240-w$	240

$P(V \cap W) = P(V) \cdot P(W)$

$$\frac{6}{240} = \frac{20}{240} \cdot \frac{w}{240}$$

$$w = \frac{6 \cdot 240}{20} = 72$$

$\boxed{5}$ 2. (a) $H_0 = [0; 0{,}15]$, $\quad \overline{K} = \{0, ..., k\}$, $\quad K = \{k+1, ..., 200\}$

Der Fehler, sich fälschlicherweise gegen H_0 zu entscheiden, ist für $p = 0{,}15$ maximal und soll höchstens gleich 5% sein:

$$P_{p=0{,}15}(X \geqq k+1) = 1 - F_{0{,}15}^{200}(k) \leqq 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad F_{0{,}15}^{200}(k) \geqq 0{,}95$$

Ablehnungsbereich (kritischer Bereich) für H_0: $K = \{39, ..., 200\}$

$\boxed{3}$ (b) Die Wahrscheinlichkeit, sich fälschlicherweise für die Einführung des kostspieligen Premiummenues zu entscheiden, ist $1 - F_{0{,}15}^{200}(38) = 4{,}98\%$, also klein.

Die Wahrscheinlichkeit, sich fälschlicherweise gegen die Einführung des Premiummenues zu entscheiden, ist maximal $F_{0{,}15}^{200}(38) = 95{,}02\%$, also groß.

Somit stand die zweite Überlegung im Vordergrund.

$\boxed{3}$ 3. (a)

Ω	K	$\overline{K}$	
B	x	0,05	0,96
$\overline{B}$	0,03	0,01	0,04
	0,94	0,06	1

$x = 0{,}96 - 0{,}05 = 0{,}91$

Beleuchtung und Klimaanlage einwandfrei.

$\boxed{3}$ (b) $P_{\overline{B}}(\overline{K}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap \overline{K})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0{,}01}{0{,}04} = 25\%$

$\boxed{5}$ (c)

Ω	K	$\overline{K}$	
B	x	y	
$\overline{B}$	z	u	
	0,96	0,04	1

$$P(\overline{B} \cup \overline{K}) = z + \underbrace{y + u}_{0{,}04} = 0{,}05$$

$$\Longrightarrow \quad z = 0{,}01, \quad x = 0{,}95$$

$$P_{\overline{B} \cup \overline{K}}(\overline{B}) = \frac{u + 0{,}01}{0{,}05} = 0{,}4$$

Ω	K	$\overline{K}$	
B	0,95	0,03	0,98
$\overline{B}$	0,01	0,01	0,02
	0,96	0,04	1

Geometrie I

$\boxed{8}$ 1. (a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -80 \\ -60 \\ 60 \end{pmatrix}$, $\vec{n}' = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 3600 \\ 0 \\ 4800 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \dfrac{\vec{n}'}{1200} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} \cdot \vec{A} = 0 \quad \Longrightarrow \quad E: \ \vec{n}(\vec{x} - \vec{\mathrm{A}}) = 3x_1 + 4x_3 = 0$$

E enthält die x_2-Achse. Normalenvektor der x_1x_2-Ebene: $\vec{n}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}_{12}}{|\vec{n}|} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 36{,}9^\circ$$

$\boxed{6}$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
OABC ist ein Parallelogramm.

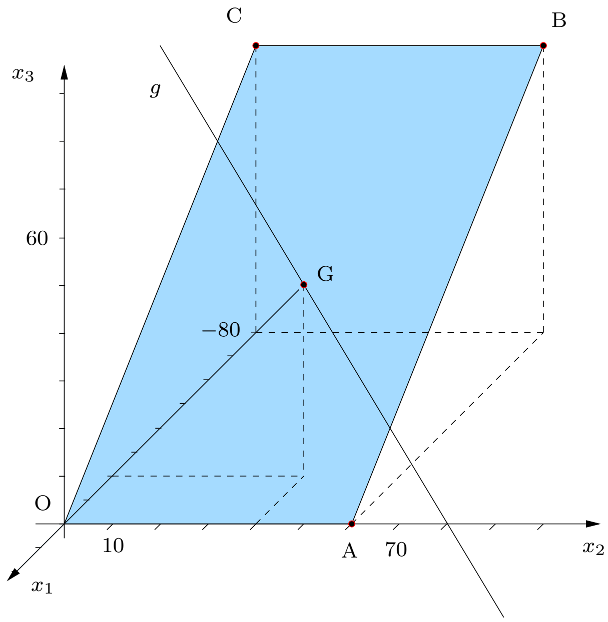
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0 \Longrightarrow$
OABC ist ein Rechteck.

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 60$

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100$

$F = 60 \cdot 100 = 6000$

Zeichnung Rechteck:



$\boxed{3}$ (c) Projektion in die x_1x_2-Ebene: $F' = 60 \cdot 80 = 4800$

$\boxed{3}$ (d) Mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ von g gilt $\vec{n} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = 0$, d.h $\vec{n} \perp \vec{v}$ bzw. $g \parallel E$.
Ist G der Aufpunkt von g, dann folgt

$$d(g, E) = d(\mathrm{G}, E) = \left| \frac{\vec{n}(\vec{\mathrm{G}} - \vec{\mathrm{A}})}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{3 \cdot (-20) + 4 \cdot 40}{5} \right| = 20$$

$\boxed{5}$ (e) F ist der Fußpunkt des Lotes von M auf g, $\overline{\mathrm{MF}}$ ist dann die minimale Entfernung von M zum Hubschrauber (g).

1. Möglichkeit:

$$d(\mathrm{M}, g) = \overline{\mathrm{MF}} \geqq d(g, E) = 20 \qquad \text{(I)}$$

Wenn die Behauptung wahr ist, gilt $\mathrm{MF} \perp E$ bzw. $\overrightarrow{\mathrm{MF}} \parallel \vec{n}$.
Da $\vec{n}$ parallel zur x_1x_3-Ebene ist, ist die x_2-Koordinate von F dann gleich der x_2-Koordinate von M: $f_2 = 30$.

$$\mathrm{F} \in g \quad \Longrightarrow \quad 40 + 5\lambda = 30 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\mathrm{F}} = \begin{pmatrix} -28 \\ 30 \\ 46 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MF}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \overline{\mathrm{MF}} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \qquad \text{(II)}$$

Aus (i) und (II) folgt die Behauptung.

2. Möglichkeit:

Abstand von M zu g berechnen: E' ist Ebene mit $E' \perp g$ und $M \in E'$:

$$E' : \ \vec{v}(\vec{x} - \overrightarrow{\mathrm{M}}) = 0$$

F ist der Schnittpunkt von g mit E', dazu g in E':

$$\vec{v}(\overrightarrow{\mathrm{G}} + \lambda\vec{v} - \overrightarrow{\mathrm{M}}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{\vec{v}(\overrightarrow{\mathrm{M}} - \overrightarrow{\mathrm{G}})}{\vec{v}^{\,2}} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix} = -2$$

Weiter wie bei der 1. Möglichkeit.

3. Möglichkeit:

$\vec{X} = \overrightarrow{\mathrm{G}} + \lambda\vec{v}$

$$f(\lambda) = \overline{\mathrm{MX}}^2 = (\overrightarrow{\mathrm{G}} - \overrightarrow{\mathrm{M}} + \lambda\vec{v})^2 = (20 + 4\lambda)^2 + (10 + 5\lambda)^2 + (10 - 3\lambda)^2$$

Wir suchen das Minimum von f:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} = 160 + 32\lambda + 100 + 50\lambda - 60 + 18\lambda = 200 + 100\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -2$$

Der Graf von $f(\lambda) = 50\lambda^2 + \ldots$ ist eine nach oben geöffnete Parabel $\Longrightarrow$ Minimum bei $\lambda = -2$.

$$\overline{\mathrm{MF}} = \sqrt{f(-2)} = 20$$

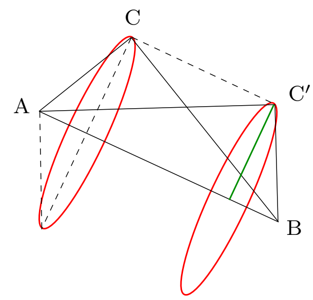
5 (f) $\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{O}} = \overrightarrow{\mathrm{M}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 45 \\ 30 \end{pmatrix}$, $\quad \overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{N}} = \overrightarrow{\mathrm{M}} + \frac{15}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52 \\ 30 \\ 39 \end{pmatrix}$

Geometrie II

$\boxed{6}$ (a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \implies \mathrm{AC} \perp \mathrm{BC}$

$$\overline{AB} = \sqrt{5^2 + 14^2 + 2^2} = 15, \quad \overline{AC} = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = 9, \quad \overline{BC} = \sqrt{8^2 + 8^2 + 4^2} = 12$$

$\boxed{4}$ (b) AB ist Lot auf die Kreisebenen durch die Mittelpunkte der Kreise.
Der Kreisradius ist die Höhe h_c im Dreieck ABC:



$$\frac{1}{2} h_c \overline{AB} = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BC} \implies h_c = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}} = 7{,}2$$

$\boxed{3}$ (c) $\vec{n}' = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 72 \\ 36 \\ -72 \end{pmatrix} = 36 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \implies \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} \cdot \vec{A} = 3 \implies E: \quad \vec{n}(\vec{x} - \vec{A}) = 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0$$

$\boxed{7}$ (d) φ bezeichne den Winkel zwischen $\vec{n}$ und $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{BS}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{BS}|} = \frac{36}{3\sqrt{200{,}25}} = 0{,}848 \implies \varphi = 32{,}0^\circ$$

Der gesuchte Neigungswinkel ist $\alpha = 90^\circ - \varphi = 58{,}0^\circ$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BS} \sin\alpha = 18\sqrt{200{,}25} \sin 58^\circ = 216$$

$\boxed{3}$ (e) Die Gerade muss parallel zur Ebene E sein, da dann die Höhe jeder Pyramide (Abstand von P zu E) gleich ist.

$\boxed{7}$ (f) Der Mittelpunkt des Umkreises ist der Mittelpunkt M von [AB]:

$$\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \mathrm{M}\,(3{,}5|0|2)$$

$$\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = 4\vec{n} \implies \mathrm{MS} \perp E \quad \text{q.e.d.}$$

$$\frac{V_{\text{Kegel}}}{V_{\text{Pyramide}}} = \frac{\frac{1}{3} A_{\text{Kegel}} \cdot h}{\frac{1}{3} A_{\text{Pyramide}} \cdot h} = \frac{A_{\text{Kegel}}}{A_{\text{Pyramide}}} = \frac{\frac{1}{4}\overline{AB}^2 \pi}{\frac{1}{2} h_c \overline{AB}} = \frac{\overline{AB}\pi}{2h_c} = \frac{15\pi}{14{,}4} = 3{,}272$$
$$V_{\text{Kegel}} = 3{,}272 \cdot V_{\text{Pyramide}} = 327{,}2\% \cdot V_{\text{Pyramide}}$$

V_{Kegel} ist um 227,2% größer als V_{Pyramide}.