Q11 – 1. Schulaufgabe aus der Mathematik – 09.12.2011

1. Berechne die Ableitungen folgender Funktionen und vereinfache (Ergebnisse ohne negative und ohne gebrochene Exponenten):

   (a) $f(x) = x^4 + \frac{1}{x^4} + \sqrt[4]{x}$ (b) $g(x) = x \sin x$ (c) $h(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

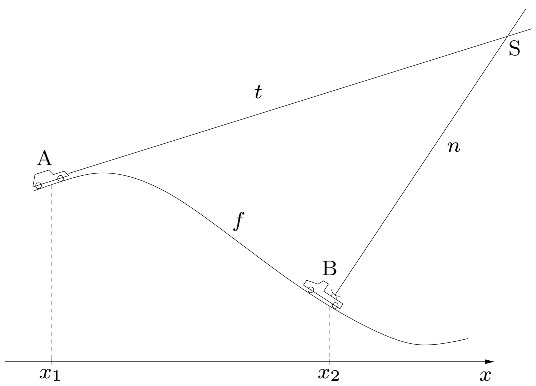
   (d) $k(x) = \sqrt{\sin(x^5)}$ (e) $r(x) = \sin^5 \sqrt{x}$ (f) $s(x) = \frac{x^2}{2x+4}$

   Berechne die Nullstellen von s'.

2. Der Querschnitt eines Hügels wird durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{x^3}{2700} - \frac{x^2}{30} + 40$$

   beschrieben (Zahlenwerte in Metern). Am Ort A $(-9|f(-9))$ steht ein PKW, dessen Scheinwerfer einen schmalen Lichtstrahl tangential zum Hügel aussendet. Am Ort B $(54|f(54))$ steht ein Pickup mit einer Lichtkanone auf der Ladefläche, deren Lichtstrahl senkrecht zum Hügel in die Höhe ragt.



   (a) Berechne die Ableitungsfunktion von f und ihre Nullstellen. Was bedeuten diese Nullstellen für den Grafen von f?

   (b) Stelle die Gleichung der Funktion t auf, die den Lichtstrahl des PKWs beschreibt. Wer es nicht schafft, darf T $(4|46) \in t$ verwenden.

   (c) Zeige, dass der Lichtstrahl des Pickups durch die Funktion n mit der Gleichung

$$n(x) = \frac{25}{9} \cdot x - \frac{3722}{25}$$

   beschrieben wird und berechne die Koordinaten eines Ballons S, der von beiden Lichtstrahlen beleuchtet wird.

   (d) Der Pickup schafft aufwärts fahrend höchstens den Steigungswinkel φ_0 mit $|\varphi_0| = 36{,}87°$. Welche Koordinaten hat der Punkt U, bei dem er gezwungenermaßen umkehren muss, wenn er in B nach oben (links) losfährt?

   (e) Skizziere den Verlauf des Grafen von f' und berechne den betragsmäßig größten Steigungswinkel $\varphi_{\max}$ des Hügels für $x \in [0; 60]$. Begründe dein Vorgehen. In welchen Bereichen ist der Betrag des Steigungswinkels von f größer als $|\varphi_{\max}|$?

   (f) Zeichne den Grafen von f im x-Intervall $[-20; 100]$ (Wertetabelle!) sowie t und n und alle relevanten Punkte in ein Koordinatensystem ($10 \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{cm}$).