Mathematik – Abitur 2013 – Lösungen

Richard Reindl

Analysis I Teil 1

$\boxed{3}$ 1. (a) $3x+9 \geqq 0 \quad\Longrightarrow\quad x \geqq -3 \quad\Longrightarrow\quad D_g = [-3,\infty[$, Nullstelle bei $x_0 = -3$

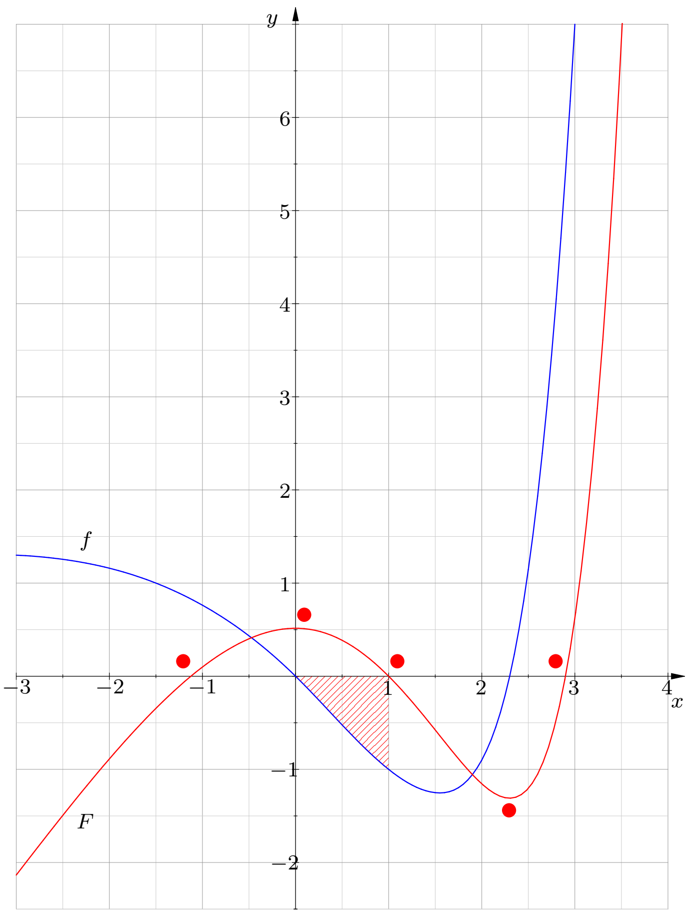
$\boxed{4}$ (b) $g'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+9}}$, $\quad g'(0) = \dfrac{1}{2}$, $\quad$ Tangente: $t:\ x \to t(x) = \dfrac{x}{2} + 3$

$\boxed{2}$ 2. (a) $x^2 + 2$

$\boxed{2}$ (b) $2\sin x$

$\boxed{3}$ 3. $\ln x = 1 \Longrightarrow x_1 = \mathrm{e}$, $\quad \mathrm{e}^x = 2 \Longrightarrow x_2 = \ln 2$, $\quad \dfrac{1}{x} = 3 \Longrightarrow x_3 = \dfrac{1}{3}$

$\boxed{6}$ 4. Wert $F(0) \approx 0{,}5$



Analysis I Teil 2

$\boxed{2}$ 1. (a) $f(-x) = 2(-x)\mathrm{e}^{-0{,}5(-x)^2} = -2x\mathrm{e}^{-0{,}5x^2} = -f(x)$ ●

Da e^x und damit erst recht $\mathrm{e}^{0{,}5x^2}$ stärker gegen Unendlich geht als jede Potenzfunktion, ist

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\mathrm{e}^{0{,}5x^2}} = 0 \bullet$$

$\boxed{6}$ (b) $f'(x) \overset{\bullet\bullet}{=} 2\mathrm{e}^{-0{,}5x^2} + 2x(-x)\mathrm{e}^{-0{,}5x^2} = 2(1-x^2)\mathrm{e}^{-0{,}5x^2}$

$$f'(x) = 0 \implies x \overset{\bullet}{=} \pm 1$$

Wegen der einzigen Nullstelle von f bei $x = 0$, $f(x) > 0$ für $x > 0$ und dem Verhalten im Unendlichen folgt:●●HP bei $(1|f(1)) = \left(1\middle|\frac{2}{\sqrt{e}}\right) \approx (1|1{,}21)$ und wegen der Symmetrie ●TP bei $\left(-1\middle|-\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$. Alternative Begründung über die zweite Ableitung:

$$f''(x) = 2\left[(-2x)\mathrm{e}^{-0{,}5x^2} + (1-x^2)(-x)\mathrm{e}^{-0{,}5x^2}\right] = 2x(x^2-3)\mathrm{e}^{-0{,}5x^2}$$

$$f''(1) = -4\mathrm{e}^{-0{,}5} < 0 \quad \implies \quad \text{HP bei ...}$$

$\boxed{4}$ (c) $m_\mathrm{S} \overset{\bullet}{=} \dfrac{f(0{,}5) - f(-0{,}5)}{0{,}5 - (-0{,}5)} = 2f(0{,}5) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}} \approx 1{,}765\bullet, \quad m_\mathrm{T} \overset{\bullet}{=} f'(0) = 2$

$$\frac{m_\mathrm{S} - m_\mathrm{T}}{m_\mathrm{T}} \overset{\bullet}{=} -11{,}75\%$$

$\boxed{6}$ (d) Wegen $f(x) > 0$ für $x > 0$ gilt $A(u) \overset{\bullet}{=} \displaystyle\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x \iff A'(u) \overset{\bullet}{=} f(u)$

$$A'(u) \overset{\bullet}{=} -2(-u)\mathrm{e}^{-0{,}5u^2} = 2u\mathrm{e}^{-0{,}5u^2} \overset{\bullet}{=} f(u)$$

$$\lim_{u\to\infty} A(u) \overset{\bullet}{=} 2,$$

d.h. G_f schließt mit der positiven x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt 2 ein.●

$\boxed{6}$ (e) $2x\mathrm{e}^{-0{,}5x^2} = \dfrac{2x}{\mathrm{e}^2} \quad \implies \quad x \overset{\bullet}{=} 0 \quad \text{oder} \quad \mathrm{e}^{-0{,}5x^2} = \mathrm{e}^{-2} \quad \implies \quad x \overset{\bullet}{=} \pm 2$

$$B \overset{\bullet}{=} \int_0^2 \left(f(x) - \frac{2x}{\mathrm{e}^2}\right)\mathrm{d}x \overset{\bullet}{=} \left[-2\mathrm{e}^{-0{,}5x^2} - \frac{x^2}{\mathrm{e}^2}\right]_0^2 = -\frac{2}{\mathrm{e}^2} - \frac{4}{\mathrm{e}^2} - (-2) \overset{\bullet}{=} 2 - \frac{6}{\mathrm{e}^2}$$

Gerade zeichnen ●

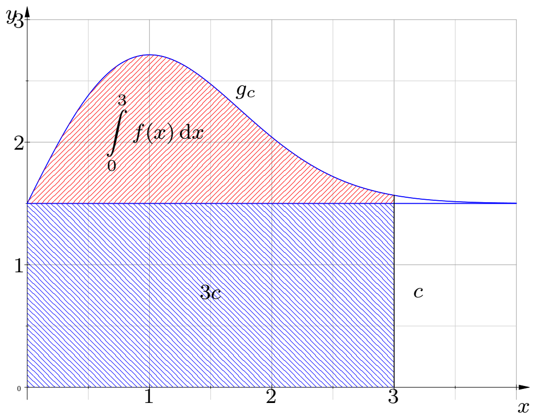
$\boxed{2}$ 2. (a) HP bei $\left(1\middle|\frac{2}{\sqrt{e}} + c\right)\bullet, \quad \lim\limits_{x\to\infty} g_c(x) = c\bullet$

$\boxed{3}$ (b) $\alpha)$ $c > f(1) = \dfrac{2}{\sqrt{e}} \approx 1{,}213 \quad \text{oder} \quad c < -f(1)\bullet$

$\beta)$ $c = f(1) \quad \text{oder} \quad c = -f(1)$ oder $c = 0$ ●

$\gamma)$ $0 < c < f(1) \quad \text{oder} \quad 0 > c > -f(1)\bullet$

$\boxed{2}$ (c) selbstredend

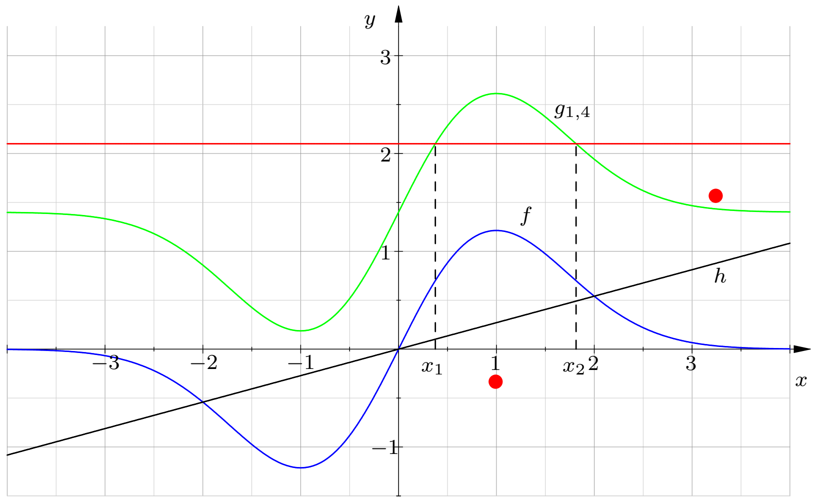


$\boxed{4}$ 3. (a) $x_1 \approx 0{,}38 \approx 0{,}4$

$x_1 \,\widehat{=}\, 1959$

$x_2 \approx 1{,}81 \approx 1{,}8$

$x_2 \,\widehat{=}\, 1973$



$\boxed{2}$ (b) Ab 1974 ist die Geburtenziffer kleiner als 2,1 und damit eine Abnahme der Bevölkerungszahl zu erwarten.

$\boxed{3}$ (c) ≈ 1972 (exakt $x_3 = \sqrt{3} \approx 1{,}73 \,\widehat{=}\, 1955 + 17{,}3$).

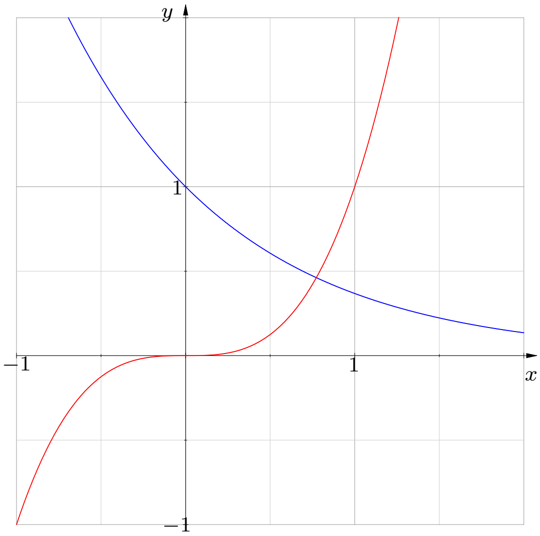
Man müsste zeigen, dass $g_{1,4}$ für $x > x_3$ linksgekrümmt ist, d.h. dass $g''_{1,4}(x) > 0$ für $x > x_3$ gilt.

Analysis II Teil 1

$\boxed{5}$ 1. $D =]-\infty, 2013[$, $\lim\limits_{x \to -\infty} = \infty$, $\lim\limits_{x \to 2013^-} = -\infty$, $(2012 \,|\, 0)$, $(0 \,|\, \underbrace{\ln 2013}_{7{,}6})$

$\boxed{4}$ 2. $f'(x) = \sin x + x \cos x$, $f''(x) = 2\cos x - x \sin x$, $f''(0) = 2$ (linksgekrümmt)

$\boxed{2}$ 3. (a)

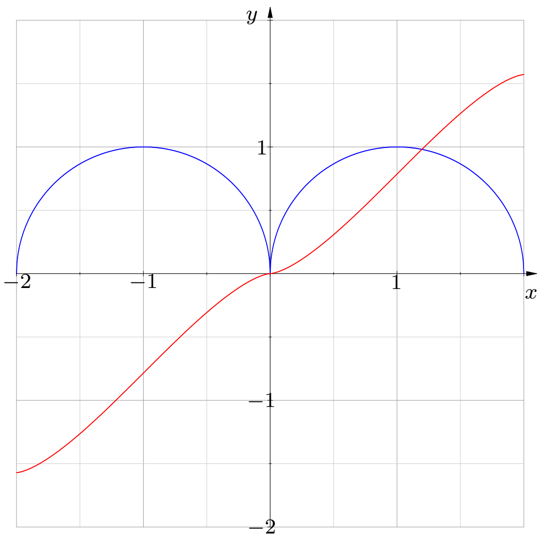


$\boxed{4}$ (b) $d'(x) = -\mathrm{e}^{-1} - 3x^2$

$$x_1 = 1 - \frac{d(1}{d'(1)} = 1 - \frac{\mathrm{e}^{-1} - 1}{-\mathrm{e}^{-1} - 3} = 0{,}812$$

$\boxed{3}$ 4. (a) $F(0) = 0$, $F(2) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \pi = \frac{\pi}{2}$, $F(-2) = -\frac{\pi}{2}$

$\boxed{2}$ (b)



Analysis II Teil 2

$\boxed{6}$ 1. (a) Asymptoten: $x = -1, \quad y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

Schnitt von G_f mit schräger Asymptote:

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{8}{x+1} = 0 \quad \text{nicht erfüllbar!}$$

$\boxed{8}$ (b) $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{8}{(x+1)^2}, \qquad f''(x) = \frac{16}{(x+1)^3}$

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+1)^2 = 16 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -5, \quad x_2 = 3$$

$$f''(-5) = -\frac{1}{4} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{HP bei } (-5|-5)$$

$$f''(3) = \frac{1}{4} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{TP bei } (3|3)$$

$\boxed{6}$ 2. (a) $g(x) = f(x-1) + 1 = \frac{x}{2} + \frac{8}{x}, \qquad g(-x) = \frac{-x}{2} + \frac{8}{-x} = -g(x)$ q.e.d.

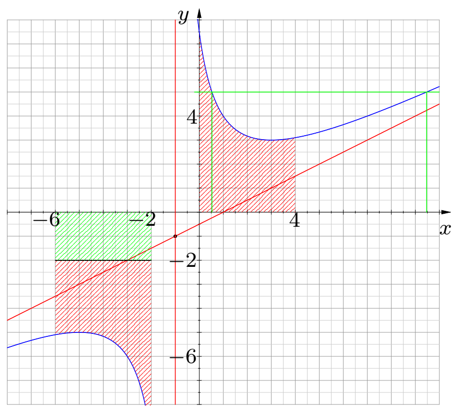
$\boxed{8}$ (b)

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 8\ln|x+1|\right]_0^4 =$$

$$= 4 - 2 + 8\ln 5 - 0 = 2 + 8\ln 5$$

$$\int_{-6}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x - 4 \cdot 2 =$$

$$= -2 - 8\ln 5 - 8 = -10 - 8\ln 5$$



$\boxed{3}$ 3. (a) $f(0) = f(15) = 7{,}5$

Gleiche Lage des Schwerpunkts bei der leeren und der vollen Dose.

$\boxed{3}$ (b) Die Höhe des Schwerpunktes über der Grundfläche sinkt von 7,5 cm bis 3 cm und steigt dann wieder an bis 7,5 cm. Der tiefste Schwerpunkt liegt auf der Flüssigkeitsoberfläche.

$\boxed{6}$ (c) $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} = 5 \quad \Longrightarrow \quad x + \frac{16}{x+1} = 11 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 10x = -5$

$$x = 5 \pm 2\sqrt{5}, \quad x_1 \approx 0{,}53, \quad x_2 \approx 9{,}47$$

$$f(x) \leqq 5 \quad \Longrightarrow \quad 5 - 2\sqrt{5} \leqq x \leqq 5 + 2\sqrt{5}$$

Stochastik I

$\boxed{3}$ 1. (a) $B(25;0{,}43;10) = \binom{25}{10} \cdot 0{,}43^{10} \cdot 0{,}57^{15} = 15{,}4\%$

$\boxed{3}$ (b) $p = 0{,}35, \quad P(X \geqq 13) = 1 - F_{0{,}35}^{25}(12) = 1 - 0{,}93956 = 0{,}06044 \approx 6{,}04\%$

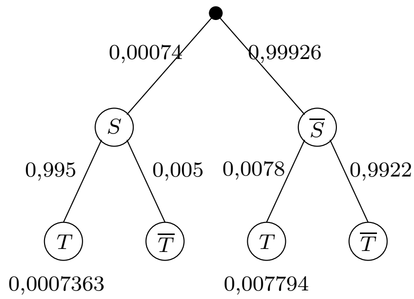
$\boxed{5}$ (c) $p = 6\% + 2\% = 0{,}08, \quad q = 0{,}92$

$$P(X \geqq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - q^n > 0{,}95 \quad \Longrightarrow \quad 0{,}92^n < 0{,}05$$

$$n > \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}92} = 35{,}9 \quad \Longrightarrow \quad \text{mindestens 36 Spender}$$

$\boxed{2}$ 2. (a) Kind gesund und Test negativ.

$\boxed{8}$ (b) $P(T) = 0{,}00074 \cdot 0{,}995 + 0{,}99926 \cdot 0{,}0078 = 0{,}00853$



Ω	S	$\overline{S}$	
T	0,0007363	0,0077942	0,0085305
$\overline{T}$	0,0000037	0,9914658	0,9914695
	0,0007400	0,9992600	1

$$P_T(S) = \frac{P(T \cap S)}{P(T)} = \frac{0{,}0007363}{0{,}0085305} = 8{,}63\%$$

Von den positiv gestesteten Kindern sind nur 8,6% tatsächlich krank.

$\boxed{3}$ (c) $P(S \cap \overline{T}) = 0{,}00074 \cdot 0{,}005 = 3{,}7 \cdot 10^{-6}$, also 3,7 Kinder im Mittel.

$\boxed{2}$ 3. (a) $3 \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$

$\boxed{4}$ (b) Y sei der Gewinn des Betreibers pro Spiel, x die Auszahlung:

Y	$2\,€$	$2\,€ - x$
p_i	$\frac{27}{28}$	$\frac{1}{28}$

$$E(Y) = \frac{27}{28} \cdot 2\,€ + \frac{1}{28} \cdot (2\,€ - x) = 1{,}25\,€$$

$$2\,€ - \frac{x}{28} = 1{,}25\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = 21\,€$$

Stochastik II

$\boxed{4}$ 1. (a)

Ω	J	$\overline{J}$	
K	0,04	0,40	0,44
$\overline{K}$	0,08	0,48	0,56
	0,12	0,88	1

$\boxed{4}$ (b) $P_J(\overline{K}) = \dfrac{P(J \cap \overline{K})}{P(J)} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{22}{33} > \dfrac{18}{33} = \dfrac{48}{88} = \dfrac{P(\overline{J} \cap \overline{K})}{P(\overline{J})} = P_{\overline{J}}(\overline{K})$

Der Anteil der unentschlossenen Jungwähler an den Unentschlossenen ist nur $\frac{8}{56} = \frac{1}{7}$.

$\boxed{3}$ (c) Wegen der großen Zahl an Wählern kann die Wahrscheinlichkeit, einen Jugwähler zu ziehen als konstant ($p = 0{,}12$) angenommen werden:

$$p = \binom{48}{6} \cdot 0{,}12^6 \cdot 0{,}88^{42} = 17{,}1\%$$

$\boxed{5}$ 2. (a) p: Wahrscheinlichkeit, dass der Kandidat gewählt wird.

$$H_0: \quad p \leqq 0{,}5, \qquad H_1: \quad p > 0{,}5$$

Annahmebereich für H_0: $\overline{K} = \{0, 1, ..., k\}$

Maximaler Fehler 1. Art für $p = 0{,}5$: $\quad \alpha = P(X \geqq k+1) = 1 - F_{0,5}^{200}(k) \leqq 0{,}05$

$$F_{0,5}^{200}(k) \geqq 0{,}95 \quad \Longrightarrow \quad k = 112$$

$\boxed{3}$ (b) Das Risiko, sich fälschlicherweise gegen eine zusätzliche Wahlkampagne zu entscheiden ($X \geqq 113$), ist höchstens 5%.

$\boxed{4}$ 3. (a) $P(X=1) = \dfrac{\binom{8}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} = \dfrac{12}{55}, \quad P(X=2) = \dfrac{\binom{8}{2} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} = \dfrac{28}{55}$

$\boxed{3}$ (b) $E(X) = \dfrac{12}{55} \cdot 1 + \dfrac{28}{55} \cdot 2 + \dfrac{14}{55} \cdot 3 = \dfrac{14}{55} = 2$

$\mathrm{Var}(X) = \dfrac{1}{55} \cdot (0-2)^2 + \dfrac{12}{55} \cdot (1-2)^2 + 0 + \dfrac{14}{55} \cdot (3-2)^2 = \dfrac{30}{55} = \dfrac{6}{11}$

$\boxed{4}$ (c) $E(Y) = np = 3 \cdot \dfrac{2}{3} = 2, \quad \mathrm{Var}(Y) = npq = 2 \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3} > \dfrac{6}{11}$

Das Diagramm von X ist„schlanker“ als das Diagramm von Y, d.h. für alle $i \neq 2$ gilt $P(X=i) \leqq P(Y=i)$.

Geometrie I

$\boxed{5}$ (a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad \overrightarrow{\mathrm{C}} = \overrightarrow{\mathrm{D}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{C}(20|10|6)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{8^2+6^2} = 10 = \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{DC}} \quad \Longrightarrow \quad \text{Raute}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AD}}$. Eine Raute mit einem rechten Winkel ist ein Quadrat.

$\boxed{3}$ (b) $\vec{n}\,' = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix} = 20 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A}} = 3 \cdot 28 = 84$

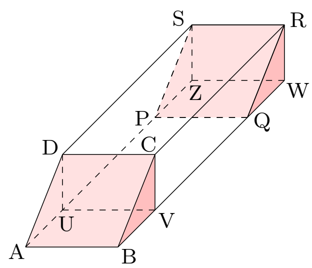
$$E: \quad \vec{n}(\vec{x} - \overrightarrow{\mathrm{A}}) = 3x_1 + 4x_3 - 84 = 0$$

$\boxed{3}$ (c) $\cos\varphi = \frac{\vec{n}\vec{e}_3}{|\vec{n}|} = \frac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 36{,}9^\circ$

$\boxed{2}$ (d) F ist parallel zu E (gleicher Normalenvektor) und enthält den Ursprung:

$$F: \quad 3x_1 + 4x_3 = 0$$

$\boxed{3}$ (e) Der Keil BVCAUD ist kongruent zum Keil QWRPZS und daher ist das Volumen des Spats gleich dem Volumen des Quaders UVWZDCRS. Da das Rechteck ABQP zum Rechteck UVWZ kongruent ist, folgt die Behauptung.



$\boxed{3}$ (f) $V = 1 \cdot 2{,}8 \cdot 0{,}6\,\mathrm{m}^3 = 1{,}68\,\mathrm{m}^3 \quad \Longrightarrow \quad m = 1{,}68 \cdot 2{,}1\,\mathrm{t} = 3{,}528\,\mathrm{t}$

$\boxed{7}$ (g) Diagonalenschnittpunkt: G(14|5|0) $\quad \Longrightarrow \quad \vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{HG}} = \overrightarrow{\mathrm{G}} - \overrightarrow{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} 14-11 \\ 5-3 \\ 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$h: \quad \vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{H}} + \lambda\vec{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Endpunkt L: $\overrightarrow{\mathrm{L}} = \overrightarrow{\mathrm{H}} + \frac{1}{4} \cdot 14 \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \overrightarrow{\mathrm{H}} + \frac{1}{4} \cdot 14 \cdot \frac{\vec{v}}{7} = \overrightarrow{\mathrm{H}} + \frac{1}{2}\vec{v} = \begin{pmatrix} 12{,}5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{4}$ (h) Kugelmittelpunkt: $\mathrm{M}(k_1|k_2|k_3+8)$ mit $\mathrm{K}(k_1|k_2|k_3)$, $\quad d = d(\mathrm{M}, h)$

Für $d = 8$ berührt die Kugel die Stange.

Geometrie II

$\boxed{3}$ 1. (a) B(12|12|0), $V = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 8\,\mathrm{m}^3 = 384\,\mathrm{m}^3$

$\boxed{4}$ (b) $\vec{n}' = \overrightarrow{\mathrm{BC}} \times \overrightarrow{\mathrm{BS}} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 96 \\ 72 \end{pmatrix} = 24 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$E: \quad \vec{n}(\vec{x} - \overrightarrow{\mathrm{B}}) = 4x_2 + 3x_3 - 48 = 0$$

$\boxed{5}$ (c) Gerade g durch M(6|6|0) mit Richtungsvektor $\vec{n}$: $\quad g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Schnitt F von g mit E: $\quad 4(6 + 4\lambda) + 3 \cdot 3\lambda - 48 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{24}{25}$

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{24}{25} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Höhe ist die x_3-Komponente von F: $x_3 = \frac{3 \cdot 24}{25} = 2{,}88$

$\boxed{4}$ (d) $A_{\text{solar}} = \frac{1}{4} \cdot A_{\triangle \mathrm{BCS}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{\mathrm{BC}} \times \overrightarrow{\mathrm{BS}} \right| = \frac{1}{8} \cdot 24 \cdot \sqrt{4^2 + 3^2} = 3 \cdot 5 = 15\,[\mathrm{m}^2]$

$\boxed{4}$ (e) $\cos\varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{e}_3}{|\vec{n}|} = \frac{3}{5} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 53{,}1°$

$$98\% - 0{,}31 \cdot 4\% = 96{,}8\%$$

$\boxed{4}$ 2. (a)

$$\begin{aligned} 8 + 3\lambda &= -1 + \mu && (1) \\ 1 + \lambda &= 5 - 2\mu && (2) \\ 7 + 2\lambda &= -9 + 4\mu && (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) - 3 \cdot (2): &\quad 5 = -16 + 7\mu \quad \Longrightarrow \quad \mu = 3 && (4) \\ (4) \text{ in } (2): &\quad \lambda = -2 && (5) \\ (4) \text{ und } (5) \text{ in } (3): &\quad 7 - 4 = -9 + 12 \text{ (stimmt)} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{Q}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \sigma \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

z.B. $\sigma = 1$: $\quad$ P(5|0|5), $\quad$ Q(−1|−2|1)

$\boxed{4}$ (c) Der Kreis um T durch P und Q schneidet h in U und V (Thaleskreis). Ist $\vec{v}$ der Richtungsvektor von h, dann gilt

$$\overrightarrow{\mathrm{U}} = \overrightarrow{\mathrm{T}} + \overline{\mathrm{PT}} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad \overrightarrow{\mathrm{V}} = \overrightarrow{\mathrm{T}} - \overline{\mathrm{PT}} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$