Mathematik – Abitur 2014 – Lösungen

Richard Reindl

Analysis Aufgabengruppe 1 Teil A

$\boxed{5}$ 1. $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$, $\quad f'(x) = 0 \implies \ln x = 1 \implies x = \mathrm{e}, \quad f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$

$$\left.\begin{array}{llll} 1 < x < \mathrm{e}: & \ln x < 1 \implies & f'(x) < 0 \implies & f \text{ fallend} \\ x > \mathrm{e}: & \ln x > 1 \implies & f'(x) > 0 \implies & f \text{ steigend} \end{array}\right\} \implies \text{TP } (\mathrm{e}\,|\,\mathrm{e})$$

$\boxed{2}$ 2. (a) $\mathrm{e}^x > 0 \implies 2x + x^2 = x(2+x) = 0 \implies x_1 = 0, \quad x_2 = -2$

$\boxed{3}$ (b) $F'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (2x + x^2)\mathrm{e}^x = f(x)$

$G(x) = F(x) + C, \quad G(1) = \mathrm{e} + C = 2\mathrm{e} \implies C = \mathrm{e} \implies G(x) = x^2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}$

$\boxed{3}$ 3. (a) (α) a beliebig, $c = 1$: $g_{a,1}(x) = \sin(ax) + 1$

(β) $a = 2$, $c = 0$: $g_{2,0}(x) = \sin(2x)$

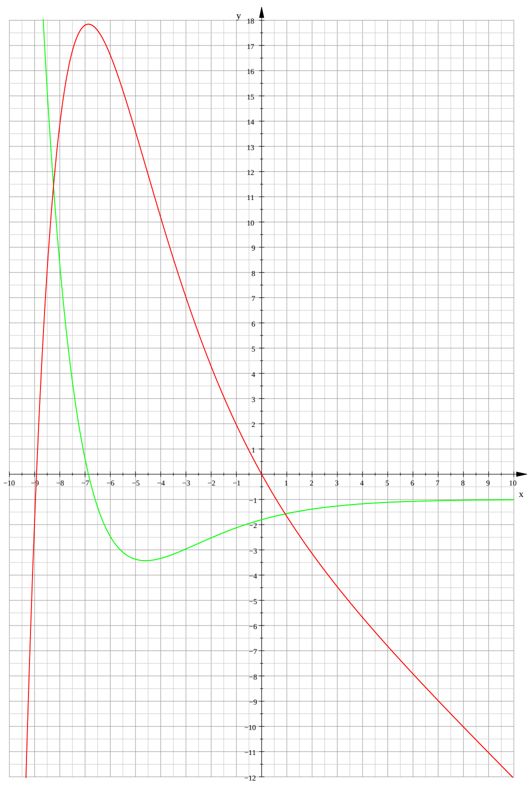
$\boxed{2}$ (b) $g'_{a,c}(x) = a\cos(ax) \implies -a \leqq g'_{a,c}(x) \leqq a$

$\boxed{2}$ 4. (a) x_0 sei die Nullstelle. $F'(x) = f(x) \implies$

$$F'(x) > 0 \text{ für } a < x < x_0 \text{ und } F'(x) < 0 \text{ für } x_0 < x < b,$$

d.h. HP von F bei x_0.

$\boxed{3}$ (b) An der Stelle des Tiefpunktes von f hat F einen Wendepunkt. Die Funktionswerte von F ergeben sich ungefähr durch Abzählen der Kästchen der von G_f und der x-Achse eingeschlossenen Fläche.



$\boxed{20}$

Analysis Aufgabengruppe 2 Teil A

$\boxed{1}$ 1. (a) $g(x) = \sin(-x) = -\sin x$

$\boxed{1}$ (b) $h(x) = 2 + \sin x$

$\boxed{1}$ (c) $k(x) = \sin 2x$

$\boxed{5}$ 2. Siehe Aufgabengruppe 1

$\boxed{2}$ 3. I, da zwei NS mit VZW.

$\boxed{5}$ 4. $A(x) = xf(x) = -x\ln x \quad\Longrightarrow\quad A'(x) = -\ln x - 1, \quad A'(x_0) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_0 = \frac{1}{\mathrm{e}}$

$$f(x_0) = 1,\ \text{d.h. Seitenlängen } \frac{1}{\mathrm{e}} \text{ und } 1$$

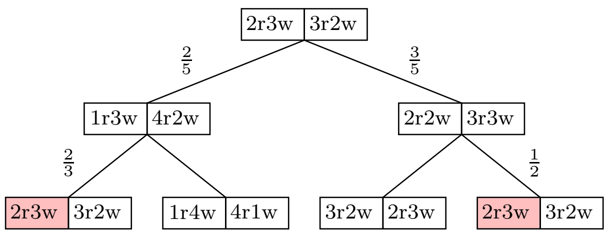
$\boxed{5}$ 5. Siehe Aufgabengruppe 1

$\boxed{20}$

Stochastik Aufgabengruppe 1 Teil A

$\boxed{2}$ 1. (a) Mögliche Inhalte Urne A:

2r3w
1r4w
3r2w



$\boxed{3}$ (b) $P(E) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{17}{30}, \quad P(\overline{E}) = \frac{13}{30} < P(E)$

$\boxed{2}$ 2. $P(X \geqq 19$

$\boxed{3}$ 3. $E(X) = 0\cdot p_1 + \frac{3}{10} + \frac{2}{5} + 3p_2 = 0{,}7 + 3p_2, \quad p_2 = 1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{5} - p_1 = 0{,}5 - p_1 \leqq 0{,}5$

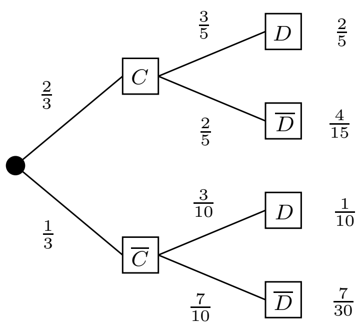
$$\Longrightarrow \quad E(X) \leqq 0{,}7 + 3\cdot 0{,}5 = 2{,}2$$

$\boxed{10}$

Stochastik Aufgabengruppe 2 Teil A

$\boxed{5}$ 1. Siehe Aufgabengruppe 1

$\boxed{5}$ 2. (a) $P(\overline{D}) = 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$



(b) $P(C)\cdot P(D) = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{3}$

$$P(C\cap D) = \frac{2}{5} \neq P(C)\cdot P(D)$$

(c) p statt $\frac{1}{10} \quad\Longrightarrow\quad P(C) = \frac{2}{3}, \quad P(D) = p + \frac{2}{5}$

$$P(C)\cdot P(D) = \frac{2}{3}\cdot\left(p + \frac{2}{5}\right) = P(C\cap D) = \frac{2}{5}$$

$$p + \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \quad\Longrightarrow\quad p = \frac{1}{5}$$

$\boxed{10}$

Geometrie Aufgabengruppe 1 Teil A

$\boxed{2}$ 1. (a) $\overrightarrow{\mathrm{BF}} \overset{\bullet}{=} \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathrm{BF}} = 4\sqrt{2^2+2^2+1^2} \overset{\bullet}{=} 12$

$\boxed{3}$ (b) $\mathrm{M}\,(0|0|2)\,, \quad \mathrm{P}\,(4|4|0)\,, \quad \overrightarrow{\mathrm{MP}} \overset{\circ}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{MK}} \overset{\circ}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ y_k \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MK}} \overset{\bullet}{=} 4y_k - 4 \overset{\circ}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad y_k \overset{\circ}{=} 1$$

$\boxed{1}$ 2. (a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad E$ ist parallel zur x_1-Achse $\bullet$

$\boxed{4}$ (b) $|\vec{n}| = \sqrt{3^2+4^2} \overset{\bullet}{=} 5 \quad \Longrightarrow \quad d(\mathrm{Z}, E) \overset{\bullet}{=} \left|\dfrac{3\cdot 6 + 4\cdot 3 - 5}{5}\right| \overset{\bullet}{=} 5 < 7$

Also schneidet die Kugel die Ebene E. $\bullet$

$\boxed{10}$

Geometrie Aufgabengruppe 2 Teil A

$\boxed{2}$ 1. (a)
$$\left.\begin{array}{lll} \vec{a}\vec{b} = -2+2 = 0 & \Longrightarrow & \vec{a}\perp\vec{b} \\ \vec{a}\vec{c}_t = 8t+2t-10t = 0 & \Longrightarrow & \vec{a}\perp\vec{c}_t \\ \vec{b}\vec{c}_t = -4t+4t = 0 & \Longrightarrow & \vec{b}\perp\vec{c}_t \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \text{Quader}$$

$\boxed{3}$ (b) $|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = \sqrt{5}, \quad |\vec{c}_t| = 3|t|\sqrt{5} \quad \Longrightarrow \quad V = 45|t| = 15 \quad \Longrightarrow \quad t = \pm\dfrac{1}{3}$

$\boxed{3}$ 2. (a) $\overrightarrow{\mathrm{MP}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathrm{Q}} = \vec{\mathrm{M}} - \overrightarrow{\mathrm{MP}} = \begin{pmatrix} -3-6 \\ 2-2 \\ 7+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ (b) $r = |\overrightarrow{\mathrm{MP}}| = \sqrt{49} = 7 = d(\mathrm{M}, x_1x_2-\text{Ebene})$ (x_3-Koordinate von M).

$\boxed{10}$

Analysis Aufgabengruppe 1 Teil B

$\boxed{5}$ 1. (a) $(0\,|\,2-\sqrt{12} \approx (0\,|\,-1{,}46)$, $\quad f(x)=0 \quad\Longrightarrow\quad x=4 \quad\Longrightarrow\quad (4\,|\,0)$

$$\lim_{x\to-\infty} = -\infty, \qquad f(6)=2$$

$\boxed{5}$ (b) $f'(x) = -\dfrac{-2}{2\sqrt{12-2x}} = \dfrac{1}{\sqrt{12-2x}}$, $\quad D_{f'} =]-\infty, 6[\ \lim\limits_{x\to 6^-} f'(x) = \left(\dfrac{1}{0^+}\right) = +\infty \quad\Longrightarrow$

senkrechte Tangente in $(6\,|\,2)$.

$\boxed{2}$ (c) $f'(x) > 0 \quad\Longrightarrow\quad f$ in ganz D streng steigend. $W_f =]-\infty, 2]$.

$\boxed{3}$ (d) $f(-2) = -2$

$\boxed{4}$ (e) $D_{f^{-1}} = W_f =]-\infty, 2]$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= -\frac{1}{2}(2-\sqrt{12-2x})^2 + 2(2-\sqrt{12-2x}) + 4 = \\ &= -\frac{1}{2}(4 - 4\sqrt{12-2x} + 12 - 2x) + 4 - 2\sqrt{12-2x} + 4 = \\ &= -8 + 2\sqrt{12-2x} + x + 8 - 2\sqrt{12-2x} = x \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ 2. (a) $-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 4 = x \quad\Longrightarrow\quad x^2 - 2x = 8 \quad\Longrightarrow\quad (x-1)^2 = 9 \quad\Longrightarrow\quad x = 1 \pm 3$

$$(-2\,|\,-2), \quad (4\,|\,4)$$

$\boxed{4}$ (b) $h(x) = -\dfrac{1}{2}(x^2 - 4x - 8) = -\dfrac{1}{2}(\underbrace{x^2 - 2\cdot 2x + 4}_{(x-2)^2} - 4 - 8) = -\dfrac{1}{2}(x-2)^2 + 6$

oder über die Ableitung: $h'(x) = -x + 2$, $\quad h'(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = 2$, $\quad h(2) = 6$

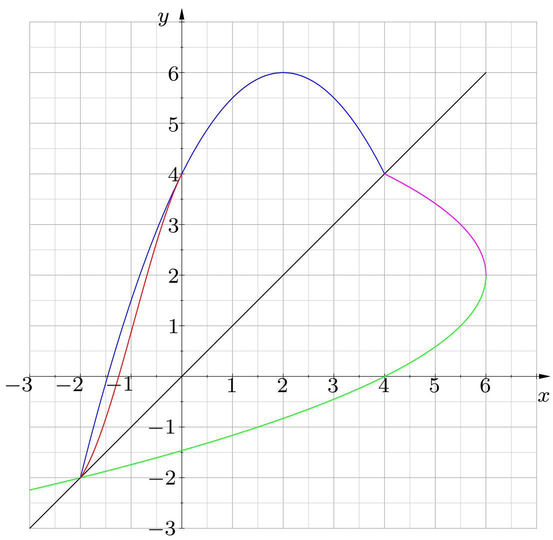
$\boxed{5}$ 3. (a)

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= \int_{-2}^{4} (h(x) - x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{4} \left(-\frac{x^2}{2} + x + 4\right)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-2}^{4} = \\ &= -\frac{32}{3} + 8 + 16 - \frac{4}{3} - 2 + 8 = 18 \quad\Longrightarrow\quad A = 36 \end{aligned}$$

$\boxed{6}$ (b) $\dfrac{t(x) - t(-2)}{x - (-2)} = \dfrac{t(x) + 2}{x + 2} = h'(-2) = 4 \quad\Longrightarrow\quad t(x) = 4x + 6$

$$\varphi = 2(\tan^{-1} 4 - 45°) = 61{,}9°$$

$\boxed{3}$ (c) I und II: stetig und glatt bei $x = 0$, III: Kurve bei $x = -2$ geschlossen
IV: kleinere Steigung als bei h



$\boxed{40}$

Analysis Aufgabengruppe 2 Teil B

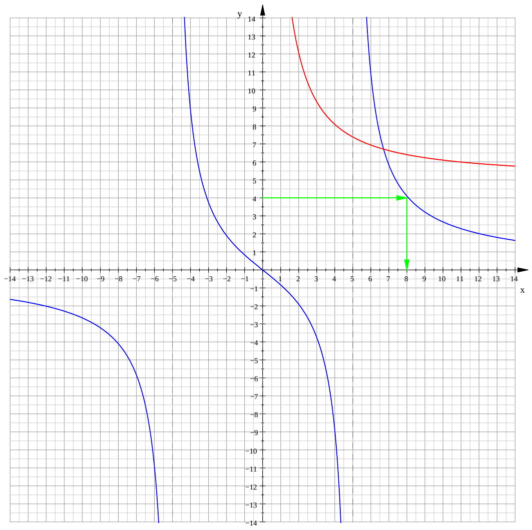
$\boxed{5}$ 1. (a) $x^2-25=0 \quad\Longrightarrow\quad x=\pm 5, \quad f(-x)=\dfrac{20\cdot(-x)}{(-x)^2-25}=-\dfrac{20x)}{x^2-25}=-f(x)$

NS: $x_0=0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}=0$, Asymptoten: $x=-5$, $x=5$, $y=0$

$\boxed{4}$ (b) $f'(x)=20\cdot\dfrac{1\cdot(x^2-25)-x\cdot 2x}{(x^2-25)^2}=-20\cdot\dfrac{x^2+25}{(x^2-25)^2}<0$ für alle x

$$\varphi=\tan^{-1}f'(0)=\tan^{-1}(-0{,}8)=-38{,}7^\circ$$

$\boxed{3}$ (c)



$\boxed{4}$ (d) Für jedes $y\neq 0$ gibt es zwei verschiedene x-Werte x_1 und x_2 mit $y=f(x_1)=f(x_2)$. f^* dagegen ist in D_{f^*} streng monoton fallend.

$\boxed{5}$ (e) $A(s)=\displaystyle\int_{10}^{s} f(x)\,\mathrm{d}x=10\cdot\int_{10}^{s}\frac{2x}{x^2-25}\,\mathrm{d}x=10\cdot\int_{10}^{s}\frac{(x^2-25)'}{x^2-25}\,\mathrm{d}x=10\cdot\left[\ln\left|x^2-25\right|\right]_{10}^{s}$

$$x\geqq 10 \quad\Longrightarrow\quad x^2-25>0 \quad\Longrightarrow\quad A(s)=10\cdot\left[\ln(x^2-25)\right]_{10}^{s}=10\cdot\ln\frac{s^2-25}{75}$$

$\boxed{3}$ (f) $10\cdot\ln\dfrac{s^2-25}{75}=100 \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{s^2-25}{75}=\mathrm{e}^{10} \quad\Longrightarrow\quad s=\sqrt{75\mathrm{e}^{10}+25}\approx 1\,652\,010$

$\boxed{2}$ (g) $\lim\limits_{s\to\infty}A(s)=(10\cdot\ln\infty)=+\infty$

$\boxed{2}$ 2. (a) $t(10)=\dfrac{10}{15}+\dfrac{10}{5}=\dfrac{40}{15} \quad\Longrightarrow\quad 160\,\text{min}, \quad t(20)=\dfrac{10}{25}+\dfrac{10}{15}=\dfrac{80}{75} \quad\Longrightarrow\quad 64\,\text{min}$

$\boxed{3}$ (b) $t=\dfrac{\text{Weg}}{\text{Geschwindigkeit}}, \quad v_{\text{hin}}=x+5, \quad v_{\text{zurück}}=x-5, \quad \dfrac{\text{km}}{\frac{\text{km}}{\text{h}}}=\text{h}$

$\boxed{2}$ (c) Geschwindigkeit zu klein zum Zurückfahren.

$\boxed{2}$ (d) $t(x)=\dfrac{10}{x+5}+\dfrac{10}{x-5}=10\dfrac{x-5+x+5}{(x+5)(x-5)}=\dfrac{20x}{x^2-5^2}=f(x)$

$\boxed{5}$ (e) Siehe Zeichnung! $\quad t(x)=\dfrac{20x}{x^2-25}=4 \quad\Longrightarrow\quad x^2-5x=25$

$$x^2-2\cdot\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{125}{4} \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{5}{2}\underset{(-)}{+}\frac{5}{2}\sqrt{5}\approx 8{,}1$$

$\boxed{40}$

Stochastik Aufgabenguppe 1 Teil B

2 1. (a)

	M	J	
F	54	65	119
$\overline{\text{F}}$	44	37	81
	98	102	200

$$P(M \cap \overline{\text{F}}) = \frac{44}{200} = 22\%$$

2 (b) $P_{\text{F}}(M) = \dfrac{54}{119} = 45{,}4\%$

2 (c) $P(\text{F}) = \dfrac{119}{200}, \quad P(\text{M}) = \dfrac{98}{200}, \quad P(\text{F} \cap \text{M}) = \dfrac{54}{200}$

$$P(\text{F}) \cdot P(\text{M}) = 29{,}155\% \neq 27\% = P(\text{F}) \cdot P(\text{M}) \quad \Longrightarrow \quad \text{abhängig}$$

3 (d) $\displaystyle\sum_{i=0}^{12} B(25; 0{,}55; i) = F_{0,55}^{25}(12) = 30{,}632\%$

Die Schülerinnen der 9. Jahrgangsstufe sind keine repräsentative Stichprobe aller Mädchen im Alter von 12 bis 19 Jahren.

4 2. (a) Entscheidung für die Bewilligung der Finanzmittel, wenn die Zahl X der Computerbesitzer kleiner oder gleich k ist. Der Stadtrat entscheidet sich fälschlich für die Bewilligung, wenn der tatsächliche Anteil p der Computerbesitzer im Intervall $[0{,}9; 1]$ liegt. Die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung ist für $p = 0{,}9$ am größten. Diese größte Wahrscheinlichkeit soll höchstens 5% betragen:

$$P(X \leqq k) = F_{0,9}^{100}(k) \leqq 0{,}05$$

Den Tabellen entnimmt man $k \leqq 84$. Wir entscheiden uns für $k = 84$, weil für ein kleineres k die Wahrscheinlichkeit einer irrtümlichen Ablehnung größer wäre.

3 (b) $p = \dfrac{164}{200} = 0{,}82, \ P = B(100; 0{,}82; 85 = \dbinom{100}{85} \cdot 0{,}82^{85} \cdot 0{,}18^{15} = 8{,}1\%$

4 3. Von 200 Jugendlichen besitzen x beide Geräte, 99 eine Konsole und 94 ein Smartphone. Unter den 106 Telefonlosen sind $99 - x$ Konsolenbesitzer:

$$\frac{x}{94} > \frac{99 - x}{106} \quad \Longrightarrow \quad 106x > 9306 - 94x \quad \Longrightarrow \quad 200x > 9306 \quad \Longrightarrow \quad x > 46{,}53$$

x muss also mindestens 47 sein.

20

Stochastik Aufgabengruppe 2 Teil B

$\boxed{2}$ 1. (a) $\dfrac{\mathrm{G}\overline{\mathrm{Z}}(200,5)}{\mathrm{GZ}(200,5)} = \dfrac{200!}{195! \cdot 200^5} = \dfrac{200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot 196}{195! \cdot 200^5}$

$\boxed{3}$ (b) $p = \dfrac{185}{200} = 0{,}925, \quad B(10; p; 10) = p^{10} = 45{,}9\%$

$\boxed{5}$ (c) $p = \dfrac{20}{200} = 0{,}1, \quad P(X \geqq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}9^n > 0{,}99$

$$0{,}9^n < 0{,}01 \quad \Longrightarrow \quad n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}9} = 43{,}7 \quad \Longrightarrow \quad 9 \text{ Päckchen}$$

$\boxed{3}$ 2. (a) $(1+2+3+4+5)\varphi = 15\varphi = 360° \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \dfrac{360°}{15} = 24°$

$$P(X = 5) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$\boxed{4}$ (b) $A:$ Auszahlung: $E(A) = \dfrac{1}{15} \cdot 1 + \dfrac{2}{15} \cdot 2 + \dfrac{3}{15} \cdot 3 + \dfrac{4}{15} \cdot 4 + \dfrac{5}{15} \cdot 15 = 7$

Die durchschnittliche Auszahlung an den Spieler ist also 7 €, sein mittlerer Gewinn somit 7 € − 6 € = 1 €.

$\boxed{3}$ (c) Y: Gewinn des Supermarkts,

Y_i in €	5	4	3	2	-4
p_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

$$E(Y) = \frac{5+8+9+8-20}{15} = \frac{2}{3}$$

An den Kindergarten gehen also erwartungsgemäß $\frac{2}{3} \cdot 6000$ € = 4000 €

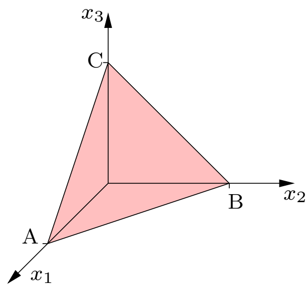
$\boxed{20}$

Geometrie Aufgabengruppe 1 Teil B

$\boxed{3}$ (a) $\overrightarrow{AB} \overset{\circ}{=} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad \overrightarrow{AC} \overset{\circ}{=} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A_\Delta \overset{\circ}{=} \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| \overset{\bullet}{=} \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \overset{\circ}{=} 8\sqrt{3}$$

$\boxed{5}$ (b) $g: \ \vec{x} \overset{\bullet}{=} \overrightarrow{P} + \lambda \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$



g in E: $\quad 2 - \lambda + 2 - \lambda + 3 - 4\lambda \overset{\bullet}{=} 4 \quad \Longrightarrow \quad \lambda \overset{\bullet}{=} \frac{1}{2}$

$$\overrightarrow{R} \overset{\bullet}{=} \overrightarrow{P} + \frac{1}{2}\vec{v} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Menge aller Punkte von E mit drei positiven Koordinaten ist gleich der Menge aller Punkte von E, die im Inneren des Dreiecks ABC liegen. Da R drei positive Koordinaten hat ... $\bullet$

$\boxed{3}$ (c) Ein Normalenvektor von E ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\quad \overrightarrow{QP} \overset{\circ}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{n} \quad \Longrightarrow \quad \overline{QP} \perp E$ $\circ$

$$\overrightarrow{S} \overset{\bullet}{=} \overrightarrow{Q} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wegen $1 + 1 + 2 = 4$ liegt also der Mittelpunkt S$\,(1|1|2)$ von [PQ] in E. $\bullet$

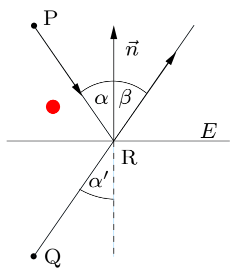
$\boxed{5}$ (d) $\overrightarrow{PR} \overset{\circ}{=} \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \\ -2 \end{pmatrix} = -0{,}5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\quad \overrightarrow{QR} \overset{\circ}{=} \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = 1{,}5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ein Normalenvektor von F ist $\vec{n}_F' \overset{\circ}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\circ}{=} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und somit auch

$$\vec{n}_F \overset{\circ}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad F: \ \circ\, \vec{n}_F(\vec{x} - \overrightarrow{Q}) = \vec{n}_F\vec{x} - \underbrace{\vec{n}_F\overrightarrow{Q}}_{0\,\circ} = -x_1 + x_2 = 0, \circ$$

$$\vec{n}_F \cdot \vec{n} \overset{\circ}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{n} \perp \vec{n}_F \quad \text{und} \quad \mathrm{R} \in F \ \circ \quad \Longrightarrow \quad \text{Einfallslot} \subset F$$

$\boxed{4}$ (e) $\alpha = \alpha'$ (Symmetrie)$\bullet$, $\alpha' = \beta$ (Scheitelwinkel)$\bullet$ $\Longrightarrow \ \alpha \overset{\bullet}{=} \beta$



oder mit Skalarprodukt:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{RP} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{RP}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{6}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\overrightarrow{QR} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{QR}| \cdot |\vec{n}|} = \cos\beta$$

$$\alpha = \beta \approx 35{,}3^\circ$$

$\boxed{20}$

Geometrie Aufgabengruppe 2 Teil B

$\boxed{2}$ (a) $\overline{\mathrm{BG}} = \sqrt{4^2+3^2} = 5, \quad A = 5 \cdot 10 = 50$

$\boxed{3}$ (b) $\tan\varphi = \dfrac{3}{4} \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 36{,}9^\circ > 35^\circ$

$\boxed{5}$ (c) Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$, Richtungsvektor von t: $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot 4 + 0\cdot 8 + 4\cdot 8 - 44 = 0 \quad\Longrightarrow\quad (4|8|8) \in E \\ \vec{n}\cdot\vec{v} = 12 - 12 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{v}\perp\vec{n} \quad\Longrightarrow\quad t\|E \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad t \subset E$$

$$\overrightarrow{\mathrm{TH}}\begin{pmatrix}0\\-8\\0\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{TH}}\cdot\vec{v} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{TH}\perp t \quad\Longrightarrow\quad d = \overline{\mathrm{TH}} = 2$$

$\boxed{3}$ (d) $\overrightarrow{\mathrm{M}} = \overrightarrow{\mathrm{T}} + 1\cdot\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \begin{pmatrix}4\\8\\8\end{pmatrix} + \dfrac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\8\\8\end{pmatrix} + \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4{,}8\\8\\7{,}4\end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ (e) Schnitt von E und F mit der x_3-Achse: $x_1 = x_2 = 0 \quad\Longrightarrow$

$$x_{3E} = \frac{44}{4} = 11, \quad x_{3F} = \frac{49{,}6}{4} = 12{,}4, \quad x_{3F} - x_{3E} = 1{,}4 \text{ und } \vec{n}_E = \vec{n}_F \quad\Longrightarrow\quad \text{die Beh.}$$

$\boxed{4}$ (f) $\{N\} = m \cap F: \quad 3(4{,}8 + 6\mu) + 4(7{,}4 - \mu) - 49{,}6 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mu = \dfrac{2}{5}$

$$\overrightarrow{\mathrm{N}} = \overrightarrow{\mathrm{M}} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix}6\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7{,}2\\8\\7\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{L}} = \overrightarrow{\mathrm{N}} + \begin{pmatrix}0\\0\\-1{,}4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7{,}2\\8\\5{,}6\end{pmatrix}$$

$\boxed{20}$