Eine Reise durch das Universum

R. Reindl, Oktober 2014

1 Relativität

1.1 Die Galileitransformation

Eine Bewegung $x = x(t)$ wird in einem Koordinatensystem S beschrieben. Oft ist es vorteilhaft, die Bewegung in einem relativ zu S bewegten System S′ zu beschreiben, das sich mit der konstanten Geschwindigkeit v parallel zur x-Achse relativ zu S bewegt. Die x- und x'-Achse liegen aufeinander (in der Zeichnung der Deutlichkeit halber etwas versetzt dargestellt). x ist die Koordinate eines Körpers K in S, x' in S′.

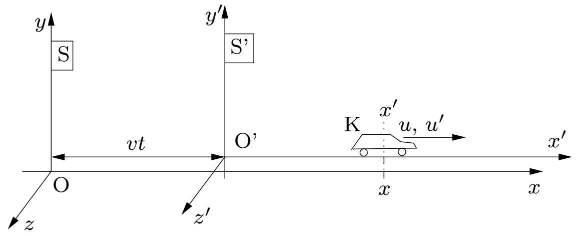


Abb.1 Bezugssysteme

Abb.1 entnimmt man (*Galileitransformation*):

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \end{array}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\begin{array}{l} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{array}} \tag{1}$$

Bewegt sich ein Körper K relativ zu S′ mit der (nicht notwendig konstanten) Geschwindigkeit $u' = \dot{x}'$, dann folgt aus (1) für seine Geschwindigkeit $u = \dot{x}$ relativ zu S:

$$u = \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x' + vt) = \dot{x}' + v = u' + v \tag{2}$$

$$\boxed{u = u' + v} \tag{3}$$

Für die Beschleunigungen $a = \dot{u}$ bzw. $a' = \dot{u}'$ des Körpers K in S bzw. S′ folgt aus (3):

$$a = \dot{u} = \dot{u}' + \dot{v} = a' \tag{4}$$

Wegen Newton 2 gilt damit für die Kräfte

$$\boxed{F = F'} \tag{5}$$

Ein Bezugssystem heißt *Inertialsystem*, wenn in ihm ein kräftefreier Körper keine Beschleunigung erfährt, d.h. wenn in ihm der Trägheitssatz gilt.

Logischer Aufbau der Newton'schen Mechanik:

Grundgrößen: Länge; Zeit; Masse

Definitionen: $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$; $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{x}}$; $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$; $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

$W_{\text{pot}} = \int \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{x}$; $W_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \cdot \vec{v}^2$

Logische Folgerungen: Der Energiesatz und der Impulssatz sind logische Konsequenzen der *Definitionen* von Energie und Impuls und somit keine *Naturgesetze*! Allenfalls in der Möglichkeit der widerspruchsfreien Definition der Grundgrößen steckt ein Naturgesetz!

Naturgesetze: Naturgesetze sind die Eigenschaften der Wechselwirkungen zwischen den Elementarteilchen, wie das Gravitationsgesetz und das Coulomb'sche Gesetz.

Newton'sches Relativitätsprinzip:

$$\boxed{\text{Die Gesetze der Mechanik haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form!}}$$

Beispiel: System S: $F = m \cdot a$
System S': $m' = m \quad ; \quad a' = a \quad ; \quad F' = F \quad \Longrightarrow \quad F' = m' \cdot a'$

Das Newton'sche Relativitätsprinzip beinhaltet folgende Aussagen:

- Kein Inertialsystem ist vor einem anderen ausgezeichnet.
- Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt.
- Es gibt keine absolute Ruhe.

Zum Beispiel kann in einem fensterlosen Zug auf ideal glatten Schienen mit keinem Experiment festgestellt werden, ob der Zug fährt oder nicht.

Bisher sind vier fundamentale Wechselwirkungen bekannt:

1. Die *Gravitation:* Anziehende Kraft zwischen allen mit Masse behafteten Körpern. Im Spezialfall kleiner Massen und kleiner Geschwindigkeiten wird die Schwerkraft durch die *Newton'sche Gravitationstheorie* beschrieben. Eine allgemeinere Theorie der Gravitation, die vor allem zur Beschreibung des ganzen Universums benötigt wird, ist die *allgemeine Relativitätstheorie* Albert Einsteins.
2. Die *elektromagnetische Wechselwirkung* (Maxwellsche Gleichungen)
3. Die *schwache Wechselwirkung*: Beschreibung des radioaktiven Zerfalls
4. Die *starke Wechselwirkung* Beschreibung der Kernkräfte (Quantenchromodynamik)

Die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung werden zur Zeit schon durch eine einheitliche Theorie, die sogenannte *elektroschwache Theorie* beschrieben. Dafür erhielten SHELDON LEE GLASHOW, ABDUS SALAM und STEVEN WEINBERG 1979 den Nobelpreis.

Zur Beschreibung der elektroschwachen Theorie und der starken Wechselwirkung ist die Newtonsche Mechanik nicht mehr geeignet, sondern man muss auf deren Verallgemeinerung, die *Quantenmechanik*, zurückgreifen. Eine andere Verallgemeinerung der Newtonschen Mechanik ist die *spezielle Relativitätstheorie*, die das Verhalten von kleinen Massen mit großen Relativgeschwindigkeiten beschreibt. Diese von ALBERT EINSTEIN 1905 veröffentlichte Theorie ist unser nächstes Ziel.

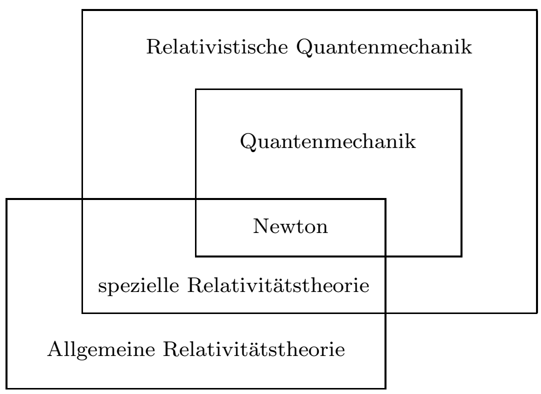


Abb.2 Aufbau der Physik

1.2 Das Brehmediagramm

Aus der Theorie des Elektromagnetismus (Maxwellgleichungen) folgt die auch experimentell eindeutig abgesichterte Tatsache:

> Die Vakuumlichtgeschwindigkeit hat in jedem Inertialsystem den gleichen Wert
>
> $$c = 299792458\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Dies steht in eklatantem Widerspruch zur Geschwindigkeitsaddition (3) der Galileitransformation. Sendet z. B. ein Raumschiff, das sich relativ zu S mit $v = \frac{c}{2}$ bewegt, in x-Richtung ein Lichtsignal aus ($u' = c$), dann müsste dieses Lichtsignal in S die Geschwindigkeit $u = u' + c = 1{,}5\,c$ haben. Die Galileitransformation und damit auch die Newtonsche Mechanik sind also falsch, obwohl die Newtonsche Mechanik für kleine Geschwindigkeiten eine ausgezeichnete Näherung an die Wirklichkeit darstellt. Einen Weg aus diesem Dilemma fand Albert Einstein 1905 mit seiner *speziellen Relativitätstheorie*. Die Aussagen dieser Theorie können geometrisch in einem *Brehmediagramm* (oder auch *Loedeldiagramm*) veranschaulicht werden (Genaueres im Relativitätsskript auf `www.stbit.de`):

Im Brehmediagramm werden die beiden Systeme S und S′ gleichzeitig dargestellt. Die Koordinatenfindung eines Ereignisses E mit den Koordinaten (x, ct) in S bzw. (x', ct') in S′ geschieht durch Projektion parallel zu den Achsen. Statt t-Achsen verwendet man ct-Achsen, damit alle Achsen in Längeneinheiten gemessen werden. Der Zusammenhang zwischen φ in Abb.3 und der Relativgeschwindigkeit v der Systeme ist

$$\boxed{\sin 2\varphi = \beta} \tag{6}$$

mit

$$\boxed{\beta = \frac{v}{c}} \tag{7}$$

Aus $\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi = 1$ folgt

$$\boxed{\cos 2\varphi = \sqrt{1-\beta^2}} \tag{8}$$

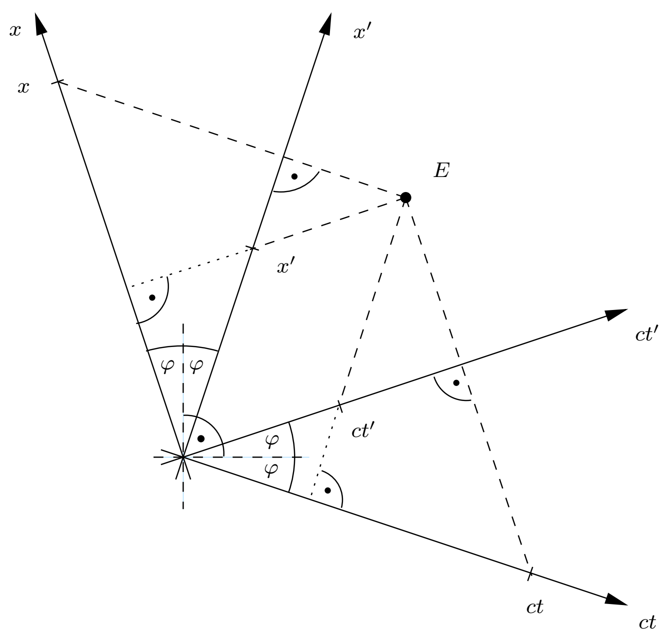


Abb.3 Brehmediagramm

Die algebraische Formulierung des Brehmediagramms liefert die Gleichungen der *Lorentztransformation*:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} x' = \gamma(x - vt) & ; & t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}\,x\right) \\[2ex] x = \gamma(x' + vt') & ; & t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}\,x'\right) \\[2ex] y = y' & ; & z = z' \end{array}} \tag{9}$$

mit

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} \tag{10}$$

1.3 Die Zeitdilatation

Eine Uhr U′ (ruhend in S′) bewegt sich mit der Geschwindigkeit v an zwei in S ruhenden Uhren U_1 und U_2 vorbei. Abb. 4 entnimmt man

$$c \cdot \Delta t' = c \cdot \Delta t \cdot \cos 2\varphi \qquad (11)$$

Aus (8) und (11) folgt die *Zeitdilatation* (Zeitdehnung) genannte Beziehung

$$\boxed{\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1-\beta^2}} \qquad (12)$$

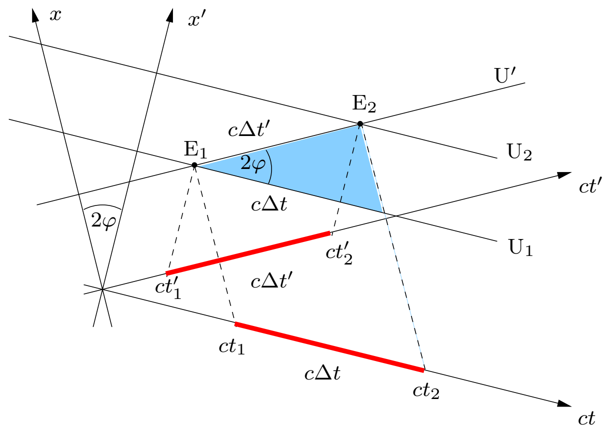


Abb.4 Zeitdilatation

Bewegt sich *eine* Uhr U′ mit der Geschwindigkeit $v = \beta\, c$ relativ zum Inertialsystem S, dann geht U′ gegen die in S ruhenden Uhren um den Faktor $\sqrt{1-\beta^2}$ langsamer.

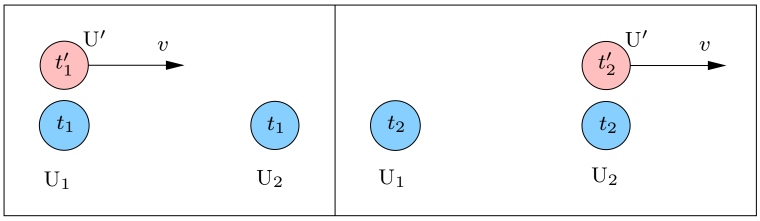


Abb.5 $\quad \Delta t = t_2 - t_1, \quad \Delta t\,' = t_2\,' - t_1\,'$

Beispiel: $\quad v = 0{,}6\, c \quad \Longrightarrow \quad \Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1-0{,}6^2} = \underline{\underline{0{,}8 \cdot \Delta t}}$

Für $v \ll c$, d.h. für $\beta \ll 1$ erhält man folgende Näherungsformeln (lineare Näherung):

$$\boxed{\sqrt{1-\beta^2} \approx 1 - \frac{\beta^2}{2} \quad , \quad \frac{1}{1-\beta^2} \approx 1 + \beta^2 \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 1 + \frac{\beta^2}{2}} \qquad (13)$$

Ist β fast 1, d.h. für $\beta = 1 - \alpha$ mit $\alpha \ll 1$ erhält man

$$\boxed{\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{(1-\beta)(1+\beta)} \approx \sqrt{2\,(1-\beta)} = \sqrt{2\,\alpha}} \qquad (14)$$

Beispiel:

β	α	$\sqrt{2\,\alpha}$	$\sqrt{1-\beta^2}$ mit TR
0,9999	0,0001	0,0141421	0,0141417
$1-10^{-12}$	10^{-12}	$1{,}41 \cdot 10^{-6}$	0

Als Beispiel für eine Bewegung mit kleiner Geschwindigkeit betrachten wir ein Auto, das vom System der Straße aus gesehen eine Stunde lang ($\Delta t = 1\,\mathrm{h}$) mit der Geschwindigkeit $v = 108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ fährt. Eine Atomuhr *im* Auto misst die Fahrzeit $\Delta t'$:

$$\beta = 10^{-7} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{1-\beta^2} \approx 1 - \frac{10^{-14}}{2}$$

Die Autouhr geht um

$$\tau = \Delta t - \Delta t' \approx \Delta t - \Delta t \cdot \left(1 - \frac{10^{-14}}{2}\right) = \frac{\Delta t}{2} \cdot 10^{-14} = \underline{\underline{1{,}8 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s}}}$$

nach.

Eine Uhr U bewegt sich mit *beliebiger* (d.h. nicht notwendig konstanter) Geschwindigkeit v relativ zu einem *Inertialsystem* S. Die Zeit τ, die von U angezeigt wird, nennt man die *Eigenzeit* von U. t ist die Zeit in S am jeweiligen Ort von U.
In kleinen Zeitintervallen der Länge dt ist v annähernd konstant und es gilt

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t \cdot \sqrt{1-\beta^2} \tag{15}$$

oder integriert

$$\boxed{\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\beta(t)^2}\,\mathrm{d}t} \tag{16}$$

Die Zeitdifferenz in S ist einfach

$$\Delta t = t_2 - t_1 \tag{17}$$

Wegen

$$\sqrt{1-\beta(t)^2} \leqq 1 \tag{18}$$

ist

$$\Delta\tau \leqq \int_{t_1}^{t_2} 1\,\mathrm{d}t = t_2 - t_1 = \Delta t \tag{19}$$

> Bewegt sich eine Uhr U in einem Inertialsystem S und sind $E_1\,(x_1|t_1)_S$ und $E_2\,(x_2|t_2)_S$ zwei beliebige Ereignisse auf der Weltlinie von U, dann gilt für die Eigenzeit τ der Uhr
>
> $$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 \leqq \Delta t = t_2 - t_1$$

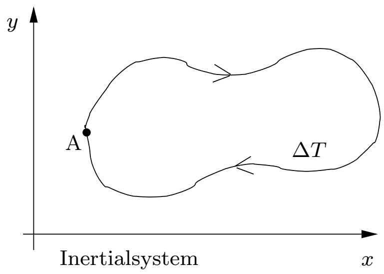


Abb.6

A sei ein fester Punkt in einem Inertialsystem. Für eine Rundreise von A nach A ist in irgend einem Zeitintervall $\beta \neq 0$ und aus (16) folgt dann $\Delta\tau < \Delta t$. Somit gilt auch in der Relativitätstheorie der Grundsatz „Bewegung hält jung!“, zumindest wenn man sich mit sehr großen Geschwindigkeiten bewegt.
Der Zusammenhang $\Delta\tau < \Delta t$ wird in der Literatur oft als „Zwillingsparadoxon“ bezeichnet (Genaueres in den Aufgaben).

Als Beispiel betrachten wir eine gleichförmige Kreisbewegung mit dem Radius r und der Winkelgeschwindigkeit ω in einem Inertialsystem. Aus

$$v = \frac{2r\pi}{T} = \omega r = \text{konst.} \tag{20}$$

folgt mit $\Delta t = T$

$$\Delta\tau = \int_0^T \sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{d}t = T \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega^2\,r^2}{c^2}} \tag{21}$$

Speziell für die Bewegung der Erde um die Sonne gilt $v \approx 30\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ und damit

$$\Delta\tau = T \cdot \sqrt{1-10^{-8}} \approx T \cdot \left(1 - 5 \cdot 10^{-9}\right)$$

Der Unterschied der im Inertialsystem gemessenen Umlaufdauer T und dem im Erdsystem gemessenen Jahr $\Delta\tau$ ist

$$\delta = T - \Delta\tau = 1\,\mathrm{a} \cdot 5 \cdot 10^{-9} = \underline{\underline{0{,}158\,\mathrm{s}}}$$

1.4 Das Additionstheorem

Ein Inertialsystem S′ bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v parallel zur $x-$Achse relativ zu einem Inertialsystem S. Relativ zu S′ bewegt sich ein Körper K mit der Geschwindigkeit u'. Mit der Kettenregel und der Lorentztransformation (9) folgt

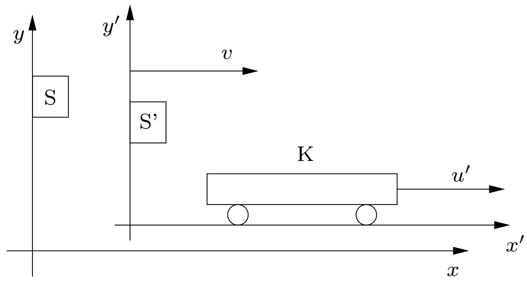


Abb.7 Geschwindigkeitsaddition

$$u = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'} \cdot \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\gamma\,(x' + v\,t')\right) \cdot \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \gamma\,(u' + v)\,\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}\,x'\right)\right) = \gamma\left(1 + \frac{v\,u'}{c^2}\right) \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}} = \frac{1}{\gamma\,\left(1 + \frac{v\,u'}{c^2}\right)} \tag{24}$$

Aus (22) und (24) folgt

$$\boxed{u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'\,v}{c^2}}} \tag{25}$$

Auflösen nach u' ergibt

$$\boxed{u' = \frac{u - v}{1 - \frac{u\,v}{c^2}}} \tag{26}$$

Allgemein lautet die *Einstein-Addition* für Geschwindigkeiten

$$\boxed{v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1\,v_2}{c^2}}} \tag{27}$$

Beispiele:

$$v \oplus c = \frac{v + c}{1 + \frac{v\,c}{c^2}} = c$$

$$c \oplus c = \frac{c + c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = c$$

1.5 Der Dopplereffekt

Ein Sender S sendet im zeitlichen Abstand Δt_s (gemessen in seinem Ruhsystem) Lichtsignale zu einem Empfänger E, der sich mit der Geschwindigkeit v relativ zu S bewegt. Im Empfängersystem treffen die Lichtsignale im zeitlichen Abstand Δt_e bei E ein. Gleichung der Weltlinie von Signal 2 in S:

$$\frac{x - 0}{t - \Delta t_s} = c \quad \Longrightarrow$$

$$2:\ x = c\,t - c \cdot \Delta t_s \tag{28}$$

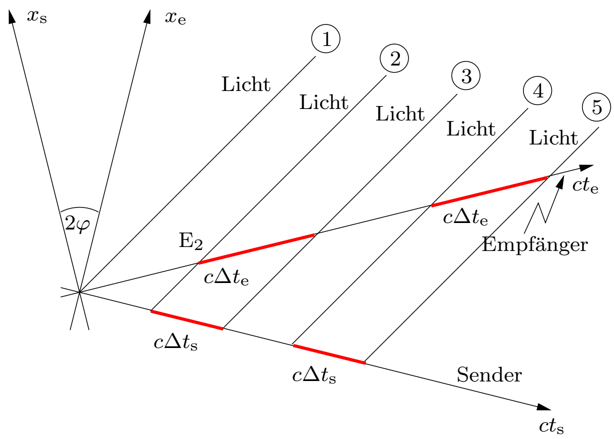


Abb.8 Mehrere Lichtsignale

Die Gleichung des Empfängers lautet

$$\mathrm{E}: x = v\,t \tag{29}$$

Das Ereignis E_2 = „2 trifft E“ ist der Schnittpunkt der Weltlinien von E und 2 :

$$c\,t - c\cdot\Delta t_s = v\,t \tag{30}$$

oder nach Division durch c

$$t - \Delta t_s = \beta\,t \tag{31}$$

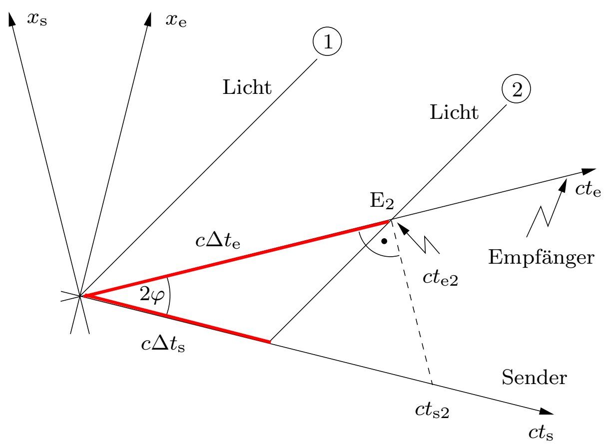


Abb.9 Entfernung von S und E

Auflösen nach t ergibt für die S-Koordinate von E_2

$$t = t_{s2} = \frac{\Delta t_s}{1-\beta} \tag{32}$$

Abb. 9 entnimmt man für die E-Koordinate von E_2

$$\Delta t_e = t_{e2} = t_{s2}\cdot\cos 2\varphi = t_{s_2}\sqrt{1-\beta^2} = \Delta t_s\cdot\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} = \Delta t_s\cdot\sqrt{\frac{(1-\beta)(1+\beta)}{(1-\beta)^2}} \tag{33}$$

oder endgültig für den Fall, dass sich S und E *voneinander entfernen*:

$$\Delta t_e = \Delta t_s\cdot\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tag{34}$$

Ein Vergleich von Abb. 9 und Abb. 10 zeigt für die Annäherung von Sender und Empfänger

$$\Delta t_s = \Delta t_e\cdot\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tag{35}$$

und damit

$$\Delta t_e = \Delta t_s\cdot\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{36}$$

Die Zusammenfassung von (34) und (36) liefert

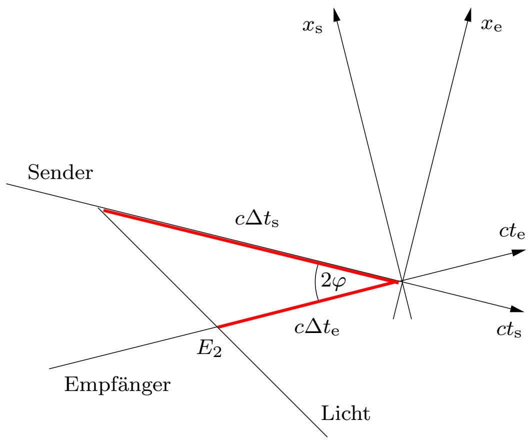


Abb.10 Annäherung von S und E

$$\boxed{\Delta t_e = \Delta t_s\cdot\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \beta > 0 & \text{für Entfernung} \\ \beta < 0 & \text{für Annäherung} \end{cases}} \tag{37}$$

((**Dopplerformel**))

Der Faktor

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}} \tag{38}$$

heißt *Dopplerfaktor.*

$$\boxed{\begin{array}{ll} k > 1 & \text{für Entfernung} \\ k < 1 & \text{für Annäherung} \end{array}} \tag{39}$$

Die Auflösung von (38) nach β ergibt

$$\boxed{\beta = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}} \tag{40}$$

Für die Frequenzen und Wellenlängen einer Welle, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet (elektromagnetische Welle oder Gravitationswelle) folgt aus der Dopplerformel mit $f = \frac{1}{\Delta t}$ und $\lambda = \frac{c}{f}$:

$$\boxed{f_e = \frac{f_s}{k} = f_s \cdot \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}} \tag{41}$$

und

$$\boxed{\lambda_e = k \cdot \lambda_s = \lambda_s \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}} \tag{42}$$

Entfernung:	$k > 1$	$\Longrightarrow$	$f_e < f_s$	und	$\lambda_e > \lambda_s$	$\Longrightarrow$	*Rotverschiebung*
Annäherung:	$k < 1$	$\Longrightarrow$	$f_e > f_s$	und	$\lambda_e < \lambda_s$	$\Longrightarrow$	*Blauverschiebung*

1.6 Die Beschleunigung in der SRT

Ein Inertialsystem S' bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v parallel zur $x-$Achse relativ zu einem Inertialsystem S. Relativ zu S' bewegt sich ein Körper K mit der Geschwindigkeit u', auch parallel zu den $x-$Achsen. a und a' seien die $x-$Komponeneten der Beschleunigung des Körpers K in S bzw. S'.

$$a' = \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = a \cdot \frac{1-\beta^2}{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \tag{43}$$

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{1-\frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{uv}{c^2}} \tag{44}$$

Aus (43) und (44) folgt

$$\boxed{a' = a \cdot \frac{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^3}} \tag{45}$$

Da sich S mit $-v$ relativ zu S' bewegt, erhält man die Umkehrformel aus (45) durch Austausch der gestrichenen mit den ungestrichenen Größen und Ersetzen von v durch $-v$ (Relativitätsprinzip!):

$$\boxed{a = a' \cdot \frac{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^3}} \tag{46}$$

Genauso hätte man auch die Umkehrformeln der Lorentztransformation und des Additionstheorems finden können, unsere direkte Herleitung ist aber eine weitere Bestätigung des Relativitätsprinzips.

Für eine Bewegung mit konstantem a in S gilt $u = u_0 + a \cdot t$. Aus (45) folgt dann, dass a' **nicht** konstant ist:

$$a' = a \cdot \frac{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1-\frac{(u_0+a\cdot t)v}{c^2}\right)^3} \tag{47}$$

Ein Bezugssystem, in dem ein beschleunigter Körper K ruht, ist kein Inertialsystem. Zu jeder Zeit t gibt es aber ein Inertialsystem $\overline{\mathrm{S}}$, in dem die Geschwindigkeit $\overline{u}$ von K gleich Null ist, das sogenannte „momentane Ruhsystem“ von K. Die Beschleunigung $\overline{a}$ von K im jeweiligen momentanen Ruhsystem nennt man die *Eigenbeschleunigung* von K. Eine Rakete mit konstanter Schubkraft zum Beispiel hat eine konstante Eigenbeschleunigung. Die Geschwindigkeit $\overline{v}$ des momentanen Ruhsystems $\overline{\mathrm{S}}$ relativ zu einem Inertialsystem S ist gleich der Geschwindigkeit u von K relativ zu S. Mit

$$\overline{u} = 0 \text{ und } \overline{v} = u \tag{48}$$

folgt dann aus (46) ($u' \mathrel{\widehat{=}} \overline{u}$)

$$a = \overline{a} \cdot \frac{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+\frac{0\cdot v}{c^2}\right)^3} = \overline{a} \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\frac{3}{2}} \tag{49}$$

Ein Körper K mit der Eigenbeschleunigung $\overline{a}$ und der Geschwindigkeit u relativ zu S hat in S die Beschleunigung

$$\boxed{a = \overline{a} \cdot \left(1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{50}$$

Die Bewegungsgleichung für K bei bekanntem $\overline{a}(t)$ lautet wegen $a = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \overline{a}(t) \cdot \left(1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \tag{51}$$

mit der Lösung

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\left(1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \overline{a}(t)\,\mathrm{d}t \tag{52}$$

Das Integral der linken Seite ist elementar berechenbar (Beweis!):

$$\frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \int \overline{a}(t)\,\mathrm{d}t =: f(t) \tag{53}$$

Auflösen nach u ergibt

$$u(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{1+\dfrac{f(t)^2}{c^2}}} \tag{54}$$

Für eine Rakete mit konstanter Eigenbeschleunigung $\overline{a}$ ist $f(t) = \overline{a} \cdot t + C$ und die Lösung lautet

$$u(t) = \frac{\overline{a}\,t + C}{\sqrt{1+\dfrac{(\overline{a}\,t+C)^2}{c^2}}} \tag{55}$$

Die Integrationskonstante bestimmen wir für den Fall $u(0) = 0$ aus

$$u(0) = \frac{\overline{a}\cdot 0 + C}{\sqrt{1+\dfrac{(\overline{a}\cdot 0+C)^2}{c^2}}} = \frac{C}{\sqrt{1+\dfrac{C^2}{c^2}}} = 0 \tag{56}$$

zu $C = 0$, d.h.

$$u(t) = \frac{\overline{a}\,t}{\sqrt{1+\dfrac{\overline{a}^2\,t^2}{c^2}}} \tag{57}$$

2 Reise mit konstanter Eigenbeschleunigung

2.1 Einschub: Hyperbolische Funktionen

$$\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) \qquad \operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \tag{58}$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) \qquad \operatorname{arcCosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \tag{59}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh x = \cosh x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x = \sinh x \tag{60}$$

$$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x \tag{61}$$

2.2 Kinematik

System S (Erde), S' ist das momentane Ruhsystem der Rakete.
Geschwindigkeit der Rakete in S: $v = \beta c$
Anfangsbedingungen: Start zur Zeit $t = 0$ mit $v = 0$ bei $x = 0$.
Es wird eine konstante Eigenbeschleunigung g vorausgesetzt. Die Beschleunigung in S ist dann(siehe (50))

$$a = \dot{v} = c\dot{\beta} = g \cdot \left(1-\beta^2\right)^{\frac{3}{2}} = g \cdot \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \tag{62}$$

Lösung der Differentialgleichung (62):

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{g}{c}\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{gt}{c} + C \tag{63}$$

Mit $\beta(0) = 0$ folgt $C = 0$ und damit

$$\beta(t) = \frac{gt}{\sqrt{g^2t^2 + c^2}} \tag{64}$$

Lösen von (64) nach t liefert die Zeit zum Erreichen der Geschwindigkeit $v = \beta c$ in S:

$$t(\beta) = \frac{c\beta}{g\sqrt{1-\beta^2}} \tag{65}$$

Nützliche Beziehungen:

$$\frac{g^2t^2}{c^2} = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}, \qquad 1 + \frac{g^2t^2}{c^2} = \frac{1}{1-\beta^2} \tag{66}$$

In der Zeit t legt die Rakete den Weg

$$x(t) = \int\limits_0^t v(t)\,\mathrm{d}t = c\int\limits_0^t \beta(t)\,\mathrm{d}t = \frac{c\left(\sqrt{g^2t^2+c^2} - c\right)}{g} = \frac{c^2}{g}\cdot\left(\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}} - 1\right) \tag{67}$$

zurück.
Den Ort x erreicht die Rakete zur Zeit t (Lösen von (67)):

$$t(x) = \frac{\sqrt{gx(gx+2c^2)}}{gc} = \frac{1}{c}\sqrt{x\left(x + \frac{2c^2}{g}\right)} \tag{68}$$

Aus (64) und (68) folgt

$$\beta(x) = \sqrt{\frac{gx(gx+2c^2)}{gx(gx+2c^2)+c^4}} \tag{69}$$

Eigenzeit τ der Rakete in Abhängigkeit von der Zeit t in S:

$$\tau(t) = \int_0^t \sqrt{1-\beta(t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{c}{g} \cdot \ln\left(\frac{gt}{c} + \sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}\right) = \frac{c}{g} \operatorname{arcsinh} \frac{gt}{c} \tag{70}$$

Auflösen nach t:

$$t(\tau) = \frac{c}{2g}\left(\mathrm{e}^{\frac{g\tau}{c}} - \mathrm{e}^{-\frac{g\tau}{c}}\right) = \frac{c}{g} \sinh \frac{g\tau}{c} \tag{71}$$

Aus (66) und (70) folgt:

$$\tau(\beta) = \frac{c}{2g} \cdot \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \tag{72}$$

(68) in (70):

$$\tau(x) = \frac{c}{g} \ln\left[\frac{1}{c^2}\left(c^2 + xg + \sqrt{g^2x^2 + 2gc^2x}\right)\right] = \frac{c}{g} \operatorname{arcCosh}\left(1 + \frac{gx}{c^2}\right) \tag{73}$$

Auflösen nach x:

$$x(\tau) = \frac{c^2}{g}\left(-1 + \cosh\frac{g\tau}{c}\right) \tag{74}$$

2.3 Treibstoffmasse bei Photonenrakete

Impuls der Rakete: p

$$p = \gamma m v \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{75}$$

Da m nicht konstant ist, ist $\dot{m} \neq 0$:

$$\dot{p} = \dot{m}\gamma v + m\dot{\gamma v} = \dot{m}\gamma v + \frac{m\dot{v}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{76}$$

Nach (62) ist aber wegen $a = \dot{v}$:

$$\frac{\dot{v}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} = g \tag{77}$$

Also:

$$\dot{p} = \dot{m}\gamma v + mg \tag{78}$$

Die Masse $-\mathrm{d}m$ ($\mathrm{d}m < 0$) erzeugt den Photonenimpuls $-\mathrm{d}m(-c) = c\mathrm{d}m$ (< 0, da nach links), aber im momentanen Ruhsystem der Rakete (Entstehungsort der Photonen). Nach Dopplerformel ist ihre Frequenz im Erdsystem

$$f_\mathrm{E} = f\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = f\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \tag{79}$$

Damit ist der Impuls der Photonen im Erdsystem

$$\mathrm{d}p_\mathrm{E} = c\mathrm{d}m\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \tag{80}$$

Impulssatz:

$$\mathrm{d}p + \mathrm{d}p_\mathrm{E} = 0 \quad \text{oder} \quad \dot{p} + \dot{p}_\mathrm{E} = 0 \tag{81}$$

$$\dot{p}_\mathrm{E} = \frac{\mathrm{d}p_\mathrm{E}}{\mathrm{d}t} = c\dot{m}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \tag{82}$$

Endgültig:

$$\dot{m}\gamma v + mg = -c\dot{m}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \tag{83}$$

Umformen führt auf

$$\dot{m} = -\frac{mg}{c}\sqrt{1-\beta^2} \tag{84}$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = -\frac{g}{c}\sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{d}t \tag{85}$$

Aus (62) folgt

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{g(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{86}$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = -\frac{\mathrm{d}v}{c(1-\beta^2)} = -\frac{\mathrm{d}\beta}{1-\beta^2} \tag{87}$$

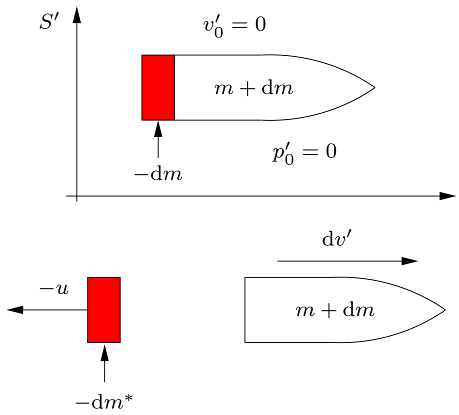
$$\ln m = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} + C = \ln\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} + C \tag{88}$$

$C = \ln m(0) = lm_0 \quad \Longrightarrow$

$$\ln\frac{m}{m_0} = \ln\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{m_0}{m} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = k} \tag{89}$$

2.4 Treibstoffmasse bei Teilchenantrieb

Einfachste Sichtweise im momentanen Ruhsystem (Schwerpunktsystem) S' der Rakete (das Inertialsystem, in dem die Rakete momentan ruht, d.h $v_{S'S} = v(t)$). Mit



$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_u^2}}, \quad \beta_u = \frac{u}{c} \tag{90}$$

lautet der Energiesatz:

$$-\gamma_u \mathrm{d}m^* c^2 + \underbrace{\frac{m+\mathrm{d}m}{2}\mathrm{d}v^2}_{\approx 0} + (m+\mathrm{d}m)c^2 = mc^2$$

woraus folgt

$$-\gamma_u \mathrm{d}m^* = -\mathrm{d}m \tag{91}$$

Damit wird der Impulssatz

$$-\gamma_u \mathrm{d}m^* \cdot (-u) + (m+\mathrm{d}m)\mathrm{d}v' = 0 \tag{92}$$

zu

$$-\mathrm{d}m \cdot (-u) + (m+\mathrm{d}m)\mathrm{d}v' = 0 \tag{93}$$

$$u\mathrm{d}m + m\mathrm{d}v' + \underbrace{\mathrm{d}m\mathrm{d}v'}_{\approx 0} = 0 \tag{94}$$

$$\Longrightarrow \quad m\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}\tau} + u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{95}$$

Die Eigenbeschleunigung der Rakete ist also wie im klassischen Fall

$$\overline{a} = g = -\frac{u}{m}\cdot\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau} \tag{96}$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = -\frac{g}{u}\,\mathrm{d}\tau \quad \Longrightarrow \quad \ln\frac{m}{m_0} = -\frac{g}{u}\tau \tag{97}$$

Aus (72) folgt

$$\ln\frac{m}{m_0} = -\frac{c}{2u}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} \tag{98}$$

$$\boxed{\frac{m_0}{m} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{c}{2u}} = k^{\frac{c}{u}}} \tag{99}$$

2.5 Näherungen

Wegen

$$\frac{2c^2}{g} = 4{,}58\cdot 10^{15}\,\mathrm{m} = 0{,}48\,\mathrm{LJ} \quad \text{und} \quad \frac{c}{g} \approx 3\cdot 10^7\,\mathrm{s} \approx 1\,\mathrm{a} \tag{100}$$

gelten folgende Näherungen für $x \gg 1\,\mathrm{LJ}$ bzw. $t \gg 1\,\mathrm{a}$:

$$\beta(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^2}{g^2t^2}}} \approx 1 - \frac{c^2}{2g^2t^2} \tag{101}$$

$$x(t) \approx ct \tag{102}$$

$$\beta(x) \approx \sqrt{\frac{g^2x^2}{g^2x^2+c^4}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{c^4}{g^2x^2}}} \approx 1 - \frac{c^4}{2g^2x^2} \tag{103}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2(1-\beta)}} \approx \frac{gt}{c} \approx \frac{gx}{c^2} \tag{104}$$

$$k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \approx \sqrt{\frac{2}{1-\beta}} \approx 2\gamma \tag{105}$$

$$\tau(x) \approx \frac{c}{g}\ln\frac{2gx}{c^2} = 0{,}97\,\mathrm{a}\cdot\ln\frac{x}{0{,}48\,\mathrm{LJ}} \tag{106}$$

2.6 Ein Flug zu den Sternen

Um am Ziel in der Entfernung x sicher zu landen, muss bei $\frac{x}{2}$ mit dem Bremsen begonnen werden. Die Eigenzeit für die ganze Reise ist dann

$$\tau^*(x) = 2\tau\left(\frac{x}{2}\right) \approx \frac{2c}{g}\ln\frac{gx}{c^2} = 1{,}94\,\mathrm{a}\cdot\ln\frac{x}{0{,}97\,\mathrm{LJ}} \tag{107}$$

$$\beta_{\max} = \beta\left(\frac{x}{2}\right) \approx 1 - \frac{2c^4}{g^2x^2}, \qquad \gamma_{\max} = \gamma\left(\frac{x}{2}\right) \approx \frac{gx}{2c^2}, \qquad k_{\max} \approx 2\gamma_{\max} = \frac{gx}{c^2} \tag{108}$$

Um die Nutzlast m ans Ziel zu bringen, ist die Startmasse

$$m_0 = m\left(k_{\max}^{\frac{c}{u}}\right)^2 \approx m\left(\frac{gx}{c^2}\right)^{\frac{2c}{u}} \tag{109}$$

nötig ($u = c$ für die Photonenrakete).

Mit chemischen Treibstoffen ist $u = 6000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nicht zu überbieten. Sogar eine Reise zum Mond ist mit konstanter Beschleunigung damit nicht möglich, wie folgende Tabelle zeigt.

Ziel	$\frac{x}{\mathrm{LJ}}$	$\frac{\tau^*}{\mathrm{a}}$	$\frac{m_0}{m}$ $(u=c)$	$\frac{m_0}{m}$ $(u = 6000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})$
Mond	384000 km	3,5 h	1,0004	$7{,}7\cdot 10^{8}$
α-Centauri	4	3,46	26,3	$4\cdot 10^{70\,967}$
Andromeda-Galaxie	$2\cdot 10^{6}$	28,2	$4{,}3\cdot 10^{12}$	$2{,}4\cdot 10^{631\,061}$
Rand des sichtbaren Universums	$46\cdot 10^{9}$	47,6	$2{,}3\cdot 10^{21}$	$2{,}4\cdot 10^{1{,}066\,932}$