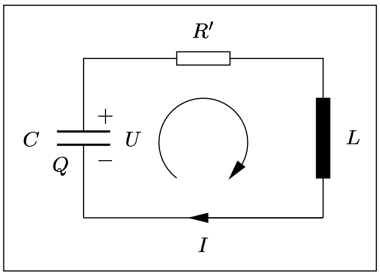
R. Reindl

Aufgabe 1

Da $R \gg R'$, kann näherungsweise mit nebenstehender Schaltung gearbeitet werden. Mit der Maschenregel folgt



$$U + R'\,I + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L\,I) = 0 \tag{1.1}$$

oder

$$U + R'\,I + L\,\dot{I} + \dot{L}\,I = 0 \tag{1.2}$$

Für ein unendlich langes Paralleldrahtsystem ist die Induktivität pro Länge eine Konstante, d.h. für nicht zu kleine x wächst die Induktivität des Stromkreises linear mit x:

$$L = L_0 + L'\,x \tag{1.3}$$

Wenn auch x_0 nicht zu klein ist, gilt näherungsweise

$$L(-x_0) = 0 \approx L_0 - L'\,x_0 \tag{1.4}$$

und damit

$$L' \approx \frac{L_0}{x_0} \tag{1.5}$$

Ist F die Kraft auf die Drahtbrücke, dann ist die Änderung der mechanischen Energie

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{mech}} = F\,\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

Die mechanische Leistung ist also

$$P_{\mathrm{mech}} = \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t} = F \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F\,v \tag{1.7}$$

Die Energie des elektrischen Feldes im Kondensator ist

$$W_{\mathrm{C}} = \frac{C}{2}\,U^2\,, \tag{1.8}$$

die im Magnetfeld von I gespeicherte Energie ist

$$W_{\mathrm{L}} = \frac{L}{2}\,I^2\,. \tag{1.9}$$

Nach dem Energiesatz ist die gesamte umgesetzte Leistung

$$P = \dot{W}_{\mathrm{C}} + \dot{W}_{\mathrm{L}} + R'\,I^2 + F\,v = 0 \tag{1.10}$$

Mit der Ketten- und Produktregel folgt aus (1.8), (1.9) und (1.10)

$$P = C\,U\,\dot{U} + \frac{1}{2}\,\dot{L}\,I^2 + L\,I\,\dot{I} + R'\,I^2 + F\,v = 0 \tag{1.11}$$

$$U = \frac{Q}{C} \quad \Longrightarrow \quad \dot{U} = \frac{I}{C} \quad \Longrightarrow \quad C\,U\,\dot{U} = U\,I \tag{1.12}$$

Mit (1.12) und (1.2) folgt aus (1.11)

$$(-R'\,I - L\,\dot{I} - \dot{L}\,I)\,I + \frac{1}{2}\,\dot{L}\,I^2 + L\,I\,\dot{I} + R'\,I^2 + F\,v = 0 \tag{1.13}$$

und daraus

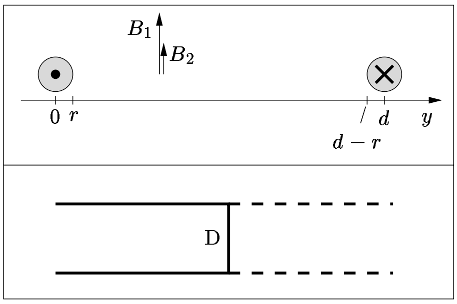
$$F = \frac{\dot{L}\,I^2}{2\,v} \tag{1.14}$$

Mit $\dot{L} = L'\,\dot{x} = L'\,v$ erhält man schließlich

$$\boxed{F = \frac{1}{2}\,L'\,I^2 \approx \frac{L_0}{2\,x_0} \cdot I^2} \tag{1.15}$$

Anderer Lösungsweg:

Wir berechnen zunächst das Feld zwischen den Drähten eines unendlich langen Paralleldrahtsystems:



$$B^*(y) = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,y} + \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,(d-y)} \tag{1.16}$$

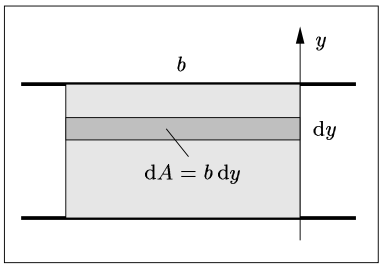
Am Ort der Drahtbrücke ist das tatsächliche Feld dann (unter Vernachlässigung des von der Brücke selbst erzeugten Feldes) gleich dem Feld einer „halben Doppelleitung“:

$$B(y) = \frac{1}{2}\,B^*(y) = \frac{\mu_0\,I}{4\,\pi}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{d-y}\right) \tag{1.17}$$

Die Kraft auf die Drahtbrücke ist dann

$$F = I \cdot \int\limits_r^{d-r} B(y)\,\mathrm{d}y = \frac{\mu_0\,I^2}{4\,\pi}\int\limits_r^{d-r}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{d-y}\right)\,\mathrm{d}y = \frac{\mu_0\,I^2}{2\,\pi} \cdot \ln\frac{d-r}{r} \tag{1.18}$$

Der magnetische Fluss durch die Fläche der Länge b zwischen den Drähten ist (unter Vernachlässigung des Feldes in den Drähten)



$$\Phi = \int B^*\,\mathrm{d}A = 2\int\limits_r^{d-r} B(y)\,b\,\mathrm{d}y \overset{(1.18)}{=} \frac{2\,b\,F}{I} \tag{1.19}$$

Die Induktivität L' pro Länge des Paralleldrahtsystems ist also

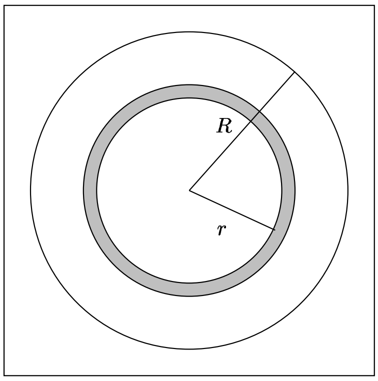
$$L' = \frac{L}{b} = \frac{\Phi}{b\,I} = \frac{2\,F}{I^2} = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln\frac{d-r}{r} \tag{1.20}$$

und damit

$$\boxed{F = \frac{1}{2}\,L'\,I^2} \tag{1.21}$$

Aufgabe 2

Mit $\sigma = \frac{M}{R^2 \pi}$ (Masse pro Fläche) berechnet sich das Trägheitsmoment einer Kreisscheibe zu



$$I = \int_0^M r^2 \, \mathrm{d}m = \int_0^R \sigma \cdot 2 \, r \, \pi \cdot r^2 \, \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{2 \, M}{R^2} \int_0^R r^3 \, \mathrm{d}r = \frac{M}{2} \, R^2 \tag{2.1}$$

Da sich die Scheibe nur um die vertikale Achse drehen kann, sind alle auftretenden Drehimpulse parallel und man kann mit skalaren Größen rechnen (Winkelgeschwindigkeiten im Uhrzeigersinn positiv). Die Winkelgeschwindigkeit der Personen sei ω, die der Scheibe ω', alles von einem nichtrotierenden Inertialsystem aus betrachtet. Da der Gesamtdrehimpuls L_{ges} zur Zeit $t = 0$ verschwindet, muss er zu allen Zeiten null sein:

$$L_{\mathrm{ges}} = 2 \, m \, v \, R + I \, \omega' = 2 \, m \, \omega \, R^2 + \frac{M}{2} \, R^2 \, \omega' = 0 \tag{2.2}$$

d.h.

$$\omega' = -\frac{4 \, m \, \omega}{M} \tag{2.3}$$

Im System der Scheibe ist die Winkelgeschwindigkeit der Personen

$$\Omega = \omega + |\omega'| = \omega \cdot \left(1 + \frac{4 \, m}{M} \right) \tag{2.4}$$

Der Drehwinkel im System der Scheibe ist

$$\int_0^T \Omega \, \mathrm{d}t = \left(1 + \frac{4 \, m}{M} \right) \cdot \int_0^T \omega \, \mathrm{d}t = 2 \, \pi \tag{2.5}$$

Im Inertialsystem ist der von den Personen zurückgelegte Winkel

$$\varphi = \int_0^T \omega \, \mathrm{d}t = \frac{2 \, \pi}{1 + \frac{4 \, m}{M}} = \frac{2 \, \pi}{1 + \frac{4 \cdot 60 \, \mathrm{kg}}{360 \, \mathrm{kg}}} = \frac{6}{5} \, \pi \approx \underline{\underline{216^\circ}} \tag{2.6}$$

Aufgabe 3

(a) Beachte: $\mathrm{d}M$ und damit auch $\dot{M}$ sind negativ (M wird kleiner), $\mathrm{d}M_\mathrm{V}$ dagegen ist positiv.

$$\mathrm{d}E = -L_\mathrm{S}\,\mathrm{d}M + L_\mathrm{V}\,\mathrm{d}M_\mathrm{V} \tag{3.1}$$

$$\dot{E} = -L_\mathrm{S}\,\dot{M} + L_\mathrm{V}\,\dot{M}_\mathrm{V} \tag{3.2}$$

$$\dot{M} = -\frac{\dot{E}}{L_\mathrm{S}} + \frac{L_\mathrm{V}}{L_\mathrm{S}}\,\dot{M}_\mathrm{V} \tag{3.3}$$

Durch Erhöhen der Verdampfungsgeschwindigkeit $\dot{M}_\mathrm{V}$ wird die Schmelzrate $|\dot{M}|$ verringert.

(b) 1. $\dot{M}_\mathrm{V} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \dot{M}_1 = -\dfrac{\dot{E}}{L_\mathrm{S}}$

2. $\mathrm{d}M_\mathrm{V} = -\mathrm{d}M \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}E = -L_\mathrm{S}\,\mathrm{d}M - L_\mathrm{V}\,\mathrm{d}M \quad\Longrightarrow\quad \dot{E} = -(L_\mathrm{S} + L_\mathrm{V})\,\dot{M}$

$$\dot{M}_2 = -\frac{\dot{E}}{L_\mathrm{S} + L_\mathrm{V}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\dot{M}_1}{\dot{M}_2} = \frac{L_\mathrm{S} + L_\mathrm{V}}{L_\mathrm{S}} = \underline{\underline{7{,}85}}$$

(c) Mit $\dot{M}_\mathrm{V} = -f\,\dot{M}$ folgt aus (3.2)

$$\dot{E} = -L_\mathrm{S}\,\dot{M} - f\,L_\mathrm{V}\,\dot{M} \tag{3.4}$$

und damit

$$\dot{M} = -\frac{\dot{E}}{L_\mathrm{S} + f\,L_\mathrm{V}} = -\frac{\dot{E}}{L} \quad \text{mit} \quad L = L_\mathrm{S} + f\,L_\mathrm{V} \tag{3.5}$$

Mit der Temperaturdifferenz ΔT, der Wärmeleitzahl κ, der Eismasse $M = \varrho\,R^2\,\pi\,h$ und der Kontaktfläche (Deckfläche wegen Luftschicht vernachlässigen)

$$A = R^2\,\pi + 2\,R\,\pi\,h = R^2\,\pi + \frac{2}{\varrho\,R}\,M \tag{3.6}$$

gilt

$$\dot{E} = \kappa\,\Delta T\,A = \kappa\,\Delta T\,\left(R^2\,\pi + \frac{2}{\varrho\,R}\,M\right) \tag{3.7}$$

Aus (3.5) und (3.7) folgt

$$\dot{M} = -\frac{\dot{E}}{L} = -\frac{\kappa\,\Delta T}{L}\,\left(R^2\,\pi + \frac{2}{\varrho\,R}\,M\right) \tag{3.8}$$

Mit

$$a = \frac{\kappa\,\Delta T\,R^2\,\pi}{L} \quad \text{und} \quad b = \frac{2\,\kappa\,\Delta T}{\varrho\,L\,R} \tag{3.9}$$

gilt

$$\dot{M} = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -a - b\,M \tag{3.10}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}M}{a + b\,M} = -\int \mathrm{d}t \tag{3.11}$$

$$\frac{1}{b}\,\ln(a+b\,M(t)) = -t + C' \tag{3.12}$$

$$a+b\,M(t) = e^{-bt+C'} = C\cdot e^{-bt} \tag{3.13}$$

$$t=0 \quad\Longrightarrow\quad a+b\,M(0) = a+b\,M_0 = C \tag{3.14}$$

$$M(t) = \frac{a+b\,M_0}{b}\,e^{-bt} - \frac{a}{b} \tag{3.15}$$

$$\boxed{M(t) = M_0\,e^{-bt} - \frac{a}{b}\left(1-e^{-bt}\right)} \tag{3.16}$$

mit

$$M_0 = \varrho\,R^2\,\pi\,h_0 = 3{,}85\cdot 10^4\,\mathrm{kg} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} = \frac{\varrho\,R^3\,\pi}{2} = 6{,}73\cdot 10^3\,\mathrm{kg} \tag{3.17}$$

(d) Aus (3.15) folgt mit $M(t_{\frac{1}{2}}) = \dfrac{M_0}{2}$

$$t_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{b}\,\ln\frac{\frac{M_0}{2}+\frac{a}{b}}{M_0+\frac{a}{b}} \tag{3.18}$$

Einsetzen der Daten liefert

f	a	b	$t_{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{7}$	$7{,}37\cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$	$1{,}09\cdot 10^{-8}\,\frac{1}{\mathrm{s}}$	$5{,}06\cdot 10^7\,\mathrm{s} = 586\,\mathrm{d}$
0	$1{,}46\cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$	$2{,}16\cdot 10^{-8}\,\frac{1}{\mathrm{s}}$	$2{,}56\cdot 10^7\,\mathrm{s} = 296\,\mathrm{d}$

Aufgabe 4

Ist x die Auslenkung des Reagenzglases aus der Gleichgewichtslage, dann wirkt unter Vernachlässigung der Reibung die Kraft

$$F(x) = m\,\ddot{x} = -\varrho\, g\, A \cdot x = -D\, x \quad \text{mit} \quad D = \varrho\, g\, A \tag{4.1}$$

auf das Glas. Dabei ist A die Querschnittsfläche des Reagenzglases, $\varrho = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ die Dichte des Wassers und $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Aus

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{und} \quad T = \frac{2\,\pi}{\omega} \tag{4.2}$$

folgt mit $m = m_0 + k \cdot M$ (m_0 ist die Masse des Reagenzglases, M die Masse einer Büroklammer)

$$m = m_0 + M \cdot k = \alpha \cdot T^2 \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\varrho\, g\, A}{4\,\pi^2} \tag{4.3}$$

Der Graf von $m(k)$ ist eine Gerade mit der Steigung M und dem Achsenabschnitt $m_0 = m(0)$. Mit k Büroklammern misst man n Werte T_{ki} ($i \in \{1, ..., n\}$) der Schwingungsdauer. Der beste Wert für T_k ist der Mittelwert $\overline{T}_k$ der T_{ki} ($n \geqq 5$):

$$\overline{T}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_{ki} \tag{4.4}$$

mit dem mittleren Fehler

$$\Delta T_k = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(T_{ki} - \overline{T}_k\right)^2}{n(n-1)}} \tag{4.5}$$

Der beste Wert für die Masse m_k des Reagenzglases mit k Büroklammern ist dann

$$\overline{m}_k = \alpha\, \overline{T}_k^2 \tag{4.6}$$

Vorsicht: $\overline{m}_k$ ist nicht der Mittelwert der $m_{ki} = \alpha\, T_{ki}^2$, d.h.

$$\overline{m}_k = \alpha\, \overline{T}_k^2 = \alpha \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_{ki}\right)^2 \neq \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^{n} T_{ki}^2 \tag{4.7}$$

Wegen

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}T} = 2\,\alpha\, T \tag{4.8}$$

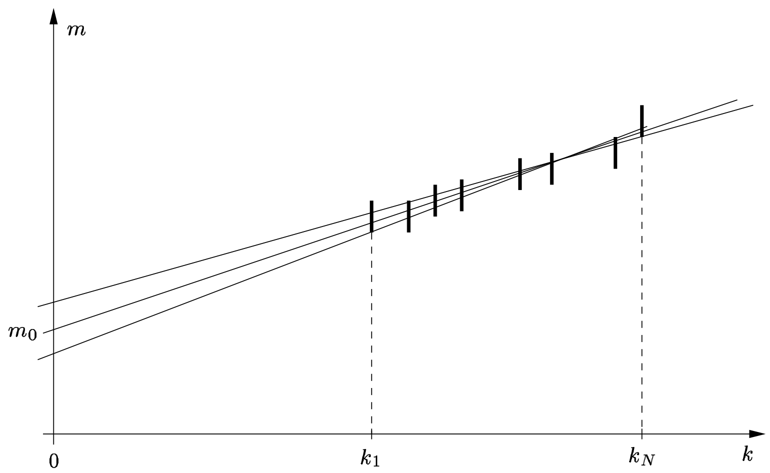
ist der mittlere Fehler von $\overline{m}_k$

$$\Delta m_k = 2\,\alpha\, \overline{T}_k\, \Delta T_k \tag{4.9}$$

Man zeichnet jetzt die Punkte $(\, k \,|\, \overline{m}_k \,)$ mit den Fehlerbalken der Höhe $2\,\Delta m_k$ in ein k-m-Diagramm und ermittelt grafisch die Geraden mit der kleinsten und der größten Steigung, die noch Punkte mit allen Fehlerbalken gemeinsam haben (mindestens 5 k-Werte):

$$\text{flachste Gerade:} \quad m = m_{0,\max} + M_{\min} \cdot k \tag{4.10}$$

$$\text{steilste Gerade:} \quad m = m_{0,\min} + M_{\max} \cdot k \tag{4.11}$$



Für die gesuchten Massen erhält man dann

$$m_0 = \underbrace{\frac{1}{2}\left(m_{0,\mathrm{max}} + m_{0,\mathrm{min}}\right)}_{\overline{m}_0} \pm \underbrace{\frac{1}{2}\left(m_{0,\mathrm{max}} - m_{0,\mathrm{min}}\right)}_{\Delta m_0} \tag{4.12}$$

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}\left(M_{\mathrm{max}} + M_{\mathrm{min}}\right)}_{\overline{M}} \pm \underbrace{\frac{1}{2}\left(M_{\mathrm{max}} - M_{\mathrm{min}}\right)}_{\Delta M} \tag{4.13}$$

Alternativ zur grafischen Methode kann auch die GAUSS'sche Ausgleichsgerade nach der Methode der „kleinsten Quadrate“ (lineare Regression) bestimmt werden. Mit den N Werten k_1 bis k_N für die Zahlen der verwendeten Büroklammern gilt mit der Abkürzung

$$\Delta = N \sum_{i=1}^{N} k_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} k_i\right)^2 \tag{4.14}$$

$$\overline{M} = \frac{N \sum_{i=1}^{N} k_i\, \overline{m}_{k_i} - \sum_{i=1}^{N} k_i \cdot \sum_{i=1}^{N} \overline{m}_{k_i}}{\Delta} \tag{4.15}$$

$$\overline{m}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \overline{m}_{k_i} \cdot \sum_{i=1}^{N} k_i^2 - \sum_{i=1}^{N} k_i \cdot \sum_{i=1}^{N} k_i\, \overline{m}_{k_i}}{\Delta} \tag{4.16}$$

Für die mittleren Fehler (Standardabweichungen) gilt

$$\Delta M = \sqrt{\frac{N \sum_{i=1}^{N} \left(\overline{m}_{k_i} - \overline{m}_0 - \overline{M}\, k_i\right)^2}{(N-2)\,\Delta}} \tag{4.17}$$

$$\Delta m_0 = \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{N} k_i^2\right) \sum_{i=1}^{N} \left(\overline{m}_{k_i} - \overline{m}_0 - \overline{M}\, k_i\right)^2}{(N-2)\,\Delta}} \tag{4.18}$$