

Aufgabe 1

- (a) Da die Anordnung axialsymmetrisch ist, steht \vec{E} senkrecht auf einer Mantelfläche A um die Achse und $E = |\vec{E}|$ ist auf dieser Mantelfläche konstant. Nach dem Gauß'schen Satz ist der Fluss durch eine geschlossene Fläche gleich der Ladung innerhalb dieser Fläche geteilt durch ϵ_0 . Mit der Länge l des Zylinders folgt

$$\Phi = E \cdot 2r\pi l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (1.2)$$

Mit $r_0 = \frac{d}{2}$ gilt

$$V(r) - V(r_0) = - \int_{r_0}^r E(r) dr \implies V(r) = V(r_0) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2r}{d} \quad (1.3)$$

Mit $R = \frac{D}{2}$ ist die Spannung zwischen Kathode und Anode

$$U = V(r_0) - V(R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D}{d} \quad (1.4)$$

Mit $Q = \lambda \cdot l$ folgt für die Kapazität pro Länge

$$\Gamma = \frac{C}{l} = \frac{Q}{Ul} = \frac{\lambda}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{D}{d}} \quad (1.5)$$

Aus (1.2) folgt mit $r = \frac{d}{2}$

$$\lambda_{\max} = \pi\epsilon_0 d E_b \quad (1.6)$$

und damit

$$U_{\max} = \frac{1}{2} d E_b \ln \frac{D}{d} = 3,45 \cdot 10^3 \text{ V} \quad (1.7)$$

(b) i) $E = \left(\frac{5,5}{0,318} \right)^{\frac{2}{3}} \text{ MeV} = 6,69 \text{ MeV} \implies N = \underbrace{\frac{E}{35 \text{ eV}}}_{\text{(Zahl der Ionenpaare)}} = 1,91 \cdot 10^5$

Da τ sehr klein gegen die Entladezeit ist, ist für kurze Zeit die Ladung $\Delta Q = N \cdot e$ zusätzlich auf den Kondensator,,platten“, d.h. an den Polen des Zählrohrs tritt die zusätzliche Spannung

$$\Delta U = \frac{\Delta Q}{C} = 6,8 \cdot 10^{-4} \text{ V} = 0,68 \text{ mV} \quad (1.8)$$

auf.

ii) Die Aktivität ist $A = 10 \cdot \frac{I}{N \cdot e} = 3,3 \cdot 10^2 \frac{1}{\text{s}}$.

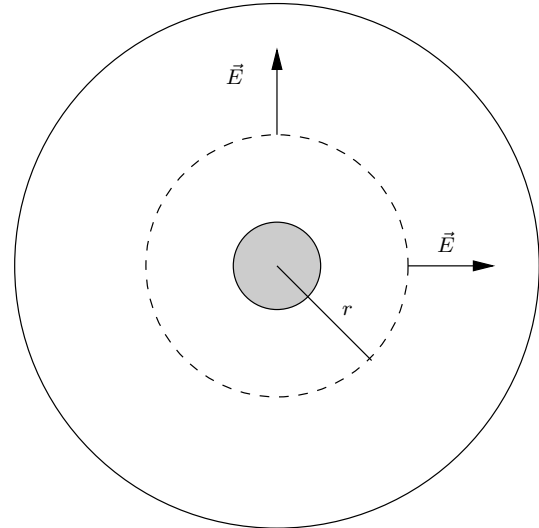


Abb.1.1

Aufgabe 2

Das Raumschiff rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 0,02618 \frac{1}{\text{s}}, \quad (2.1)$$

seine Rotationsgeschwindigkeit an der inneren Oberfläche ist

$$V = \omega R = 261,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (2.2)$$

(a) Die Fallbeschleunigung an der inneren Oberfläche ist

$$a = \omega^2 R = \frac{V^2}{R} = 6,85 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0,7 \cdot g_{\text{Erde}} \quad (2.3)$$

(b) Nebenstehender Abb. entnimmt man

$$(R - h)^2 = (R - v_{\perp} t)^2 + V^2 t^2 \quad (2.4)$$

und damit folgt exakt

$$h = R - \sqrt{(R - v_{\perp} t)^2 + V^2 t^2} \quad (2.5)$$

Mit $v_{\perp} \ll V$ gilt auch $v_{\perp} t \ll R$ und $V t \ll R$ oder

$$\frac{v_{\perp} t}{R} \ll 1 \quad \text{und} \quad \frac{(v_{\perp}^2 + V^2) t^2}{R^2} \ll 1 \quad (2.6)$$

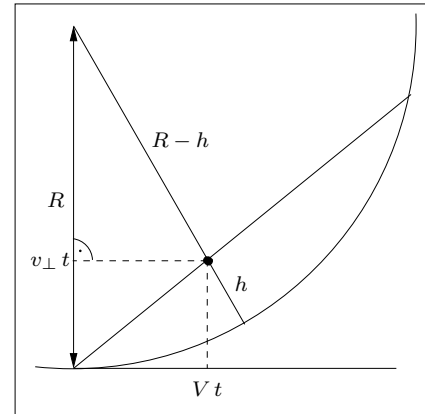


Abb.2.1

Mit der für $|x| \ll 1$ gültigen Näherung $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ folgt aus (2.5) und (2.6)

$$\begin{aligned} h &= R - R \sqrt{1 - \frac{2v_{\perp} t}{R} + \frac{(v_{\perp}^2 + V^2) t^2}{R^2}} \approx \\ &\approx R - R \left(1 - \frac{v_{\perp} t}{R} + \frac{(v_{\perp}^2 + V^2) t^2}{2R^2} \right) = \\ &= v_{\perp} t - \frac{(v_{\perp}^2 + V^2) t^2}{2R} \approx \\ &\approx v_{\perp} t - \frac{V^2 t^2}{2R} = v_{\perp} t - \frac{a}{2} t^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

(c) Nebenstehender Abb. (Blickrichtung wieder entlang der Zylinderachse) entnimmt man

$$\sin \varphi = \frac{v_{\perp}}{v} = \frac{v_{\perp}}{\sqrt{V^2 + v_{\perp}^2}} \quad (2.8)$$

Ist t_1 die gesamte Flugdauer, dann gilt

$$\overline{AB} = v t_1 = 2R \sin \varphi = \frac{2R v_{\perp}}{v} \quad (2.9)$$

$$t_1 = \frac{2R v_{\perp}}{v^2} \quad (2.10)$$

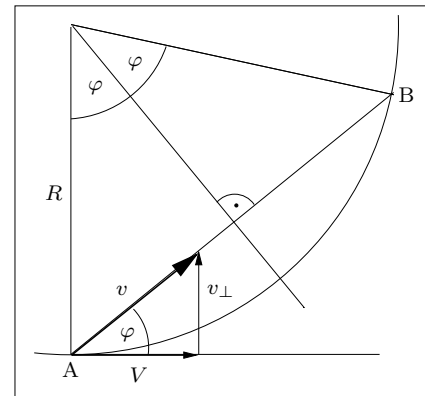


Abb.2.2

In der Zeit t_1 hat sich der Ball um den Winkel 2φ , der Werfer dagegen um den Winkel ωt_1 bewegt. Die Abweichung des Balls von der Ideallinie parallel zur Zylinderachse ist also

$$\delta = 2\varphi R - \omega t_1 R = 2\varphi R - V t_1 = 2R \left(\arcsin \frac{v_\perp}{v} - \frac{V v_\perp}{v^2} \right) \quad (2.11)$$

Mit der Näherung

$$\arcsin x \approx x + \frac{x^3}{6} \quad \text{für } |x| \ll 1 \quad (2.12)$$

folgt

$$\delta \approx 2R \left(\frac{v_\perp}{v} + \frac{v_\perp^3}{6v^3} - \frac{V v_\perp}{v^2} \right) = 2R \left[\frac{v_\perp}{v} \cdot \left(1 - \frac{V}{v} \right) + \frac{v_\perp^3}{6v^3} \right] \quad (2.13)$$

Mit

$$\begin{aligned} 1 - \frac{V}{v} &= 1 - \frac{V}{\sqrt{V^2 + v_\perp^2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_\perp^2}{V^2}}} \approx \\ &\approx 1 - \frac{1}{1 + \frac{v_\perp^2}{2V^2}} \approx 1 - \left(1 - \frac{v_\perp^2}{2V^2} \right) = \frac{v_\perp^2}{2V^2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

folgt aus (2.13) mit $v \approx V$ (wegen $v_\perp \ll V$)

$$\delta \approx 2R \left(\frac{v_\perp^3}{2vV^2} + \frac{v_\perp^3}{6v^3} \right) \approx 2R \left(\frac{v_\perp^3}{2V^3} + \frac{v_\perp^3}{6V^3} \right) = \frac{4}{3} R \left(\frac{v_\perp}{V} \right)^3 \quad (2.15)$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten ist $v_\perp = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 25^\circ = 21,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und damit $\delta = 7,0 \text{ m}$.

- (d) Nebenstehender Abb. (Blickrichtung wieder entlang der Zylinderachse) entnimmt man

$$(R - h)^2 + x^2 = R^2 \quad (2.16)$$

$$x = \sqrt{2Rh - h^2} \quad (2.17)$$

Die Startgeschwindigkeit des Balls in x -Richtung ist

$$V' = (R - h)\omega \quad (2.18)$$

die Flugzeit des Balls bis zum Aufprall

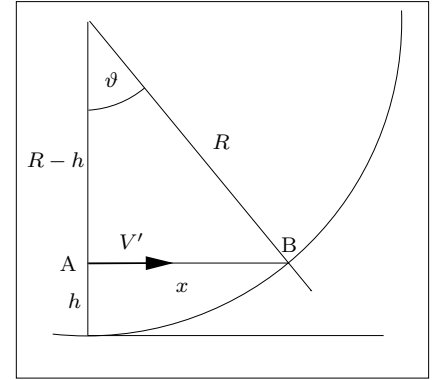


Abb.2.3

$$t = \frac{x}{V'} = \frac{\sqrt{2Rh - h^2}}{(R - h)\omega} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2h}{R}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{h}{2R}}}{1 - \frac{h}{R}} \quad (2.19)$$

Mit

$$\vartheta = \arcsin \frac{x}{R} = \arcsin \frac{\sqrt{2Rh - h^2}}{R} = \arcsin \left(\sqrt{\frac{2h}{R}} \cdot \sqrt{1 - \frac{h}{2R}} \right) \quad (2.20)$$

und den für $|x| \ll 1$ geltenden Näherungsformeln

$$\arcsin x \approx x + \frac{x^3}{6}, \quad \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}, \quad \frac{1}{1+x} \approx 1 - x \quad \text{und} \quad (1+x)^n \approx 1 + nx \quad (2.21)$$

folgt für die Abweichung des Aufprallorts vom Ort des Abschlags

$$\begin{aligned}
 \delta &= R \cdot (\vartheta - \omega t) = \\
 &= R \cdot \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{2h}{R}} \cdot \sqrt{1 - \frac{h}{2R}} \right) - \sqrt{\frac{2h}{R}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{h}{2R}}}{1 - \frac{h}{R}} \right] \approx \\
 &\approx R \cdot \left[\sqrt{\frac{2h}{R}} \cdot \left(1 - \frac{h}{4R} \right) + \frac{1}{6} \left(\sqrt{\frac{2h}{R}} \cdot \sqrt{1 - \frac{h}{2R}} \right)^3 - \sqrt{\frac{2h}{R}} \cdot \left(1 - \frac{h}{4R} \right) \cdot \left(1 + \frac{h}{R} \right) \right] \approx \\
 &\approx -\sqrt{\frac{2h^3}{R}} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2h^3}{R}} \cdot \left(1 - \frac{3h}{4R} \right) \approx -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2h^3}{R}} \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

Zusammenfassend:

$$\delta = R \cdot \left[\arcsin \frac{\sqrt{2Rh - h^2}}{R} - \frac{\sqrt{2Rh - h^2}}{(R - h)} \right] \approx -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2h^3}{R}} = -2,67 \text{ cm} \quad (2.23)$$

Aufgabe 3

	vorher	nachher
Laborsystem		
Schwerpunktsystem		

Abb.3.1 Labor- und Schwerpunktsystem

\vec{v}_S sei die Geschwindigkeit des Schwerpunktsystems relativ zum Laborsystem. Eine gestrichene Größe bezieht sich auf das Schwerpunktsystem, eine ungestrichene auf das Laborsystem. Der Index 4 bezeichne das Antiproton.

- (a) Der Winkel von \vec{p}'_4 gegen die Einfallsrichtung (Richtung von \vec{v}_S) ist beliebig. Bei konstantem $|\vec{v}'_4|$ ist $|\vec{v}_4|$ und damit auch E_4 jedoch dann am größten, wenn \vec{v}'_4 in die Richtung von \vec{v}_S zeigt. E_4 ist also genau dann maximal, wenn E'_4 maximal ist und das Antiproton in der Einfallsrichtung des Protons wegfiegt.

Wir rechnen jetzt im Schwerpunktsystem. Mit der Ruhenergie $E_0 = m_p c^2$ des Protons und den relativistischen Gesamtenergien E'_ν der Teilchen gilt (Energie-Impuls-Relation)

$$E'_\nu{}^2 = E_0^2 + \vec{p}'_\nu{}^2 c^2 \quad (3.1)$$

Aus dem Energiesatz

$$E'_1 + E'_2 + E'_3 + E'_4 = E' \quad (3.2)$$

und dem Impulssatz

$$\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \vec{p}'_3 + \vec{p}'_4 = \vec{0} \quad (3.3)$$

folgt mit $\vec{p}'_\nu{}^2 = p'{}_\nu{}^2$

$$E - \sqrt{E_0^2 + p_4'^2} = E'_1 + E'_2 + E'_3 \quad (3.4)$$

Quadrieren von (3.4) ergibt

$$\begin{aligned} 2 E' \sqrt{E_0^2 + p_4'^2} &= E'^2 + E_0^2 + p_4'^2 c^2 - (E'_1 + E'_2 + E'_3)^2 = \\ &= E'^2 + E_0^2 + (\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \vec{p}'_3)^2 c^2 - (E'_1 + E'_2 + E'_3)^2 = \\ &= E'^2 + E_0^2 - \underbrace{[(E'_1 + E'_2 + E'_3)^2 - (\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \vec{p}'_3)^2 c^2]}_W \end{aligned} \quad (3.5)$$

oder

$$E'_4 = \frac{E'^2 + E_0^2 - W}{2 E'} \quad (3.6)$$

E'_4 ist also genau dann maximal, wenn

$$W = (E'_1 + E'_2 + E'_3)^2 - (\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \vec{p}'_3)^2 c^2 \quad (3.7)$$

minimal ist.

$$\begin{aligned} W &= \underbrace{E_1'^2 - \vec{p}'_1{}^2 c^2}_{E_0^2} + \underbrace{E_2'^2 - \vec{p}'_2{}^2 c^2}_{E_0^2} + \underbrace{E_3'^2 - \vec{p}'_3{}^2 c^2}_{E_0^2} + 2 \sum_{\nu < \mu} (E'_\nu E'_\mu - \vec{p}'_\nu \vec{p}'_\mu c^2) = \\ &= 3 E_0^2 + 2 \sum_{\nu < \mu} (E'_\nu E'_\mu - \vec{p}'_\nu \vec{p}'_\mu c^2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ist φ der Winkel zwischen \vec{p}'_ν und \vec{p}'_μ , dann ist

$$\vec{p}'_\nu \vec{p}'_\mu = p'_\nu p'_\mu \cos \varphi \implies (\vec{p}'_\nu \vec{p}'_\mu)^2 \leq p'^2_\nu p'^2_\mu \quad (3.9)$$

Das Gleichheitszeichen in (3.9) gilt für $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$.

$$(\vec{p}'_\nu - \vec{p}'_\mu)^2 = p'^2_\nu - 2\vec{p}'_\nu \vec{p}'_\mu + p'^2_\mu \geq 0 \implies p'^2_\nu + p'^2_\mu \geq 2\vec{p}'_\nu \vec{p}'_\mu \quad (3.10)$$

Das Gleichheitszeichen in (3.10) gilt für $\vec{p}'_\nu = \vec{p}'_\mu$. Mit (3.9) und (3.10) erhält man

$$\begin{aligned} E_\nu^2 E_\mu^2 &= (E_0^2 + p'^2_\nu) \cdot (E_0^2 + p'^2_\mu) = \\ &= E_0^4 + E_0^2 c^2 (p'^2_\nu + p'^2_\mu) + p'^2_\nu p'^2_\mu c^4 \geq \\ &\geq E_0^4 + E_0^2 c^2 (p'^2_\nu + p'^2_\mu) + (\vec{p}'_\nu \vec{p}'_\mu)^2 c^4 \geq \\ &\geq E_0^4 + 2 E_0^2 \vec{p}'_\nu \vec{p}'_\mu c^2 + (\vec{p}'_\nu \vec{p}'_\mu)^2 c^4 = \\ &= (E_0^2 + \vec{p}'_\nu \vec{p}'_\mu c^2)^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\implies E_\nu E_\mu \geq |E_0^2 + \vec{p}'_\nu \vec{p}'_\mu c^2| \implies E_\nu E_\mu \geq E_0^2 + \vec{p}'_\nu \vec{p}'_\mu c^2 \quad (3.12)$$

Endgültig ist

$$E_\nu E_\mu - \vec{p}'_\nu \vec{p}'_\mu c^2 \geq E_0^2 \quad (3.13)$$

Das Gleichheitszeichen in (3.13) gilt für $\vec{p}'_\nu = \vec{p}'_\mu$. Aus (3.8) und (3.13) folgt dann

$$W \geq 3 E_0^2 + 2 \cdot 3 E_0^2 = 9 E_0^2 = W_{\min} \quad (3.14)$$

Das Gleichheitszeichen in (3.14) (minimales W , maximales E'_4) gilt für

$$\vec{p}'_1 = \vec{p}'_2 = \vec{p}'_3 = -\frac{1}{3}\vec{p}'_4 \quad (3.15)$$

Da \vec{p}'_4 in Richtung des einfallenden Protons zeigt, bewegen sich alle Teilchen parallel zu dieser Richtung.

- (b) Im Schwerpunktsystem ist die Schwellenergie gegeben, wenn alle vier Teilchen ruhen (keine kinetische Energie), d.h.

$$E'_S = \frac{1}{2} E' = 2 E_0 \quad (3.16)$$

Für die Geschwindigkeit $v' = \beta' c$ des einfallenden Protons im Schwerpunktsystem gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta'^2}} = 2 \quad \implies \quad \beta' = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad (3.17)$$

Nach dem Additionstheorem erhält man die Geschwindigkeit $v = \beta c$ des einfallenden Protons im Laborsystem aus

$$\beta = \frac{\beta' + \beta'}{1 + \beta'^2} = \frac{4}{7}\sqrt{3} \quad (3.18)$$

Damit ist die Schwellenergie im Laborsystem

$$E_S = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 7 E_0 \quad (3.19)$$

Ein anderer Weg zur Berechnung von E_S : Die vier relativ zueinander ruhenden Teilchen nach dem Stoß haben die Ruhenergie $4 E_0$ und den gleichen Impuls p wie das einfallende Proton:

$$\underbrace{\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2}}_{E_S} + E_0 = \sqrt{16 E_0^2 + p^2 c^2} \quad (3.20)$$

Quadrieren ergibt

$$E_S = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} = 7 E_0 \quad (3.21)$$

- (c) Da es um die maximale Energie des Antiprotons geht, können die drei Protonen nach dem Stoß als ein Teilchen (Verbundkörper) mit der Gesamtenergie E_V , der Ruhenergie $3 E_0$ und dem Impuls p_V betrachtet werden. Die Größen des Antiprotons werden wieder mit dem Index 4 gekennzeichnet. Im Laborsystem lauten der Energie- und Impulssatz (E und p sind Gesamtenergie und Impuls des einfallenden Protons):

$$E + E_0 = E_V + E_4 \quad (3.22)$$

$$p = p_V + p_4 \quad (3.23)$$

Mit

$$E_V^2 = 9 E_0^2 + p_V^2 c^2 \quad (3.24)$$

$$E_4^2 = E_0^2 + p_4^2 c^2 \quad (3.25)$$

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2 \quad (3.26)$$

folgt

$$\underbrace{(E + E_0 - E_4)^2}_{E_{\check{V}}^2} = 9 E_0^2 + \underbrace{(p_4 - p)^2}_{p_{\check{V}}^2} c^2 \quad (3.27)$$

Mit (3.25) und (3.26) folgt aus (3.27)

$$(E + E_0 - E_4)^2 = 9 E_0^2 + E_4^2 - E_0^2 + E^2 - E_0^2 - 2\sqrt{E_4^2 - E_0^2}\sqrt{E^2 - E_0^2} \quad (3.28)$$

$$\sqrt{E_4^2 - E_0^2}\sqrt{E^2 - E_0^2} = E_0(3 E_0 - E) + (E + E_0)E_4 \quad (3.29)$$

Quadrieren und Umformen:

$$\begin{aligned} 2(E_0 + E) \cdot E_4^2 + 2 E_4(E + E_0)(3E_0 - E) &= -2E_0(E^2 + 4E_0^2 - 3E_0E) \\ E_4^2 + 2 \cdot \frac{3E_0 - E}{2} \cdot E_4 + \frac{(3E_0 - E)^2}{4} &= -\frac{E_0(E^2 + 4E_0^2 - 3E_0E)}{E_0 + E} + \frac{(3E_0 - E)^2}{4} \\ \left[E_4 + \frac{3E_0 - E}{2} \right]^2 &= \frac{15E_0^2E - 9E_0E^2 - 7E_0^3 + E^3}{4(E_0 + E)} \\ \left[E_4 + \frac{3E_0 - E}{2} \right]^2 &= \frac{(E - 7E_0)(E - E_0)^2}{4(E_0 + E)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} E_4 &= -\frac{3E_0 - E}{2} \pm \frac{(E - E_0)\sqrt{E - 7E_0}}{2\sqrt{E_0 + E}} = \\ &= -\frac{3E_0 - E}{2} \pm \frac{(E - E_0)\sqrt{(E - 7E_0)(E_0 + E)}}{2(E_0 + E)} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Da E_4 die maximale Energie des Antiprotons sein soll, scheidet die Lösung mit dem Minuszeichen aus:

$$E_4 = \frac{E^2 - 2E_0E - 3E_0^2 + (E - E_0)\sqrt{(E - 7E_0)(E_0 + E)}}{2(E_0 + E)} \quad (3.32)$$

$$E = 8 E_0 \quad \Longrightarrow \quad E_4 = \frac{11}{3} E_0 = 3440 \text{ MeV} \quad (3.33)$$

$$E_{4,\text{kin}} = E_4 - E_0 = \frac{8}{3} E_0 = 2502 \text{ MeV} \quad (3.34)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E_4}{E_0} = \frac{11}{3} \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{4}{11}\sqrt{7} = 0,962 \quad (3.35)$$

Aufgabe 3 (Anschauliche Lösung im Laborsystem)

(a) In Abb. 4.1 gilt (Impulssatz)

$$\vec{p}_1 c + \vec{p}_2 c + \vec{p}_3 c = \vec{p}_4 c \quad (4.1)$$

Die Strecken $\overline{A_1 A}$ und $\overline{C_1 C}$ mit den jeweiligen Längen E_0 stehen senkrecht auf $\vec{p}_1 c$ und $\vec{p}_2 c$ bzw. auf $\vec{p}_3 c$ und $\vec{p}_4 c$. Wegen der Energie-Impulsrelation

$$E_\nu^2 = E_0^2 + p_\nu^2 c^2 \quad (4.2) \quad \text{Abb.4.1 Impulse beliebig 3-dimensional}$$

gilt dann $\overline{PA} = E_1$, $\overline{AB} = E_2$, $\overline{BC} = E_3$ und $\overline{CQ} = E_4$. Der Energiesatz

$$E + E_0 = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \quad \text{mit} \quad E^2 = E_0^2 + p^2 c^2 \quad (4.3)$$

besagt dann, dass die Gesamtlänge des Streckenzugs PABCQ konstant ist:

$$\overline{PA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CQ} = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = \text{konstant} \quad (4.4)$$

Die physikalische Lage ändert sich vom energetischen Standpunkt aus nicht, wenn man $\vec{p}_1 c$ und $\vec{p}_2 c$ um PB sowie $\vec{p}_3 c$ und $\vec{p}_4 c$ um QB soweit dreht, dass die Punkte A und C in der von P, Q und B aufgespannten Ebene liegen. Zu jeder beliebigen Kombination von vier Vektoren \vec{p}_ν , die (4.1) genügen, gibt es vier ebenfalls (4.1) erfüllende und in einer Ebene liegende Vektoren \vec{p}'_ν mit $|\vec{p}'_\nu| = |\vec{p}_\nu|$.

Wir können für die weitere Analyse also annehmen, dass die vier Impulsvektoren komplanar sind (siehe Abb. 4.2). Die Strecken $\overline{A_1 A}$, $\overline{B_1 B}$, $\overline{C_1 C}$ und \overline{QD} mit den jeweiligen Längen E_0 , $2E_0$, $3E_0$ und $4E_0$ stehen senkrecht auf der Ebene der Impulse. Die Gesamtlänge des Streckenzugs PABCD ist gleich der konstanten Gesamtenergie:

$$\overline{PA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = E + E_0 \quad (4.5)$$

Wir denken uns die senkrechten Strecken ($\overline{A_1 A}$, ...) als Masten einer Seilbahn und den Streckenzug PABCD als Seil mit fester Länge.

Die Masten müssen jetzt so verschoben werden, dass die Seillänge gleich bleibt und E_4 bzw. $\vec{p}_4 c$ maximal wird. Es gilt folgender Satz:

$$\text{Wenn P, A, B und C nicht auf einer Geraden liegen, ist } E_4 \text{ nicht maximal.} \quad (4.6)$$

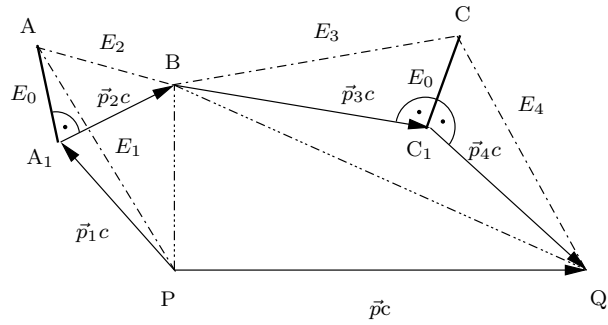


Abb.4.1 Impulse beliebig 3-dimensional

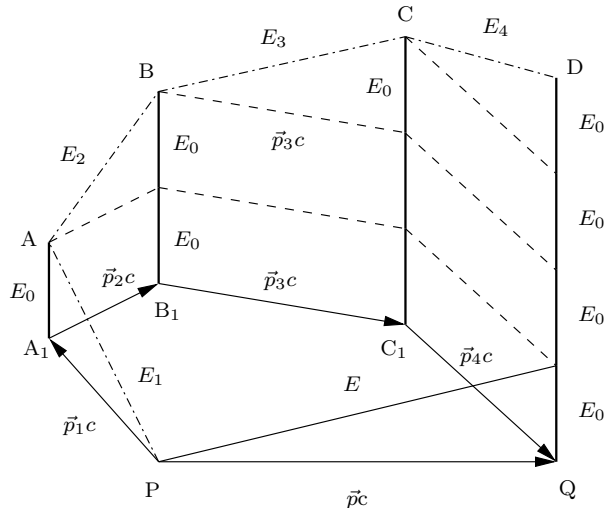


Abb.4.2 Impulse komplanar

Beweis: A_1 und B_1 so verschieben, dass PC_1 gedrittelt wird (P, A, B und C liegen jetzt auf einer Geraden, siehe Abb. 4.3). Da die Gerade kürzeste Verbindung zweier Punkte ist, wird das Seil zwischen C und D durchhängen. Jetzt kann man $PABCC_1$ um P drehen, bis das Seil wieder gespannt ist. Dabei wird E_4 größer.

Dreht man in Abb. 4.3 das Viereck $QDCC_1$ um QD , bis C_1 auf PQ liegt, dann hängt das Seil wieder durch, da aus $\overline{PC_1} + \overline{C_1Q} \geq \overline{PQ}$

$$\overline{PC_{1,\text{neu}}} = \overline{PQ} - \overline{C_1Q} \leq \overline{PC_1}$$

folgt. Das Seil kann erneut gespannt werden, indem man C_1 nach links schiebt und dabei E_4 wieder vergrößert. Maximales E_4 erhält man also für

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = \vec{p}_3 = k \cdot \vec{p}_4 \quad (4.7)$$

wie in in Abb. 4.4.

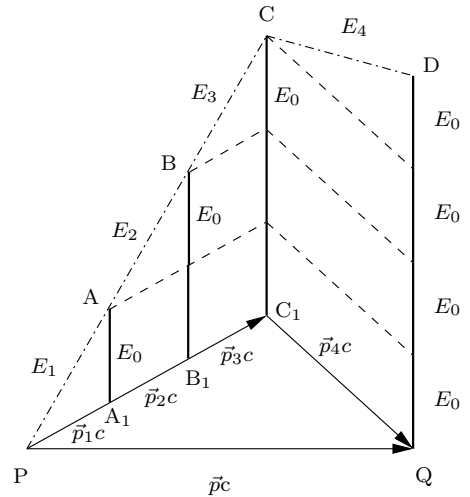


Abb.4.3

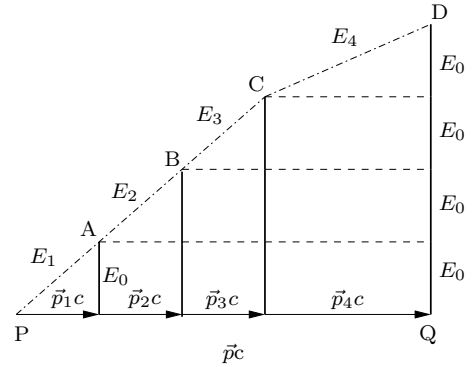


Abb.4.4

- (b) Im Schwerpunktsystem ist die Schwellenergie gegeben, wenn alle vier Teilchen ruhen (keine kinetische Energie), d.h. im Laborsystem haben alle vier Teilchen die gleiche Energie (siehe Abb. 4.5).

$$\begin{aligned} (E + E_0)^2 &= 16 E_0^2 + p^2 c^2 = \\ &= 16 E_0^2 + E^2 - E_0^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

woraus folgt $E = 7 E_0$.

- (c) Wie oben.

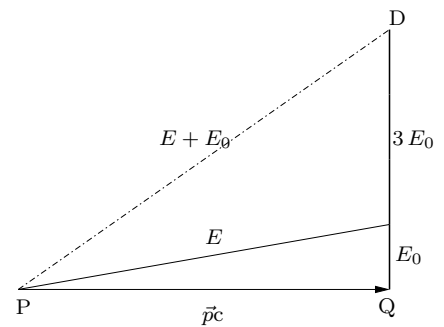


Abb.4.5 Schwellenergie