34. Internationale Physik-Olympiade -Lösungen zur zweiten Runde

R. Reindl

Aufgabe 1

(a) Mit den Beziehungen

$$R = N_{\mathrm{A}}k \quad , \quad M = N_{\mathrm{A}}m \quad \text{und} \quad \frac{R}{M} = \frac{k}{m} \tag{1.1}$$

gilt

$$\overline{v} = \int_0^\infty vP(v)\,\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \tag{1.2}$$

(b)

$$A = \frac{1}{4}n\overline{v} = \frac{1}{4}\cdot\frac{N}{V}\cdot\overline{v} = \frac{1}{4}\cdot\frac{p}{kT}\cdot\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \tag{1.3}$$

$$= p\cdot\sqrt{\frac{R}{2k^2T\pi M}} = p\cdot\sqrt{\frac{N_{\mathrm{A}}}{2kT\pi M}} = \frac{p}{\sqrt{2\pi kTm}} \tag{1.4}$$

(c) Mit $m = 32u$ ist $A = 2{,}6\cdot 10^{24}\,\mathrm{m^{-2}s^{-1}}$.

Unter der Annahme, dass pro Molekül die Fläche $F_0 = 4r^2$ beansprucht wird (bei der dichtesten Packung ist $F_0 = 2\sqrt{3}\,r^2$) und jedes auftreffende Molekül auch einen noch freien Platz auf der Oberfläche trifft, ist die Beschichtungszeit

$$t_0 = \frac{1}{AF_0} = 0{,}75\,\mu\mathrm{s} \quad (0{,}86\,\mu\mathrm{s}) \tag{1.5}$$

Realistischer ist die Annahme, dass die Besetzungsrate proportional zur noch freien Fläche ist. Bezeichnet N die Zahl der auf der Fläche F schon festgesetzten Moleküle und $N_0 = \frac{F}{F_0}$ die maximale Besetzungszahl, dann ist

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = A\cdot(F - NF_0) = AF_0(N_0 - N) \tag{1.6}$$

Damit ist die Zeit, bis sich N_1 Teilchen auf der Oberfläche festgesetzt haben

$$t = \frac{1}{AF_0}\int_0^{N_1}\frac{\mathrm{d}N}{N_0 - N} = t_0\cdot\ln\frac{N_0}{N_0 - N_1} \tag{1.7}$$

Für $N_1 = 0{,}99\,N_0$ z.B. ist

$$t = t_0\cdot\ln 100 = 4{,}6\,t_0 = 3{,}4\,\mu\mathrm{s} \tag{1.8}$$

(d) Das Maximum der Maxwellverteilung liegt bei

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = 546\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{1.9}$$

Die minimale Geschwindigkeit der Moleküle ist

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\,\mathrm{eV}}{m}} = 2{,}45\cdot 10^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{1.10}$$

Mit einem Computeralgebrasystem findet man für den Bruchteil der Moleküle mit $v > v_0$:

$$\alpha = \int\limits_{v_0}^{\infty} P(v)\,\mathrm{d}v = 8{,}19 \cdot 10^{-9} \tag{1.11}$$

Es geht auch ohne Computer: Mit der Substitution

$$v^2 = \frac{2E}{m} \tag{1.12}$$

ist

$$\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}E}{mv} = \frac{\mathrm{d}E}{\sqrt{2mE}} \tag{1.13}$$

und damit wegen (1.1)

$$\begin{aligned}
\alpha &= \int\limits_{v_0}^{\infty} P(v)\,\mathrm{d}v = \int\limits_{v_0}^{\infty} 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2\,\mathrm{e}^{-\frac{Mv^2}{2RT}}\,\mathrm{d}v = \\
&= \int\limits_{E_0}^{\infty} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2E}{m}\,\mathrm{e}^{-\frac{E}{kT}}\,\frac{\mathrm{d}E}{\sqrt{2mE}} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \int\limits_{E_0}^{\infty} \sqrt{E}\,\mathrm{e}^{-\frac{E}{kT}}\,\mathrm{d}E
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Aus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sqrt{x}}{a}\,\mathrm{e}^{-ax}\right) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)\mathrm{e}^{-ax} \approx -\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-ax} \quad \text{für} \quad x \gg \frac{1}{2a} \tag{1.15}$$

folgt die Näherung

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x \approx -\frac{\sqrt{x}}{a}\,\mathrm{e}^{-ax} \quad \text{für} \quad x \gg \frac{1}{2a} \tag{1.16}$$

und damit

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x \approx \frac{\sqrt{x_0}}{a}\,\mathrm{e}^{-ax_0} \quad \text{für} \quad x_0 \gg \frac{1}{2a} \tag{1.17}$$

Mit

$$x_0 = E_0 = 1\,\mathrm{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} \tag{1.18}$$

und

$$\frac{1}{2a} = \frac{kT}{2} = 3{,}96 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{J} \tag{1.19}$$

ist die Bedingung aus (1.17) erfüllt und es gilt

$$\alpha \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{E_0}\,kT\,\mathrm{e}^{-\frac{E_0}{kT}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{E_0}{kT}}\,\mathrm{e}^{-\frac{E_0}{kT}} = 8{,}13 \cdot 10^{-9} \tag{1.20}$$

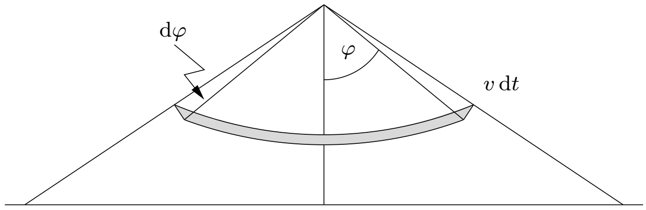
Damit wird aus (1.5)

$$t_0' = \frac{t_0}{\alpha} = 91\,\mathrm{s} \quad (105\,\mathrm{s}) \tag{1.21}$$

oder mit (1.8)

$$t' = 4{,}6 \cdot t_0' = 419\,\mathrm{s} \qquad \text{(für 99\% Besetzung)} \tag{1.22}$$

Bei den bisherigen Rechnungen haben wir aber nicht berücksichtigt, dass die Moleküle mit $v > v_0$ eine andere mittlere Geschwindigkeit besitzen. Überlegen wir zunächst, wie die Formel für die Auftreffrate A zustande kommt:



Mit δN bezeichnen wir die Zahl aller Moleküle mit einem Geschwindigkeitsbetrag zwischen v und $v+\mathrm{d}v$ und einer Bewegungsrichtung zwischen φ und $\varphi+\mathrm{d}\varphi$ zur Flächennormalen, die in der Zeit $\mathrm{d}t$ auf die Fläche F treffen. Das sind alle Teilchen mit den richtigen Bedingungen in einer Höhe von null bis $\mathrm{d}h = v\,\mathrm{d}t\,\cos\varphi$ über der Fläche. Der Bruchteil aller Teilchen mit der geforderten Richtung ist

$$\beta_1 = \frac{2\pi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{4\pi} = \frac{1}{2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,, \tag{1.23}$$

der Bruchteil mit dem richtigen Geschwindigkeitsbetrag ist $\beta_2 = P(v)\mathrm{d}v$. Die Zahl der „richtigen“ Teilchen im Volumen $\mathrm{d}V = F\mathrm{d}h$ also

$$\delta N = \beta_1\beta_2 n\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}nFvP(v)\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t \tag{1.24}$$

Die Zahl δN_1 aller Teilchen mit dem richtigen Geschwindigkeitsbetrag, die in der Zeit $\mathrm{d}t$ auf F treffen, erhält man durch Integration über φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$. Wegen

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} \tag{1.25}$$

gilt dann

$$\delta N_1 = \frac{n}{4}FvP(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t \tag{1.26}$$

Die Zahl $\mathrm{d}N$ aller Teilchen mit $v > v_0$, die in der Zeit $\mathrm{d}t$ auf F treffen, ist dann

$$\mathrm{d}N = \frac{n}{4}F\,\mathrm{d}t\int\limits_{v_0}^{\infty} vP(v)\,\mathrm{d}v \tag{1.27}$$

und für die Auftreffrate ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} A^* = \frac{\mathrm{d}N}{F\,\mathrm{d}t} = \frac{n}{4}\int\limits_{v_0}^{\infty} vP(v)\,\mathrm{d}v &= \frac{p}{4kT}\cdot\frac{2\sqrt{2}(E_0+kT)}{\sqrt{\pi mkT}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{E_0}{kT}} = \\ &= \frac{p\,(E_0+kT)}{kT\sqrt{2\pi mkT}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{E_0}{kT}} = A\cdot\left(1+\frac{E_0}{kT}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{E_0}{kT}} = 8{,}8\cdot 10^{16}\,\frac{1}{\mathrm{m^2 s}} \end{aligned} \tag{1.28}$$

Damit erhalten wir endgültig für die Besetzungsdauer

$$t_0^* = \frac{1}{A^*\,F_0} = 21{,}9\,\mathrm{s} \tag{1.29}$$

oder noch besser unter Berücksichtigung von (1.8)

$$t^* = 4{,}6\cdot t_0^* = 101\,\mathrm{s} \qquad \text{(für 99\% Besetzung)} \tag{1.30}$$

Der Bruchteil aller Teilchen mit $v > v_0$ ist

$$\alpha = \int_{v_0}^{\infty} P(v)\,\mathrm{d}v\,, \tag{1.31}$$

die mittlere Geschwindigkeit aller Teilchen mit $v > v_0$ ist

$$\overline{v}^* = \frac{1}{\alpha}\int_{v_0}^{\infty} vP(v)\,\mathrm{d}v \tag{1.32}$$

Mit $v_0 = 0$ ist $\alpha = 1$ und $A^* = A$.

Die Teilchendichte aller Moleküle mit $v > v_0$ ist $n^* = \alpha n$, d.h.

$$A^* = \frac{n^*}{4}\cdot\overline{v}^* \tag{1.33}$$

Aufgabe 2

(a) Im nichtrotierenden Inertialsystem seien v die Geschwindigkeit der Kugel und ω_s die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe. Mit x wird die Auslenkung der Kugel aus der Ruhelage im rotierenden Scheibensystem bezeichnet. Das Trägheitsmoment der Scheibe ist

$$\Theta = \int_0^r r'^2 \,\mathrm{d}m \tag{2.1}$$

mit

$$\mathrm{d}m = \varrho \cdot 2r'\pi \,\mathrm{d}r' \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{m_1}{r^2\pi} \tag{2.2}$$

d.h.

$$\Theta = \frac{2m_1}{r^2} \int_0^r r'^3 \,\mathrm{d}r' = \frac{1}{2} m_1 r^2 \tag{2.3}$$

Galileitransformation:

$$\dot{x} = v - \omega_\mathrm{s} r \tag{2.4}$$

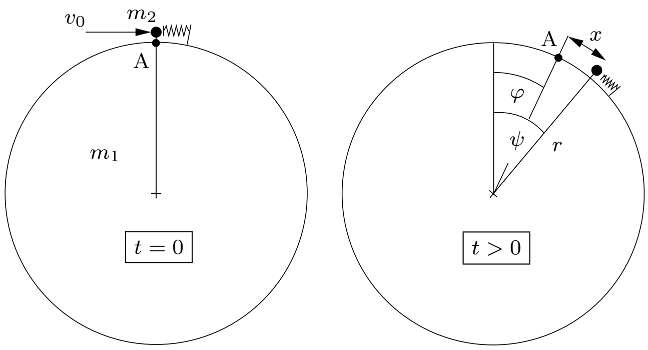
Newton 2:

$$m_2 \dot{v} = -kx \tag{2.5}$$

$$\omega_\mathrm{s} = \dot{\varphi} \tag{2.6}$$

Drehmoment:

$$\Theta\ddot{\varphi} = \Theta\dot{\omega}_\mathrm{s} = kxr \tag{2.7}$$



Aus (2.4) folgt

$$\ddot{x} = \dot{v} - \dot{\omega}_\mathrm{s} r = -\frac{kx}{m_2} - \ddot{\varphi} r = -\frac{kx}{m_2} - \frac{kr^2}{\Theta} \cdot x \tag{2.8}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 \cdot x \tag{2.9}$$

mit

$$\omega^2 = k\left(\frac{1}{m_2} + \frac{r^2}{\Theta}\right) = k\left(\frac{1}{m_2} + \frac{2}{m_1}\right) = k \cdot \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 m_2} \tag{2.10}$$

Mit $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ lautet die Lösung von (2.9)

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \tag{2.11}$$

$$x_\mathrm{max} = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0}{\sqrt{k\left(\frac{1}{m_2} + \frac{2}{m_1}\right)}} = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k\,(m_1 + 2m_2)}} \cdot v_0 \tag{2.12}$$

(b) Aus (2.7) folgt

$$\omega_\mathrm{s} = \dot{\varphi} = \frac{kr}{\Theta} \int_0^t x(t')\,\mathrm{d}t' = \frac{2kv_0}{m_1 r \omega^2}(1 - \cos\omega t) = \frac{2m_2 v_0}{r(m_1 + 2m_2)}(1 - \cos\omega t) \tag{2.13}$$

Die Winkelgeschwindigkeit der Masse m_2 im nichtrotierenden Inertialsystem ist

$$\omega_2 = \omega_\mathrm{s} + \dot{\psi} = \omega_\mathrm{s} + \frac{\dot{x}}{r} = \omega_\mathrm{s} + \frac{v_0}{r}\cos\omega t = \frac{2m_2 v_0}{r(m_1 + 2m_2)}\left(1 + \frac{m_1}{2m_2}\cos\omega t\right) \tag{2.14}$$

Mit

$$\cos \omega t = \pm\sqrt{1-\sin^2 \omega t} = \pm\sqrt{1-\frac{\omega^2 x^2}{v_0^2}} \tag{2.15}$$

folgt aus (2.13) und (2.14)

$$\omega_\mathrm{s} = \frac{2m_2 v_0}{r(m_1+2m_2)}\left(1 \mp \sqrt{1-\frac{k(m_1+2m_2)x^2}{m_1 m_2 v_0^2}}\right) \tag{2.16}$$

und

$$\omega_2 = \frac{2m_2 v_0}{r(m_1+2m_2)}\left(1 \pm \frac{m_1}{2m_2}\sqrt{1-\frac{k(m_1+2m_2)x^2}{m_1 m_2 v_0^2}}\right) \tag{2.17}$$

Aus (2.13) folgt:

$$0 \leqq \omega_\mathrm{s} \leqq \frac{4m_2 v_0}{r(m_1+2m_2)} \tag{2.18}$$

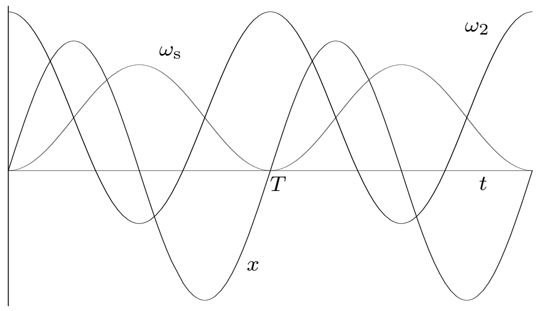
d.h. die Scheibe dreht sich immer im Uhrzeigersinn.

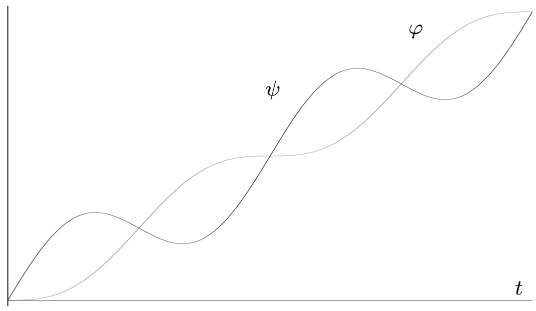
Aus (2.14) folgt:

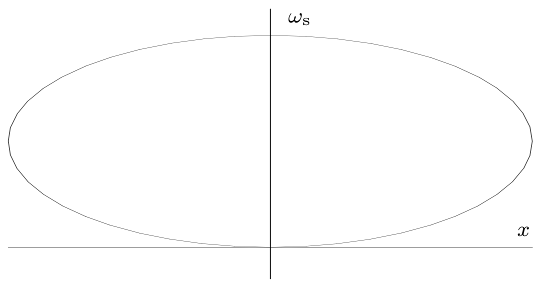
$$\frac{v_0}{r}\cdot\frac{2m_2-m_1}{2m_2+m_1} \leqq \omega_2 \leqq \frac{v_0}{r} \tag{2.19}$$

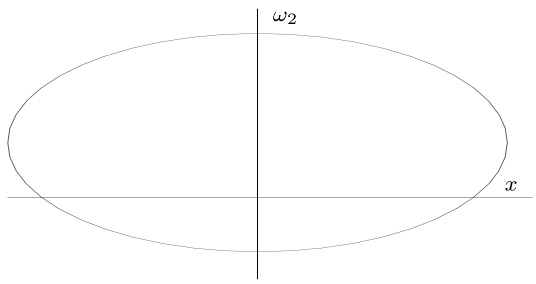
Für $m_1 < 2m_2$ ist ω_2 immer positiv, sonst kann ω_2 auch negativ werden.

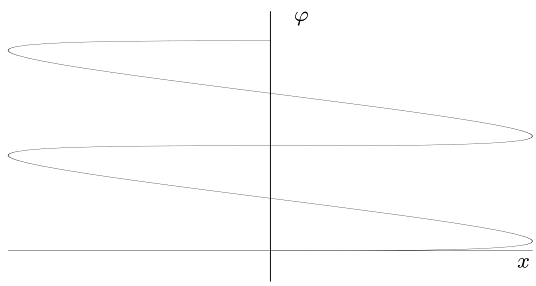
Für die folgenden Grafen gilt $m_1 = 4m_2$.

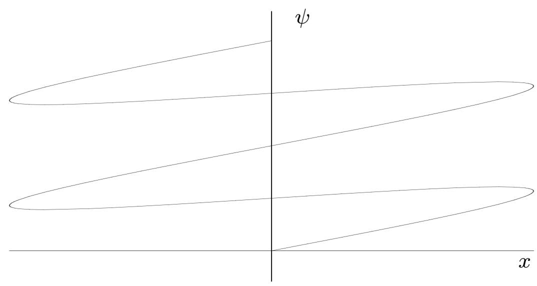








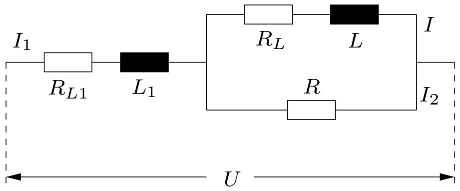




(c) Aus (2.10) und (2.13) folgt $T_\mathrm{s} = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 m_2}{k(m_1+2m_2)}}$

Aufgabe 3

(a)



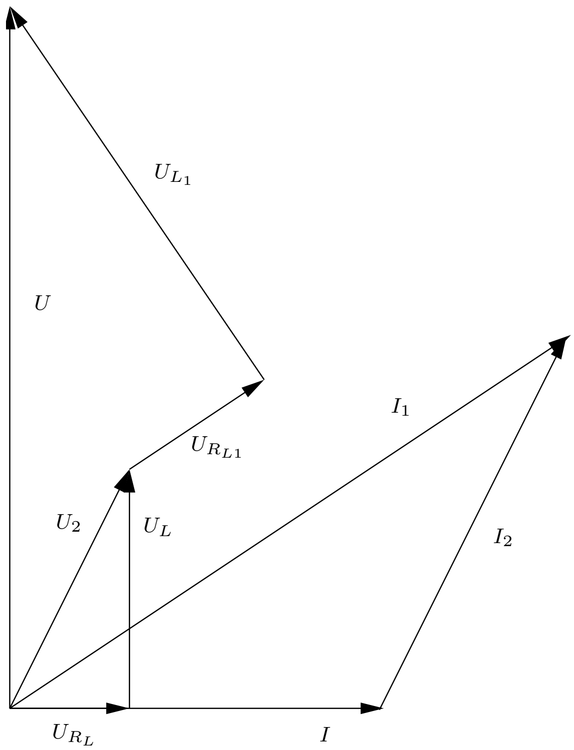
$U_{R_L} \parallel I$

$U_L \perp I$

$I_2 \parallel U_2$

$U_{R_{L1}} \parallel I_1$

$U_{L_1} \perp U_{R_{L1}}$



(b) Im Folgenden bezeichnen Spannungen und Ströme die den Zeigern entsprechenden komplexen Zahlen. Drehung einer komplexen Zahl um $\frac{\pi}{2}$ in Gegenuhrzeigerrichtung entspricht einer Multiplikation mit $\mathrm{e}^{i\cdot\frac{\pi}{2}} = i$. Für die reale Spule gilt damit

$$U_{R_L} = R_L I \quad \text{und} \quad U_L = \omega L I \mathrm{e}^{i\cdot\frac{\pi}{2}} = i\omega L I \tag{3.1}$$

Maschen- und Knotenregel:

$$RL_1 I_1 + i\omega L_1 I_1 + R_L I + i\omega L I = U \tag{3.2}$$

$$R_L I + i\omega L I = U_2 = R I_2 \tag{3.3}$$

$$I + I_2 = I_1 \tag{3.4}$$

Aus (3.3) und (3.4) folgt

$$I_1 = I \cdot \left(1 + \frac{R_L}{R} + i\,\frac{\omega L}{R}\right) \tag{3.5}$$

Einsetzen in (3.2):

$$I \cdot \left[\left(1 + \frac{R_L}{R} + i\,\frac{\omega L}{R}\right)(RL_1 + i\omega L_1) + R_L + i\omega L\right] = U \tag{3.6}$$

$$I \cdot \left[R_{L_1} + \frac{R_L R_{L_1}}{R} - \frac{\omega^2 L L_1}{R} + R_L + i \cdot \left(\frac{\omega L R_{L_1}}{R} + \omega L_1 + \frac{\omega L_1 R_L}{R} + \omega L\right)\right] = U \tag{3.7}$$

Damit U auf I senkrecht steht, muss der Realteil der eckigen Klammer verschwinden:

$$R_{L_1} + \frac{R_L R_{L_1}}{R} - \frac{\omega^2 L L_1}{R} + R_L = 0 \tag{3.8}$$

und damit

$$\boxed{R = \frac{\omega^2 L L_1 - R_L R_{L_1}}{R_L + R_{L_1}}} \tag{3.9}$$

(c) Der Vergleich ist nur sinnvoll, wenn die Phasenverschiebung aus (a) zu Grunde gelegt wird. Aus (3.8) folgt dann

$$\frac{\omega^2 L L_1}{R} > R_{L_1} + \frac{R_L R_{L_1}}{R} + R_L > \frac{R_L R_{L_1}}{R} \tag{3.10}$$

und damit

$$\underbrace{\frac{\omega L_1}{R_{L_1}}}_{G_1} > \underbrace{\frac{R_L}{\omega L}}_{V} \qquad \text{bzw.} \qquad \underbrace{\frac{R_{L_1}}{\omega L_1}}_{V_1} < \underbrace{\frac{\omega L}{R_L}}_{G} \tag{3.11}$$

Da der Realteil der eckigen Klammer in (3.7) verschwindet, ist wegen $\frac{1}{i} = -i$

$$I = -i \frac{U}{\frac{\omega L R_{L_1}}{R} + \omega L_1 + \frac{\omega L_1 R_L}{R} + \omega L} = -i \frac{UR}{\omega L(R_{L_1} + R) + \omega L_1 (R_L + R)} \tag{3.12}$$

Aufgabe 4