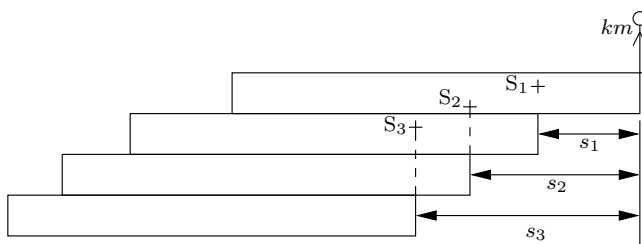


Aufgabe 1

(a) Konstruktionen

Die Länge einer Planke ist a , ihre Masse m , wir nehmen noch eine Zusatzbelastung am rechten Rand der obersten Planke an, die der Gewichtskraft der Masse $m' = km$ entspricht. Das System ist gerade noch stabil, wenn der Schwerpunkt S_n des



ganzen Systems aus den oberen n Planken und der Zusatzmasse genau über der rechten Kante der $(n + 1)$ -ten Planke liegt. Der Abstand von S_n zur Vertikalen durch den rechten Rand der obersten Planke sei s_n . Mit einer Planke überbrückt man

$$s_1 = \frac{\frac{a}{2} \cdot m + 0 \cdot km}{m + km} = \frac{a}{2(1+k)} \quad (1.1)$$

$$s_{n+1} = \frac{(n+k)ms_n + m(s_n + \frac{a}{2})}{(n+1+k)m} = s_n + \frac{a}{2(n+1+k)} \quad (1.2)$$

$$s_n = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{1+k} + \frac{1}{2+k} + \frac{1}{3+k} + \dots + \frac{1}{n+k} \right) = \frac{a}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+k} \quad (1.3)$$

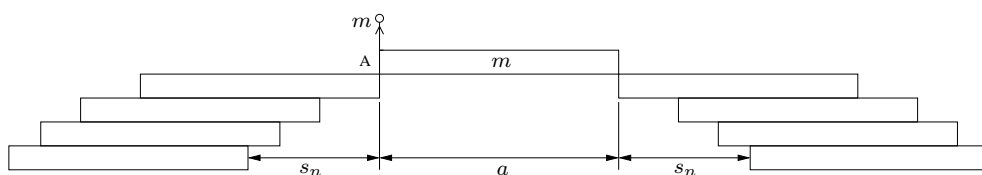
oder

$$s_n = \frac{a}{2} \cdot S_n \quad \text{mit} \quad S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+k} \quad (1.4)$$

Verwendet man diese Konstruktion nur von einem Ufer aus, dann muss $s_n \geq 3a$ und damit $S_n \geq 6$ sein. Mit $k = 1$ ist $S_{614} = 5,99965$ und $S_{615} = 6,00127$, d.h. man bräuchte 615 Planken.

Um Material zu sparen, baut man die Brücke von beiden Ufern aus. Mit $S_{29} = 2,9950$ und $S_{30} = 3,0272$ ist $S_{29} + S_{30} = 6,0222$, d.h. man braucht 59 Planken.

Besser ist folgende Konstruktion mit einem Mittelteil:



$$2s_n + a = a \cdot (S_n + 1) \geq 30 \text{ m} \quad (1.5)$$

und damit

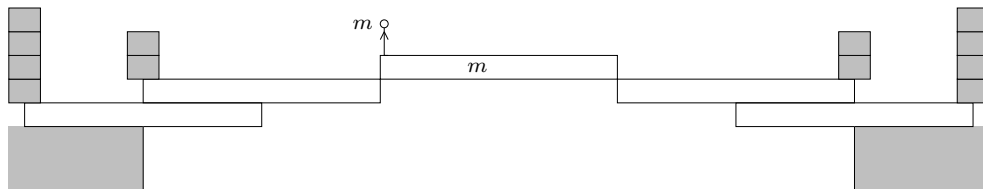
$$S_n \geq 2 \quad (1.6)$$

Die maximale Last im Punkt A ist $m + \frac{m}{2}$, d.h. $k = \frac{3}{2}$:

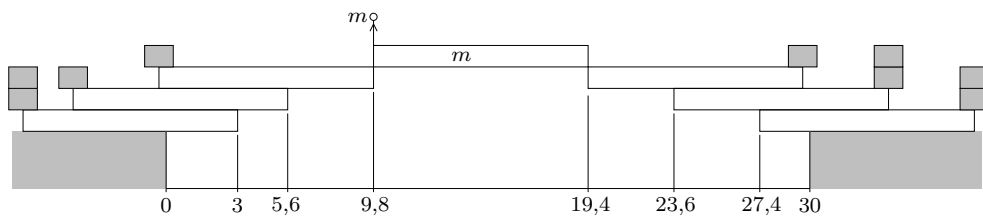
$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i + \frac{3}{2}} \geq 2 \quad (1.7)$$

Mit $S_{12} = 1,936$ und $S_{13} = 2,005$ ist $n = 13$, d.h. man braucht $2n + 1 = 27$ Planken.

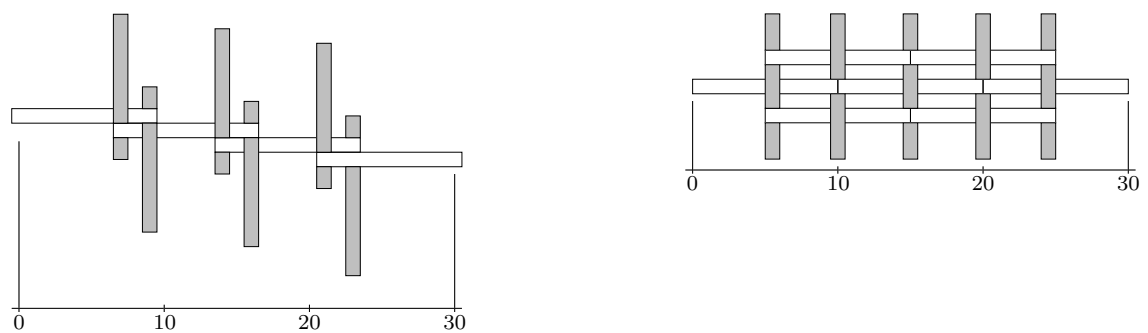
Eine noch einfachere Konstruktion arbeitet mit Gegengewichten (quer aufgelegte Planken) und kommt mit 17 Stück aus:



Diese Konstruktion lässt sich noch optimieren (Thomas Schwarz) auf eine Gesamtzahl von 16 Planken:



Mit geflochtenen Konstruktionen, die mit dünnen Planken durchaus gelingen, lässt sich die Gesamtzahl nochmals reduzieren (links 10 Planken, Christopher Wulff, Tobias Brosch) und rechts 12 Planken (Daniel Schenzinger, Julia Erhard):



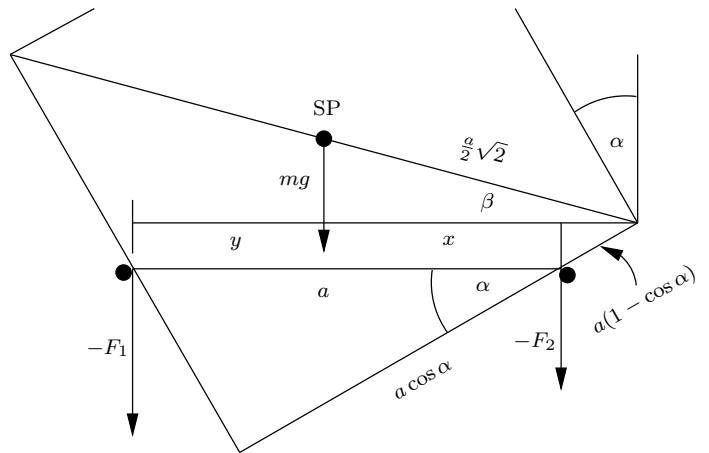
(b) **Würfellaagerung**

Die Auflagepunkte des Würfels werden als Drehpunkte aufgefasst. Die Hebelarme der im Schwerpunkt SP angreifenden Gewichtskraft sind x und y . Der Zeichnung entnimmt man

$$x + y = a \quad (1.8)$$

$$F_1 a = mgx \quad (1.9)$$

$$F_2 a = mgy = mg(a - x) \quad (1.10)$$



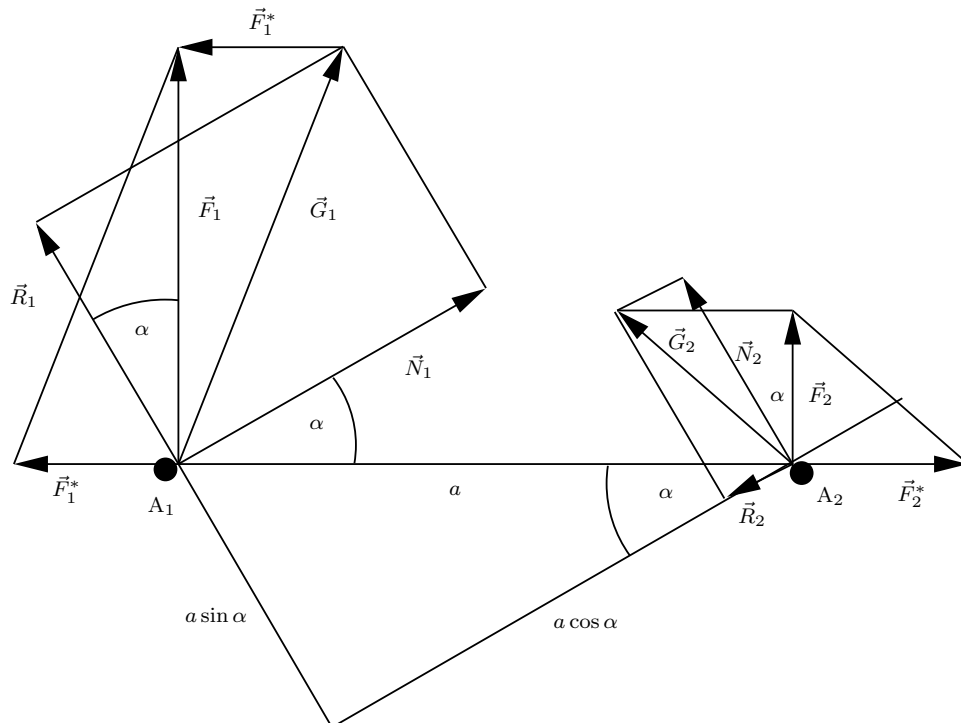
Mit $\beta = 45^\circ - \alpha$ folgt $\cos \beta = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)$ und damit

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{2} \cos \beta - a(1 - \cos \alpha) \cos \alpha = \frac{a}{2} [\sin \alpha - \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha] \quad (1.11)$$

$$F_1 = \frac{mgx}{a} = \frac{mg}{2} [\sin \alpha - \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha] \quad (1.12)$$

$$F_2 = \frac{mgy}{a} = \frac{mg}{2} [2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha + \cos \alpha] \quad (1.13)$$

$$F_1 + F_2 = mg \quad (1.14)$$



Von den Auflagepunkten A_1 und A_2 wirken die Normalkräfte \vec{N}_1 und \vec{N}_2 sowie die Reibungskräfte \vec{R}_1 und \vec{R}_2 auf den Würfel. Die Gesamtkräfte der Auflagepunkte auf den Würfel sind

$$\vec{G}_1 = \vec{N}_1 + \vec{R}_1 \quad \text{und} \quad \vec{G}_2 = \vec{N}_2 + \vec{R}_2 \quad (1.15)$$

Gleichgewichtsbedingungen: Gesamtkraft und Gesamtdrehmoment auf den Würfel verschwinden:

$$\vec{G}_1 + \vec{G}_2 + m\vec{g} = \vec{0} \quad (1.16)$$

Aus (1.16) folgt mit (1.12) und (1.13)

$$N_1 \cos \alpha - R_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha - R_2 \cos \alpha = 0 \quad (1.17)$$

$$N_1 \sin \alpha + R_1 \cos \alpha = F_1 = \frac{mg}{2} [\sin \alpha - \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha] \quad (1.18)$$

$$N_2 \cos \alpha - R_2 \sin \alpha = F_2 = \frac{mg}{2} [2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha + \cos \alpha] \quad (1.19)$$

In (1.18) und (1.19) ist das Verschwinden des Drehmoments schon enthalten (Herleitung der Formeln für F_1 und F_2). Alternativ könnte man auch das Drehmoment um den Schwerpunkt verwenden:

$$R_1 \cdot \frac{a}{2} + R_2 \cdot \frac{a}{2} = N_1 \left(\frac{a}{2} - a \sin \alpha \right) + N_2 (a \cos \alpha - \frac{a}{2}) \quad (1.20)$$

oder

$$N_1(1 - 2 \sin \alpha) + N_2(2 \cos \alpha - 1) - R_1 - R_2 = 0 \quad (1.21)$$

Weiter gilt

$$R_1 = \mu_1 N_1 \quad \text{und} \quad R_2 = \mu_2 N_2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq \mu_1 \leq \mu \quad \text{und} \quad 0 \leq \mu_2 \leq \mu \quad (1.22)$$

Aus (1.17) und (1.21) folgt mit (1.22)

$$N_1(\cos \alpha - \mu_1 \sin \alpha) = N_2(\sin \alpha + \mu_2 \cos \alpha) \quad (1.23)$$

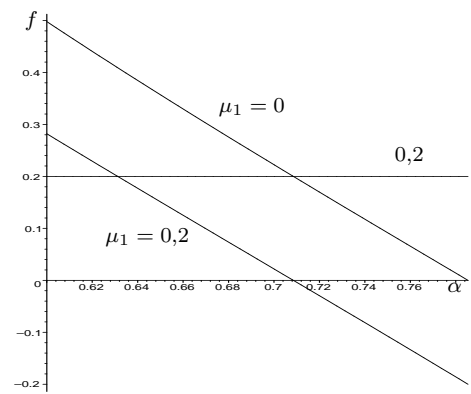
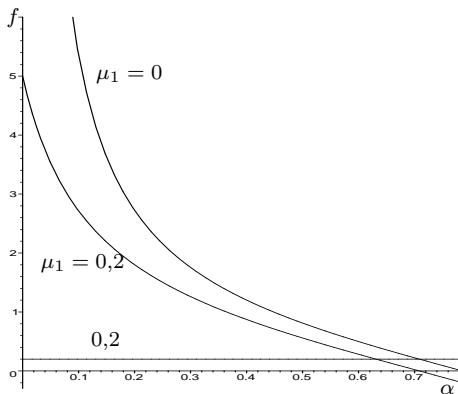
$$N_1(1 - \mu_1 - 2 \sin \alpha) = N_2(1 + \mu_2 - 2 \cos \alpha) \quad (1.24)$$

Division von (1.23) durch (1.24) und Auflösen nach μ_2 :

$$\mu_2 = \frac{2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - \cos \alpha - \mu_1 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha + \mu_1(\cos \alpha - \sin \alpha)} \quad (1.25)$$

oder

$$\mu_2 = f(\alpha, \mu_1) = \frac{2 \cos 2\alpha + \sin \alpha - \cos \alpha - \mu_1 \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha + \mu_1(\cos \alpha - \sin \alpha)} \quad (1.26)$$



Die Plots von $f(\alpha, \mu_1)$ zeigen, dass $g(\alpha) = f(\alpha, \mu_1)$ und $h(\mu_1) = f(\alpha, \mu_1)$ im relevanten Bereich monoton fallend sind, d.h. der kleinstmögliche Winkel $\alpha = \alpha_{\min}$ wird für $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ angenommen. Mit $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ folgt dann aus (1.26)

$$(1 + \mu^2)(\cos \alpha - \sin \alpha) + 2\mu \sin 2\alpha - 2 \cos 2\alpha = 0 \quad (1.27)$$

oder mit $\mu = 0,2$

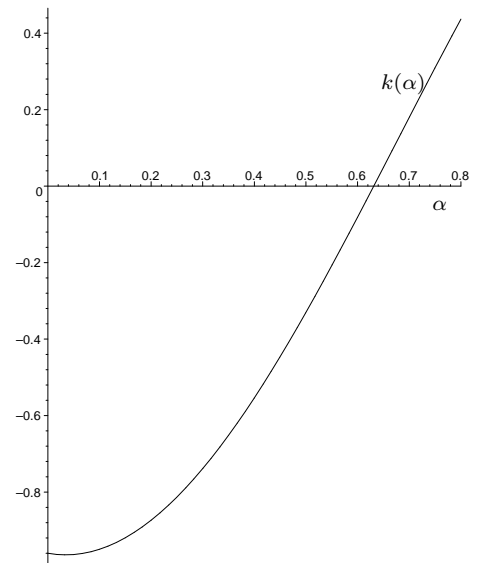
$$k(\alpha) = 1,04(\cos \alpha - \sin \alpha) + 0,4 \sin 2\alpha - 2 \cos 2\alpha = 0 \quad (1.28)$$

Die numerische Lösung von (1.28) ergibt

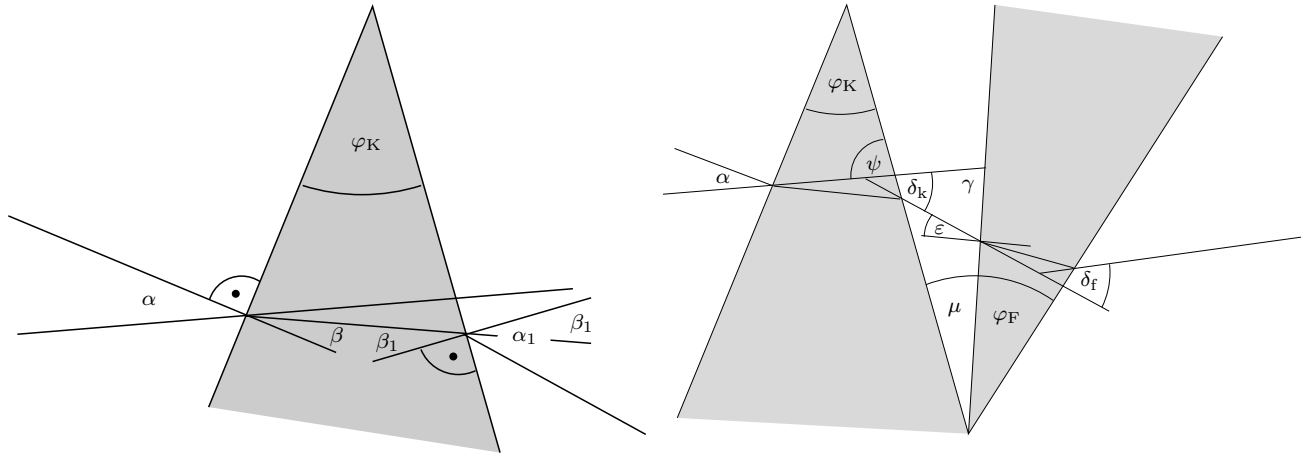
$$\alpha_{\min} = 0,631 = 36,2^\circ = 45^\circ - 8,8^\circ$$

Aus Symmetriegründen ist dann

$$\alpha_{\max} = 45^\circ + 8,8^\circ = 53,8^\circ$$



Aufgabe 2



$$\beta_1 = 90^\circ - (180^\circ - \varphi_K - (90^\circ - \beta)) = \varphi_K - \beta \quad (2.1)$$

Brechungsgesetz:

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n_K} \quad \text{und} \quad \sin \alpha_1 = n_K \sin \beta_1 \quad (2.2)$$

Der Ablenkwinkel δ_K beim Kronglasprisma ist

$$\begin{aligned} \delta_K &= \alpha - \beta + \alpha_1 - \beta_1 = \alpha + \alpha_1 - \varphi_K = \\ &= \alpha + \arcsin \left[n_K \sin \left(\varphi_K - \arcsin \frac{\sin \alpha}{n_K} \right) \right] - \varphi_K \end{aligned} \quad (2.3)$$

Das Flintglasprisma ist um μ gegen das Kronglasprisma gedreht (siehe Abb.). Der Einfallswinkel beim Flintglasprisma ist also

$$\varepsilon = \alpha_1 - \mu = \arcsin \left[n_K \sin \left(\varphi_K - \arcsin \frac{\sin \alpha}{n_K} \right) \right] - \mu \quad (2.4)$$

Analog zu (2.3) folgt für den Ablenkwinkel δ_F beim Flintglasprisma

$$\delta_F = \varepsilon + \arcsin \left[n_F \sin \left(\varphi_F - \arcsin \frac{\sin \varepsilon}{n_F} \right) \right] - \varphi_F \quad (2.5)$$

und damit für die Gesamtablenkung

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_K - \delta_F = \\ &= \alpha - \beta + \alpha_1 - \beta_1 - \alpha_1 + \mu - \arcsin \left[n_F \sin \left(\varphi_F - \arcsin \frac{\sin \varepsilon}{n_F} \right) \right] + \varphi_F = \\ &= \alpha - \varphi_K + \mu + \varphi_F - \arcsin \left[n_F \sin \left(\varphi_F - \arcsin \frac{\sin \varepsilon}{n_F} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Mit $\delta_1 = \delta(\lambda_1)$ und $\delta_2 = \delta(\lambda_2)$ folgt aus $\delta_1 = \delta_2$

$$n_{F1} \sin \left(\varphi_F - \arcsin \frac{\sin \varepsilon_1}{n_{F1}} \right) = n_{F2} \sin \left(\varphi_F - \arcsin \frac{\sin \varepsilon_2}{n_{F2}} \right) \quad (2.7)$$

oder

$$n_{F1} \sin \left(\varphi_F - \arcsin \left[\frac{1}{n_{F1}} \sin \left(\arcsin \left[n_{K1} \sin \left(\varphi_K - \arcsin \frac{\sin \alpha}{n_{K1}} \right) \right] - \mu \right) \right] \right) = n_{F2} \sin \left(\varphi_F - \arcsin \left[\frac{1}{n_{F2}} \sin \left(\arcsin \left[n_{K2} \sin \left(\varphi_K - \arcsin \frac{\sin \alpha}{n_{K2}} \right) \right] - \mu \right) \right] \right) \quad (2.8)$$

Man muss jetzt φ_F und μ so bestimmen, dass (2.8) für **alle** „kleinen“ α möglichst gut erfüllt ist. Unter der Annahme, dass alle Argumente der Sinus- und Arcussinusfunktionen klein gegen 1 sind, folgt wegen

$$\sin x \approx x \quad \text{und} \quad \arcsin x \approx x \quad \text{für} \quad |x| \ll 1 \quad (2.9)$$

aus (2.8)

$$n_{F1} \left(\varphi_F - \frac{1}{n_{F1}} \left(\left[n_{K1} \left(\varphi_K - \frac{\alpha}{n_{K1}} \right) \right] - \mu \right) \right) = n_{F2} \left(\varphi_F - \frac{1}{n_{F2}} \left(\left[n_{K2} \left(\varphi_K - \frac{\alpha}{n_{K2}} \right) \right] - \mu \right) \right) \quad (2.10)$$

oder

$$n_{F1}\varphi_F - n_{K1}\varphi_K = n_{F2}\varphi_F - n_{K2}\varphi_K \quad (2.11)$$

und damit

$$\varphi_F = \varphi_K \cdot \frac{n_{K1} - n_{K2}}{n_{F1} - n_{F2}} = 5,51^\circ \quad (2.12)$$

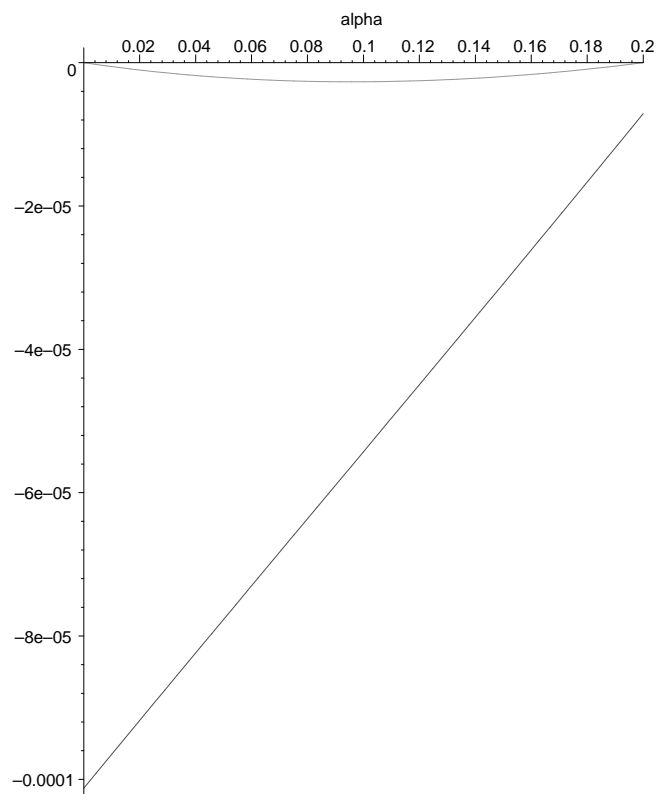
Eine bessere Lösung erhält man, wenn man in (2.8) einmal $\alpha = 0$ und einmal z.B. $\alpha = 0,2$ setzt und das so entstehende Gleichungssystem numerisch nach φ_F und μ auflöst:

$$\varphi_F = 0,0971 = 5,56^\circ, \quad \mu = 0,0645 = 3,70^\circ \quad (2.13)$$

Nebenstehende Abbildung zeigt den Winkel

$$\delta(\lambda_1) - \delta(\lambda_2)$$

zwischen den beiden Strahlen in Abhängigkeit von α . Der obere Graf entspricht den Werten aus (2.13), der untere $\varphi_F = 5,51^\circ$ und $\mu = 0$.



Aufgabe 3

1. (a) Proton auf Kreisbahn mit Radius r und Umlaufdauer T :

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi} \quad (3.1)$$

Der Drehimpuls des Protons ist ($m = m_p$)

$$L = mrv = mr \frac{2r\pi}{T} = m\omega r^2 = \frac{\sqrt{3}h}{4\pi} \quad (3.2)$$

Das magnetische Dipolmoment ist dann

$$\mu = IA = \frac{e\omega r^2 \pi}{2\pi} = \frac{1}{2} e\omega r^2 = \frac{e}{2m} \cdot L = \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \cdot \frac{eh}{m} = 4,37 \cdot 10^{-27} \text{ Am}^2 \quad (3.3)$$

- (b) Vektoriell ist das magnetische Moment

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m} \cdot \vec{L} \quad (3.4)$$

und die Geschwindigkeit des Protons ist

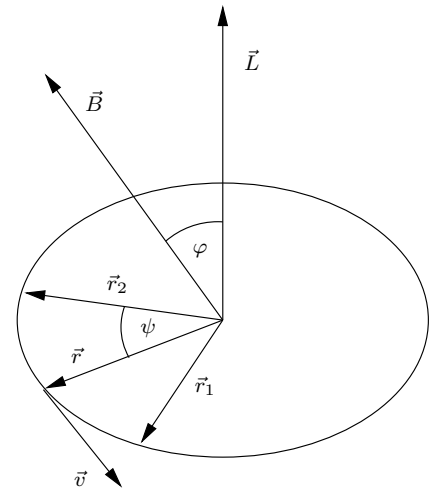
$$\vec{v} = \frac{1}{mr^2} \cdot \vec{L} \times \vec{r} \quad (3.5)$$

Mit der Lorentzkraft

$$\vec{F} = e \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad (3.6)$$

ist das momentane Drehmoment auf das Proton

$$\vec{M}^* = \vec{r} \times \vec{F} = e \cdot \vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.7)$$



Mit den Formeln

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \text{und} \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (3.8)$$

folgt aus (3.7) und (3.5)

$$\begin{aligned} \vec{M}^* &= -\frac{e}{mr^2} \left[(\vec{L} \times \vec{r}) \times \vec{B} \right] \times \vec{r} = \frac{e}{mr^2} \left[\vec{B} \times (\vec{L} \times \vec{r}) \right] \times \vec{r} = \\ &= -\frac{e}{mr^2} \left[\vec{r}(\vec{L} \cdot \vec{B}) - \vec{L}(\vec{r} \cdot \vec{B}) \right] \times \vec{r} = -\frac{e}{mr^2} \left[(\vec{L} \cdot \vec{B}) \cdot \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_0 - (\vec{r} \cdot \vec{B}) \cdot (\vec{L} \times \vec{r}) \right] = \\ &= -\frac{e}{mr^2} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{B}) \cdot (\vec{r} \times \vec{L}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Der Zeitliche Mittelwert des Drehmoments ist

$$\vec{M} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{M}^* dt = -\frac{e}{mr^2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T (\vec{r} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{r} dt \times \vec{L} \quad (3.10)$$

Um das Integral (3.10) ausrechnen zu können, muss \vec{r} als Funktion der Zeit dargestellt werden. Mit den Basisvektoren (siehe Abb.)

$$\vec{r}_1 = \frac{r}{|\vec{L} \times \vec{B}|} \cdot (\vec{L} \times \vec{B}) \quad \text{und} \quad \vec{r}_2 = \frac{r}{|\vec{r}_1 \times \vec{L}|} \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{L}) \quad (3.11)$$

gilt

$$\vec{r} = \vec{r}_1 \sin \psi + \vec{r}_2 \cos \psi \quad (3.12)$$

und damit

$$(\vec{r}\vec{B})\vec{r} = [\vec{r}_1\vec{B} \sin^2 \psi + \vec{r}_2\vec{B} \sin \psi \cos \psi]\vec{r}_1 + [\vec{r}_1\vec{B} \sin \psi \cos \psi + \vec{r}_2\vec{B} \cos^2 \psi]\vec{r}_2 \quad (3.13)$$

Mit $\psi = \omega t$ ist auch $d\psi = \omega dt$ und damit

$$\frac{dt}{T} = \frac{d\psi}{\omega T} = \frac{d\psi}{2\pi} \quad (3.14)$$

Aus (3.10) wird dann

$$\vec{M} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{M}^* d\psi = -\frac{e}{mr^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\vec{r}\vec{B})\vec{r} d\psi \times \vec{L} \quad (3.15)$$

Wegen

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = \pi \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \psi d\psi = 0 \quad (3.16)$$

ist dann wegen (3.13)

$$\vec{M} = -\frac{e}{2\pi mr^2} \left[(\vec{r}_1\vec{B})\pi \cdot \vec{r}_1 + (\vec{r}_2\vec{B})\pi \cdot \vec{r}_2 \right] \times \vec{L} \quad (3.17)$$

Wegen der Definition (3.11) von \vec{r}_1 und \vec{r}_2 gilt $\vec{r}_1 \perp \vec{B}$, $\vec{r}_1 \perp \vec{L}$ und $\vec{r}_1 \perp \vec{r}_2$. Damit ist $\vec{r}_1\vec{B} = 0$ und \vec{r}_2 liegt in der von \vec{L} und \vec{B} aufgespannten Ebene. Also ist

$$\vec{r}_2\vec{B} = rB \cos(90^\circ - \varphi) = rB \sin \varphi \quad (3.18)$$

und aus (3.17) wird mit (3.4)

$$\vec{M} = -\frac{e}{2\pi mr^2} (\vec{r}_2\vec{B})\pi \cdot \vec{r}_2 \times \vec{L} = \frac{B \sin \varphi}{r} \cdot \vec{\mu} \times \vec{r}_2 \quad (3.19)$$

Wegen $\vec{r}_2 \perp \vec{\mu}$, $|\vec{\mu} \times \vec{B}| = \mu B \sin \varphi$ und $|\vec{\mu} \times \vec{r}_2| = \mu r$ ist

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad \text{und} \quad M = \mu B \sin \varphi \quad (3.20)$$

Wir denken uns das Drehmoment durch eine Kraft F mit dem Kraftarm a ersetzt:

$$dW = F ds = Fa d\varphi = M d\varphi = \mu B \sin \varphi d\varphi \quad (3.21)$$

Mit dem frei wählbaren Bezugswinkel $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ für die potentielle Energie ist

$$W(\varphi) = \mu B \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varphi d\varphi = -\mu B \cos \varphi \quad (3.22)$$

Wegen $L = \sqrt{3}L_z$ ist $\cos \varphi = \frac{L_z}{L} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und die beiden möglichen Energiewerte sind

$$W_{1,2} = \pm \frac{\mu B}{\sqrt{3}} \quad (3.23)$$

2. (a) Wegen $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ ist

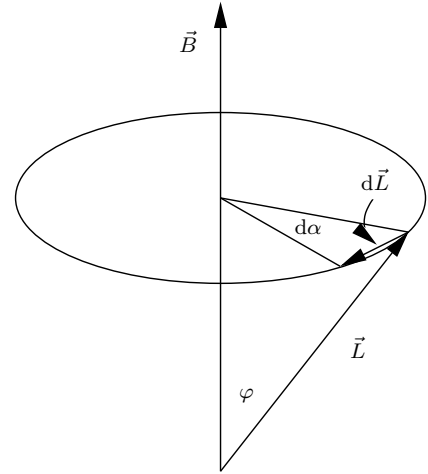
$$dL = L \sin \varphi d\alpha = M dt = \mu B \sin \varphi dt \quad (3.24)$$

und damit

$$\omega_p = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\mu B}{L} = \frac{eB}{2m} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\mu B}{h} \quad (3.25)$$

oder

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{eB}{4\pi m} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\mu B}{h} \quad (3.26)$$



(b) Mit der Frequenz f_0 des Photons ist

$$hf_0 = \Delta W = W_1 - W_2 = \frac{2\mu B}{\sqrt{3}} \quad (3.27)$$

und damit

$$f_0 = \frac{2\mu B}{\sqrt{3}h} = \frac{2\mu}{\sqrt{3}h} (B_{z,0} + cz) \quad (3.28)$$

(c)

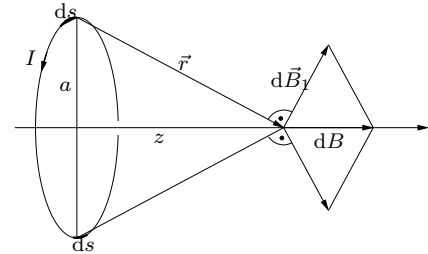
$$f_0 = \frac{2\mu B_{z,0}}{\sqrt{3}h} = 2,29 \cdot 10^7 \text{ Hz} = 22,9 \text{ MHz} \quad (3.29)$$

3. (a) Nach Biot-Savart ist das von einem Teilstück $d\vec{s}$ des Leiters erzeugte Feld

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad (3.30)$$

und wegen $d\vec{s} \perp \vec{r}$

$$dB_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{ds}{r^2} \quad (3.31)$$



Das von zwei gegenüberliegenden Teilstücken der Länge ds des Leiters erzeugte Feld bezeichnen wir mit dB :

$$\frac{dB}{2} = \frac{a}{r} \implies dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{a}{r^3} \cdot ds \quad (3.32)$$

Das gesamte von der Leiterschleife erzeugte Feld ist dann mit $r^2 = a^2 + z^2$

$$B(z) = a\pi \cdot \frac{dB}{ds} = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{a^2}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{2a} \cdot \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.33)$$

(b) Mit der Abkürzung $x = \frac{z}{a}$ ist

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{2a} \cdot f(x) \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.34)$$

Im Folgenden untersuchen wir nur noch die Funktion $f(x)$. $f(x)$ ist dann möglichst linear, wenn die Ableitung $f'(x)$ möglichst konstant ist und das ist wiederum dann der

Fall, wenn $|f''(x)|$ möglichst klein ist, d.h. in einer Umgebung von x_0 mit $f''(x_0) = 0$. f muss also bei x_0 einen Flachpunkt (nicht notwendig einen Wendepunkt) haben.

$$f'(x) = -\frac{3x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (3.35)$$

$$f''(x) = \frac{12x^2 - 3}{(1+x^2)^{\frac{7}{2}}} \quad (3.36)$$

Der Flachpunkt ist also bei $x_0 = \pm\frac{1}{2}$.

4. Die Mittelpunkte der Leiterschleifen sind bei $z_1 = -b$ und $z_2 = b$, die beiden Schleifen werden entgegengesetzt vom Strom durchflossen:

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{2a} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z-b}{a}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z+b}{a}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (3.37)$$

Mit $x = \frac{z}{a}$ und $d = \frac{b}{a}$ ist

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{2a} \cdot g(x) \quad \text{mit} \quad g(x) = f(x-d) - f(x+d) \quad (3.38)$$

Wir untersuchen nur die Funktion

$$g(x) = \frac{1}{(1+(x-d)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1+(x+d)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.39)$$

Da $g(-x) = -g(x)$, ist $g(x)$ punktsymmetrisch zum Ursprung. Damit ist $g'(x)$ achsensymmetrisch und $g''(x)$ wieder punktsymmetrisch, d.h. $g(0) = 0$ und $g''(0) = 0$. Es sind sogar alle Ableitungen von gerader Ordnung punktsymmetrisch, d.h. $g^{(2n)}(0) = 0$. Die Taylorentwicklung von g um den Ursprung ist also

$$g(x) = g'(0)x + \frac{g'''(0)}{6}x^3 + O(x^5) \quad (3.40)$$

Die Linearität von g in einer Umgebung des Ursprungs ist also dann am besten, wenn $g'''(0) = 0$.

$$g'(x) = -\frac{3(x-d)}{(1+(x-d)^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3(x+d)}{(1+(x+d)^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (3.41)$$

$$g''(x) = \frac{3(4x^2 - 8xd + 4d^2 - 1)}{(1+(x-d)^2)^{\frac{7}{2}}} - \frac{3(4x^2 + 8xd + 4d^2 - 1)}{(1+(x+d)^2)^{\frac{7}{2}}} \quad (3.42)$$

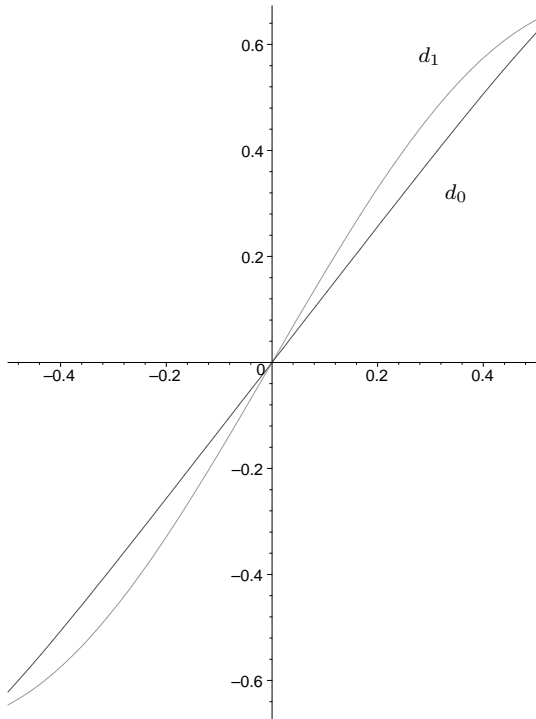
$$g'''(x) = -\frac{15(x-d)(4x^2 - 8xd + 4d^2 - 3)}{(1+(x-d)^2)^{\frac{9}{2}}} + \frac{15(x+d)(4x^2 + 8xd + 4d^2 - 3)}{(1+(x+d)^2)^{\frac{9}{2}}} \quad (3.43)$$

$$g'''(0) = \frac{30d(4d^2 - 3)}{(1+d^2)^{\frac{9}{2}}} = 0 \quad \implies \quad d_{\text{opt}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3.44)$$

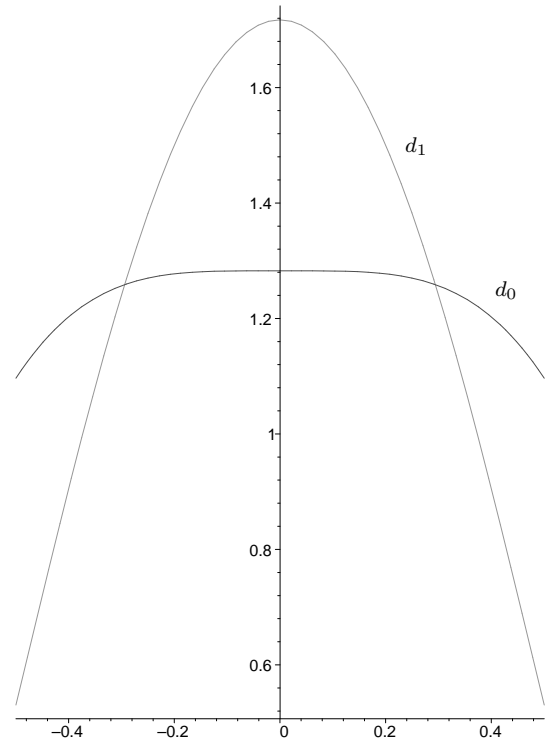
Der optimale Abstand der Spulen ist also

$$b_{\text{opt}} = 2ad_{\text{opt}} = a\sqrt{3} \quad (3.45)$$

Wir vergleichen die beiden Funktionen $g_0(x)$ ($g(x)$ mit $d = d_{\text{opt}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$) und $g_1(x)$ ($g(x)$ mit $d = 0,5$ wie in der Musterlösung).



$g_0(x)$ und $g_1(x)$



$g'_0(x)$ und $g'_1(x)$

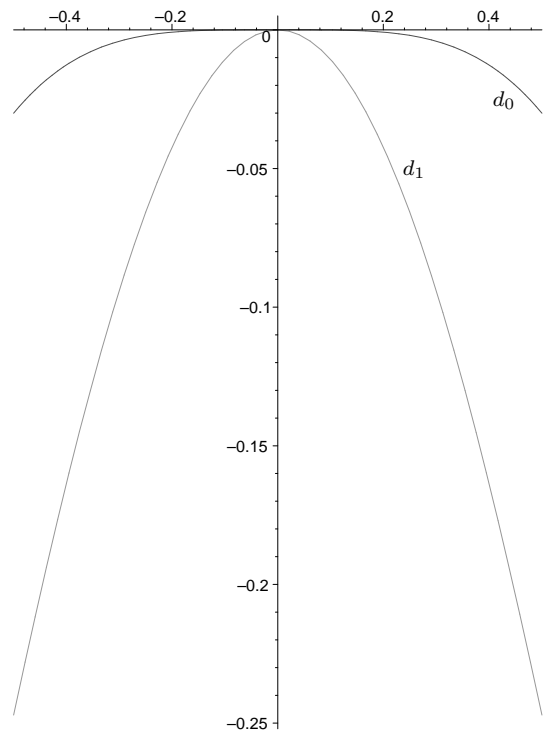
Als Maß der Güte der Linearität von g verwenden wir die Abweichung von der Geraden

$$h(x) = g'(0) \cdot x \quad (3.46)$$

Nebenstehend ist der relative Fehler

$$\delta(x) = \frac{g(x) - h(x)}{h(x)} \quad (3.47)$$

gezeichnet.



$\delta_0(x)$ und $\delta_1(x)$

Aufgabe 4

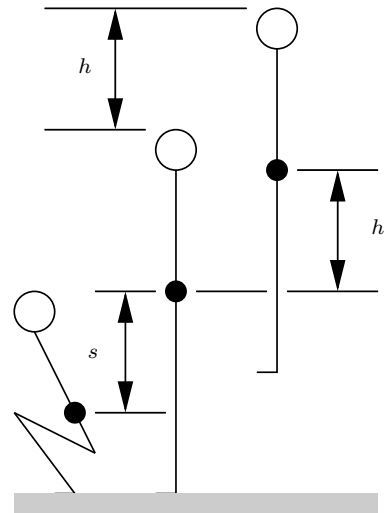
Mit der senkrecht nach oben wirkenden Muskelkraft F_M , der Beschleunigungsstrecke s und der Sprunghöhe h gilt

$$W = \int_0^s F_M dx = mg(s + h) \quad (4.1)$$

Ungestrichene Größen auf der Erde, gestrichene Größen auf dem Mond:

$$W = mg(s + h) = mg'(s + h') \quad (4.2)$$

$$h' = \frac{g}{g'}h + \left(\frac{g}{g'} - 1\right)s \quad (4.3)$$



$$\alpha = \frac{g}{g'} \implies h' = \alpha h + (\alpha - 1)s \quad (4.4)$$

Mit $M_E = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg, $M_M = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg, $R_E = 6,378 \cdot 10^6$ m und $R_M = 1,737 \cdot 10^6$ m ist

$$g = \frac{GM_E}{R_E^2} = 9,80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad g' = \frac{GM_M}{R_M^2} = 1,62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \alpha = \frac{g}{g'} = 6,03 \quad (4.5)$$

Das Schwierige an der Messung ist die Bestimmung von s , da die Lage des Schwerpunkts in der Hoch- und in der Streckstellung ermittelt werden muss.

Unter der Voraussetzung, dass F_M konstant ist, gilt mit $F_M = \beta mg$:

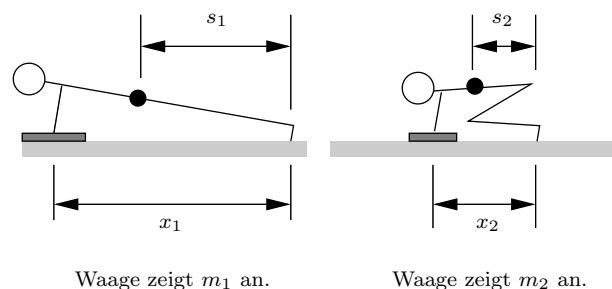
$$W = F_M s = \beta mgs = mg(s + h) \implies s = \frac{h}{\beta - 1} \quad (4.6)$$

und damit

$$h' = \alpha h + (\alpha - 1)s = \frac{\alpha\beta - 1}{\beta - 1} \cdot h \quad (4.7)$$

Messung von s mit einer Personenwaage:
Wegen der breiten Auflagefläche der Hände und der Zehen ist ein Fehler von 5 cm bei x_1 und x_2 sicher realistisch:

m	56 kg	Δm	0,5 kg
m_1	40 kg	Δm_1	0,5 kg
x_1	1,72 m	Δx_1	0,05 m
m_2	33 kg	Δm_2	0,5 kg
x_2	0,80 m	Δx_2	0,05 m



Zur Berechnung der Schwerpunktsentfernung s_i von den Zehen betrachten wir die Drehmomente mit dem Drehpunkt „Zehen“:

$$mgs_i = m_i g x_i \implies s_i = \frac{m_i x_i}{m} \quad \text{mit } i \in \{1, 2\} \quad (4.8)$$

s_i ist eine Funktion der drei Variablen m_i , x_i und m mit den jeweiligen Fehlern Δm_i , Δx_i und Δm :

$$s_i = f(m_i, x_i, m) = \frac{m_i x_i}{m} \quad (4.9)$$

Nach Gauß ist der Fehler von s_i

$$\Delta s_i = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial m_i} \Delta m_i\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial m} \Delta m\right)^2} \quad (4.10)$$

Die partiellen Ableitungen von f nach einer Variablen erhält man, indem man sich die anderen Variablen konstant denkt:

$$\frac{\partial f}{\partial m_i} = \frac{x_i}{m}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{m_i}{m}, \quad \frac{\partial f}{\partial m} = -\frac{m_i x_i}{m^2} \quad (4.11)$$

Damit ist

$$\Delta s_i = \sqrt{\left(\frac{x_i}{m} \Delta m_i\right)^2 + \left(\frac{m_i}{m} \Delta x_i\right)^2 + \left(\frac{m_i x_i}{m^2} \Delta m\right)^2} \quad (4.12)$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt

$$s_1 = 1,23 \text{ m}, \quad \Delta s_1 = 0,04 \text{ m}, \quad s_2 = 0,47 \text{ m}, \quad \Delta s_2 = 0,03 \text{ m} \quad (4.13)$$

$$s = s_1 - s_2 = 0,76 \text{ m}, \quad \Delta s = \sqrt{\Delta s_1^2 + \Delta s_2^2} = 0,05 \text{ m} \quad (4.14)$$

Messreihe für h in m: 0,41 0,43 0,45 0,40 0,44 0,43 0,42 0,41 0,42 0,39

Mit $n = 10$ errechnet sich der Mittelwert zu

$$h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i = 0,42 \text{ m} \quad (4.15)$$

Die Standardabweichung der Einzelmessungen ist

$$\sigma_h = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (h_i - h)^2} = 0,018 \text{ m}, \quad (4.16)$$

d.h. ca. 70% der Messwerte liegen im Intervall $h \pm \sigma_h$. Ein Maß für die Güte der Messung ist die Standardabweichung des Mittelwerts

$$\Delta h = \frac{\sigma_h}{\sqrt{n}} = 0,006 \text{ m} \quad (4.17)$$

Werden sehr viele Messreihen mit je n Einzelmessungen erstellt, dann liegen ungefähr 70% der **Mittelwerte** im Intervall $h \pm \Delta h$.

$$h' = \alpha h + (\alpha - 1)s = 6,37 \text{ m} \quad (4.18)$$

$$\Delta h' = \sqrt{(\alpha \Delta h)^2 + ((\alpha - 1)\Delta s)^2} = 0,25 \text{ m} \quad (4.19)$$

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{\Delta h'}{h'} = 0,04 = 4\% \quad (4.20)$$