36. Internationale Physik-Olympiade – Spanien 2005
Lösungen zur ersten Runde

R. Reindl

Aufgabe 1

Der Widerstand eines Drahtstückes ist proportional zu seiner Länge:

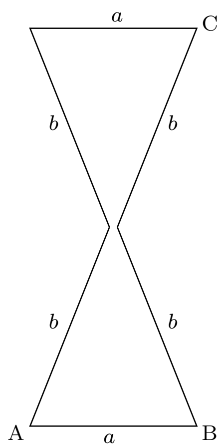
$$R_1 = \varrho \cdot a \tag{1.1}$$

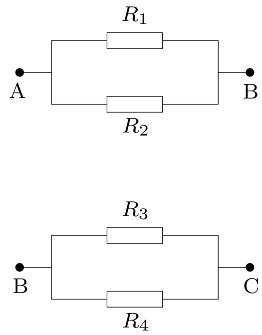
$$R_2 = \varrho \cdot (a + 4b) \tag{1.2}$$

$$R_3 = \varrho \cdot 2b \tag{1.3}$$

$$R_4 = \varrho \cdot 2(a + b) \tag{1.4}$$

R_{AB} ist die Parallelschaltung aus R_1 und R_2, R_{BC} ist die Parallelschaltung aus R_3 und R_4.





$$R_{\mathrm{AB}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \varrho \cdot \frac{a(a+4b)}{2(a+2b)} \tag{1.5}$$

$$R_{\mathrm{BC}} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \varrho \cdot \frac{2b \cdot 2(a+b)}{2(a+2b)} \tag{1.6}$$

$$1{,}6 \cdot R_{\mathrm{AB}} = R_{\mathrm{BC}} \quad \Longrightarrow \quad 1{,}6 \cdot a(a+4b) = 4b(a+b) \tag{1.7}$$

Umformen ergibt die quadratische Gleichung

$$5b^2 - 3ab = 2a^2 \tag{1.8}$$

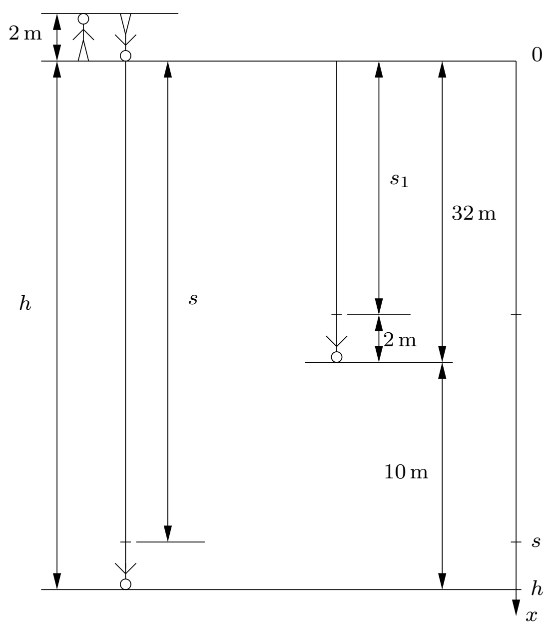
mit den Lösungen

$$b_1 = a \quad [\text{und} \quad b_2 = -0{,}4a] \tag{1.9}$$

Mit $b = a$ ist

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \frac{a}{2b} = \frac{1}{2} \tag{1.10}$$

Aufgabe 2



Die Länge des ungedehnten Seils ist s_0. Ganz unten ist die Seillänge $s = 40\,\mathrm{m}$ und die Fallhöhe $h = 42\,\mathrm{m}$. Beim ruhenden Springer ist die Seillänge $s_1 = 30\,\mathrm{m}$. Mit der „Federkonstanten“ D des Seils lautet der Energiesatz:

$$mgh = \frac{D}{2}(s - s_0)^2 \tag{2.1}$$

Beim ruhenden Springer kompensiert die Seilkraft die Gewichtskraft:

$$mg = D(s_1 - s_0) \tag{2.2}$$

Division der beiden Gleichungen:

$$h = \frac{(s - s_0)^2}{2(s_1 - s_0)} \tag{2.3}$$

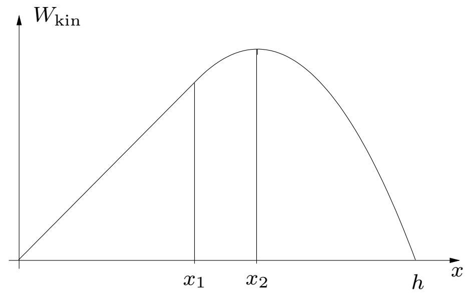
$$s_0^2 + 2(h - s)s_0 = 2hs_1 - s^2 \tag{2.4}$$

Auflösen nach s_0:

$$s_0 = -(h - s) \pm \sqrt{2hs_1 - s^2 + (h - s)^2} = -2\,\mathrm{m} \pm \sqrt{924}\,\mathrm{m} \tag{2.5}$$

Die positive Lösung ist

$$s_0 = -2\,\mathrm{m} + \sqrt{924}\,\mathrm{m} \approx 28{,}4\,\mathrm{m} \tag{2.6}$$



Ist x die Fallhöhe und $x_1 = s_0 + 2\,\mathrm{m} \approx 30{,}4\,\mathrm{m}$, dann ist die kinetische Energie des Springers

$$W_{\text{kin}}(x) = \begin{cases} mgx & \text{für } x \leqq x_1 \\ mgx - \frac{D}{2}(x - x_1)^2 & \text{für } x > x_1 \end{cases} \tag{2.7}$$

Ableitung nach x:

$$W'_{\text{kin}}(x) = \begin{cases} mg & \text{für } x \leqq x_1 \\ mg - D(x - x_1) & \text{für } x > x_1 \end{cases} \tag{2.8}$$

W_{kin} ist maximal für $W'_{\text{kin}}(x_2) = 0$, d.h. für

$$x_2 = \frac{mg}{D} + x_1 \overset{(2.2)}{=} s_1 - s_0 + s_0 + 2\,\mathrm{m} = 32\,\mathrm{m} \tag{2.9}$$

$$W_{\text{kin,max}} = W_{\text{kin}}(x_2) = mgx_2 - \frac{D}{2}(x_2 - x_1)^2 = mgx_2 - \frac{mg}{2}(x_2 - x_1) = \frac{mg}{2}(x_2 + x_1) \tag{2.10}$$

$$W_{\text{kin,max}} = \frac{m}{2}v_{\text{max}}^2 \quad \Longrightarrow \quad v_{\text{max}} = \sqrt{g(x_2 + x_1)} = \sqrt{g \cdot 62{,}4\,\mathrm{m}} = 24{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 89{,}0\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \tag{2.11}$$

Aufgabe 3

Da die Richtung von $\vec{v}$ nicht gegeben ist, nehmen wir sie beliebig an. Die Komponente von $\vec{v}$ parallel zur Winkelhalbierenden der festen Drähte ist dann $v_0 = v\cos\varphi$. Die in der Leiterschleife induzierte Spannung ist

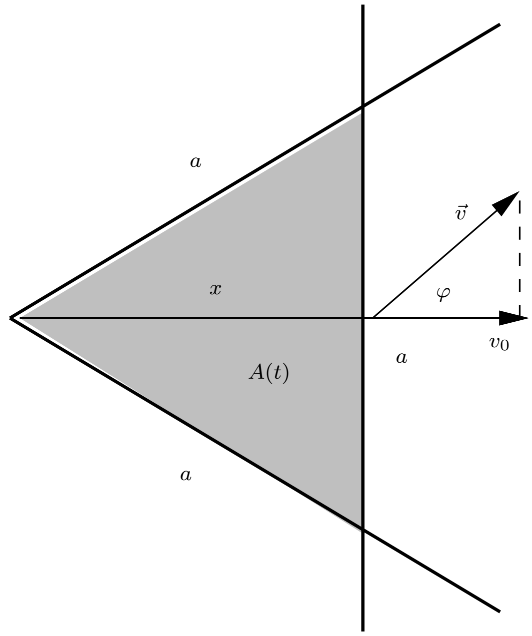
$$U(t) = B \cdot \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = B \cdot \frac{av_0\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = Bav_0 \quad (3.1)$$

Der Widerstand der Leiterschleife ist

$$R(t) = r \cdot 3a \quad (3.2)$$

und damit fließt der Strom

$$I(t) = \frac{U(t)}{R(t)} = \frac{Bv_0}{3r} = \frac{Bv\cos\varphi}{3r} \quad (3.3)$$



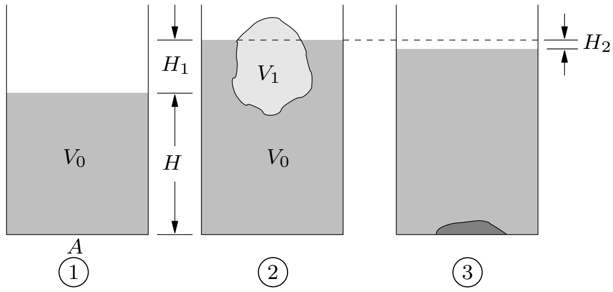
Mit den Zahlenwerten folgt

$$I(t) = 6{,}7\,\mathrm{A} \cdot \cos\varphi \quad (3.4)$$

Mit der Annahme $\varphi = 0$ ist $I(t) = 6{,}7\,\mathrm{A}$.

Aufgabe 4

$V_1 = H_1 A$ ist das Volumen des vom schwimmenden Körper verdrängten Wassers. Die Auftriebskraft kompensiert die Gewichtskraft:



$$(m_{\text{Eis}} + m_{\text{Sand}})g = \varrho_{\text{W}} A H_1 g \tag{4.1}$$

$$m_{\text{Eis}} + m_{\text{Sand}} = \varrho_{\text{W}} A H_1 = 2000\,\text{g} \tag{4.2}$$

Nach dem Schmelzen (Bild ③) ist

$$A(H + H_1 - H_2) = V_0 + \frac{m_{\text{Eis}}}{\varrho_{\text{W}}} + \frac{m_{\text{Sand}}}{\varrho_{\text{Sand}}} \tag{4.3}$$

$$\frac{m_{\text{Eis}}}{\varrho_{\text{W}}} + \frac{m_{\text{Sand}}}{\varrho_{\text{Sand}}} = A(H_1 - H_2) = 1900\,\text{cm}^3 \quad \Big|\cdot 1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \tag{4.4}$$

$$m_{\text{Eis}} + \frac{m_{\text{Sand}}}{2{,}5} = 1900\,\text{g} \tag{4.5}$$

(4.2) − (4.5):

$$m_{\text{Sand}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2{,}5}\right)}_{\frac{3}{5}} = 100\,\text{g} \tag{4.6}$$

$$m_{\text{Sand}} = 167\,\text{g}, \qquad m_{\text{Eis}} = 2000\,\text{g} - 167\,\text{g} = 1833\,\text{g}$$

Andere Möglichkeit:

$$m_{\text{ges}} = \underbrace{\varrho_{\text{W}}(H + H_1)A}_{②} = \underbrace{\varrho_{\text{W}}\left[(H + H_1 - H_2)A - V_{\text{Sand}}\right] + \varrho_{\text{Sand}} V_{\text{Sand}}}_{③} \tag{4.7}$$

$$0 = -\varrho_{\text{W}} H_2 A + (\varrho_{\text{Sand}} - \varrho_{\text{W}}) V_{\text{Sand}} \tag{4.8}$$

$$\frac{m_{\text{Sand}}}{\varrho_{\text{Sand}}} = \frac{\varrho_{\text{W}} H_2 A}{\varrho_{\text{Sand}} - \varrho_{\text{W}}} \quad \Longrightarrow \quad m_{\text{Sand}} = \frac{\varrho_{\text{W}} \varrho_{\text{Sand}} H_2 A}{\varrho_{\text{Sand}} - \varrho_{\text{W}}} = 167\,\text{g} \tag{4.9}$$