

Aufgabe 1a: Klotz auf schiefer Ebene

- (a) Die schiefe Ebene hat im System S der Unterlage die Geschwindigkeit

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} -V \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Im System S' der schiefen Ebene hat der Klotz die Geschwindigkeit

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} v'_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \cot \alpha \\ v_y \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

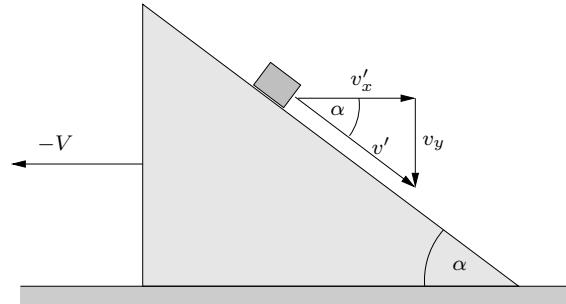


Abb.1.1

In S beträgt die Geschwindigkeit des Klotzes

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_x - V \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \cot \alpha - V \\ v_y \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Aus dem Impulssatz

$$-MV + m(v_y \cot \alpha - V) = 0 \quad (1.4)$$

folgt

$$V = \frac{m \cot \alpha}{m + M} v_y \quad (1.5)$$

und damit

$$v_x = \frac{M \cot \alpha}{m + M} v_y \quad (1.6)$$

Der Energiesatz lautet

$$\begin{aligned} 2mgh &= MV^2 + mv^2 = MV^2 + m(v_x^2 + v_y^2) = \\ &= v_y^2 \cdot \left[\frac{Mm^2 \cot^2 \alpha}{(m + M)^2} + \frac{M^2 m \cot^2 \alpha}{(m + M)^2} + m \right] = \\ &= mv_y^2 \cdot \left[1 + \frac{M \cot^2 \alpha}{(m + M)} \right] \end{aligned} \quad (1.7)$$

Für den Geschwindigkeitsbetrag v im System S der Unterlage gilt dann:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 = v_y^2 \cdot \left[1 + \frac{M^2 \cot^2 \alpha}{(m + M)^2} \right] = \\ &= 2gh \cdot \frac{1 + \frac{M^2 \cot^2 \alpha}{(m + M)^2}}{1 + \frac{M \cot^2 \alpha}{(m + M)}} = 2gh \cdot \frac{(m + M)^2 + M^2 \cot^2 \alpha}{(m + M)(m + M + M \cot^2 \alpha)} = \\ &= 2gh \cdot \frac{(m + M)^2 \sin^2 \alpha + M^2 \cos^2 \alpha}{(m + M)(M + m \sin^2 \alpha)} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$v = \sqrt{2gh \cdot k(m, M, \alpha)} \quad \text{mit} \quad k(m, M, \alpha) = \frac{(m + M)^2 \sin^2 \alpha + M^2 \cos^2 \alpha}{(m + M)(M + m \sin^2 \alpha)} \quad (1.9)$$

Mit $\mu = \frac{M}{m + M}$ folgt aus (1.8) und (1.9)

$$v = \sqrt{2gh \cdot f(\mu, \alpha)} \quad (1.10)$$

mit

$$f(\mu, \alpha) = \frac{1 + \mu^2 \cot^2 \alpha}{1 + \mu \cot^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \mu^2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \mu \cos^2 \alpha} = \frac{\mu^2 + \tan^2 \alpha}{\mu + \tan^2 \alpha} \quad (1.11)$$

v geht genau dann gegen null, wenn f gegen null geht. Für die weitere Untersuchung wählen wir die Form

$$f(\mu, \alpha) = \frac{\mu^2 + \tan^2 \alpha}{\mu + \tan^2 \alpha} \quad (1.12)$$

Wegen $f(0, \alpha) = 1$ und $f(\mu, 0) = \mu$ ist

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\lim_{\mu \rightarrow 0} f(\mu, \alpha) \right) = 1 \quad \text{und}$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\mu, \alpha) \right) = 0, \quad \text{d.h.} \quad \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \mu \rightarrow 0}} f(\mu, \alpha) \quad \text{existiert}$$

nicht. Der Grenzwert hängt davon ab, auf welcher Kurve $K: \mu = \mu(\alpha)$ man sich dem Nullpunkt nähert. In jedem noch so kleinen Rechteck $0 \leq \alpha < \varepsilon_\alpha$, $0 \leq \mu < \varepsilon_\mu$ gibt es z.B. Funktionswerte $f(\alpha, \mu) > 0,5$. Es genügt also nicht, einfach α und μ klein zu wählen, es kommt drauf an wie.

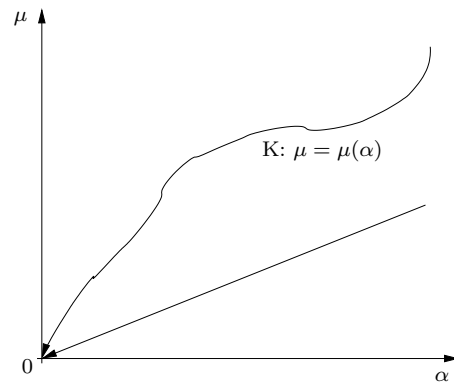


Abb.1.2 Verschiedene Wege

Zwei Beispiele ($\beta > 0$):

$$K: \quad \mu = \beta \cdot \tan^2 \alpha \quad \Longrightarrow \quad \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \mu \rightarrow 0}} f(\mu, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 + \beta^2 \tan^2 \alpha}{1 + \beta} = \frac{1}{1 + \beta} \quad (1.13)$$

$$K: \quad \mu = \beta \cdot \tan \alpha \quad \Longrightarrow \quad \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \mu \rightarrow 0}} f(\mu, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1 + \beta^2) \tan \alpha}{\beta + \tan \alpha} = 0 \quad (1.14)$$

Noch ein Beispiel (Massen in kg):

$$m = 1, M = 0,01, \alpha = 0,01: k(m, M, \alpha) = 0,0198$$

Verkleinert man jetzt M , wird k sogar wieder größer:

$$m = 1, M = 0,0001, \alpha = 0,01: k(m, M, \alpha) = 0,500$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad M \rightarrow \infty &\Longrightarrow \mu \rightarrow 1 \Longrightarrow f \rightarrow 1 \Longrightarrow v \rightarrow \sqrt{2gh} \\ \alpha \rightarrow 90^\circ &\Longrightarrow \tan \alpha \rightarrow \infty \Longrightarrow f \rightarrow 1 \Longrightarrow v \rightarrow \sqrt{2gh} \\ \alpha \rightarrow 0 &\Longrightarrow f \rightarrow \mu \Longrightarrow v \rightarrow \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{M}{m+M}} \end{aligned}$$

Die Lösung der Aufgabe war am einfachsten mit den Erhaltungssätzen. Bei der Lösung über die Analyse der beteiligten Kräfte muss man sehr vorsichtig zu Wege gehen und genau darauf achten, in welchem Bezugssystem man gerade arbeitet.

S sei das mit der Tischplatte verbundene System, S' das System, in dem die schiefe Ebene ruht. Die Beschleunigung der schiefen Ebene in S sei \vec{b} . In S' wirken drei Kräfte auf den Block, die Gewichtskraft $\vec{G} = m\vec{g}$, die von der schiefen Ebene auf den Block ausgeübte Kraft \vec{N} und die Trägheitskraft $-m\vec{b}$. Wegen fehlender Reibung steht \vec{N} senkrecht auf der Gleitfläche. Die Summe der drei Kräfte ergibt die Gesamtkraft \vec{F}' , die parallel zur Gleitfläche sein muss:

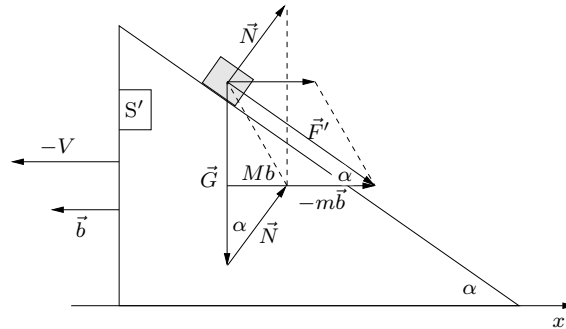


Abb.1.3 Analyse der Kräfte

$$\vec{F}' = \vec{G} + \vec{N} - m\vec{b} \quad (1.15)$$

Mit b bezeichnen wir den Betrag der Beschleunigung \vec{b} . Auf die schiefe Ebene wirken die Kräfte $M\vec{g}$, die vom Block ausgeübte Kraft $-\vec{N}$, die Trägheitskraft $-M\vec{b}$ und die Reaktionskraft der Tischoberfläche. Da die schiefe Ebene in S' ruht, ist die Gesamtkraft auf sie in S' null. Für die Komponenten in x -Richtung bedeutet das

$$-N \sin \alpha + Mb = 0 \quad \text{oder} \quad N \sin \alpha = Mb \quad (1.16)$$

Abb.1.3 bzw. Abb.1.4 entnimmt man mit $\mu = \frac{M}{M+m}$

$$G = mg = N \cos \alpha + (M+m)b \tan \alpha = Mb \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{\tan \alpha}{\mu} \right) \quad (1.17)$$

oder

$$b = \frac{mg}{M \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{\tan \alpha}{\mu} \right)} \quad (1.18)$$

Aus $F'_x = m \cdot a'_x = (M+m)b$ folgt dann für die Beschleunigung des Klotzes in x -Richtung in S'

$$a'_x = \frac{g}{\frac{\mu}{\tan \alpha} + \tan \alpha} = \frac{g \tan \alpha}{\mu + \tan^2 \alpha} \quad (1.19)$$

Die Beschleunigung in S ist dann

$$a_x = a'_x - b = a'_x \left(1 - \frac{m}{M+m} \right) = \mu \cdot a'_x \quad (1.20)$$

$$a_y = a'_y = a'_x \cdot \tan \alpha \quad (1.21)$$

Ist t die Zeit für die ganze Bewegung, dann gilt

$$t^2 = \frac{2h}{a_y} = \frac{2h(\mu + \tan^2 \alpha)}{g \tan^2 \alpha} \quad (1.22)$$

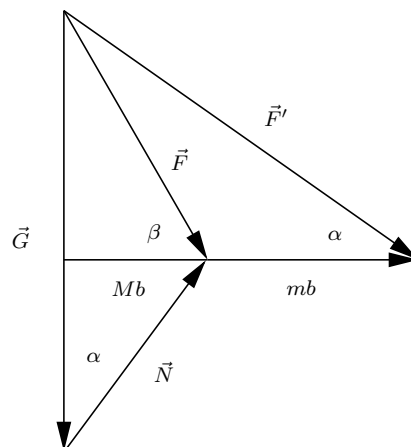


Abb.1.4 Analyse der Kräfte

Mit der Beschleunigung a des Klotzes in S gilt

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = a_x'^2 (\mu^2 + \tan^2 \alpha) = \frac{g^2 \tan^2 \alpha (\mu^2 + \tan^2 \alpha)}{(\mu + \tan^2 \alpha)^2} \quad (1.23)$$

und damit für die Endgeschwindigkeit v in S

$$v^2 = a^2 t^2 = \frac{g^2 \tan^2 \alpha (\mu^2 + \tan^2 \alpha) 2h(\mu + \tan^2 \alpha)}{(\mu + \tan^2 \alpha)^2 g \tan^2 \alpha} = \frac{2gh (\mu^2 + \tan^2 \alpha)}{(\mu + \tan^2 \alpha)} \quad (1.24)$$

und damit

$$v = \sqrt{\frac{2gh (\mu^2 + \tan^2 \alpha)}{(\mu + \tan^2 \alpha)}} \quad (1.25)$$

wie in (1.10).

In S bewegt sich der Klotz längs einer Geraden mit dem Neigungswinkel β zur Horizontalen (siehe Abb. 1.4):

$$\tan \beta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{a_y}{\mu a_x'} = \frac{\tan \alpha}{\mu} \quad (1.26)$$

Da die Kräfte oft falsch angesetzt werden, hier noch einmal zusammengefasst:

$$\mu = \frac{M}{M + m} \quad (1.27)$$

Die Kraft auf den Klotz im System S' der schiefen Ebene ist $\vec{F}' = \begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \end{pmatrix}$ mit

$$F'_x = -ma'_x = -mg \cdot \frac{\tan \alpha}{\mu + \tan^2 \alpha} \quad (1.28)$$

$$F'_y = -ma'_y = -mg \cdot \frac{\tan^2 \alpha}{\mu + \tan^2 \alpha} \quad (1.29)$$

$$F' = \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2} = \sqrt{\frac{m^2 g^2 \tan^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha)}{(\mu + \tan^2 \alpha)^2}} = \frac{mg \sin \alpha}{\mu \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \quad (1.30)$$

Die Kraft auf den Klotz im System S der Unterlage ist $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ mit

$$F_x = \mu \cdot F'_x = -ma_x = -mg \cdot \frac{\mu \tan \alpha}{\mu + \tan^2 \alpha} \quad (1.31)$$

$$F_y = F'_y = -ma_y = -mg \cdot \frac{\tan^2 \alpha}{\mu + \tan^2 \alpha} \quad (1.32)$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\frac{m^2 g^2 \tan^2 \alpha (\mu + \tan^2 \alpha)}{(\mu + \tan^2 \alpha)^2}} = \frac{mg \sin \alpha}{\sqrt{\mu \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} \quad (1.33)$$

Man sieht deutlich, dass weder F noch F' gleich dem üblichen $mg \sin \alpha$ ist. Genausowenig ist $N = mg \cos \alpha$, da aus (1.16) und (1.18) folgt:

$$N = \frac{Mb}{\sin \alpha} = \frac{mg \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\mu}} \quad (1.34)$$

Aufgabe 1b: Schwingender, quadratischer Körper

- (a) Ist ϱ die Flächendichte der Platte, dann ist das Trägheitsmoment des gezeichneten Keils mit dem Öffnungswinkel $d\varphi$

$$\begin{aligned} dI &= \int_0^r z^2 dm = \\ &= \varrho d\varphi \int_0^r z^3 dz = \frac{\varrho}{4} r^4 d\varphi \end{aligned} \quad (2.1)$$

Aus dem Sinussatz folgt

$$r = \frac{a\sqrt{2} \sin 45^\circ}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(135^\circ - \varphi)} \quad (2.2)$$

Da Trägheitsmoment um den Drehpunkt D ist dann

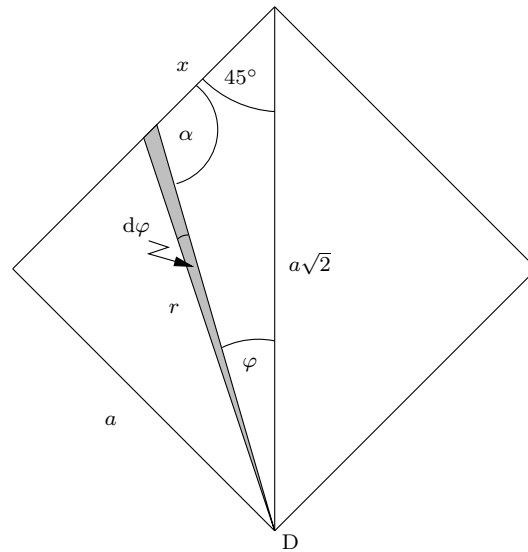


Abb.2.1 Trägheitsmoment um D

$$\begin{aligned} I &= 2 \cdot \frac{\varrho}{4} \int_0^{45^\circ} r^4 d\varphi = \frac{\varrho}{2} \int_0^{45^\circ} \frac{a^4}{\sin^4(135^\circ - \varphi)} d\varphi = \frac{\varrho a^4}{2} \int_{135^\circ}^{90^\circ} \frac{-d\sigma}{\sin^4 \sigma} = \\ &= \frac{\varrho a^4}{2} \int_{90^\circ}^{135^\circ} \frac{d\sigma}{\sin^4 \sigma} = -\frac{\varrho a^4}{2} \left[\frac{\cos \sigma}{3 \sin^3 \sigma} + \frac{2 \cos \sigma}{3 \sin \sigma} \right]_{90^\circ}^{135^\circ} = \frac{2}{3} \varrho a^4 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Mit $m = \varrho a^2$ folgt

$$I = \frac{2}{3} m a^2 \quad (2.4)$$

Oder mit Satz von Steiner: $I = I_{SP} + m \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{6} m a^2 + \frac{1}{2} m a^2 = \frac{2}{3} m a^2$

Mit dem Drehmoment

$$M = F \cdot \frac{a}{2} \sqrt{2} = \frac{a}{2} \sqrt{2} m g \sin \varphi \quad (2.5)$$

folgt aus $I\ddot{\varphi} = -M$ und der linearen Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$

$$\ddot{\varphi} \approx -\frac{3g\sqrt{2}}{4a} \cdot \varphi = -\omega^2 \varphi \quad (2.6)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{3g\sqrt{2}}{4a}} \quad (2.7)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4a}{3g\sqrt{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2\sqrt{2}a}{3g}} \quad (2.8)$$

$$T = 0,4966 \text{ s} \approx 0,50 \text{ s} \quad (2.9)$$

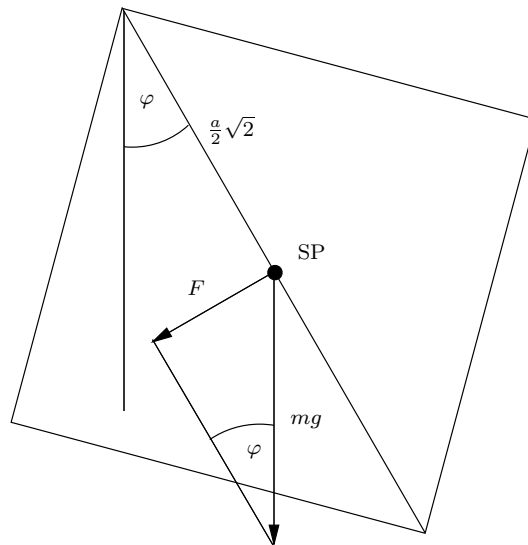


Abb.2.2

- (b) Die Zusatzmasse \bar{m} wird in der Entfernung x vom Drehpunkt D auf der Geraden von D durch den Mittelpunkt der Scheibe angebracht. Der neue Schwerpunkt hat von D die Entfernung s :

$$s = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}m + x\bar{m}}{m + \bar{m}} \quad (2.10)$$

Das gesamte Trägheitsmoment ist dann

$$I_1 = \frac{2}{3}ma^2 + \bar{m}x^2 \quad (2.11)$$

Das Drehmoment ist jetzt

$$M_1 \approx s(m + \bar{m})g\varphi \quad (2.12)$$

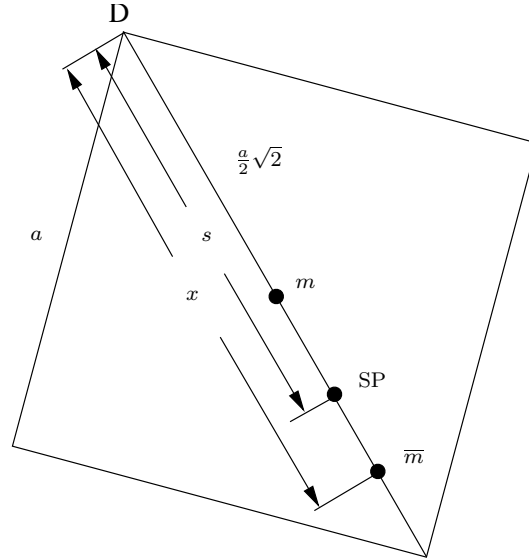


Abb.2.3 SP ist der neue Schwerpunkt

und die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{\varphi} = -\frac{M_1}{I_1} \approx -\frac{s(m + \bar{m})g}{\frac{2}{3}ma^2 + \bar{m}x^2} \cdot \varphi = -\omega_1^2 \varphi \quad (2.13)$$

Aus $\omega^2 = \omega_1^2$ folgt dann

$$\frac{3\sqrt{2}}{4a} = \frac{s(m + \bar{m})}{\frac{2}{3}ma^2 + \bar{m}x^2} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}m + x\bar{m}}{\frac{2}{3}ma^2 + \bar{m}x^2} = \frac{3a\sqrt{2}m + 6x\bar{m}}{4ma^2 + 6\bar{m}x^2} \quad (2.14)$$

mit den Lösungen

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{2\sqrt{2}a}{3} \approx 6,1 \text{ cm} \quad (2.15)$$

Aufgabe 2: Linsensystem

- (a) Für die Abbildung mit einer Linse vereinbaren wir: Die Gegenstandsweite a ist positiv, wenn der Gegenstand links von der Linse ist (M ist der Linsenmittelpunkt), die Bildweite b ist positiv, wenn das Bild rechts von M liegt. Die Gegenstandsgröße G und die Bildgröße g sind positiv, wenn das Objekt oder das Bild oberhalb der optischen Achse liegen, für konvexe Linsen ist $f > 0$.

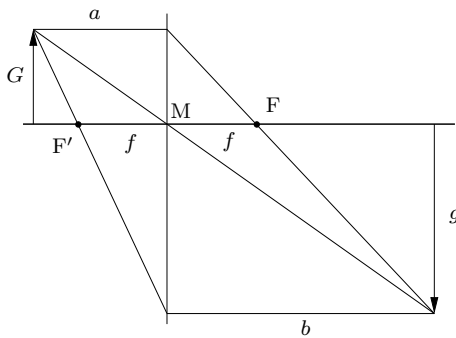


Abb.3.1 $a > f, b > 0$

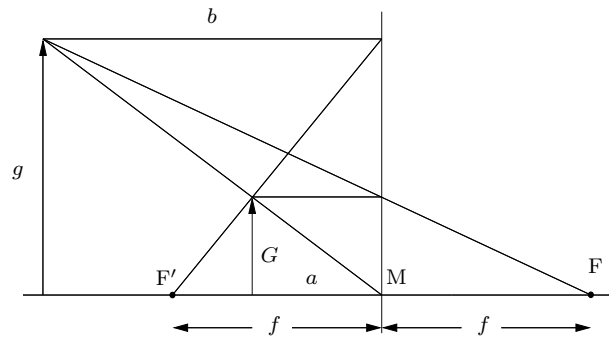


Abb.3.2 $a < f, b < 0$

Die Linsengleichungen

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad b = \frac{af}{a-f}, \quad g = -\frac{bG}{a} \quad (3.1)$$

gelten für beide Fälle $a > f$ und $a < f$. Man sieht leicht, dass die Bedingungen (I) und (II) mit nur einer Linse nicht zu erfüllen sind.

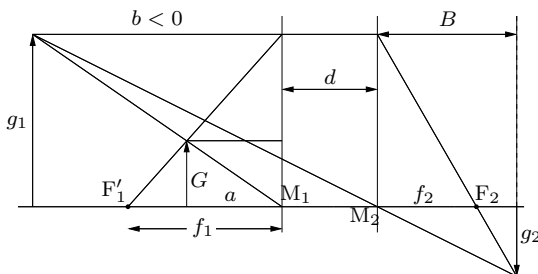


Abb.3.3 $a < f_1$

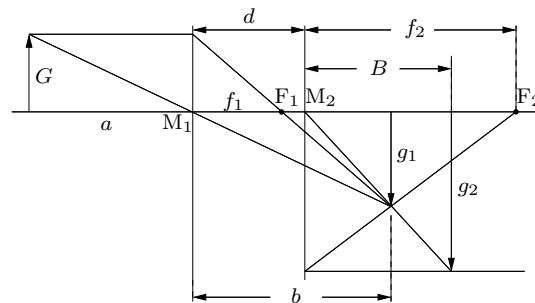


Abb.3.4 $a > f_1, b > d$

Für eine Anordnung aus zwei Linsen im Abstand d (siehe Abbildungen) gibt es die drei Möglichkeiten $a < f_1$, $a > f_1$ und $b > d$ bzw. $a > f_1$ und $b < d$. Die dritte Möglichkeit scheidet aus, da sie auf ein positives g_2 führt. In allen drei Fällen ist die Gegenstandsweite für die Abbildung durch die zweite Linse $a_2 = -b + d$.

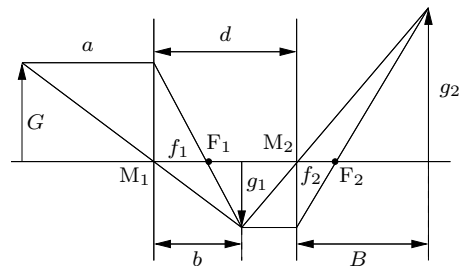


Abb.3.5 $a > f_1, b < d$

(b) Aus (3.1) folgen die Gleichungen für das System der beiden Linsen:

$$b = \frac{af_1}{a - f_1} \quad (3.2)$$

$$g_1 = -\frac{bG}{a} = -\frac{f_1G}{a - f_1} \quad (3.3)$$

$$B = \frac{(d - b)f_2}{d - b - f_2} = \frac{(d - \frac{af_1}{a-f_1})f_2}{d - \frac{af_1}{a-f_1} - f_2} = \frac{(ad - df_1 - af_1)f_2}{ad - df_1 - af_1 - af_2 + f_1f_2} \quad (3.4)$$

$$g_2 = -\frac{Bg_1}{d - b} = \frac{f_1f_2G}{(d - b - f_2)(a - f_1)} = \frac{f_1f_2G}{ad - df_1 - af_1 - af_2 + f_1f_2} \quad (3.5)$$

Die Entfernung vom Gegenstand zum Bild der zweiten Linse ist $a + d + B$. Damit können die Bedingungen (I) und (II) als Gleichungen formuliert werden:

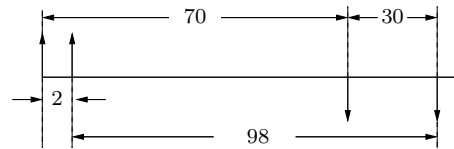


Abb.3.6

$$g_2 = -3G \implies \frac{f_1f_2}{ad - df_1 - af_1 - af_2 + f_1f_2} = -3 \quad (3.6)$$

Wir rechnen zunächst mit allgemeinen Größen (x statt 70 cm, α statt 2 cm und β statt 30 cm):

$$a + d + B = x \implies a + d + \frac{(ad - df_1 - af_1)f_2}{ad - df_1 - af_1 - af_2 + f_1f_2} = x \quad (3.7)$$

Mit $a' = a - \alpha$ lautet dann die dritte Gleichung:

$$a + d + B' = x + \beta \implies a + d + \frac{(a'd - df_1 - a'f_1)f_2}{a'd - df_1 - a'f_1 - af_2 + f_1f_2} = x + \beta \quad (3.8)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$d = \frac{9x\alpha\alpha - 9a^2\alpha + \beta a^2 - \beta ax + \beta\alpha x + 8\beta a\alpha}{9a\alpha - \beta a + 4\beta\alpha} \quad (3.9)$$

$$f_1 = \frac{9x\alpha\alpha - 9a^2\alpha + \beta a^2 - \beta ax + \beta\alpha x + 8\beta a\alpha}{9x\alpha + 16\beta\alpha - \beta x} \quad (3.10)$$

$$f_2 = \frac{3\alpha\beta(9x\alpha\alpha - 9a^2\alpha + \beta a^2 - \beta ax + \beta\alpha x + 8\beta a\alpha)}{(9a\alpha - \beta a + 4\beta\alpha)^2} \quad (3.11)$$

Für die Bildweite B folgt daraus

$$B = \frac{3\beta\alpha(-4a + x)}{9a\alpha - \beta a + 4\beta\alpha} \quad (3.12)$$

Die Bildgröße bei verschobenem Gegenstand ist

$$g_2' = -\frac{\beta}{3\alpha}G \quad (3.13)$$

Der Einfachheit halber die folgenden Ergebnisse ohne Einheiten (alle Längen in cm).

Für $\alpha = 2$, $x = 70$ und $\beta = 30$ folgt mit $0 < a < 20$:

$$d = \frac{a^2 - 30a + 350}{20 - a} \quad (3.14)$$

$$f_1 = \frac{a^2 - 30a + 350}{10} \quad (3.15)$$

$$f_2 = 15 \frac{a^2 - 30a + 350}{(20 - a)^2} = \frac{150 f_1}{(20 - a)^2} \quad (3.16)$$

$$B = 30 \frac{35 - 2a}{20 - a} \quad (3.17)$$

$$g'_2 = -5G \quad (3.18)$$

Es folgt eine Tabelle mit möglichen Lösungen:

a	d	f_1	f_2	B
5	15	22,5	15	50
8	14,5	17,4	18,125	47,5
10	15	15	22,5	45
14	21	12,6	52,5	35
15	25	12,5	75	30
17	43	12,9	215	10

Eine weitere Lösung ist

$$a = 20 - 5\sqrt{6} \approx 7,75 \quad d = 10(\sqrt{6} - 1) \approx 14,49 \quad f_1 = f_2 = 30 - 5\sqrt{6} \approx 17,75 \quad (3.19)$$

(c) Für $\alpha = 2$, $x = 100$ und $\beta = 30$ lauten die Ergebnisse:

$$d = \frac{a^2 - 60a + 500}{20 - a} \quad (3.20)$$

$$f_1 = -\frac{a^2 - 60a + 500}{20} \quad (3.21)$$

$$f_2 = 15 \frac{a^2 - 60a + 500}{(20 - a)^2} = -\frac{300 f_1}{(20 - a)^2} \quad (3.22)$$

Man sieht, dass f_1 und f_2 verschiedene Vorzeichen haben, also eine der beiden Linsen, im Gegensatz zur Annahme, konkav ist.

Aufgabe 3: Thermoelektrische Kühlung

- (a) Die von den Temperaturunterschieden hervorgerufenen Wärmeströme sind Φ_{tn} und Φ_{tp} , die vom elektrischen Strom verursachten Wärmeströme sind Φ_{en} und Φ_{ep} .
In einer Scheibe der Dicke dx wird vom Strom I die Wärmeleistung

$$d\Phi_t = dP = RI^2 \cdot \frac{dx}{L} = \frac{I^2}{\sigma A} dx \quad (4.1)$$

erzeugt, die gleich der Änderung $d\Phi_t$ des thermischen Wärmestromes ist. Aus (4.1) folgt

$$\Phi_t(x) = \frac{I^2}{\sigma A} \cdot x + \Phi_t(0) \quad (4.2)$$

Aus der Wärmeleitgleichung

$$\Phi_t(x) = -kA \frac{dT}{dx} \quad (4.3)$$

und (4.2) folgt

$$-kA \frac{dT}{dx} = \frac{I^2}{\sigma A} \cdot x + \Phi_t(0) \quad (4.4)$$

mit der Lösung

$$T(x) = T_H - \frac{I^2}{2\sigma kA^2} \cdot x^2 - \frac{\Phi_t(0)}{kA} \cdot x \quad (4.5)$$

$$T_K = T(L) = T_H - \frac{I^2 L^2}{2\sigma kA^2} - \frac{\Phi_t(0)L}{kA} \quad (4.6)$$

$$\Phi_t(0) = -\frac{I^2 L}{2\sigma A} + \frac{kA}{L}(T_H - T_K) \quad (4.7)$$

(4.7) in (4.2):

$$\Phi_t(L) = \frac{I^2 L}{2\sigma A} + \frac{kA}{L}(T_H - T_K) \quad (4.8)$$

Vom zu kühlenden Kupferplättchen geht auf den n-Leiter die Wärmeleistung

$$\dot{Q}_{Kn} = (\alpha_{Cu} - \alpha_n)T_K I - \Phi_{tn}(L) = (\alpha_{Cu} - \alpha_n)T_K I - \frac{I^2 L}{2\sigma_n A} - \frac{k_n A}{L}(T_H - T_K) \quad (4.9)$$

über. Analog für den p-Leiter (andere Stromrichtung!):

$$\dot{Q}_{Kp} = (\alpha_p - \alpha_{Cu})T_K I - \Phi_{tp}(L) = (\alpha_p - \alpha_{Cu})T_K I - \frac{I^2 L}{2\sigma_p A} - \frac{k_p A}{L}(T_H - T_K) \quad (4.10)$$

$$\dot{Q}_K = \dot{Q}_{Kp} + \dot{Q}_{Kn} = (\alpha_p - \alpha_n)T_K I - \underbrace{\frac{(k_n + k_p)A}{L}}_a (T_H - T_K) - \underbrace{\frac{L}{2A} \left(\frac{1}{\sigma_n} + \frac{1}{\sigma_p} \right)}_b \cdot I^2 \quad (4.11)$$

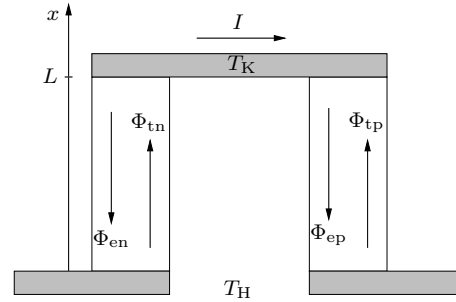


Abb.4.1 Wärmeströme

(b) Aus (4.11) folgt

$$T_K = \frac{\dot{Q}_K + aT_H + bI^2}{a + \Delta\alpha I} \quad (4.12)$$

Wenn T_K minimal ist, ist T_K auch konstant, d.h. $\dot{Q}_K = 0$. Damit ist

$$T_K = \frac{aT_H + bI^2}{a + \Delta\alpha I} \quad (4.13)$$

$$\frac{dT_K}{dI} = \frac{2b(a + \Delta\alpha)I - \Delta\alpha(aT_H + bI^2)}{(a + \Delta\alpha I)^2} \quad (4.14)$$

Aus $\frac{dT_K}{dI} = 0$ folgt

$$\begin{aligned} 2b(a + \Delta\alpha)I - \Delta\alpha(aT_H + bI^2) &= 0 \\ b\Delta\alpha I^2 + 2abI &= aT_H\Delta\alpha \\ I^2 + 2 \cdot \frac{a}{\Delta\alpha} \cdot I &= \frac{aT_H}{b} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$I = -\frac{a}{\Delta\alpha} \pm \sqrt{\frac{aT_H}{b} + \frac{a^2}{\Delta\alpha^2}} \quad (4.16)$$

Wegen $I > 0$ ist

$$I = -\frac{a}{\Delta\alpha} + \sqrt{\frac{aT_H}{b} + \frac{a^2}{\Delta\alpha^2}} = 3,06 \text{ A} \quad (4.17)$$

und aus (4.13) folgt

$$T_K = 230 \text{ K} \quad (4.18)$$

Aufgabe 4: Kugel auf schiefer Ebene

Auf die Kugel wirkt die Gewichtskraft mg , die in den Hangabtrieb

$$H = mg \sin \varphi \quad (5.1)$$

und in die Normalkraft

$$N = mg \cos \varphi \quad (5.2)$$

zerlegt wird. Am Berührungspunkt wirkt auf die Kugel die Reibungskraft

$$R = \mu N = \mu mg \cos \varphi \quad (5.3)$$

Wir nehmen an, dass die schiefe Ebene immer die Länge L hat, die Höhe ist dann

$$h = L \sin \varphi \quad (5.4)$$

Mit v bezeichnen wir die Geschwindigkeit der Kugel am Ende der schiefen Ebene,

$$v_x = v \cos \varphi \quad (5.5)$$

ist ihre horizontale Komponente.

Fall 1: Keine Reibung, d.h. $\mu = 0$, die Kugel gleitet ohne zu Rollen.

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gL \sin \varphi}, \quad v_x = \sqrt{2gL} \cos \varphi \sqrt{\sin \varphi} \quad (5.6)$$

Fall 2: Die Kugel rollt ohne zu Gleiten ($\tan \varphi \leq \frac{7}{2} \mu$).

Das Trägheitsmoment der Kugel um den Mittelpunkt ist

$$I = \frac{2}{5} mr^2 \quad (5.7)$$

Beim reinen Rollen gilt mit der Winkelgeschwindigkeit ω

$$v = r\omega \quad (5.8)$$

Damit lautet der Energiesatz

$$mgh = \frac{I}{2} \omega^2 + \frac{m}{2} v^2 = \frac{mr^2 v^2}{5r^2} + \frac{m}{2} v^2 = \frac{7}{10} mv^2 \quad (5.9)$$

und es gilt

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} gh}, \quad v_x = \sqrt{\frac{10}{7} gL} \cos \varphi \sqrt{\sin \varphi} \quad (5.10)$$

Die Beschleunigung der Kugel parallel zum Hang ist

$$a = \frac{v^2}{2L} = \frac{v^2 \sin \varphi}{2h} = \frac{5}{7} g \sin \varphi \quad (5.11)$$

Mit der Gleitreibungszahl μ wäre die reine Gleitbeschleunigung

$$a_G = \frac{H - R}{m} = g(\sin \varphi - \mu \cos \varphi) \quad (5.12)$$

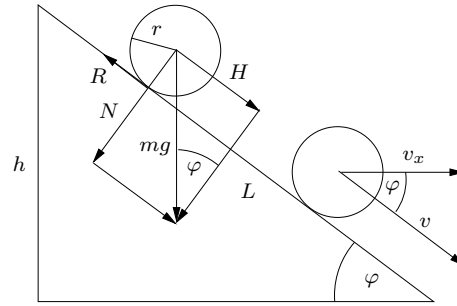


Abb.5.1

Die Bedingung für das reine Rollen ist $a \geq a_G$, d.h.

$$\frac{5}{7} g \sin \varphi \geq g(\sin \varphi - \mu \cos \varphi) \quad (5.13)$$

oder

$$\tan \varphi \leq \frac{7}{2} \mu \quad (5.14)$$

Fall 3: Die Kugel rollt und gleitet ($\tan \varphi > \frac{7}{2} \mu$).

Die Kugel erfährt die Beschleunigung

$$a_G = \frac{H - R}{m} = g(\sin \varphi - \mu \cos \varphi) \quad (5.15)$$

Die Reibungskraft R bewirkt das Drehmoment

$$M = Rr = \mu mgr \cos \varphi \quad (5.16)$$

Damit erfährt die Kugel die Winkelbeschleunigung

$$\dot{\omega} = \frac{M}{I} = \frac{2\mu g \cos \varphi}{5r} \quad (5.17)$$

Wegen des Gleitens trägt die Drehbewegung **nicht** zur Transversalbewegung teil, d.h. a_G ist die gesamte transversale Beschleunigung. Damit gilt am Ende der Bahn

$$v = \sqrt{2La_G} = \sqrt{2Lg(\sin \varphi - \mu \cos \varphi)} \quad (5.18)$$

und

$$v_x = \sqrt{2Lg} \cos \varphi \sqrt{\sin \varphi - \mu \cos \varphi} \quad (5.19)$$

Die Zeit für die ganze Bewegung ist

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a_G}} = \sqrt{\frac{2L}{g(\sin \varphi - \mu \cos \varphi)}} \quad (5.20)$$

und damit ist am Ende der schiefen Ebene

$$\omega = \dot{\omega} \cdot t = \frac{2\mu \cos \varphi}{5r} \sqrt{\frac{2Lg}{\sin \varphi - \mu \cos \varphi}} \quad (5.21)$$

Der Weg, den die Kugel rein rollend zurückgelegt hätte, wäre

$$s_R = \frac{\dot{\omega} r}{2} t^2 \quad (5.22)$$

Der reine Gleitweg ist also

$$s_G = L - s_R = L - \frac{\dot{\omega} r}{2} t^2 \quad (5.23)$$

Die Reibungsarbeit während der Bewegung ist

$$W_R = N s_G = \mu mg \cos \varphi \cdot \left(L - \frac{\dot{\omega} r}{2} t^2 \right) \quad (5.24)$$

Zur Bestätigung der bisherigen Rechnungen kann man zeigen, dass tatsächlich der Energiesatz

$$W_R + \frac{I}{2} \omega^2 + \frac{m}{2} v^2 = mgL \sin \varphi = mgh \quad (5.25)$$

erfüllt ist.

Für $\mu = 0$ geht (5.19) in (5.6) über. Zusammenfassend gilt also:

$$v_x = \begin{cases} \sqrt{\frac{10}{7}gL} \cos \varphi \sqrt{\sin \varphi} & \text{für } \tan \varphi \leq \frac{7}{2}\mu \\ \sqrt{2Lg} \cos \varphi \sqrt{\sin \varphi - \mu \cos \varphi} & \text{für } \tan \varphi > \frac{7}{2}\mu \end{cases} \quad (5.26)$$

oder

$$v_x = \sqrt{2Lg} \cdot \sqrt{f(\varphi)} \quad \text{mit} \quad f(\varphi) = \begin{cases} f_r(\varphi) = \frac{5}{7} \sin \varphi \cos^2 \varphi & \text{für } \tan \varphi \leq \frac{7}{2}\mu \\ f_g(\varphi) = (\sin \varphi - \mu \cos \varphi) \cos^2 \varphi & \text{für } \tan \varphi > \frac{7}{2}\mu \end{cases} \quad (5.27)$$

v_x ist maximal, wenn $f(\varphi)$ maximal ist. Man sieht leicht, dass f bei $\varphi = \arctan \frac{7}{2}\mu$ stetig ist.

$$f'(\varphi) = \begin{cases} f'_r(\varphi) = \frac{5}{7} (\cos^3 \varphi - 2 \sin^2 \varphi \cos \varphi) & \text{für } \tan \varphi \leq \frac{7}{2}\mu \\ f'_g(\varphi) = \cos^3 \varphi - 2 \sin^2 \varphi \cos \varphi + 3\mu \cos^2 \varphi \sin \varphi & \text{für } \tan \varphi > \frac{7}{2}\mu \end{cases} \quad (5.28)$$

hat zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ die Lösungen

$$\varphi_r = \arctan \frac{\sqrt{2}}{2} = 35,3^\circ \quad (5.29)$$

und

$$\varphi_g = \arctan \frac{3\mu + \sqrt{8 + 9\mu^2}}{4} \quad (5.30)$$

Für $\mu > \frac{\sqrt{2}}{7} = \mu_1 \approx 0,202$ ($\tan \varphi_r < \frac{7}{2}\mu$) liegt φ_r im Definitionsbereich und das Maximum bei φ_r wird angenommen.

Für $\mu < \frac{1}{\sqrt{14}} = \mu_2 \approx 0,267$ ($\tan \varphi_g > \frac{7}{2}\mu$) liegt φ_g im Definitionsbereich und das Maximum bei φ_g wird angenommen.

Für $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ hat $f(\varphi)$ zwei lokale Maxima. Für $\mu < \mu_3 \approx 0,2305$ ist aber $f(\varphi_g) > f(\varphi_r)$.

$$\varphi_{\max} = \begin{cases} \varphi_g = \arctan \frac{3\mu + \sqrt{8 + 9\mu^2}}{4} & \text{für } \mu < \mu_3 \\ \varphi_r = \arctan \frac{\sqrt{2}}{2} = 35,3^\circ & \text{für } \mu > \mu_3 \end{cases} \quad (5.31)$$

Das Maximum von φ_{\max} ist $\varphi_g(\mu_3) = 42,0^\circ$.