37. Internationale Physik-Olympiade – Singapur 2006
Lösungen zur zweiten Runde
R. Reindl

Aufgabe 1: Elektro-mechanischer Oszillator

Formeln zum Plattenkondensator mit der Plattenfläche S, dem Plattenabstand d, der Spannung U und der Feldstärke E zwischen den Platten, der Kapazität C, der Ladung Q auf einer Platte und der Kraft F, mit der sich die Platten anziehen:

$$U = Ed, \qquad E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}, \qquad C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \qquad F = \frac{1}{2}QE \tag{1.1}$$

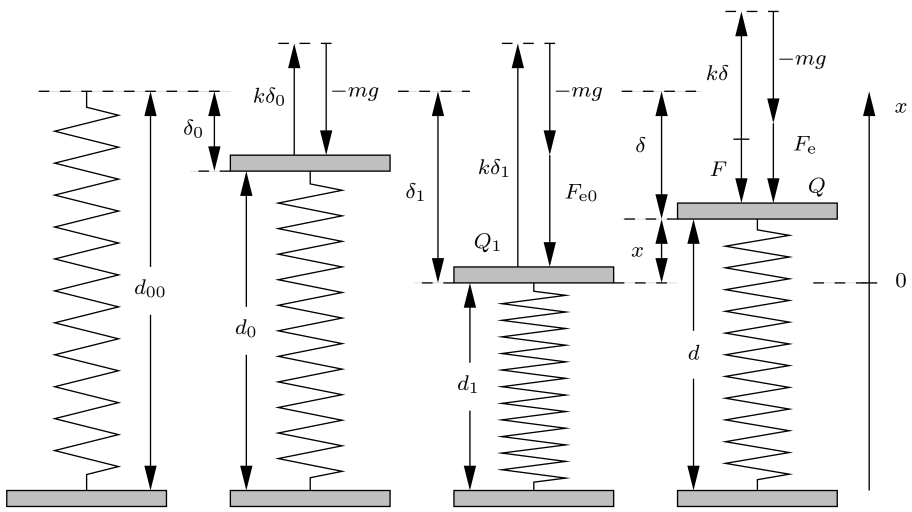

Abb.1.1 Kräfte

d_{00}: Länge der Feder ohne Belastung

(a) Gleichgewicht ohne Spannung: $k\delta_0 = mg$

$$F = k(\delta_0 - x) - mg = -kx = m\ddot{x} \tag{1.2}$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} \cdot x \quad \Longrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.3}$$

(b) Gleichgewicht mit $\delta_1 = d_0 + \delta_0 - d_1$:

$$k(d_0 + \delta_0 - d_1) - mg + F_{e0} = 0 \quad \Longrightarrow \quad F_{e0} = -k(d_0 - d_1) \tag{1.4}$$

$$|F_{e0}| = -F_{e0} = \frac{1}{2}Q_1 E_1 = \frac{Q_1^2}{2\varepsilon_0 S} = \varepsilon_0 S E_1^2 = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d_1^2} = k(d_0 - d_1) \tag{1.5}$$

$$U = d_1 \sqrt{\frac{2k(d_0 - d_1)}{\varepsilon_0 S}} \tag{1.6}$$

(c) Mit $\delta = d_0 + \delta_0 - d_1 - x$ folgt für die Gesamtkraft F auf die obere Platte:

$$F(x) = k(d_0 + \delta_0 - d_1 - x) - mg + F_e = -kx + k(d_0 - d_1) + F_e = -kx + F_e - F_{e0} \tag{1.7}$$

$$F_\mathrm{e} = -\frac{1}{2}QE = -\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^2} \overset{(1.5)}{=} -\frac{k(d_0-d_1)d_1^2}{(d_1+x)^2} \overset{(1.4)}{=} \frac{F_{\mathrm{e}0}d_1^2}{(d_1+x)^2} \tag{1.8}$$

(1.8) in (1.7):

$$F(x) = -kx + \frac{F_{\mathrm{e}0}d_1^2}{(d_1+x)^2} - F_{\mathrm{e}0} = -kx + F_{\mathrm{e}0}\left(\frac{d_1^2}{(d_1+x)^2} - 1\right) \tag{1.9}$$

Mit $|x| \ll d_1$ gilt

$$\frac{d_1^2}{(d_1+x)^2} - 1 = \frac{1}{(1+\frac{x}{d_1})^2} - 1 \approx \frac{1}{1+\frac{2x}{d_1}} - 1 \approx -\frac{2x}{d_1} \tag{1.10}$$

und damit

$$\begin{aligned} F(x) &\approx -kx - F_{\mathrm{e}0}\cdot\frac{2x}{d_1} = -kx + k(d_0-d_1)\cdot\frac{2x}{d_1} = \\ &= -k\left(1 - \frac{2(d_0-d_1)}{d_1}\right)\cdot x = -\frac{k(3d_1-2d_0)}{d_1}\cdot x \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\ddot{x} = -\frac{k(3d_1-2d_0)}{md_1}\cdot x = -\omega^2 x \tag{1.12}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k(3d_1-2d_0)}{md_1}} = \sqrt{\frac{k}{m}\left(3-\frac{2d_0}{d_1}\right)} \tag{1.13}$$

(d) Die Ladung auf der oberen Platte ist

$$Q = Q_1 + q, \tag{1.14}$$

die Spannung zwischen den Platten

$$U' = U - L\dot{I} = U - L\ddot{Q} \tag{1.15}$$

$$U' = \frac{Q}{C} = \frac{Q(d_1+x)}{\varepsilon_0 S} \tag{1.16}$$

$$L\ddot{q} + U' = U \tag{1.17}$$

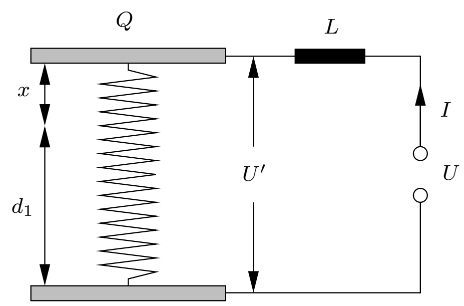

Abb.1.2 Mit Induktivität

$$L\ddot{q} + \frac{(d_1+x)(Q_1+q)}{\varepsilon_0 S} = L\ddot{q} + \frac{d_1Q_1 + d_1q + xQ_1 + xq}{\varepsilon_0 S} = U = \frac{Q_1 d_1}{\varepsilon_0 S} \tag{1.18}$$

$$L\ddot{q} + \frac{x(Q_1+q)}{\varepsilon_0 S} + \frac{qd_1}{\varepsilon_0 S} = 0 \tag{1.19}$$

Die Kraft auf die obere Platte ist

$$F(x) = -kx - F_{\mathrm{e}0} + F_\mathrm{e} = -kx + \frac{Q_1^2}{2\varepsilon_0 S} - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} = -kx + \frac{(Q_1-Q)(Q_1+Q)}{2\varepsilon_0 S} \tag{1.20}$$

$$m\ddot{x} = -kx - \frac{q(2Q_1+q)}{2\varepsilon_0 S} \tag{1.21}$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{q(2Q_1+q)}{2\varepsilon_0 mS} \tag{1.22}$$

$$\ddot{q} = -\frac{x(Q_1+q)+qd_1}{\varepsilon_0 SL} \tag{1.23}$$

Mit

$$A = \frac{k}{m}, \quad B = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 m S}, \quad C = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 L S}, \quad D = \frac{d_1}{\varepsilon_0 L S}, \quad \alpha = \frac{1}{2\varepsilon_0 m S}, \quad \beta = \frac{1}{\varepsilon_0 L S} \tag{1.24}$$

schreiben sich (1.22) und (1.23)

$$\ddot{x} = -Ax - Bq - \alpha q^2 \tag{1.25}$$

$$\ddot{q} = -Cx - Dq - \beta x q \tag{1.26}$$

Unter der Annahme einer harmonischen Schwingung ist

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad \text{und} \quad \ddot{q} = -\omega^2 q \tag{1.27}$$

Damit folgt aus (1.25) und (1.26)

$$Ax + Bq + \alpha q^2 = \omega^2 x \tag{1.28}$$

$$Cx + Dq + \beta x q = \omega^2 q \tag{1.29}$$

Aus (1.28) folgt

$$x = \frac{Bq + \alpha q^2}{\omega^2 - A} \tag{1.30}$$

Eingesetzt in (1.29):

$$\underbrace{\frac{CB}{\omega^2 - A} + D - \omega^2}_{k_1} + \underbrace{\frac{C\alpha + B\beta}{\omega^2 - A}}_{k_2} \cdot q + \underbrace{\frac{\alpha\beta}{\omega^2 - A}}_{k_3} \cdot q^2 = 0 \tag{1.31}$$

Das Polynom (1.31) muss identisch null sein, d.h. $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Es folgt zunächst $\alpha = \beta = 0$, d.h. in (1.22) und (1.23) wird q in den Summen gegen Q_1 vernachlässigt. Diese Näherung ist für $|x| \ll d_1$ gerechtfertigt, da

$$Q = Q_1 + q = \frac{\varepsilon_0 S U}{d_1 + x} \approx Q_1 \left(1 - \frac{x}{d_1}\right) \quad \Longrightarrow \quad |q| \approx Q_1 \frac{|x|}{d_1} \tag{1.32}$$

Wie zu erwarten gibt es also nur dann harmonische Lösungen des Systems (1.25) und (1.26), wenn es linear ist. Die Bedingung $k_1 = 0$ führt auf

$$\frac{CB}{\omega^2 - A} + D - \omega^2 = 0 \tag{1.33}$$

$$\omega^4 - (A + D)\omega^2 = CB - AD \tag{1.34}$$

$$\omega^2 = \frac{A + D}{2} \pm \sqrt{CB - AD + \frac{(A + D)^2}{4}} = \frac{A + D}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + D^2 + 4BC - 2AD} \tag{1.35}$$

$$\begin{aligned} 4BC - 2AD &= \frac{4Q_1^2}{\varepsilon_0^2 m L S^2} - \frac{2kd_1}{\varepsilon_0 m L S} \overset{(1.5)}{=} \frac{8k(d_0 - d_1) - 2kd_1}{\varepsilon_0 m L S} = \\ &= \frac{2k(4d_0 - 5d_1)}{\varepsilon_0 m L S} = 2AD\left(4\frac{d_0}{d_1} - 5\right) \end{aligned} \tag{1.36}$$

Mit der rein mechanischen Resonanzfrequenz ω_m und der rein elektrischen Resonanzfrequenz ω_e gilt

$$\omega_\mathrm{m}^2 = \frac{k}{m} = A \quad \text{und} \quad \omega_\mathrm{e}^2 = \frac{1}{LC_1} \overset{(1.1)}{=} \frac{d_1}{\varepsilon_0 L S} = D \tag{1.37}$$

(1.35), (1.36) und (1.37):

$$\omega^2 = \frac{\omega_\mathrm{m}^2 + \omega_\mathrm{e}^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\omega_\mathrm{m}^4 + \omega_\mathrm{e}^4 + 2\omega_\mathrm{m}^2\omega_\mathrm{e}^2\left(4\frac{d_0}{d_1} - 5\right)} = \tag{1.38}$$

$$= \frac{\omega_\mathrm{m}^2 + \omega_\mathrm{e}^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_\mathrm{m}^2 - \omega_\mathrm{e}^2)^2 + 8\omega_\mathrm{m}^2\omega_\mathrm{e}^2\left(\frac{d_0}{d_1} - 1\right)} \tag{1.39}$$

Da die Kondensatorplatten für $U \neq 0$ ungleichnamig geladen sind, gilt $d_1 < d_0$, d.h.

$$\frac{d_0}{d_1} - 1 > 0 \tag{1.40}$$

und damit ist der Radikand der Wurzel in (1.39) immer positiv.
(1.38) hat nur eine Lösung, wenn die Wurzel größer oder gleich $\omega_\mathrm{m}^2 + \omega_\mathrm{e}^2$ ist:

$$\text{eine Lösung}: \quad 4\frac{d_0}{d_1} - 5 \geqq 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d_0}{d_1} \geqq \frac{3}{2} \tag{1.41}$$

$$\text{zwei Lösungen}: \quad 1 < \frac{d_0}{d_1} < \frac{3}{2} \tag{1.42}$$

Aufgabe 2: Kühlung eines Eisenbahntunnels

(a) Im zeitlichen Mittel befinden sich $\frac{33}{4} = 8{,}25$ Züge in einer Röhre, die die Leistung

$$P = 4{,}5\,\mathrm{MW} \cdot \frac{33}{4} = 37\,\mathrm{MW} \tag{2.1}$$

umsetzen.

$$P = C \cdot \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \cdot \Delta T \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{C\Delta T} = \frac{33 \cdot 4{,}5\,\mathrm{MW}}{4 \cdot C \cdot 25\,\mathrm{K}} = 3{,}5 \cdot 10^2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \tag{2.2}$$

(b) Der günstigste Wirkungsgrad ist der einer Carnotmaschine, betrieben als Wärmepumpe. Das kalte Reservoir ist das zu kühlende Wasser der momentanen Temperatur T, das warme Reservoir ist die Umgebung mit der Temperatur T_U. Ist $\mathrm{d}W$ die in die Maschine gesteckte Arbeit und $\mathrm{d}Q$ die dem Wasser entzogene Wärme, dann gilt

$$\eta = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}W} = \frac{T}{T_\mathrm{U} - T} \tag{2.3}$$

Mit $\mathrm{d}Q = -MC\mathrm{d}T$ folgt

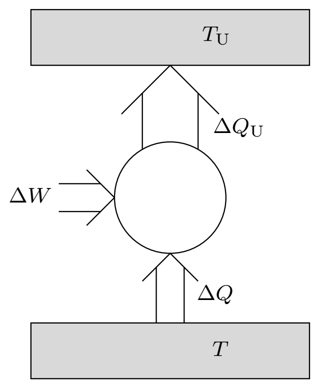

Abb.2.1 Wärmepumpe

$$\mathrm{d}W = \frac{T_\mathrm{U} - T}{T}\,\mathrm{d}Q = -MC\left(\frac{T_\mathrm{U}}{T} - 1\right)\mathrm{d}T \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} W &= -MC \int_{T_\mathrm{U}}^{T_\mathrm{K}} \left(\frac{T_\mathrm{U}}{T} - 1\right)\mathrm{d}T = -MC\left[T_\mathrm{U} \ln\frac{T_\mathrm{K}}{T_\mathrm{U}} + (T_\mathrm{U} - T_\mathrm{K})\right] = \\ &= -MC\left[T_\mathrm{U} \ln\left(1 - \frac{\Delta T}{T_\mathrm{U}}\right) + \Delta T\right] \end{aligned} \tag{2.5}$$

Mit der Näherung

$$\ln(1 + x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 \quad \text{für} \quad |x| \ll 1 \tag{2.6}$$

folgt aus (2.5)

$$W \approx -MC\left[T_\mathrm{U}\left(-\frac{\Delta T}{T_\mathrm{U}} - \frac{\Delta T^2}{2{T_\mathrm{U}}^2}\right) + \Delta T\right] = \frac{MC\Delta T^2}{2T_\mathrm{U}} \tag{2.7}$$

(c)

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}C\left[T_\mathrm{U} \ln\left(1 - \frac{\Delta T}{T_\mathrm{U}}\right) + \Delta T\right] \tag{2.8}$$

Mit $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = 3{,}5 \cdot 10^2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$, $T_\mathrm{U} = 293\,\mathrm{K}$ und $\Delta T = 15\,\mathrm{K}$ ist

$$P = 0{,}59\,\mathrm{MW} \tag{2.9}$$

Mit der Näherung (2.7) ist

$$P = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{C\Delta T^2}{2T_\mathrm{U}} = 0{,}57\,\mathrm{MW} \tag{2.10}$$

Aufgabe 3: Planetenbewegung

(a) Innerer Planet: Index 1, äußerer Planet: Idex 2. Da der Graf des Winkelabstandes zwei Nullstellen pro Periode enthält, wird der innere Planet 1 vom äußeren Planeten 2 aus beobachtet. Der Winkelabstand ist also φ in Abb.3.1.
T_ν sei die Umlaufdauer, r_ν der Radius der Keisbahn und ω_ν die Winkelgeschwindigkeit von Planet ν, betrachtet in einem Inertialsystem. Aus

$$\frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = G \cdot \frac{mM}{r^2} \tag{3.1}$$

folgt

$$\omega_\nu = \frac{\sqrt{GM}}{r_\nu^{\frac{3}{2}}} \tag{3.2}$$

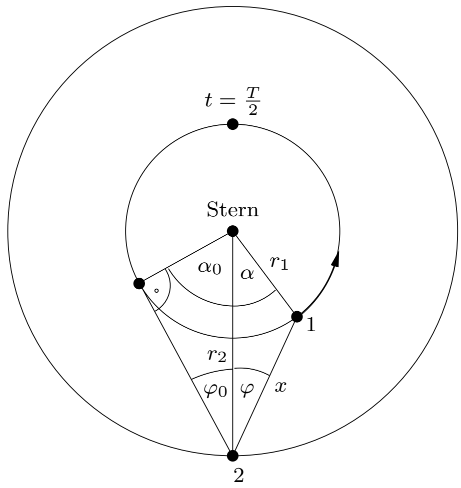

Abb.3.1 Planetenbahnen

Wir betrachten die Bewegung von Planet 1 in einem Bezugssystem S, das mit ω_2 um den Stern rotiert, d.h. Planet 2 ruht in S. In S rotiert Planet 1 mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \tag{3.3}$$

und für den Winkel α gilt (siehe Abb.3.1)

$$\alpha(t) = \omega t \tag{3.4}$$

Dem Grafen entnimmt man

$$\alpha_0 \approx \frac{6}{23}\,\pi = 0{,}26\,\pi = 47^\circ \tag{3.5}$$

und damit für das Verhältnis der Bahnradien

$$\frac{r_1}{r_2} = \sin\varphi_0 = \cos\alpha_0 = 0{,}68 \approx \frac{2}{3} \tag{3.6}$$

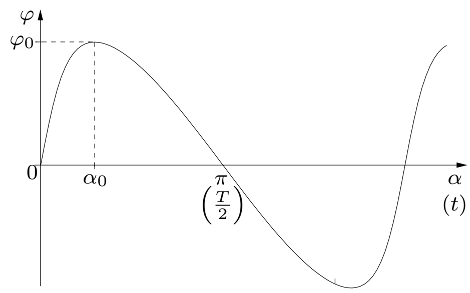

Abb.3.2 Winkelabstand

Durch Auszählen der Kästchen erhält man für das Verhältnis der Steigungen des Grafen von $\varphi(\alpha)$ bzw. $\varphi(t)$ in den beiden Nullstellen:

$$\frac{\dot\varphi(0)}{\dot\varphi\left(\frac{T}{2}\right)} \approx \frac{\frac{11}{1}}{\frac{11}{4}} = 4 \tag{3.7}$$

Mit der konstanten Umlaufgeschwindigkeit v von Planet 1 (betrachtet im System S) gilt:

$$\dot\varphi(0) = \frac{v}{r_2 - r_1} \quad \text{und} \quad \dot\varphi\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{v}{r_2 + r_1} \tag{3.8}$$

und damit

$$\frac{\dot\varphi(0)}{\dot\varphi\left(\frac{T}{2}\right)} = \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1} = \frac{1 + \frac{r_1}{r_2}}{1 - \frac{r_1}{r_2}} \approx 4 \quad \Longrightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} \approx \frac{4-1}{4+1} = 0{,}6 \tag{3.9}$$

(b) Aus (3.5) folgt für die maximale Winkelauslenkung

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 \approx 0{,}24\,\pi = 43^\circ \mathrel{\widehat{=}} 3{,}6\,\text{Einheiten} \quad \Longrightarrow \quad \text{Einheit} \mathrel{\widehat{=}} \frac{\pi}{15} = 12^\circ \tag{3.10}$$

(c) Aus (3.2) und (3.3) folgt mit $T = 4{,}6\,\mathrm{a}$ und $r_1 = r_2 \cos\alpha_0$:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_1 - \omega_2 = \frac{\sqrt{GM}}{r_1^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{GM}}{r_2^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{GM} \cdot \left(\frac{1}{(\cos\alpha_0)^{\frac{3}{2}}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{r_2^{\frac{3}{2}}} \tag{3.11}$$

$$r_2 = \left[\frac{T\sqrt{GM}}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{(\cos\alpha_0)^{\frac{3}{2}}} - 1 \right) \right]^{\frac{2}{3}} = 3{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} \tag{3.12}$$

$$r_1 = r_2 \cos\alpha_0 = 2{,}4 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} \tag{3.13}$$

Aufgabe 4: Trägheitsmoment eines Rades

(a) Theorie:

Rad austarieren (kein Drehmoment).
Zusatzmasse m im Abstand R zur Achse. Das Trägheitsmoment des Rades sei Θ, das gesamte Trägheitsmoment ist

$$\Theta_{\mathrm{g}} = \Theta + mR^2 \tag{4.1}$$

Das Drehmoment auf das Rad ist

$$M = \Theta_{\mathrm{g}}\ddot{\varphi} = -mgR\sin\varphi \tag{4.2}$$

Für kleine Auslenkungen gilt $\sin\varphi \approx \varphi$ und damit

$$\ddot{\varphi} \approx -\frac{mgR}{\Theta_{\mathrm{g}}}\varphi = -\omega^2\varphi \tag{4.3}$$

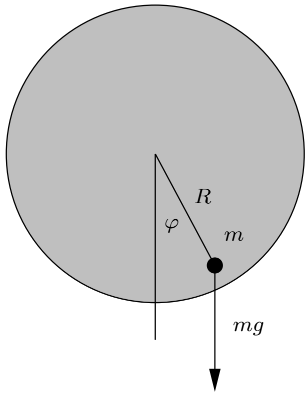

Abb.4.1 Zusatzmasse

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgR}{\Theta_{\mathrm{g}}}} \tag{4.4}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_{\mathrm{g}}}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta + mR^2}{mgR}} \tag{4.5}$$

Ein Näherungswert für das Trägheitsmoment ist also

$$\Theta^* = \frac{mgRT^2}{4\pi^2} - mR^2 \tag{4.6}$$

Exakte Berechnung von Θ:

Ist φ_0 der maximale Auslenkwinkel, dann lautet der Energiesatz:

$$\frac{\Theta_{\mathrm{g}}}{2}\dot{\varphi}^2 + mgR(1-\cos\varphi) = mgR(1-\cos\varphi_0) \tag{4.7}$$

$$\frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \sqrt{\frac{2mgR}{\Theta_{\mathrm{g}}}} = \sqrt{\frac{2mgR}{\Theta + mR^2}} =: \alpha \tag{4.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \alpha\,\mathrm{d}t \tag{4.9}$$

$$G(\varphi_0) := \int_0^{\varphi_0} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \alpha\frac{T}{4} \tag{4.10}$$

$$T = \frac{4G(\varphi_0)}{\alpha} = 4G(\varphi_0)\cdot\sqrt{\frac{\Theta + mR^2}{2mgR}} \tag{4.11}$$

Mit den Substitutionen

$$k = \sin\frac{\varphi_0}{2} \quad \text{und} \quad \sin u = \frac{1}{k}\sin\frac{\varphi}{2} \tag{4.12}$$

und den trigonometrischen Formeln

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1 - 2k^2\sin^2 u \tag{4.13}$$

$$\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\varphi\right) = 1 - k^2\sin^2 u \tag{4.14}$$

folgt

$$\cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2k}\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2k}\sqrt{1-k^2\sin^2 u}\,\mathrm{d}\varphi \tag{4.15}$$

und

$$\cos\varphi - \cos\varphi_0 = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2} - \left(1-2k^2\right) = 2k^2\left(1-\sin^2 u\right) = 2k^2\cos^2 u \tag{4.16}$$

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{2k\cos u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} \tag{4.17}$$

$$G(\varphi_0) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2k\cos u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{2}k\cos u\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = \sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} \tag{4.18}$$

Mit dem elliptischen Integral

$$F(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} \tag{4.19}$$

folgt

$$T = \frac{4G(\varphi_0)}{\alpha} = 4\sqrt{2}F(k)\cdot\sqrt{\frac{\Theta+mR^2}{2mgR}} = 4F(k)\cdot\sqrt{\frac{\Theta+mR^2}{mgR}} \tag{4.20}$$

$$\Theta = \frac{mgRT^2}{16F(k)^2} - mR^2 \tag{4.21}$$

$$|k| \ll 1 \quad\Longrightarrow\quad F(k) \approx \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{k^2}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\varphi_0^2}{16}\right) \tag{4.22}$$

$$\frac{1}{F(k)^2} \approx \frac{4}{\pi^2\left(1+\frac{\varphi_0^2}{16}\right)^2} \approx \frac{4}{\pi^2}\left(1-\frac{\varphi_0^2}{8}\right) \tag{4.23}$$

$$\Theta = \frac{mgRT^2}{4\pi^2}\cdot\left(1-\frac{\varphi_0^2}{8}\right) - mR^2 \tag{4.24}$$

Der relative Fehler ist von (4.6) bezüglich (4.21) ist dabei

$$\delta_{\mathrm{rel}} = \frac{\Theta^* - \Theta}{\Theta} \approx \frac{\varphi_0^2}{8} = \delta'_{\mathrm{rel}} \tag{4.25}$$

φ_0	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
δ_{rel}	0,4%	1,6%	3,6%	6,5%	10,4%	15,5%	22,0%	30,1%	40,4%
δ'_{rel}	0,4%	1,5%	3,4%	6,1%	9,5%	13,7%	18,7%	24,4%	30,8%