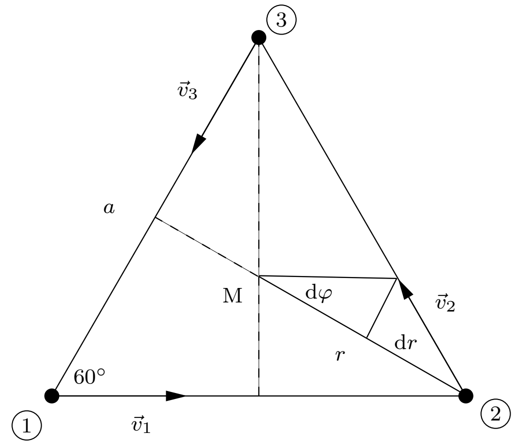
38. Internationale Physik-Olympiade – Iran 2007
Lösungen zur ersten Runde

R. Reindl

Aufgabe 1

Relativgeschwindigkeit zwischen ① und ②:

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -v - \frac{v}{2} \\ \frac{v}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$



Annäherungsgeschwindigkeit zwischen ① und ②:

$$v_{\mathrm{a}} = \left|-v - \frac{v}{2}\right| = \frac{3}{2}v = 4{,}5\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}} \tag{1.2}$$

Zeit bis zum Treffpunkt:

$$t_1 = \frac{a}{v_{\mathrm{a}}} = \frac{50\,\mathrm{cm}}{4{,}5\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}}} = 11{,}1\,\mathrm{min} \tag{1.3}$$

$$a(t) = a_0 - v_{\mathrm{a}}t = a_0 - \frac{3}{2}vt \tag{1.4}$$

$$r(t) = \frac{a(t)}{\sqrt{3}} = \frac{a_0 - \frac{3}{2}vt}{\sqrt{3}} \tag{1.5}$$

$r(t_1) = 0$, d.h. Treffpunkt zur Zeit t_1 im Mittelpunkt M des Umkreises.

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{v\,\mathrm{d}t}{2r} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \dot{\varphi} = \frac{v}{2r} = \frac{v\sqrt{3}}{2a_0 - 3vt} \tag{1.6}$$

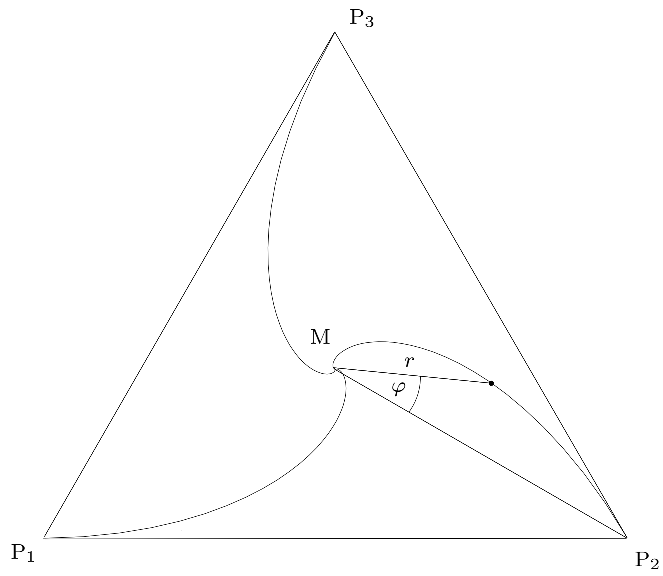
$$\varphi(t) = \int_0^t \omega(t')\mathrm{d}t' = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{2a_0}{2a_0 - 3vt} \tag{1.7}$$

Auflösen nach t:

$$t = \frac{2a_0}{3v}\left(1 - e^{-\varphi\sqrt{3}}\right) \tag{1.8}$$

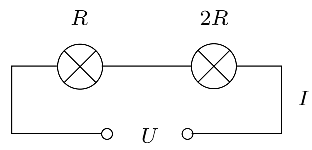
Einsetzen in (1.5) liefert die Gleichung der Bahnkurve in Polarkoordinaten:

$$r(\varphi) = \frac{a_0}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\varphi\sqrt{3}} \tag{1.9}$$



Aufgabe 2

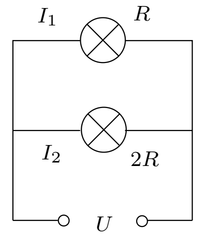
Reihenschaltung: $\quad I = \dfrac{U}{3R}$



$$P_1 = RI^2 = \frac{U^2}{9R}, \qquad P_2 = 2RI^2 = \frac{2U^2}{9R} = 2P_1 \tag{2.1}$$

$$P_{\text{ges}} = P_1 + P_2 = 3P_1 = \frac{U^2}{3R} \tag{2.2}$$

Parallelschaltung:



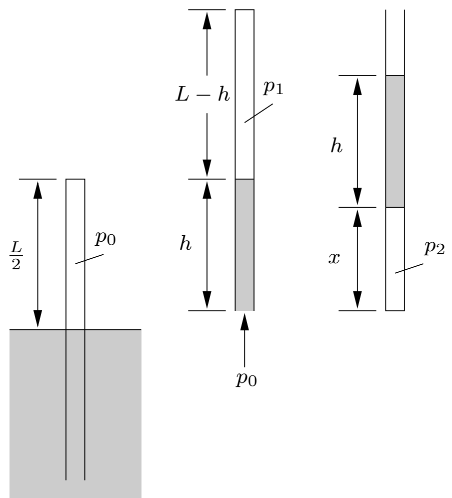
$$I_1 = \frac{U}{R}, \qquad I_2 = \frac{U}{2R} \tag{2.3}$$

$$P_1' = \frac{U^2}{R}, \qquad P_2' = \frac{U^2}{2R} = \frac{P_1'}{2} \tag{2.4}$$

$$P_{\text{ges}}' = P_1' + P_2' = \frac{3U^2}{2R} = \frac{9}{2}P_{\text{ges}} \tag{2.5}$$

Aufgabe 3

Äußerer Luftdruck: p_0
Länge des Rohres: L
Querschnittsfläche des Rohres: A
Dichte des Wassers: ϱ
Unter der Annahme isothermer Prozesse (konstanter Temperatur) folgt aus der Gasgleichung $pV =$ konst.:



$$p_0 \cdot \frac{L}{2} \cdot A = p_1(L-h)A \tag{3.1}$$

$$p_1 = p_0 - \varrho g h \tag{3.2}$$

(3.2)in (3.1):

$$p_0 \cdot \frac{L}{2} = (p_0 - \varrho g h)(L-h) \quad \Longrightarrow \quad \varrho g h^2 - (\varrho g L + p_0)h = -\frac{p_0 L}{2} \tag{3.3}$$

$$h = \frac{\varrho g L + p_0}{2\varrho g} \pm \frac{\sqrt{p_0^2 + \varrho^2 g^2 L^2}}{2\varrho g} = \frac{L}{2} + \frac{p_0 \pm \sqrt{p_0^2 + \varrho^2 g^2 L^2}}{2\varrho g} \tag{3.4}$$

Wegen $h < \frac{L}{2}$ gilt das untere Vorzeichen:

$$h = \frac{L}{2} + \frac{p_0 - \sqrt{p_0^2 + \varrho^2 g^2 L^2}}{2\varrho g} = 47{,}67\,\text{cm} \tag{3.5}$$

Aus $p_0 \cdot \dfrac{L}{2} = p_2 x$ und $p_2 = p_0 + \varrho g h$ folgt

$$x = \frac{p_0 L}{2p_2} = \frac{p_0 L}{2(p_0 + \varrho g h)} = \frac{p_0 L}{3p_0 + \varrho g L - \sqrt{p_0^2 + \varrho^2 g^2 L^2}} = 47{,}87\,\text{cm} \tag{3.6}$$

Aufgabe 4

Zunächst muss man sich für ein Bezugssystem entscheiden. Wir wählen das System, in dem der Tisch ruht. Die Kreide beginnt die Bewegung zur Zeit $t_0 = 0$ am Ort $x_0 = 0$ mit der Geschwindigkeit $-v_0$ und der Beschleunigung $a = \mu g$:

$$x(t) = -v_0 t + \frac{\mu g}{2} t^2 \qquad \text{und} \qquad v(t) = -v_0 + \mu g t \tag{4.1}$$

Zur Zeit

$$t_1 = \frac{v_0}{\mu g} \tag{4.2}$$

erreicht die Kreide die Geschwindigkeit 0 relativ zum Tisch (wenn $\tau \geqq t_1$).

Fall 1: $\tau \geqq t_1$

$$x_1 = x(t_1) = -\frac{v_0^2}{2\mu g} \tag{4.3}$$

Für $t_1 < t \leqq \tau$ ruht die Kreide. Anschließend Bewegung mit $a = -\mu g$, der Startgeschwindigkeit v_0 und Startort x_1 (Uhr wieder auf null gestellt):

$$x(t) = -\frac{v_0^2}{2\mu g} + v_0 t - \frac{\mu g}{2} t^2 \qquad \text{und} \qquad v(t) = v_0 - \mu g t \tag{4.4}$$

Die Kreide kommt zur Ruhe zur Zeit

$$t_2 = \frac{v_0}{\mu g} \tag{4.5}$$

am Ort

$$x_2 = x(t_2) = -\frac{v_0^2}{2\mu g} + \frac{v_0^2}{\mu g} - \frac{v_0^2}{2\mu g} = 0 \tag{4.6}$$

Der Kreidestrich hat also die Länge $\frac{v_0^2}{2\mu g}$.

Fall 2: $\tau < t_1$

$$x_3 = x(\tau) = -v_0 \tau + \frac{\mu g}{2}\tau^2, \qquad v_3 = v(t_3) = -v_0 + \mu g \tau \tag{4.7}$$

Anschließend Bewegung mit $a = -\mu g$, der Startgeschwindigkeit $v_3 + v_0 = \mu g \tau$ und Startort x_3 (Uhr wieder auf null gestellt):

$$x(t) = -v_0\tau + \frac{\mu g}{2}\tau^2 + \mu g \tau t - \frac{\mu g}{2} t^2 \qquad \text{und} \qquad v(t) = \mu g \tau - \mu g t \tag{4.8}$$

Die Kreide kommt zur Ruhe zur Zeit

$$t_4 = \frac{\mu g \tau}{\mu g} = \tau \tag{4.9}$$

am Ort

$$x_4 = -v_0\tau + \frac{\mu g}{2}\tau^2 + \mu g \tau^2 - \frac{\mu g}{2}\tau^2 = -v_0\tau + \mu g \tau^2 = \underbrace{(-v_0 + \mu g \tau)}_{<0} \cdot \tau < 0 \tag{4.10}$$

Der Kreidestrich hat also die Länge $|x_3| = v_0\tau - \frac{\mu g}{2}\tau^2$.