

Aufgabe 1: Federbetrachtungen

1.1 Federsystem

- (a) Der Angriffspunkt P der Kraft \vec{F} ist masselos, d.h.

$$L_2 = L_0 + \frac{F}{k} = L_0 + \frac{\alpha}{k} t \quad (1.1)$$

$$L_1 = L_0 + \frac{mg}{k} + x \quad (1.2)$$

Gesamtkraft auf m :

$$F_{\text{ges}} = F + mg - k(L_1 - L_0) = F - kx \quad (1.3)$$

Daraus folgt die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + kx = \alpha t \quad (1.4)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (1.5)$$

Die Lösung ist

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{\alpha}{k} t \quad (1.6)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.7) \text{ Abb.1.1 Koordinaten}$$

$$x(0) = A \sin \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 \quad (1.8)$$

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos \omega t + \frac{\alpha}{k} \quad (1.9)$$

$$\dot{x}(0) = A\omega + \frac{\alpha}{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{\alpha}{k\omega} \quad (1.10)$$

$$x(t) = -\frac{\alpha}{k\omega} \sin \omega t + \frac{\alpha}{k} t \quad (1.11)$$

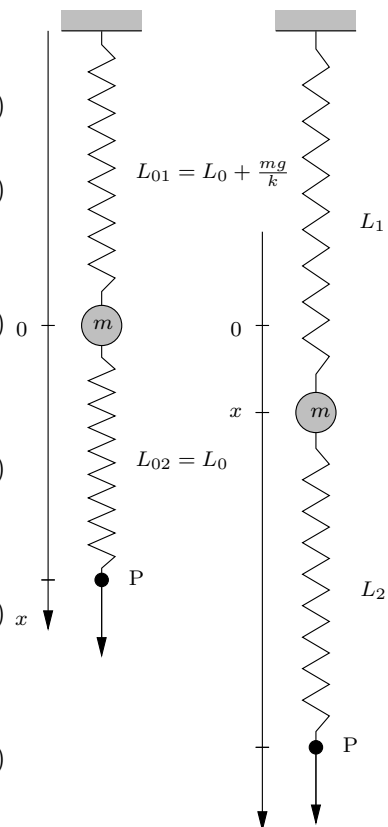
$$L_1(t) = L_0 + \frac{mg}{k} - \frac{\alpha}{k\omega} \sin \omega t + \frac{\alpha}{k} t \quad (1.12)$$

- (b) Feder 2 reißt zur Zeit t_2 mit

$$t_2 = \frac{(L_{\text{krit}} - L_0)k}{\alpha} = 0,2 \text{ s} \quad (1.13)$$

Feder 1 reißt zur Zeit t_1 mit

$$L_0 + \frac{mg}{k} - \frac{\alpha}{k\omega} \sin \omega t_1 + \frac{\alpha}{k} t_1 = L_{\text{krit}} \quad (1.14)$$



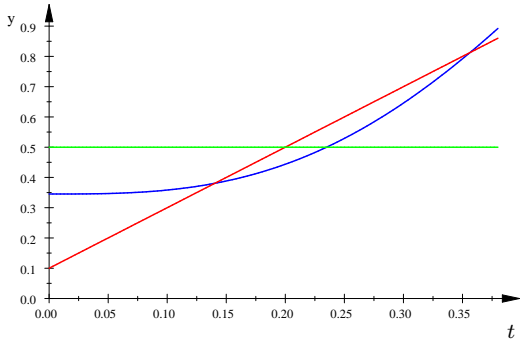


Abb.1.2 $L_1(t), L_2(t)$

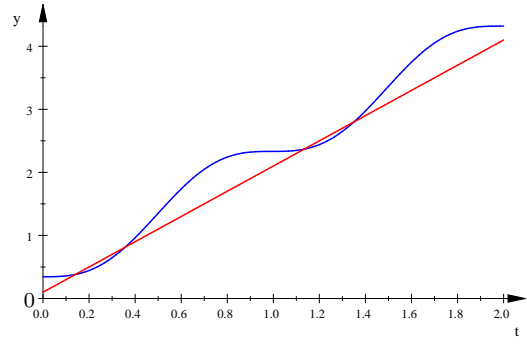


Abb.1.3 größeres Zeitintervall

Eine numerische oder grafische Lösung ergibt

$$t_1 = 0,23 \text{ s} \quad (1.15)$$

Gleichzeitiges Reißen, wenn $L_{\text{krit}} = L_2(t^*)$ mit $L_1(t^*) = L_2(t^*)$:

$$L_0 + \frac{mg}{k} - \frac{\alpha}{k\omega} \sin \omega t^* + \frac{\alpha}{k} t^* = L_0 + \frac{\alpha}{k} t^* \quad (1.16)$$

$$\sin \omega t^* = \frac{mg\omega}{\alpha} \quad (1.17)$$

$$t_1^* = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{mg\omega}{\alpha} + \frac{2n\pi}{\omega} = 0,140 \text{ s} + n \cdot 0,993 \text{ s} \quad (1.18)$$

$$t_2^* = \frac{1}{\omega} \left(\pi - \arcsin \frac{mg\omega}{\alpha} \right) + \frac{2n\pi}{\omega} = 0,356 \text{ s} + n \cdot 0,993 \text{ s} \quad (1.19)$$

$$L_{\text{krit},1} = L_0 + \frac{\alpha}{k} t_1^* = L_0 + \frac{\alpha}{k\omega} \arcsin \frac{mg\omega}{\alpha} + n \cdot \frac{2\pi\alpha}{k\omega} = 0,38 \text{ m} + n \cdot 1,99 \text{ m} \quad (1.20)$$

$$L_{\text{krit},2} = L_0 + \frac{\alpha}{k\omega} \left(\pi - \arcsin \frac{mg\omega}{\alpha} \right) + \frac{2n\pi}{\omega} = 0,81 \text{ m} + n \cdot 1,99 \text{ m} \quad (1.21)$$

1.2 Artistenfrage

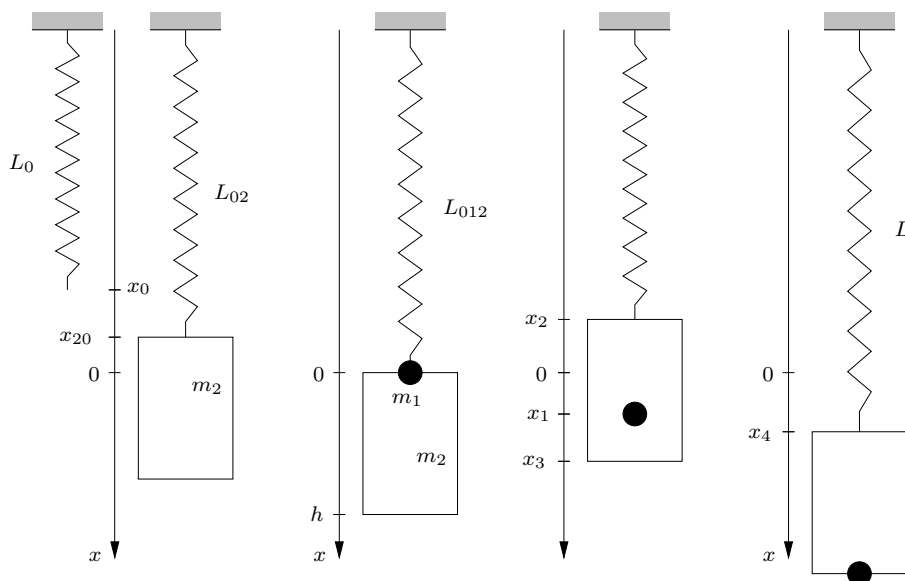


Abb.1.4 Wahl der Bezeichnungen

(a)

$$\text{Ende der unbelasteten Feder: } x_0 = -\frac{(m_1 + m_2)g}{k} \quad (1.22)$$

$$\text{Ruhelage der oberen Sprosse ohne } m_1: x_{20} = -\frac{m_1g}{k} \quad (1.23)$$

Freier Fall von m_1 im Zeitintervall $[0, t_1]$ (x -Achse nach unten!):

$$x_1(t) = \frac{g}{2}t^2 \quad (1.24)$$

Harmonische Schwingung der oberen Sprosse (m_2) um x_{20} mit der Amplitude $A_2 = -x_{20}$:

$$x_2(t) = x_{20} + A_2 \cos \omega t = \frac{m_1g}{k}(\cos \omega t - 1) \quad (1.25)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad (1.26)$$

Die untere Sprosse hat dann die Koordinate

$$x_3(t) = x_2(t) + h = \frac{m_1g}{k}(\cos \omega t - 1) + h \quad (1.27)$$

m_1 trifft zur Zeit t_1 auf die untere Sprosse:

$$x_1(t_1) = x_3(t_1) \implies \frac{g}{2}t_1^2 = \frac{m_1g}{k}(\cos \omega t_1 - 1) + h \quad (1.28)$$

Mit

$$v_1 = \dot{x}_1(t_1) = gt_1 \quad \text{und} \quad v_2 = \dot{x}_2(t_1) = -\frac{m_1g\omega}{k} \sin \omega t_1 \quad (1.29)$$

ist die Geschwindigkeit v_0 unmittelbar nach dem unelastischen Stoß:

$$v_0 = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad (1.30)$$

Bewegung des Verbundkörpers ($m' = m_1 + m_2$):

Harmonische Schwingung um die Ruhelage 0 mit den Anfangsbedingungen

$$x_4(t_1) = x_2(t_1) = \frac{m_1g}{k}(\cos \omega t_1 - 1) = x_1(t_1) - h = \frac{g}{2}t_1^2 - h \quad (1.31)$$

und

$$\dot{x}_4(t_1) = v_0 \quad (1.32)$$

und mit

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad (1.33)$$

$$x_4(t) = A \sin(\omega' t + \varphi) = x_4(t_1) \cos \omega'(t - t_1) + \frac{v_0}{\omega'} \sin \omega'(t - t_1) \quad (1.34)$$

Die Amplitude dieser Schwingung ist A mit

$$\frac{k}{2}A^2 = \frac{k}{2}x_4(t_1)^2 + \frac{m'}{2}v_0^2 \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x_4(t_1)^2 + \frac{m'}{k}v_0^2} = \frac{m_1g}{k} \sqrt{(\cos \omega t - 1)^2 + \frac{(kt_1 - m_1\omega \sin \omega t_1)^2}{k(m_1 + m_2)}} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{g}{2}t_1^2 - h\right)^2 + \left(\frac{m_1g}{k}\right)^2 \cdot \frac{(kt_1 - m_1\omega \sin \omega t_1)^2}{k(m_1 + m_2)}} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Die Phase φ erhält man aus den Anfangsbedingungen

$$x_4(t_1) = A \sin(\omega' t_1 + \varphi) \quad (1.37)$$

$$v_0 = A \omega' \cos(\omega' t_1 + \varphi) \quad (1.38)$$

zu

$$\varphi = \arctan \frac{x_4(t_1) \omega'}{v_0} - \omega' t_1 \quad (1.39)$$

(b) Ist

$$A_2 = \frac{m_1 g}{k} \ll h \quad (1.40)$$

d.h.

$$k \gg \frac{m_1 g}{h} =: k_0 \quad (1.41)$$

dann geht (1.28) in

$$\frac{g}{2} t_1^2 \approx h \quad (1.42)$$

über. Daraus folgt dann

$$t_1 \approx \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (1.43)$$

Ist

$$\frac{|v_2|}{v_1} < \frac{m_1 g \omega}{k g t_1} \approx \frac{m_1 \sqrt{\frac{k}{m_2}}}{k \sqrt{\frac{2h}{g}}} = m_1 \sqrt{\frac{g}{2 h k m_2}} \ll 1 \quad (1.44)$$

d.h.

$$k \gg \frac{m_1^2 g}{2 h m_2} = \frac{m_1}{2 m_2} \cdot k_0 \quad (1.45)$$

dann ist

$$v_0 \approx \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 g t_1}{m_1 + m_2} \approx \frac{m_1 g}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{m_1 \sqrt{2gh}}{m_1 + m_2} \quad (1.46)$$

Die Amplitude A von x_4 ist dann wegen (1.36)

$$A \approx \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} v_0^2 = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) 2gh m_1^2}{k(m_1 + m_2)^2}} = m_1 \sqrt{\frac{2gh}{k(m_1 + m_2)}} \quad (1.47)$$

Aus

$$L_{\text{krit}} = A + \frac{(m_1 + m_2)g}{k} + L_0 \approx A + L_0 \quad (1.48)$$

folgt dann

$$A^2 = \frac{2gh m_1^2}{k(m_1 + m_2)} \approx (L_{\text{krit}} - L_0)^2 \quad (1.49)$$

oder

$$h = h_{\text{krit}} \approx \frac{(L_{\text{krit}} - L_0)^2 k(m_1 + m_2)}{2g m_1^2} \quad (1.50)$$

Aufgabe 2: Kippender Ring im Magnetfeld

(a) Das exakte Torusvolumen ist $V = 2\pi^2 r r'^2 \approx 197,4 \text{ mm}^3$.

Frei werdende potentielle Energie:

$$W_p = mgr = 2\pi^2 r r'^2 \rho g r = 2\pi^2 r^2 r'^2 \rho g \quad (2.1)$$

Der magnetische Fluss durch den Ring ist näherungsweise

$$\Phi = BA \sin \varphi \approx Br^2 \pi \sin \varphi \quad (2.2)$$

Die Induktionsspannung im Ring ist

$$U = \dot{\Phi} = Br^2 \pi \dot{\varphi} \cos \varphi \quad (2.3)$$

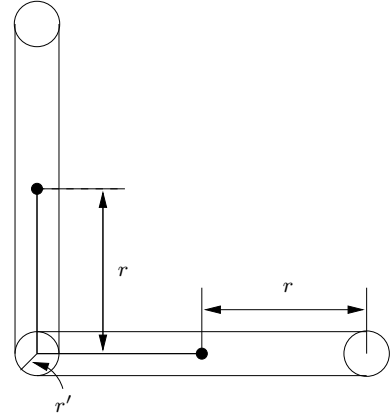


Abb.2.1 Ringmaße

Ohne Berücksichtigung von Selbstinduktionseffekten ist der Strom im Ring

$$I = \frac{U}{R} = \dot{\Phi} = Br^2 \pi \dot{\varphi} \cos \varphi \quad (2.4)$$

mit (siehe Anhang)

$$R \approx \frac{2r\pi}{\sigma r'^2 \pi} = \frac{2r}{\sigma r'^2} \quad (2.5)$$

Die Zeit für einen freien Fall aus der Höhe r ist

$$t_g = \sqrt{\frac{2r}{g}} \quad (2.6)$$

Die tatsächliche Fallzeit \bar{t} ist sicher größer als t_g . Die umgesetzte Wärmeenergie ist

$$W_e = \int_0^{\bar{t}} UI dt = \frac{1}{R} \int_0^{\bar{t}} U^2 dt \quad (2.7)$$

Bekannt ist

$$\int_0^{\bar{t}} U dt = \Delta\Phi = BA \quad (2.8)$$

Mit dem Skalarprodukt

$$\langle f|g \rangle = \int_0^T f(t)\bar{g}(t) dt \quad (2.9)$$

zweier Funktionen folgt aus der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung $|\langle f|g \rangle|^2 \leq \langle f|f \rangle \cdot \langle g|g \rangle$ mit $g = \bar{g} = 1$, $T > 0$ und reellem f ($f\bar{f} = |f|^2 = f^2$):

$$\int_0^T f^2 dt \geq \frac{1}{T} \left| \int_0^T f dt \right|^2 \quad (2.10)$$

und damit mit (2.8)

$$W_e = \frac{1}{R} \int_0^{\bar{t}} U^2 dt \geq \frac{B^2 A^2}{R\bar{t}} \quad (2.11)$$

Da $\omega = \dot{\varphi}$ am Ende der Bewegung wohl am größten ist, ist

$$\omega_1 = \omega(\bar{t}) > \frac{2\pi}{\bar{t}} \quad (2.12)$$

Das Trägheitsmoment des Rings bezüglich einer Achse durch den Mittelpunkt, die parallel zur Drehachse ist:

$$\Theta_0 = \frac{m}{8}(4r^2 + 5r'^2) \quad (2.13)$$

Satz von Steiner mit $s = r + r'$:

$$\Theta = \Theta_0 + ms^2 = \frac{m}{8}(12r^2 + 13r'^2 + 16rr') \quad (2.14)$$

$$\Theta = 1,53 \cdot 10^{-7} \text{ kg m} \quad (2.15)$$

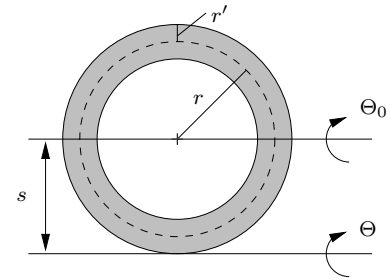


Abb.2.2 Trägheitsmoment

Näherung für das Trägheitsmoment: $\Theta \approx \frac{3}{2}mr^2 = 1,47 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}$.

Die kinetische Energie am Ende der Bewegung ist

$$W_k = \frac{\Theta}{2}\omega_1^2 > \frac{2\Theta\pi^2}{\bar{t}^2} \quad (2.16)$$

(2.11) und (2.16):

$$mgr = W_k + W_e > \frac{2\Theta\pi^2}{\bar{t}^2} + \frac{B^2A^2}{R\bar{t}} \quad (2.17)$$

mit der Lösung $\bar{t} > 2,4 \text{ s}$. Damit erhält man die sehr grobe Abschätzung

$$\frac{W_k}{W_p} \approx \frac{2\Theta\pi^2}{mgr\bar{t}^2} = 5,6 \cdot 10^{-3} \quad (2.18)$$

Diese Abschätzung liegt aber weit daneben, wie wir noch sehen werden. Für einen genaueren Wert stellen wir die exakte Bewegungsgleichung auf:

Ist Θ das Trägheitsmoment des Rings um die näherungsweise als konstant angenommene Drehachse, dann ist die kinetische Energie des Rings

$$W_k = \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2 \quad (2.19)$$

Die bis zur Zeit t in Wärme umgewandelte Energie ist nach (2.3) und (2.7)

$$W_e = \frac{1}{R} \int_0^t B^2 r^4 \pi^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi dt \quad (2.20)$$

und der Energiesatz lautet dann

$$W_k + W_e = \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{R} \int_0^t B^2 r^4 \pi^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi dt = mgr(1 - \cos \varphi) \quad (2.21)$$

Differenzieren von (2.21) liefert

$$\Theta \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + \frac{B^2 r^4 \pi^2}{R} \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi = mgr \dot{\varphi} \sin \varphi \quad (2.22)$$

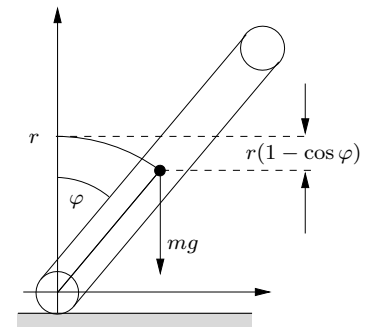


Abb.2.3 Ring während des Falls

oder

$$\ddot{\varphi} + \frac{B^2 r^4 \pi^2}{R\Theta} \dot{\varphi} \cos^2 \varphi = \frac{mgr}{\Theta} \sin \varphi \quad (2.23)$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + a\dot{\varphi} \cos^2 \varphi - b \sin \varphi = 0 \quad (2.24)$$

mit

$$a = \frac{B^2 r^4 \pi^2}{R\Theta} = \frac{\pi^2 \sigma B^2 r^3 r'^2}{2\Theta} = 1,45 \cdot 10^3 \frac{1}{s} \quad \text{und} \quad b = \frac{mgr}{\Theta} = 611 \frac{1}{s^2} \quad (2.25)$$

(2.24) kann man umschreiben in

$$\ddot{\varphi} = b \sin \varphi - a\dot{\varphi} \cos^2 \varphi \quad (2.26)$$

$$\ddot{\varphi} = g(\varphi) - f(\varphi)\dot{\varphi} \quad \text{mit} \quad g(\varphi) = b \sin \varphi \quad \text{und} \quad f(\varphi) = a \cos^2 \varphi \quad (2.27)$$

Im Zeitintervall $[0, \bar{t}]$ und dem entsprechenden φ -Intervall $[\varphi_0, \frac{\pi}{2}]$ gilt

$$\frac{d}{d\varphi} g(\varphi) > 0 \quad , \quad \frac{d}{d\varphi} f(\varphi) < 0 \quad , \quad g(\varphi_0) > 0 \quad \text{und} \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \quad (2.28)$$

Mit (2.27) und (2.28) kann man zeigen (Widerspruchsbeweis), dass im ganzen Intervall $[0, \bar{t}]$

$$g(\varphi) > f(\varphi)\dot{\varphi} \quad (2.29)$$

ist. Damit gilt

$$\dot{\varphi} = \omega < \frac{b \sin \varphi}{a \cos^2 \varphi} \quad (2.30)$$

und somit

$$W_k(\varphi) = \frac{\Theta}{2} \dot{\varphi}^2 < \frac{\Theta b^2}{2a^2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} \quad (2.31)$$

für alle $\varphi \in [\varphi_0, \frac{\pi}{2}]$. Diese Abschätzung bringt noch nichts, da die rechte Seite mit $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ gegen Unendlich geht. Die kinetische Energie $W_{ke} = W_k(\frac{\pi}{2})$ lässt sich aber aufspalten in

$$W_{ke} = W_k(\varphi) + \Delta W_k \quad \text{mit} \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \quad (2.32)$$

mit

$$\Delta W_k = W_{ke} - W_k(\varphi) < mgr \cos \varphi \quad (2.33)$$

Damit gilt

$$W_{ke} < \frac{\Theta b^2}{2a^2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} + mgr \cos \varphi \quad (2.34)$$

oder

$$\frac{W_{ke}}{mgr} < \frac{\Theta b^2}{2a^2 mgr} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} + \cos \varphi \quad (2.35)$$

Die rechte Seite hat den minimale Wert 0,28 bei $\varphi = 1,34$, d.h.

$$\frac{W_{ke}}{mgr} < 0,28 \quad (2.36)$$

Eine numerische Lösung der Differentialgleichung (2.24) liefert

$$\frac{W_{ke}}{mgr} = 0,18 \quad \text{oder} \quad \frac{W_{ke}}{W_e} = \frac{W_{ke}}{mgr - W_{ke}} = 0,22 \quad (2.37)$$

(b) Unter Vernachlässigung der kinetischen Energie vereinfacht sich (2.23) zu

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgR}{B^2 r^3 \pi^2} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \quad (2.38)$$

oder

$$\frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} d\varphi = \frac{mgR}{B^2 r^3 \pi^2} dt \quad (2.39)$$

$$\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} d\varphi = \int_0^{\bar{t}} \frac{mgR}{B^2 r^3 \pi^2} dt = \frac{mgR}{B^2 r^3 \pi^2} \cdot \bar{t} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} d\varphi &= \left[\cos \varphi - \ln \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right]_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 - \underbrace{\ln \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}}}_0 - \left(\cos \varphi_0 - \ln \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\bar{t} = \left(\ln \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} - \cos \varphi_0 \right) \cdot \frac{B^2 r^3 \pi^2}{mgR} = 5,075 \text{ s} \quad (2.42)$$

Anhang 1 – Der exakte Widerstand eines Rings

Der Widerstand eines „Kuckenstücks“ mit dem Öffnungswinkel $d\alpha$ ist dR :

$$\frac{1}{dR} = \int_A \frac{\sigma dA}{x d\alpha} = \frac{\sigma}{d\alpha} \int_A \frac{dA}{x} \quad (2.43)$$

$$R = \frac{1}{\sigma} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\int_A \frac{dA}{x}} = \frac{2\pi}{\sigma \int_A \frac{dA}{x}} \quad (2.44)$$

Mit $x^2 = r^2 + z^2 - 2rz \cos \varphi$ (Kosinussatz) und $dA = z d\varphi dz$ folgt

$$\int_A \frac{dA}{x} = \int_0^{r'} \int_0^{2\pi} \frac{z d\varphi dz}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \varphi}} \quad (2.45)$$

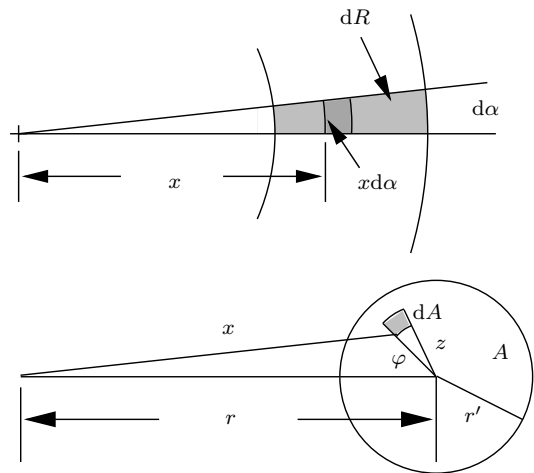


Abb.2.4 Berechnung von R

Eine numerische Auswertung des Integrals (2.45) ergibt

$$\int_A \frac{dA}{x} = 1,0003 \cdot \frac{r'^2 \pi}{r} \quad (2.46)$$

Damit ist

$$R = 0,9997 \cdot \frac{2r}{\sigma r'^2} \approx \frac{2r}{\sigma r'^2} \quad (2.47)$$

Anhang 2 – Die Fallzeit mit $B = 0$

(2.23) mit $B = 0$:

$$\frac{\Theta}{2} \dot{\varphi}^2 = mgr(\cos \varphi_0 - \cos \varphi) \quad (2.48)$$

$$\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}} = \int_0^{\bar{t}} \sqrt{\frac{2mgr}{\Theta}} dt \quad (2.49)$$

$$t_{\text{ohne B}} = \bar{t} = \sqrt{\frac{\Theta}{2mgr}} \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}} = 0,147 \text{ s} \quad (2.50)$$

Anhang 3 – Exakte Lösung

Aus (2.23) folgt

$$\ddot{\varphi} + a\dot{\varphi} \cos^2 \varphi - b \sin \varphi = 0 \quad (2.51)$$

mit

$$a = \frac{B^2 r^4 \pi^2}{R\Theta} = \frac{\pi^2 \sigma B^2 r^3 r'^2}{2\Theta} = 1,45 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{s}} \quad \text{und} \quad b = \frac{mgr}{\Theta} = 611 \frac{1}{\text{s}^2} \quad (2.52)$$

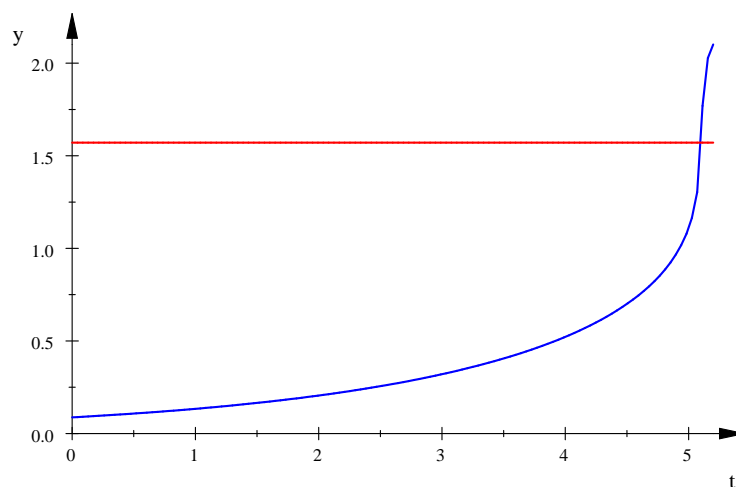


Abb.2.5 Numerische Lösung für $\varphi(t)$

Numerische Lösung für die Fallzeit:

$$\bar{t} = 5,102 \text{ s} \quad (2.53)$$

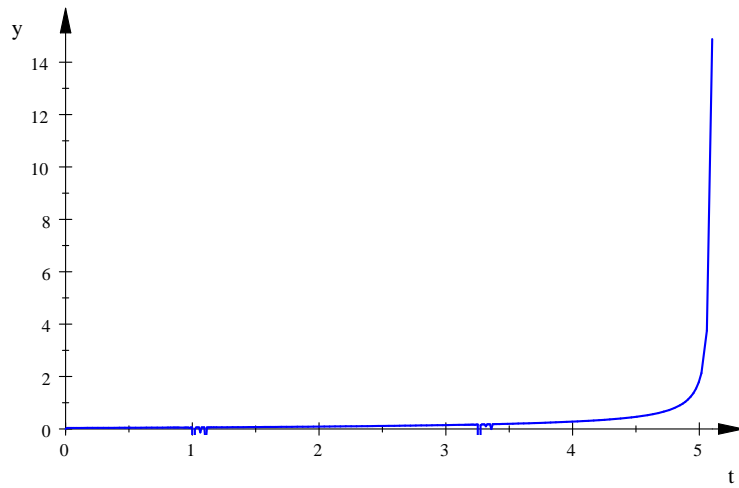


Abb.2.6 Numerische Lösung für $\dot{\phi}(t)$

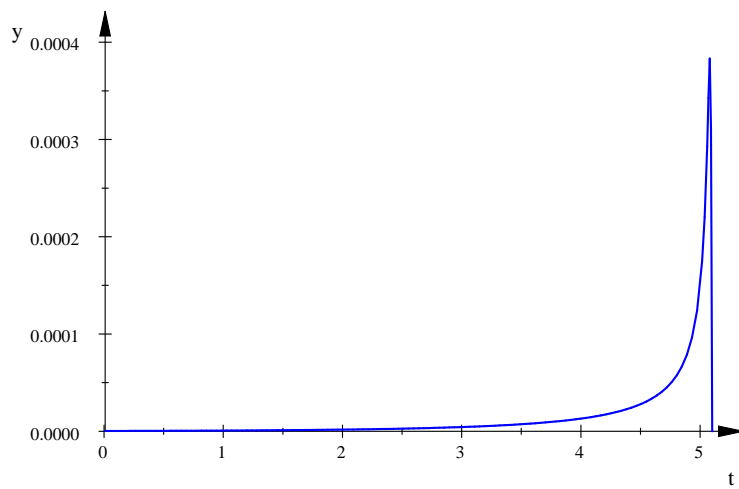


Abb.2.7 Numerische Lösung für $\frac{U(t)^2}{R}$

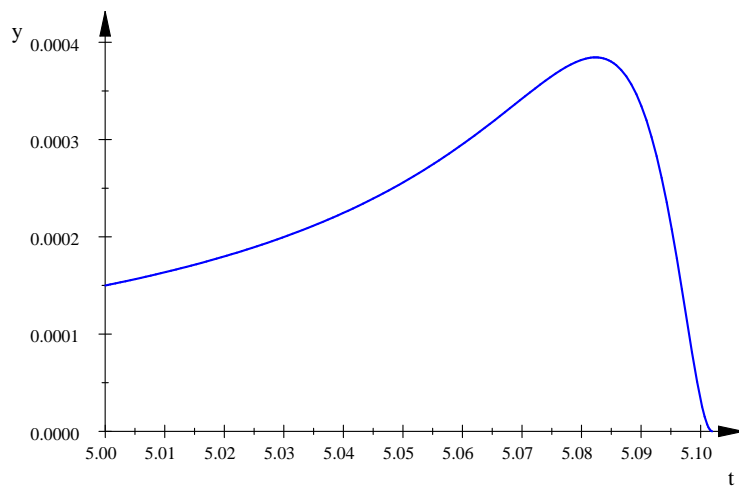


Abb.2.8 Numerische Lösung für $\frac{U(t)^2}{R}$

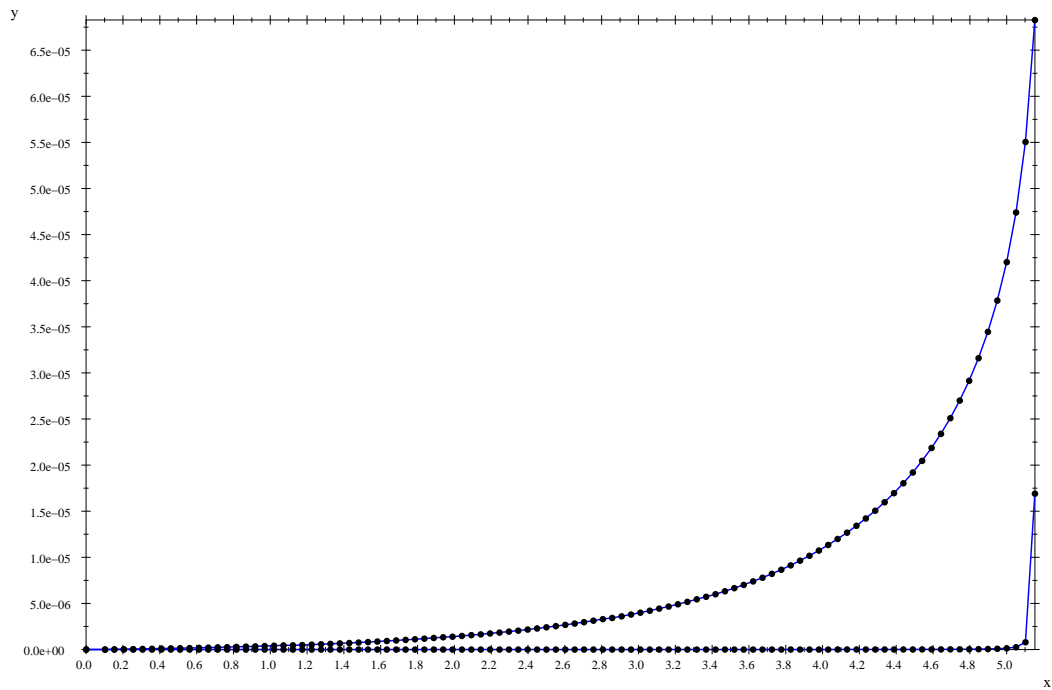


Abb.2.9 Numerische Lösung für $W_e(t) = \int_0^t \frac{U(t)^2}{R} dt$ (oben) und $W_{\text{kin}}(t)$ (unten)

Obwohl die kinetische Energie am Ende der Bewegung ca. 22% der elektrischen (thermischen) Energie beträgt, gilt fast während der ganzen Bewegung $W_{\text{kin}} \ll W_e$.

Aufgabe 3: Rotierender Gartenschlauch

Die Dichte der Luft im Schlauch ist $\varrho(x)$. Im rotierenden Schlauch bewirkt die Zentrifugalkraft eine Druckänderung

$$\begin{aligned} dp &= p(x + dx) - p(x) = \\ &= \frac{\overbrace{\varrho(x) A dx}^{dm} \omega^2 x}{A} = \omega^2 \varrho(x) x dx \end{aligned} \quad (3.1)$$

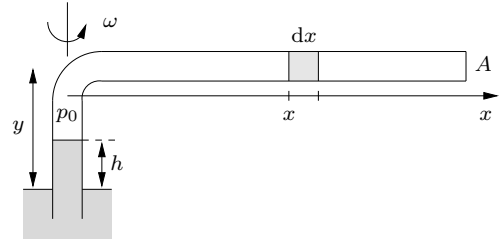


Abb.3.1 Gartenschlauch

Mit der molaren Masse M_m ist die Stoffmenge im Volumen dV

$$dn = \frac{\varrho(x) A dx}{M_m} \quad (3.2)$$

Aus der Gasgleichung

$$p dV = p A dx = dn RT = \frac{\varrho(x) A dx RT}{M_m} \quad (3.3)$$

folgt

$$\varrho(x) = \frac{M_m}{RT} \cdot p = \beta p \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{M_m}{RT} \quad (3.4)$$

(3.4) in (3.1):

$$dp = \frac{M_m \omega^2}{RT} p x dx \quad (3.5)$$

oder

$$\frac{dp}{p} = 2\alpha x dx \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{M_m \omega^2}{2RT} = \frac{1}{2} \beta \omega^2 \quad (3.6)$$

Integration ergibt

$$\ln \frac{p(x)}{p_0} = \alpha x^2 \quad (3.7)$$

oder

$$p(x) = p_0 e^{\alpha x^2} \quad (3.8)$$

und damit wegen (3.4)

$$\varrho(x) = \beta p_0 e^{\alpha x^2} \quad (3.9)$$

Bei Rotation ist die Masse im waagrechten Teil des Schlauchs

$$m_2 = \int_0^L \varrho(x) A dx = \beta p_0 A \int_0^L e^{\alpha x^2} dx \quad (3.10)$$

Wegen $\alpha = 2,3 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{m}^2}$ ist $\alpha L^2 = 9,4 \cdot 10^{-4} \ll 1$ und es gilt in guter Näherung

$$e^{\alpha x^2} \approx 1 + \alpha x^2 \quad (3.11)$$

und somit

$$m_2 \approx \beta p_0 A \left(L + \frac{\alpha}{3} L^3 \right) = \beta p_0 A L (1 + \gamma) \quad (3.12)$$

mit

$$\gamma = \frac{\alpha}{3} L^2 = 3,1 \cdot 10^{-4} \quad (3.13)$$

Mit dem Luftdruck p_L ist die Gesamtmasse der Luft im Schlauch

$$m_0 = \beta p_L A (L + y) \quad (3.14)$$

Beim rotierenden Schlauch ist die Luftmasse im senkrechten Teil

$$m_1 = \beta p_0 A (y - h) \quad (3.15)$$

Aus

$$m_1 + m_2 = m_0 \quad (3.16)$$

folgt dann

$$p_0(y - h) + p_0 L(1 + \gamma) = p_L(L + y) \quad (3.17)$$

oder

$$p_0 L(1 + \gamma) = p_L L + p_0 h + (p_L - p_0)y \quad (3.18)$$

Mit der Dichte ϱ_w des Wassers lautet die Gleichgewichtsbedingung im senkrechten Teil des Schlauchs

$$p_0 = p_L - \varrho_w g h \quad (3.19)$$

Damit geht (3.18) über in:

$$\underbrace{(p_L - \varrho_w g h)L(1 + \gamma)}_{\frac{m_2}{\beta A}} = \underbrace{p_L L}_{\frac{m_{20}}{\beta A}} + \underbrace{(p_L + \varrho_w g(y - h))h}_{\frac{\Delta m}{\beta A}} \quad (3.20)$$

Dabei ist Δm die Masse, die während des Rotierens vom senkrechten in den waagrechten Teil des Schlauchs fließt. Umformen von (3.18):

$$\frac{g\varrho_w}{L} h^2 - \left[\frac{p_L}{L} + \varrho_w g \left(1 + \gamma + \frac{y}{L} \right) \right] h + \gamma p_L = 0 \quad (3.21)$$

Um eine Näherungslösung für die in h quadratische Gleichung (3.21) zu finden, ersetzen wir y durch $h + \Delta y$. Dadurch wird die Gleichung linear:

$$\left[\frac{p_L}{L} + \varrho_w g \left(1 + \gamma + \frac{\Delta y}{L} \right) \right] h = \gamma p_L \quad (3.22)$$

Da $\Delta y \ll L$ und $\gamma \ll 1$ folgt

$$\left[\frac{p_L}{L} + \varrho_w g \right] h \approx \gamma p_L \quad (3.23)$$

Mit den Zahlenwerten $\frac{p_L}{L} = 5,04 \cdot 10^4 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}$ und $\varrho_w g = 0,981 \cdot 10^4 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}$ folgt, dass man $\frac{p_L}{L}$ auf keinen Fall vernachlässigen kann (das wäre eine Vernachlässigung des Massenzuwachses Δm in (3.20)). Mit $p_L = \frac{\varrho_L}{\beta}$ folgt

$$h \approx \frac{\gamma \varrho_L}{\frac{\varrho_L}{L} + \beta \varrho_w g} = 0,52 \text{ mm} \quad (3.24)$$

Die exakte Lösung von (3.21) ist

$$h = \frac{1}{2} \left[\frac{p_L}{\varrho_w} + L(1 + \gamma) + y \right] - \sqrt{-\frac{\gamma p_L L}{\varrho_w g} + \frac{1}{4} \left[\frac{p_L}{\varrho_w} + L(1 + \gamma) + y \right]^2} \quad (3.25)$$

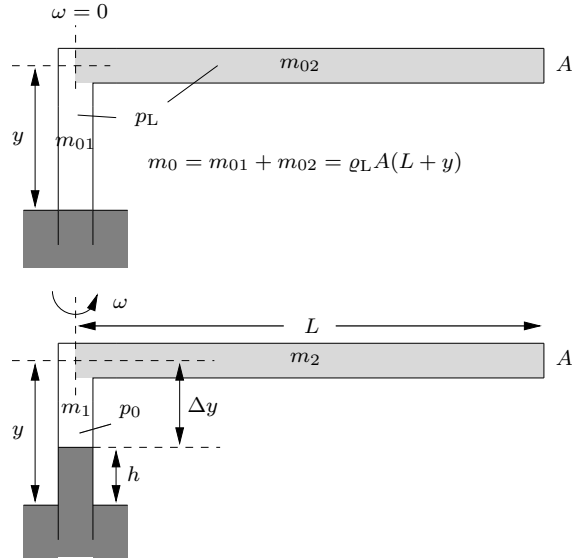


Abb.3.2 Massenverteilung

$\frac{y}{\text{cm}}$	$\frac{h}{\text{mm}}$
0	0,524
10	0,520
50	0,504
100	0,485

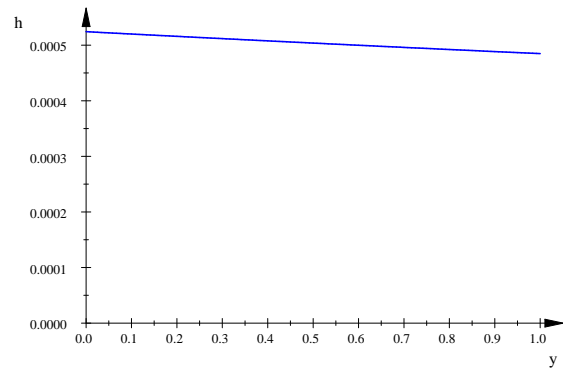


Abb.3.3 exakte Lösung