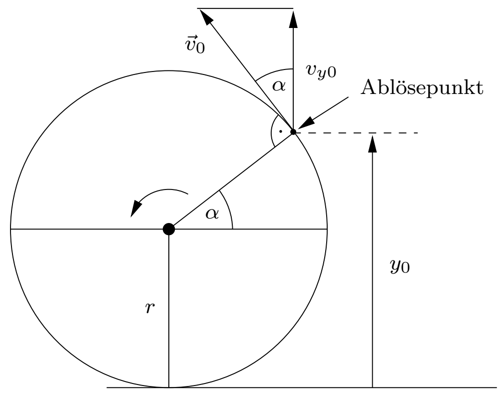
R. Reindl

Aufgabe 1

Als Bezugssystem verwenden wir ein Inertialsystem, in dem die Radnabe ruht.



Starthöhe:

$$y_0 = r + r\sin\alpha \tag{1.1}$$

Startgeschwindigkeit in y-Richtung:

$$v_{y0} = v_0\cos\alpha \tag{1.2}$$

Aus dem Energiesatz folgt

$$\Delta y = \frac{v_{y0}^2}{2g} = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{2g} \tag{1.3}$$

Die erreichte Höhe der Tropfen:

$$y = y_0 + \Delta y = r + r\sin\alpha + \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{2g} = r + r\sin\alpha + \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \sin^2\alpha\right) \tag{1.4}$$

Mit der Substitution $\beta = \sin\alpha$:

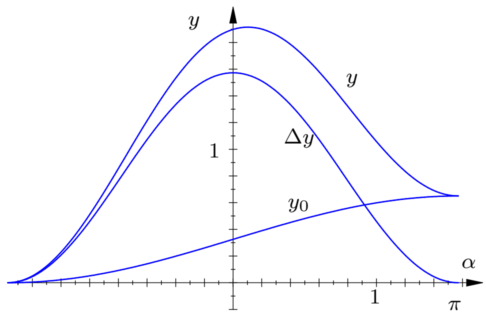
$$y = r + r\beta + \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \beta^2\right) \tag{1.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\beta} = r - \frac{v_0^2}{g}\cdot\beta = 0 \quad\Longrightarrow\quad \beta = \sin\alpha = \frac{rg}{v_0^2} \tag{1.6}$$

Wegen $y'' = -\frac{v_0^2}{g} < 0$ ist y also maximal für $\beta = \frac{rg}{v_0^2}$. Die maximale Höhe ist also

$$\begin{aligned} y_{\max} &= r + \frac{r^2g}{v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_0^2r^2g^2}{2gv_0^4} = \underbrace{r + \frac{r^2g}{v_0^2}}_{y_0=0{,}359\,\mathrm{m}} + \underbrace{\frac{v_0^2}{2g} - \frac{r^2g}{2v_0^2}}_{\Delta y=1{,}556\,\mathrm{m}} = \\ &= r + \frac{r^2g}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g} = 0{,}325\,\mathrm{m} + 0{,}0168\,\mathrm{m} + 1{,}573\,\mathrm{m} = 1{,}91\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\sin\alpha = \frac{rg}{v_0^2} = 0{,}1033 \quad\Longrightarrow\quad \alpha = 5{,}9^\circ \tag{1.8}$$



Aufgabe 2

2.1 Direkte Lösung mit dem Brechungsgesetz

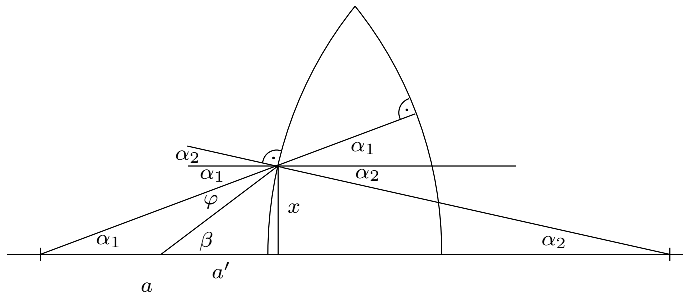
Für eine dünne Linse gilt

$$\alpha := \alpha_1 \approx \alpha_2 \tag{2.1}$$

sowie $r \approx a$.

Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin(2\alpha+\varphi)}{\sin 2\alpha} = n \tag{2.2}$$



Achsennahe Strahlen:

$$\frac{\sin(2\alpha+\varphi)}{\sin 2\alpha} \approx \frac{2\alpha+\varphi}{2\alpha} = 1 + \frac{\varphi}{2\alpha} = n = \frac{4}{3} \quad\Longrightarrow\quad \varphi = \frac{2}{3}\alpha \tag{2.3}$$

$$\Longrightarrow\quad \beta = \alpha + \varphi \approx \frac{5}{3}\alpha \tag{2.4}$$

$$\frac{x}{a} = \tan\alpha \approx \alpha \tag{2.5}$$

$$\frac{x}{a'} = \tan\beta \approx \beta \approx \frac{5}{3}\alpha \approx \frac{5x}{3a} \quad\Longrightarrow\quad a' \approx \frac{3}{5}a = 12\,\mathrm{cm} \tag{2.6}$$

2.2 Lösung mit Hilfe von Abbildungsgleichungen unter der Annahme eines ganz feinen Luftspaltes zwischen Wasser und Spiegel

Die Brennweite des Spiegels ist

$$f_\mathrm{S} = \frac{r}{2} = 10\,\mathrm{cm}, \tag{2.7}$$

die der Linse (bikonvex)

$$f_\mathrm{L} = \frac{r}{2(n-1)} = \frac{3r}{2} = 30\,\mathrm{cm} \tag{2.8}$$

g: Gegenstandsweite, b_1 Bildweite bei Abbildung durch die Linse:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_\mathrm{L}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_\mathrm{L}} - \frac{1}{g} \tag{2.9}$$

$b_1 < 0$ bedeutet, das Bild ist auf der gleichen Seite wie der Gegenstand. Daher ist $-b_1$ die Gegenstandsweite für die Abbildung durch den Spiegel, die neue Bildweite ist b_2:

$$-\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_\mathrm{S}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_\mathrm{S}} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_\mathrm{S}} + \frac{1}{f_\mathrm{L}} - \frac{1}{g} \tag{2.10}$$

Die letzte Abbildung an der Linse geht von rechts nach links, also ist die Gegenstandsweite $-b_2$:

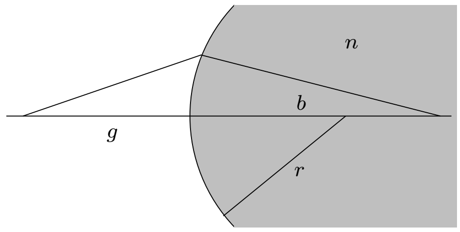
$$-\frac{1}{b_2} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_\mathrm{L}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{b} = \frac{1}{f_\mathrm{L}} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_\mathrm{S}} + \frac{2}{f_\mathrm{L}} - \frac{1}{g} = \frac{10}{3r} - \frac{1}{g} \tag{2.11}$$

$$b = g \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{g} = \frac{10}{3r} - \frac{1}{g} \quad\Longrightarrow\quad g = \frac{3r}{5} = 12\,\mathrm{cm} \tag{2.12}$$

2.3 Lösung mit Hilfe von Abbildungsgleichungen

Für die Brechung an der Kugelfäche gilt (z.B. HECHT, S. 240):

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{r} \tag{2.13}$$



$$\frac{1}{g} + \frac{n}{b_1} = \frac{n-1}{r} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{b_1} = \frac{n-1}{nr} - \frac{1}{ng} \tag{2.14}$$

$$-\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_\mathrm{S}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_\mathrm{S}} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_\mathrm{S}} + \frac{n-1}{nr} - \frac{1}{ng} \tag{2.15}$$

$$-\frac{n}{b_2} + \frac{1}{b} = \frac{n-1}{r} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{b} = \frac{n-1}{r} + \frac{n}{b_2} = \frac{2n-2}{r} + \frac{n}{f_\mathrm{S}} - \frac{1}{g} \tag{2.16}$$

Mit $f_\mathrm{S} = \frac{r}{2}$ und $n = \frac{4}{3}$ folgt

$$\frac{1}{b} = \frac{2n-2}{r} + \frac{2n}{r} - \frac{1}{g} = \frac{4n-2}{r} - \frac{1}{g} = \frac{10}{3r} - \frac{1}{g} \tag{2.17}$$

$$b = g \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{g} = \frac{10}{3r} - \frac{1}{g} \quad \Longrightarrow \quad g = \frac{3r}{5} = 12\,\mathrm{cm} \tag{2.18}$$

Aufgabe 3

Unter Vernachlässigung der Wärmeverluste durch die Seitenflächen und unter der Annahme eines homogenen Wärmeflusses (keine Randeffekte) ist die Wärmeleistung, die durch das Eis geht:

$$P_\mathrm{W} = \frac{\lambda A \Delta T}{h} \tag{3.1}$$

Mechanische Leistung:

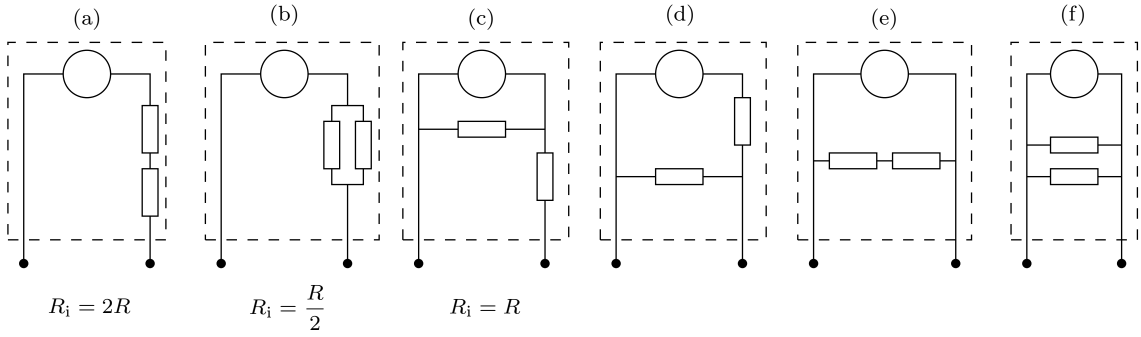
$$P_\mathrm{m} = \mu m g v = \mu \varrho A h g v \tag{3.2}$$

Die Gletscherunterseite hat maximal die Temperatur $0\,^\circ\mathrm{C}$, d.h. $\Delta T \leqq 10\,\mathrm{K} = \Delta T_0$.

$$P_\mathrm{m} = P_\mathrm{W} \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{\lambda \Delta T_0}{\mu \varrho g h^2} = 2{,}6 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 23\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{d}} \tag{3.3}$$

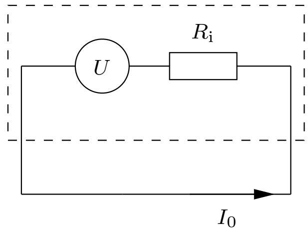
$$v' = \frac{\lambda \Delta T_0}{\mu \varrho g h'^2} = v \cdot \frac{h^2}{h'^2} = 10^4 v = 2{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{3.4}$$

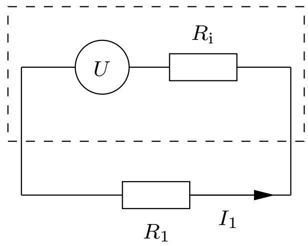
Aufgabe 4



Es gibt vier Möglichkeiten, da (e) und (f) nicht kurzschlussfest sind (der Kurzschlussstrom wäre unendlich).

(a), (b) und (c) können als ideale Spannungsquelle mit Innenwiderstand R_i aufgefasst werden:





$$R_1 I_1^2 = P \quad \Longrightarrow \quad I_1 = \sqrt{\frac{P}{R_1}} = \sqrt{\frac{2{,}5\,\mathrm{W}}{10\,\Omega}} = 0{,}5\,\mathrm{A} \tag{4.1}$$

$$U = R_\mathrm{i} I_0 \quad \text{und} \quad U = (R_\mathrm{i} + R_\mathrm{v}) I_1 \quad \Longrightarrow \tag{4.2}$$

$$R_\mathrm{i} = \frac{R_1 I_1}{I_0 - I_1} = 10\,\Omega \tag{4.3}$$

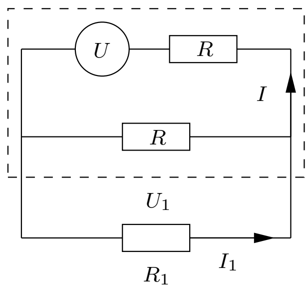
$$U = R_\mathrm{i} I_0 = 10\,\mathrm{V} \tag{4.4}$$

$$R_1' = 30\,\Omega \quad \Longrightarrow \quad I_1' = \frac{10\,\mathrm{V}}{40\,\Omega} = 0{,}25\,\mathrm{A} \tag{4.5}$$

$$P' = R_1' I_1'^2 = 1{,}88\,\mathrm{W} \tag{4.6}$$

Der Fall (d):

Gesamtwiderstand:



$$R_\mathrm{g} = R + \frac{R R_1}{R + R_1} = \frac{R^2 + 2 R R_1}{R + R_1} \tag{4.7}$$

$$U_1 = U - RI = U\left(1 - \frac{R}{R_\mathrm{g}}\right) = \frac{U R_1}{R + 2R_1} = R_1 I_1 \tag{4.8}$$

$$U = (R + 2R_1) I_1 = R I_0 \tag{4.9}$$

$$R = \frac{2 R_1 I_1}{I_0 - I_1} = \frac{2 \cdot 10\,\Omega \cdot 0{,}5\,\mathrm{A}}{1\,\mathrm{A} - 0{,}5\,\mathrm{A}} = 20\,\Omega \tag{4.10}$$

$$U = R I_0 = 20\,\mathrm{V} \tag{4.11}$$

	(a)	(b)	(c)	(d)
$\frac{U}{\mathrm{V}}$	10	10	10	20
$\frac{R}{\Omega}$	5	20	10	20