39. Internationale Physik-Olympiade – Vietnam 2008
Lösungen zur zweiten Runde
R. Reindl

Aufgabe 1: Kernfusion

(a)

$$W = (m_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{D}} - m_{\mathrm{T}})\, c^2 = 2{,}79 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J} = 17{,}4\mathrm{MeV} \tag{1.1}$$

$$p := p_{\mathrm{He}} = p_{\mathrm{n}} \quad \Longrightarrow \quad W_{\mathrm{He}} = \frac{p^2}{2m_{\mathrm{He}}}, \qquad W_{\mathrm{n}} = \frac{p^2}{2m_{\mathrm{n}}} \tag{1.2}$$

$$W_{\mathrm{He}} + W_{\mathrm{n}} = W_{\mathrm{n}} \left(1 + \frac{m_{\mathrm{n}}}{m_{\mathrm{He}}}\right) = W \tag{1.3}$$

$$W_{\mathrm{He}} = \frac{W}{1 + \frac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{n}}}} = 0{,}201\, W = 3{,}50\,\mathrm{MeV} \tag{1.4}$$

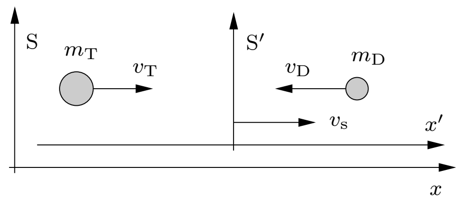
$$W_{\mathrm{n}} = \frac{W}{1 + \frac{m_{\mathrm{n}}}{m_{\mathrm{He}}}} = 0{,}799\, W = 13{,}9\,\mathrm{MeV} \tag{1.5}$$

(b) Bei der Temperatur T gilt für die kinetischen Energien und Geschwindigkeitsbeträge der Teilchen im Laborsystem S

$$W_{\mathrm{D}} = W_{\mathrm{T}} = \frac{m_{\mathrm{D}}}{2} v_{\mathrm{D}}^2 = \frac{m_{\mathrm{T}}}{2} v_{\mathrm{T}}^2 = \frac{3}{2} kT \quad \Longrightarrow \quad \frac{v_{\mathrm{D}}}{v_{\mathrm{T}}} = \sqrt{\frac{m_{\mathrm{T}}}{m_{\mathrm{D}}}} \tag{1.6}$$

$$v_{\mathrm{T}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_{\mathrm{T}}}}, \qquad v_{\mathrm{D}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_{\mathrm{D}}}} \tag{1.7}$$

Für die Reaktion kommen nur Teilchen in Frage, die sich zentral aufeinander zubewegen. Im Schwerpunktsystem S′ der beiden Teilchen muss ihre gesamte kinetische Energie mindestens gleich der potentiellen Energie



$$W_{\mathrm{p}} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \text{mit} \qquad r = 10^{-14}\,\mathrm{m} \tag{1.8}$$

sein. Mit der Schwerpunktsgeschwindigkeit

$$v_{\mathrm{s}} = \frac{m_{\mathrm{T}} v_{\mathrm{T}} - m_{\mathrm{D}} v_{\mathrm{D}}}{m_{\mathrm{T}} + m_{\mathrm{D}}} = \frac{\sqrt{m_{\mathrm{T}}} - \sqrt{m_{\mathrm{D}}}}{m_{\mathrm{T}} + m_{\mathrm{D}}} \sqrt{3kT} \tag{1.9}$$

Die Teilchengeschwindigkeiten im Schwerpunktsystem sind

$$v'_{\mathrm{T}} = v_{\mathrm{T}} - v_{\mathrm{s}} = \frac{m_{\mathrm{D}}\sqrt{m_{\mathrm{T}}} + m_{\mathrm{T}}\sqrt{m_{\mathrm{D}}}}{m_{\mathrm{T}}(m_{\mathrm{T}} + m_{\mathrm{D}})} \sqrt{3kT} \tag{1.10}$$

$$v'_{\mathrm{D}} = v_{\mathrm{D}} + v_{\mathrm{s}} = \frac{m_{\mathrm{D}}\sqrt{m_{\mathrm{T}}} + m_{\mathrm{T}}\sqrt{m_{\mathrm{D}}}}{m_{\mathrm{D}}(m_{\mathrm{T}} + m_{\mathrm{D}})} \sqrt{3kT} = \frac{m_{\mathrm{T}}}{m_{\mathrm{D}}} v'_{\mathrm{T}} \tag{1.11}$$

Die Gesamte kinetische Energie in S′ ist

$$\begin{aligned} W' &= \frac{m_{\mathrm{T}}}{2} v'^2_{\mathrm{T}} + \frac{m_{\mathrm{D}}}{2} v'^2_{\mathrm{D}} = \frac{m_{\mathrm{T}}}{2} v'^2_{\mathrm{T}} + \frac{m_{\mathrm{D}} m_{\mathrm{T}}^2}{2m_{\mathrm{D}}^2} v'^2_{\mathrm{T}} = \frac{m_{\mathrm{T}}}{2} v'^2_{\mathrm{T}} \left(1 + \frac{m_{\mathrm{T}}}{m_{\mathrm{D}}}\right) = \\ &= \frac{(m_{\mathrm{D}}\sqrt{m_{\mathrm{T}}} + m_{\mathrm{T}}\sqrt{m_{\mathrm{D}}})^2 (m_{\mathrm{T}} + m_{\mathrm{D}})}{2m_{\mathrm{T}} m_{\mathrm{D}} (m_{\mathrm{T}} + m_{\mathrm{D}})^2} 3kT = \\ &= \frac{m_{\mathrm{D}} + m_{\mathrm{T}} + 2\sqrt{m_{\mathrm{T}} m_{\mathrm{D}}}}{2(m_{\mathrm{T}} + m_{\mathrm{D}})} 3kT = \frac{3}{2} kT \left(1 + \frac{2\sqrt{m_{\mathrm{T}} m_{\mathrm{D}}}}{m_{\mathrm{T}} + m_{\mathrm{D}}}\right) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Mit dem Massenverhältnis $\beta = \frac{m_\mathrm{T}}{m_\mathrm{D}}$:

$$W' = \frac{3}{2}kT \underbrace{\left(1 + \frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta}\right)}_{\alpha} \tag{1.13}$$

Mit $\beta \approx \frac{3}{2}$ folgt $\alpha = 1{,}98$:

$$W' = \alpha \cdot \frac{3}{2}kT = W_\mathrm{p} \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{e^2}{6\alpha\pi\varepsilon_0 kr} = 5{,}6 \cdot 10^8\,\mathrm{K} \tag{1.14}$$

Die Relativgeschwindigkeit v der Teilchen ist systemunabhängig:

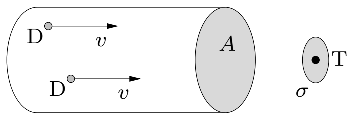
$$v = v_\mathrm{T} + v_\mathrm{D} = v'_\mathrm{T} + v'_\mathrm{D} = v'_\mathrm{T}\left(1 + \frac{m_\mathrm{T}}{m_\mathrm{D}}\right) \tag{1.15}$$

Mit $W'_\mathrm{T} = \frac{m_\mathrm{T}}{2}v'^2_\mathrm{T}$ und $W'_\mathrm{D} = \frac{m_\mathrm{D}}{2}v'^2_\mathrm{D}$ folgt aus (1.11) $W'_\mathrm{D} = \frac{m_\mathrm{T}}{m_\mathrm{D}}W'_\mathrm{T} \quad \Longrightarrow$:

$$\begin{aligned} W' &= W'_\mathrm{T} + W'_\mathrm{D} = W'_\mathrm{T}\left(1 + \frac{m_\mathrm{T}}{m_\mathrm{D}}\right) = \frac{m_\mathrm{T}}{2}v'^2_\mathrm{T}\left(1 + \frac{m_\mathrm{T}}{m_\mathrm{D}}\right) = \\ &= \frac{m_\mathrm{T}}{2} \cdot \frac{v^2}{\left(1 + \frac{m_\mathrm{T}}{m_\mathrm{D}}\right)^2}\left(1 + \frac{m_\mathrm{T}}{m_\mathrm{D}}\right) = \frac{m_\mathrm{T}}{2} \cdot \frac{v^2}{\left(1 + \frac{m_\mathrm{T}}{m_\mathrm{D}}\right)} \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$W' = \frac{\mu}{2}v^2 \quad \text{mit der reduzierten Masse} \quad \mu = \frac{m_\mathrm{T} m_\mathrm{D}}{m_\mathrm{T} + m_\mathrm{D}} \tag{1.17}$$

(c) Wir denken uns einen Tritiumkern ruhend. Der Fluss der D-Kerne ist



$$\Phi = \frac{\text{Zahl der Kerne}}{\text{Zeit}\cdot\text{Fläche}} = \frac{n_\mathrm{D}\mathrm{d}V}{A\mathrm{d}t} = \frac{n_\mathrm{D}A\mathrm{d}x}{A\mathrm{d}t} = n_\mathrm{D}v \tag{1.18}$$

Der effektive Wirkungsquerschnitt für einen D-Kern ist $\sigma_\mathrm{eff} = n_\mathrm{T}\sigma$, die Reaktionsrate also

$$r = \sigma_\mathrm{eff}\Phi = n_\mathrm{D}n_\mathrm{T}\sigma v \tag{1.19}$$

Bei der Herleitung der Maxwell-Boltzmann-Verteilung geht man von der kinetischen Energie aus, die im Schwerpunktsystem zweier stoßender Teilchen durch (1.17) gegeben ist. Daher ist die Masse in der Verteilungsformel durch die reduzierte Masse μ zu ersetzen. Die mittlere Reaktionsrate ist dann

$$\langle r\rangle = \int_0^\infty r(v)f(v)\,\mathrm{d}v = n_\mathrm{D}n_\mathrm{T}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\mu}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty v^3\sigma(v)e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}}\,\mathrm{d}v \tag{1.20}$$

Mit der Substitution $E = \frac{\mu}{2}v^2$ folgt:

$$v = \sqrt{\frac{2E}{\mu}} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{d}E = \mu v\mathrm{d}v = \sqrt{2\mu E}\,\mathrm{d}v \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}E}{\sqrt{2\mu E}} \tag{1.21}$$

Damit ist

$$v^3\,\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{8E^3}{\mu^3 \cdot 2\mu E}}\,\mathrm{d}E = \frac{2E}{\mu^2}\,\mathrm{d}E \tag{1.22}$$

Aus (1.20) folgt dann

$$\langle r\rangle = n_\mathrm{D} n_\mathrm{T}\sqrt{\frac{8}{\pi\mu k^3T^3}}\int\limits_0^\infty E\sigma(E)e^{-\frac{E}{kT}}\,\mathrm{d}E \tag{1.23}$$

Mit $E = w\,\mathrm{keV}$, $\sigma = \sigma^*\,\mathrm{barn}$, $B = \dfrac{\mathrm{keV}}{kT} = 0{,}116$ und $\mu = 2{,}00\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ folgt:

$$A := \sqrt{\frac{8}{\pi\mu k^3T^3}} = 6{,}947\cdot 10^{35}\,\frac{\mathrm{s}^3}{\mathrm{kg}^2\,\mathrm{m}^3} \tag{1.24}$$

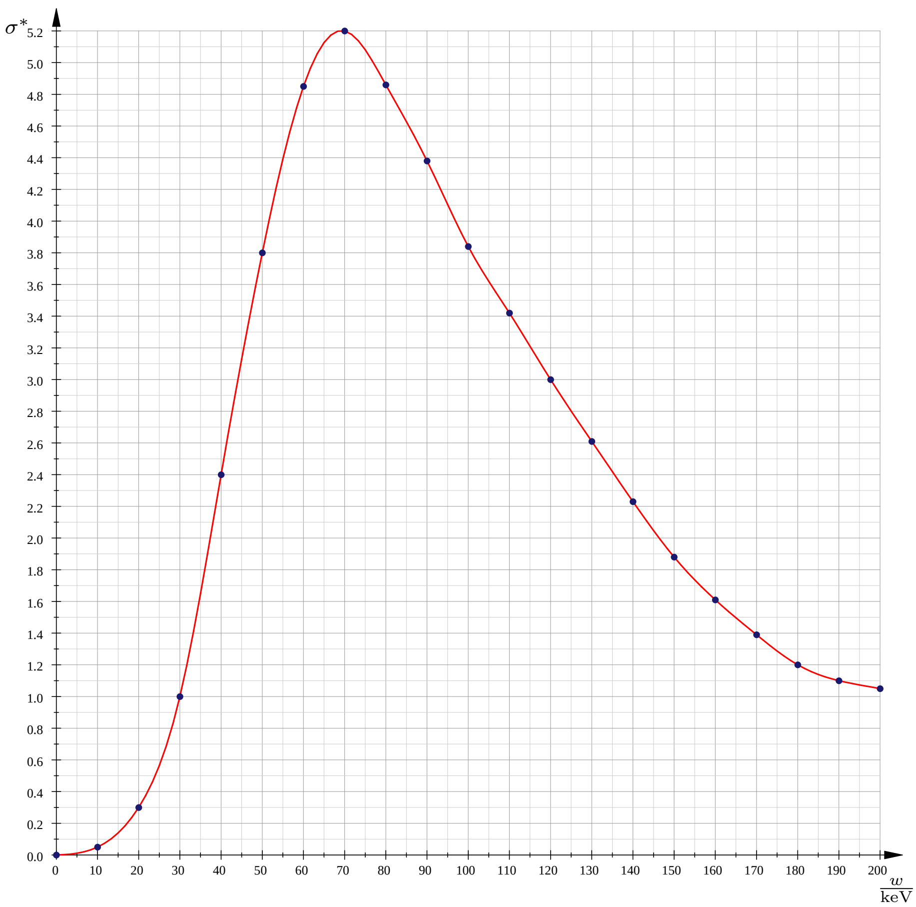
und

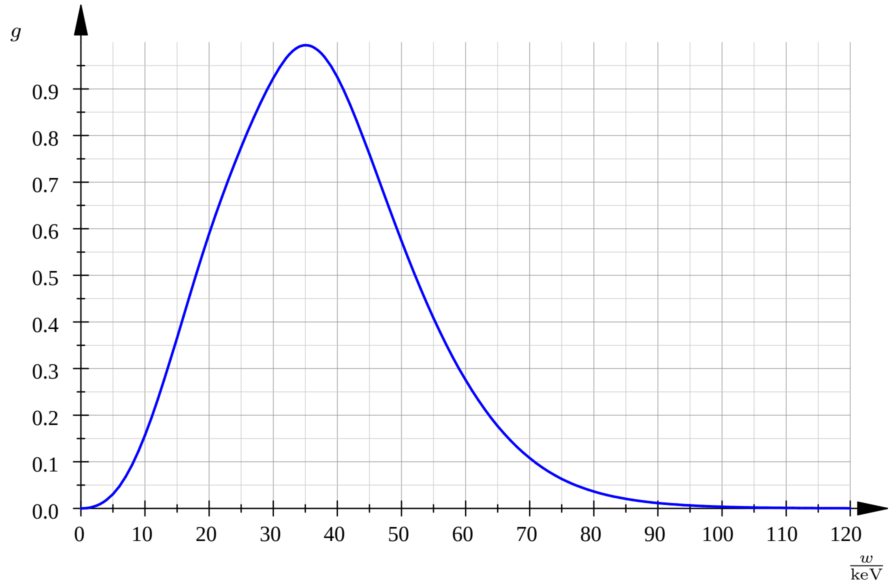
$$\langle r\rangle = n_\mathrm{D} n_\mathrm{T} A\cdot \mathrm{keV}^2\,\mathrm{barn}\int\limits_0^\infty w\sigma^* e^{-Bw}\,\mathrm{d}w \tag{1.25}$$

$$\langle r\rangle = n_\mathrm{D} n_\mathrm{T} C\int\limits_0^\infty g(w)\,\mathrm{d}w \tag{1.26}$$

mit

$$C = A\cdot \mathrm{keV}^2\,\mathrm{barn} = 1{,}783\cdot 10^{-24}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \quad \text{und} \quad g(w) = w\sigma^* e^{-Bw} \tag{1.27}$$





$$\int_0^\infty g(w)\,\mathrm{d}w = 36{,}0 \qquad \Longrightarrow \qquad \langle r\rangle = n_\mathrm{D} n_\mathrm{T}\cdot 36C = n_\mathrm{D} n_\mathrm{T}\cdot 6{,}4\cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \tag{1.28}$$

(d) Nutzbare Energie pro Fusion:

$$\Delta W = W_\mathrm{He} + 0{,}3 W_\mathrm{n} = 7{,}67\,\mathrm{MeV} \tag{1.29}$$

Aus $n_\mathrm{D} = n_\mathrm{T} = \frac{n}{2}$ folgt, dass die Elektronendichte im Plasma n ist. Damit ist die gesamte Teilchendichte $2n$ und die Energiedichte

$$\varepsilon = 2n\cdot\frac{3}{2}kT = 3nkT \tag{1.30}$$

Mit

$$\langle r\rangle = \frac{n^2}{4}\cdot\underbrace{6{,}4\cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}}_{\alpha} \tag{1.31}$$

folgt

$$\langle r\rangle\,\Delta W = \frac{n^2}{4}\alpha\Delta W > \frac{\varepsilon}{\tau} = \frac{3nkT}{\tau} \tag{1.32}$$

oder

$$n\tau > \frac{12kT}{\alpha\Delta W} = 2{,}1\cdot 10^{20}\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}^3} \tag{1.33}$$

(e) Mit der Kerndichte $n = 2n_\mathrm{D}$ und der Elektronendichte n ist die gesmte Teilchendichte $2n$:

$$pV = NkT \qquad \Longrightarrow \qquad p = \frac{N}{V}kT = 2nkT = 5{,}5\cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \tag{1.34}$$

$$[B] = \mathrm{T} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Am}}, \qquad [\mu_0] = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}, \qquad [p] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \tag{1.35}$$

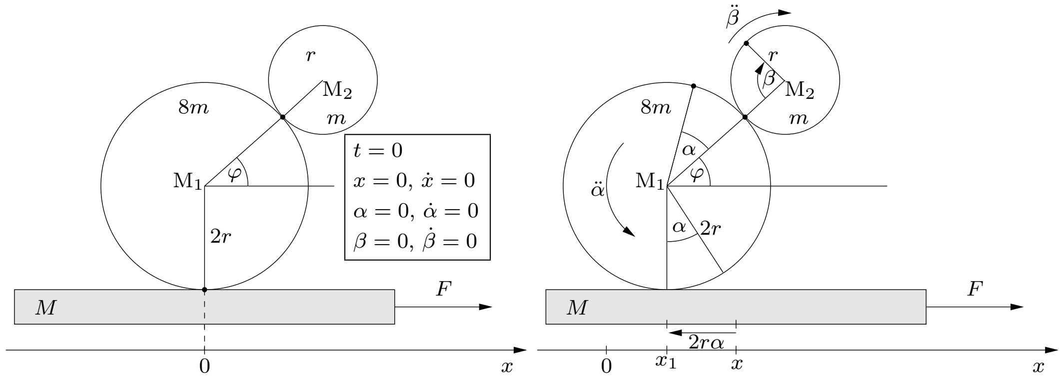
$$[p] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{A}^2\mathrm{m}^2}}{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}} = \frac{[\mathrm{B}]^2}{[\mu_0]} \tag{1.36}$$

$$p = \underbrace{\text{Zahlenfaktor}}_{\approx 1}\cdot\frac{B^2}{\mu_0} \tag{1.37}$$

$$B \approx \sqrt{2nkT\mu_0} = 0{,}83\,\mathrm{T} \tag{1.38}$$

Aufgabe 2: Rollende Kugeln

2.1 Elementare Lösung



$$I_1 = \frac{2 \cdot 8m}{5}(2r)^2 = \frac{64}{5}mr^2, \qquad I_2 = \frac{2}{5}mr^2 \tag{2.1}$$

Die x-Achse gehört zum Inertialsystem S.

$$x_1 = x - 2r\alpha, \qquad v_1 = \dot{x} - 2r\dot{\alpha}, \qquad a_1 = \ddot{x} - 2r\ddot{\alpha} \tag{2.2}$$

Gesamtimpuls:

$$p = M\dot{x} + 9m(\dot{x} - 2r\dot{\alpha}) \tag{2.3}$$

$$\dot{p} = F \quad \Longrightarrow \quad \boxed{(M + 9m)\ddot{x} - 18mr\ddot{\alpha} = F} \tag{2.4}$$

Kinetische Energie ($\beta = 2\alpha$):

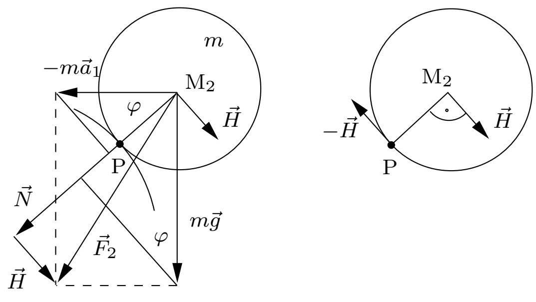
$$\begin{aligned} T &= \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{9m}{2}(\dot{x} - 2r\dot{\alpha})^2 + \frac{32mr^2}{5}\dot{\alpha}^2 + \frac{mr^2}{5}(2\dot{\alpha})^2 \\ &= \frac{M + 9m}{2}\dot{x}^2 - 18mr\dot{x}\dot{\alpha} + \frac{126}{5}mr^2\dot{\alpha}^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Energiesatz:

$$\boxed{\frac{M + 9m}{2}\dot{x}^2 - 18mr\dot{x}\dot{\alpha} + \frac{126}{5}mr^2\dot{\alpha}^2 = Fx} \tag{2.6}$$

S′ ist das System, in dem die Kugelschwerpunkte ruhen. Auf die kleine Kugel wirken in S′ die Gewichtskraft $m\vec{g}$, die Trägheitskraft $-m\vec{a}_1$ und vom Kontaktpunkt P die Gegenkräfte $-\vec{N}$ und $-\vec{H}$:

$$\vec{F}_2 = -m\vec{a}_1 + m\vec{g} = \vec{N} + \vec{H} \tag{2.7}$$



Die Gesamtkraft auf die kleine Kugel ist null, das Drehmoment

$$M_2 = Hr = (mg\cos\varphi - ma_1\sin\varphi)r = mr(g\cos\varphi - \ddot{x}\sin\varphi + 2r\ddot{\alpha}\sin\varphi) \tag{2.8}$$

$$M_2 = I_2\ddot{\beta} = 2I_2\ddot{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\ddot{x}\sin\varphi + 2r\ddot{\alpha}\left(\frac{2}{5} - \sin\varphi\right) = g\cos\varphi} \tag{2.9}$$

Aus (2.4) und (2.9) folgt

$$\ddot{x} = \frac{2F - 5F\sin\varphi + 45mg\cos\varphi}{2M + 18m - 5M\sin\varphi} \quad \text{und} \quad \ddot{\alpha} = \frac{5(mg\cos\varphi - F\sin\varphi + 9mg\cos\varphi)}{2r(2M + 18m - 5M\sin\varphi)} \tag{2.10}$$

Da F nach Voraussetzung konstant ist, sind auch $\ddot{x}$ und $\ddot{\alpha}$ konstant. Mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\alpha(0) = 0$ und $\dot{\alpha}(0) = 0$ folgt dann

$$\dot{x} = \ddot{x} \cdot t, \quad x = \frac{1}{2}\ddot{x} \cdot t^2, \quad \dot{\alpha} = \ddot{\alpha} \cdot t, \quad \alpha = \frac{1}{2}\ddot{\alpha} \cdot t^2 \tag{2.11}$$

(2.11) in (2.6):

$$(M + 9m)\ddot{x}^2 - 36mr\ddot{x}\ddot{\alpha} + \frac{252}{5}mr^2\ddot{\alpha}^2 = F\ddot{x} \tag{2.12}$$

(2.4) in (2.12):

$$(M + 9m)\ddot{x}^2 - 36mr\ddot{x}\ddot{\alpha} + \frac{252}{5}mr^2\ddot{\alpha}^2 = (M + 9m)\ddot{x}^2 - 18mr\ddot{x}\ddot{\alpha} \tag{2.13}$$

$$\ddot{x} = \frac{14}{5}r\ddot{\alpha} \tag{2.14}$$

(2.14) in (2.9):

$$\ddot{\alpha} = \frac{5g\cos\varphi}{4r(1 + \sin\varphi)}, \qquad \ddot{x} = \frac{7g\cos\varphi}{2(1 + \sin\varphi)} \tag{2.15}$$

$$a_1 = \ddot{x} - 2r\ddot{\alpha} = \frac{2}{7}\ddot{x} = \frac{g\cos\varphi}{1 + \sin\varphi} \tag{2.16}$$

$$g\cos\varphi = a_1(1 + \sin\varphi) \quad \Longrightarrow \quad H = m(g\cos\varphi - a_1\sin\varphi) = ma_1 \tag{2.17}$$

(2.15) in (2.4):

$$F = (M + 9m)r\ddot{\alpha} - 18mr\ddot{\alpha} = \frac{2r\ddot{\alpha}}{5}(7M + 18m) = \frac{\ddot{x}}{7}(7M + 18m) \tag{2.18}$$

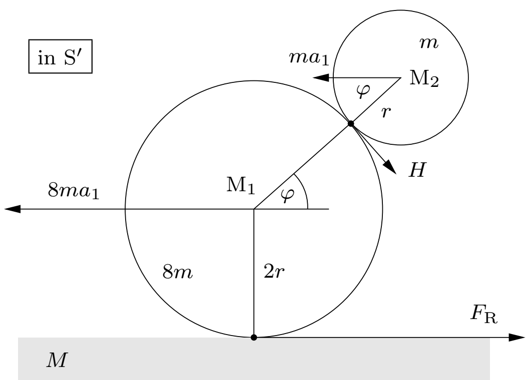
$$\boxed{F = \frac{(7M + 18m)g\cos\varphi}{2(1 + \sin\varphi)} = 30\,\mathrm{kg} \cdot \frac{g\cos\varphi}{1 + \sin\varphi}} \tag{2.19}$$

Die Kraft von der kleinen Kugel auf die große Kugel ist

$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -ma_1 \\ -mg \end{pmatrix} = \vec{N} + \vec{H} \tag{2.20}$$

Die Gesamtkraft auf die große Kugel in S′ ist in x-Richtung

$$F_x = -8ma_1 - ma_1 + F_\mathrm{R} = 0 \tag{2.21}$$



und damit

$$F_\mathrm{R} = 9ma_1 = \frac{9mg\cos\varphi}{1 + \sin\varphi} \leqq \mu_\mathrm{H} \cdot 9mg \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mu_\mathrm{H} \geqq \frac{\cos\varphi}{1 + \sin\varphi}} \tag{2.22}$$

Das Drehmoment auf die große Kugel um M$_1$ ist

$$M_1 = F_\mathrm{R} \cdot 2r - H \cdot 2r = 16ma_1r \tag{2.23}$$

in Übereinstimmung mit

$$M_1 = I_1\ddot{\alpha} = \frac{64}{5}mr^2 \cdot \frac{5g\cos\varphi}{4r(1 + \sin\varphi)} = 16ma_1r \tag{2.24}$$

(a) Zusammenfassung der Ergebnisse:

Drehwinkel der großen Kugel:	α
Drehwinkel der kleinen Kugel:	$\beta = 2\alpha$
Beschleunigung des Wagens im Inertialsystem (S):	$\ddot{x}$
Beschleunigung der Kugeln im Ruhsystem des Wagens:	$-2r\ddot{\alpha}$
Beschleunigung der Kugeln im Inertialsystem:	$a_1 = \ddot{x} - 2r\ddot{\alpha}$

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{14}{5} r\ddot{\alpha} = \frac{7g\cos\varphi}{2(1+\sin\varphi)} = \frac{7F}{7M+18m}} \tag{2.25}$$

$$\boxed{\ddot{\alpha} = \frac{5}{14r}\ddot{x} = \frac{5g\cos\varphi}{4r(1+\sin\varphi)} = \frac{5F}{2r(7M+18m)}} \tag{2.26}$$

$$\boxed{a_1 = \ddot{x} - 2r\ddot{\alpha} = \frac{2}{7}\ddot{x} = \frac{4}{5}r\ddot{\alpha} = \frac{g\cos\varphi}{1+\sin\varphi}} \tag{2.27}$$

$$\boxed{H = m(g\cos\varphi - a_1\sin\varphi) = ma_1} \tag{2.28}$$

$$\boxed{F = \frac{2r\ddot{\alpha}}{5}(7M+18m) = \frac{\ddot{x}}{7}(7M+18m) = \frac{(7M+18m)g\cos\varphi}{2(1+\sin\varphi)}} \tag{2.29}$$

$$\boxed{F = F_0 \cdot \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}} \quad \text{mit} \quad \boxed{F_0 = \frac{(7M+18m)g}{2} = 30\,\mathrm{kg}\cdot g = 294{,}3\,\mathrm{kg}} \tag{2.30}$$

$$\boxed{\mu_\mathrm{H} \geqq \mu_0 = \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}} \tag{2.31}$$

(b)

$$F = F_0 \cdot \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} = F_1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} = \frac{F_1}{F_0} = k \tag{2.32}$$

$$\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi = k^2(1+\sin\varphi)^2$$

$$(1+k^2)\sin^2\varphi + 2k^2\sin\varphi = 1 - k^2$$

$$\sin\varphi = -\frac{k^2}{1+k^2} \overset{+}{(-)} \frac{1}{1+k^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2} \tag{2.33}$$

$$k = \frac{F_1}{F_0} = \frac{290}{30\cdot 9{,}81} = 0{,}985389 \quad \Longrightarrow \tag{2.34}$$

$$\sin\varphi = 0{,}01471766946 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 0{,}0147182 = 0{,}84^\circ \tag{2.35}$$

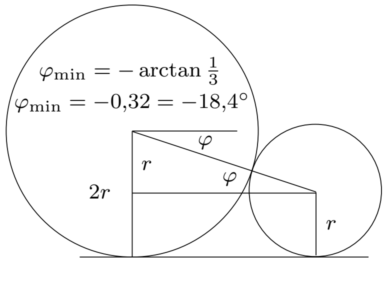
Beschleunigung der Kugeln im Ruhsystem des Wagens ($s = 1\,\mathrm{m}$):

$$|a'| = 2r\ddot{\alpha} = \frac{5}{2}gk \quad \Longrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{|a'|}} = \sqrt{\frac{4s}{5gk}} = 0{,}29\,\mathrm{s} \tag{2.36}$$

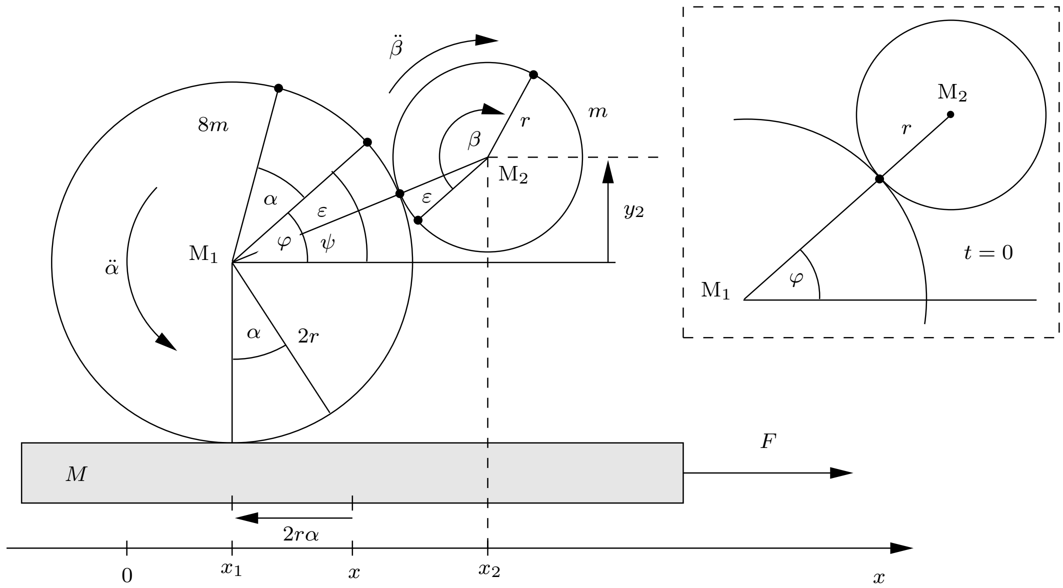
(c) Wegen $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\dfrac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}\right) = -\dfrac{1}{1+\sin\varphi} < 0$ ist

$\mu_0(\varphi) = \dfrac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}$ fallend, d.h.

$$\mu_\mathrm{H} \geqq \mu_0(\varphi_\mathrm{min}) = 1{,}39 \tag{2.37}$$



2.2 Lösung mit Lagrange



Generalisierte Koordinaten: x, α, β. Dabei ist β der Drehwinkel der kleinen Kugel im *Inertialsystem.* Abrollbedingung für die kleine Kugel (Vorsicht, der Summand $r\varepsilon$ wird leicht vergessen):

$$r\beta = 2r(\alpha+\varepsilon) + r\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \beta = 2\alpha + 3\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon = \frac{\beta - 2\alpha}{3} \tag{2.38}$$

$$\psi = \varphi - \varepsilon = \varphi + \frac{2\alpha}{3} - \frac{\beta}{3}, \qquad \dot\psi = \frac{2\dot\alpha}{3} - \frac{\dot\beta}{3} \tag{2.39}$$

$$x_1 = x - 2r\alpha, \qquad x_2 = x - 2r\alpha + 3r\cos\psi, \qquad y_2 = 3r\sin\psi \tag{2.40}$$

$$v_1 = \dot x - 2r\dot\alpha, \qquad v_{21} = \dot x - 2r\dot\alpha - 3r\dot\psi\sin\psi, \qquad v_{22} = 3r\dot\psi\cos\psi \tag{2.41}$$

$$T = \frac{M}{2}\dot x^2 + 4mv_1^2 + \frac{m}{2}(v_{21}^2 + v_{22}^2) + \frac{I_1}{2}\dot\alpha^2 + \frac{I_2}{2}\dot\beta^2 \tag{2.42}$$

$$U = -Fx + 3rmg\sin\psi \tag{2.43}$$

$$L = T - U = \frac{M}{2}\dot x^2 + 4mv_1^2 + \frac{m}{2}(v_{21}^2 + v_{22}^2) + \frac{I_1}{2}\dot\alpha^2 + \frac{I_2}{2}\dot\beta^2 - 3rmg\sin\psi + Fx \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned} L = \frac{M+9m}{2}\dot x^2 + mr\left(-18\dot x\dot\alpha + \frac{132}{5}r\dot\alpha^2 - 2r\dot\alpha\dot\beta + \frac{7}{10}r\dot\beta^2\right) - \\ - mr\left(2\dot x\dot\alpha - \dot x\dot\beta + 2r\dot\alpha\dot\beta - 4r\dot\alpha^2 + 3g\right)\sin\underbrace{\left(\varphi + \frac{2\alpha-\beta}{3}\right)}_{\psi} + Fx(t) \end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot x} = (M+9m)\dot x - 18mr\dot\alpha - mr(2\dot\alpha - \dot\beta)\sin\psi \tag{2.46}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot x} = (M+9m)\ddot x - 18mr\ddot\alpha - mr(2\ddot\alpha - \ddot\beta)\sin\psi - \frac{mr}{3}\left(2\dot\alpha - \dot\beta\right)^2\cos\psi \tag{2.47}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = F \tag{2.48}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\alpha} = mr\left[-18\dot x + \frac{264}{5}r\dot\alpha - 2r\dot\beta\right] - mr\left(2\dot x + 2r\dot\beta - 8r\dot\alpha\right)\sin\psi \tag{2.49}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot\alpha} = mr\left[-18\ddot x + \frac{264}{5}r\ddot\alpha - 2r\ddot\beta\right] - mr\left(2\ddot x + 2r\ddot\beta - 8r\ddot\alpha\right)\sin\psi - $$
$$- \frac{mr}{3}\left(2\dot x + 2r\dot\beta - 8r\dot\alpha\right)\left(2\dot\alpha - \dot\beta\right)\cos\psi \tag{2.50}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -\frac{2}{3}mr\left(2\dot x\dot\alpha - \dot x\dot\beta + 2r\dot\alpha\dot\beta - 4r\dot\alpha^2 + 3g\right)\cos\psi \tag{2.51}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\beta} = mr\left[-2r\dot\alpha + \frac{7}{5}r\dot\beta\right] - mr\left(-\dot x + 2r\dot\alpha\right)\sin\left(\varphi + \frac{2\alpha-\beta}{3}\right) \tag{2.52}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot\beta} = mr\left[-2r\ddot\alpha + \frac{7}{5}r\ddot\beta\right] - mr\left(-\ddot x + 2r\ddot\alpha\right)\sin\psi - $$
$$- \frac{mr}{3}\left(-\dot x + 2r\dot\alpha\right)\left(2\dot\alpha - \dot\beta\right)\cos\psi \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{1}{3}mr\left(2\dot x\dot\alpha - \dot x\dot\beta + 2r\dot\alpha\dot\beta - 4r\dot\alpha^2 + 3g\right)\cos\psi \tag{2.54}$$

Zwangsbedingung:

$$f(\alpha,\beta) = 2\alpha - \beta = 0 \tag{2.55}$$

Mit dem Lagrangeschen Multiplikator λ gelten die Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot x} = \frac{\partial L}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{2.56}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \alpha} + \lambda\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial L}{\partial \alpha} + 2\lambda \tag{2.57}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot\beta} = \frac{\partial L}{\partial \beta} + \lambda\frac{\partial f}{\partial \beta} = \frac{\partial L}{\partial \beta} - \lambda \tag{2.58}$$

$$(M+9m)\ddot x - 18mr\ddot\alpha = F \tag{2.59}$$

$$-9\ddot x + \frac{122}{5}r\ddot\alpha - (\ddot x - 2r\ddot\alpha)\sin\varphi + g\cos\varphi = \frac{\lambda}{mr} \tag{2.60}$$

$$\frac{4}{5}r\ddot\alpha + (\ddot x - 2r\ddot\alpha)\sin\varphi - g\cos\varphi = -\frac{\lambda}{mr} \tag{2.61}$$

(2.60)+(2.61) $\Longrightarrow$

$$\ddot x = \frac{14}{5}r\ddot\alpha \tag{2.62}$$

Aus (2.59) und (2.62) folgt

$$F = \frac{7M+18m}{7}\ddot x \tag{2.63}$$

Da keine Zwangskraft vorhanden ist, muss $\lambda = 0$ sein. Damit folgt aus (2.61) und (2.62)

$$\ddot x = \frac{7g\cos\varphi}{2(1+\sin\varphi)} \tag{2.64}$$

(2.63) und (2.64) $\Longrightarrow$

$$F = \frac{(7M+18m)g\cos\varphi}{2(1+\sin\varphi)} \tag{2.65}$$

Setzt man die Zwangsbedingung gleich in die Lagrangefunktion L ein, erhält man nur zwei Gleichungen in den Variablen x und α, die zu wenig Information enthalten.

Aufgabe 3:

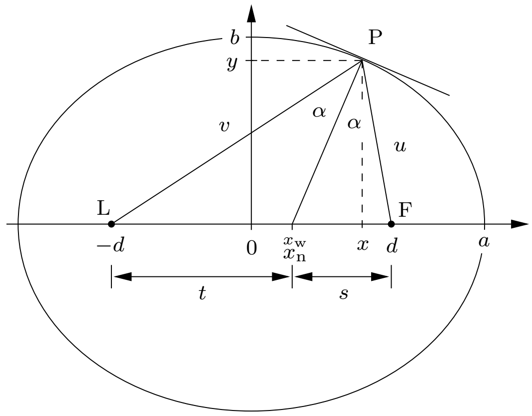
3.1 Spiegelkonstruktion

(a) In zwei Dimensionen ist die Spiegel-„fläche“ eine Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.1}$$

mit den Brennpunkten bei $-d$ und d auf der x-Achse. Die Spiegelfläche entsteht durch Rotation der Ellipse um die x-Achse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1 \tag{3.2}$$



Weiter gilt für die Ellipse (P $(\,x\,|\,y\,)$ ist der Reflexionspunkt):

$$b^2 = a^2 - d^2 \tag{3.3}$$

und

$$u + v = \overline{\mathrm{FP}} + \overline{\mathrm{LP}} = \underbrace{\sqrt{(x-d)^2+y^2}}_{u} + \underbrace{\sqrt{(x+d)^2+y^2}}_{v} = 2a \tag{3.4}$$

Aus (3.1) folgt

$$y^2 = \frac{(a^2-d^2)(a^2-x^2)}{a^2} \tag{3.5}$$

und damit

$$a^2u^2 = a^2(x-d)^2 + (a^2-d^2)(a^2-x^2) = \left(a^2 - xd\right)^2 \tag{3.6}$$

oder mit (3.4)

$$u = a - \frac{xd}{a} \qquad \text{und} \qquad v = a + \frac{xd}{a} \tag{3.7}$$

Ableiten von (3.1) nach x:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \tag{3.8}$$

Die Steigungen der Tangente und der Normale im Punkt P $(\,x\,|\,y\,)$ sind

$$a_\mathrm{t} = y' = -\frac{b^2x}{a^2y} \qquad \text{und} \qquad a_\mathrm{n} = \frac{a^2y}{b^2x} \tag{3.9}$$

Die Normale hat die Gleichung

$$n(\xi) = y + \frac{a^2y}{b^2x}(\xi - x) \tag{3.10}$$

und schneidet die x-Achse bei

$$x_\mathrm{n} = \frac{xd^2}{a^2} \tag{3.11}$$

Die Winkelhalbierende von $\sphericalangle$LPF im Dreieck LPF teilt die Strecke $\overline{\mathrm{LF}} = 2d$ im Verhältnis der anliegenden Seiten $v = \overline{\mathrm{LP}}$ und $u = \overline{\mathrm{FP}}$:

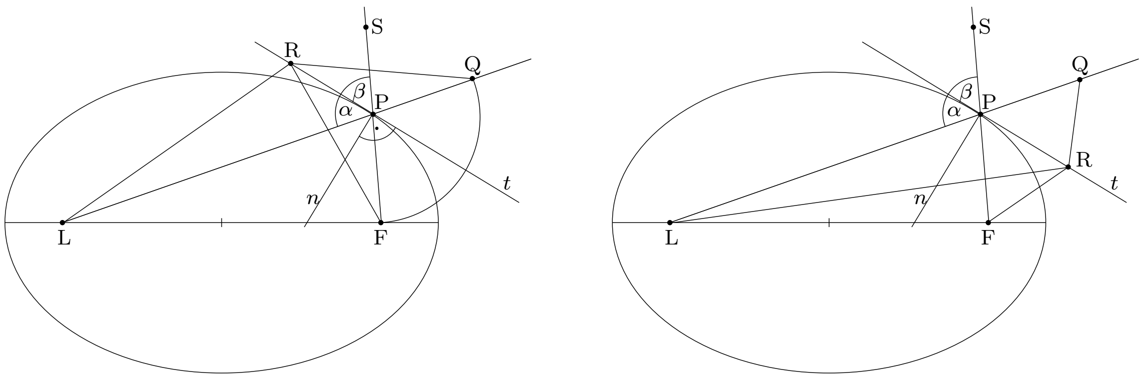
$$\frac{t}{s} = \frac{v}{u} \quad \text{und} \quad t + s = 2d \quad \Longrightarrow \quad s = \frac{2ud}{u+v} = \frac{ud}{a} = d - \frac{xd^2}{a^2} \tag{3.12}$$

Die Winkelhalbierende schneidet die x-Achse bei

$$x_{\mathrm{w}} = d - s = \frac{xd^2}{a^2} = x_{\mathrm{n}} \tag{3.13}$$

Damit ist bewiesen, dass alle von L ausgehenden Strahlen in F fokussiert werden.

Ein rein geometrischer Beweis:



Definitionen:

$\mathrm{S} \in \mathrm{FP}$, $\mathrm{Q} \in \mathrm{LP}$ und $\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{PF}}$, t ist Winkelhalbierende von $\measuredangle\mathrm{LPS}$ ($\alpha = \beta$)

n ist die Senkrechte auf t in P und damit auch Winkelhalbierende von $\measuredangle\mathrm{LPF}$

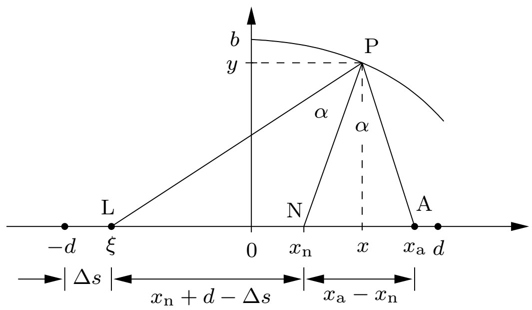
$\mathrm{R} \in t$ und $\mathrm{R} \neq \mathrm{P}$

Behauptung: n ist Normale auf die Ellipse in P

Beweis: $\overline{\mathrm{LR}} + \overline{\mathrm{RF}} = \overline{\mathrm{LR}} + \overline{\mathrm{RQ}} > \overline{\mathrm{LP}} + \overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{LP}} + \overline{\mathrm{PF}} = 2a$

Daher liegt R außerhalb der Ellipse, d.h. alle Punkte von t außer P liegen außerhalb der Ellipse. t ist also Tangente und n somit Normale.

(b) Lichtquelle L bei $\xi = -d + \Delta s$. Wir betrachten den Strahl, der bei $\mathrm{P}\,(\,x\,|\,y\,)$ reflektiert wird. Die Normale (Winkelhalbierende) schneidet die x-Achse im Punkt N (siehe (3.11)) bei



$$x_{\mathrm{n}} = \frac{xd^2}{a^2} \tag{3.14}$$

Der Strahl trifft die x-Achse bei x_{a} (Punkt A).

Satz von der Winkelhalbierenden im Dreieck LAP:

$$\frac{\overline{\mathrm{NA}}}{\overline{\mathrm{NL}}} = \frac{\overline{\mathrm{PA}}}{\overline{\mathrm{PL}}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\overline{\mathrm{NA}}^2}{\overline{\mathrm{NL}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{PA}}^2}{\overline{\mathrm{PL}}^2} \tag{3.15}$$

oder

$$\frac{(x_{\mathrm{a}} - x_{\mathrm{n}})^2}{(x_{\mathrm{n}} + d - \Delta s)^2} = \frac{(x - x_{\mathrm{a}})^2 + y^2}{(x + d - \Delta s)^2 + y^2} \tag{3.16}$$

Daraus folgt die quadratische Gleichung

$$k_2 x_{\mathrm{a}}^2 + k_1 x_{\mathrm{a}} + k_0 = 0 \tag{3.17}$$

mit

$$k_0 = -(d-\Delta s)\left[(d-\Delta s)\left(x^2+y^2-x_{\mathrm{n}}^2\right)+2x_{\mathrm{n}}(x^2+y^2-xx_{\mathrm{n}})\right] \tag{3.18}$$

$$k_1 = 2\left[(d-\Delta s)^2(x-x_{\mathrm{n}})-x_{\mathrm{n}}\left(x^2+y^2-xx_{\mathrm{n}}\right)\right] \tag{3.19}$$

$$k_2 = x^2+y^2-x_{\mathrm{n}}^2+2(d-\Delta s)(x-x_{\mathrm{n}}) \tag{3.20}$$

Eine Lösung von (3.17) ist $x_{\mathrm{a}}' = -d+\Delta s$. Die uns interessierende Lösung ist dann (Vieta)

$$x_{\mathrm{a}} = \frac{k_0}{x_{\mathrm{a}}' k_2} = \frac{k_0}{-(d-\Delta s)k_2} = \frac{(d-\Delta s)\left(x^2+y^2-x_{\mathrm{n}}^2\right)+2x_{\mathrm{n}}(x^2+y^2-xx_{\mathrm{n}})}{x^2+y^2-x_{\mathrm{n}}^2+2(d-\Delta s)(x-x_{\mathrm{n}})} \tag{3.21}$$

(3.11) und (3.5) in (3.21):

$$x_{\mathrm{a}} = \frac{d\left(a^2+dx\right)^2-\left(a^4+d^2x^2\right)\Delta s}{\left(a^2+dx\right)^2-2a^2x\Delta s} \tag{3.22}$$

Unter Vernachlässigung von Termen in höherer Ordnung von Δs findet man

$$x_{\mathrm{a}}(x) \approx d-\left(\frac{a^2-dx}{a^2+dx}\right)^2\cdot\Delta s \tag{3.23}$$

$x_{\mathrm{a}}(x)$ ist monoton steigend, d.h.

$$x_{\mathrm{a,min}} = x_{\mathrm{a}}(-a) = d-\left(\frac{a+d}{a-d}\right)^2\cdot\Delta s \tag{3.24}$$

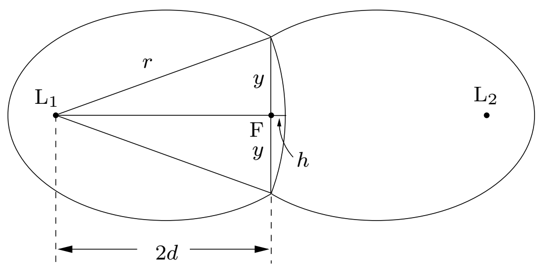
und

$$x_{\mathrm{a,max}} = x_{\mathrm{a}}(a) = d-\left(\frac{a-d}{a+d}\right)^2\cdot\Delta s \tag{3.25}$$

Die gesuchte Länge des Stabes ist dann

$$L = x_{\mathrm{a,max}}-x_{\mathrm{a,min}} = \frac{8ad(a^2+d^2)}{(a^2-d^2)^2}\cdot\Delta s \tag{3.26}$$

(c) Mit $x = d$ folgt aus (3.5)



$$y^2 = \frac{(a^2-d^2)^2}{a^2} \tag{3.27}$$

$$y = \frac{a^2-d^2}{a} = a-\frac{d^2}{a} \tag{3.28}$$

$$r = 2a-y = \frac{a^2+d^2}{a} \tag{3.29}$$

$$r^2-y^2 = \frac{(a^2+d^2)^2-(a^2-d^2)^2}{a^2} = 4d^2 \tag{3.30}$$

$$h = r-\sqrt{r^2-y^2} = r-2d = \frac{(a-d)^2}{a} \tag{3.31}$$

Der ausgeschnittene Raumwinkel ist $\Omega = 4\pi\omega$ mit

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\text{Fläche der Kugelhaube}}{\text{Kugeloberfläche}} = \frac{\pi(y^2+h^2)}{4\pi r^2} = \frac{(a^2-d^2)^2+(a-d)^4}{4(a^2+d^2)^2} = \\ &= \frac{(a-d)^2(a+d)^2+(a-d)^4}{4(a^2+d^2)^2} = \frac{(a-d)^2}{2(a^2+d^2)}\end{aligned} \tag{3.32}$$

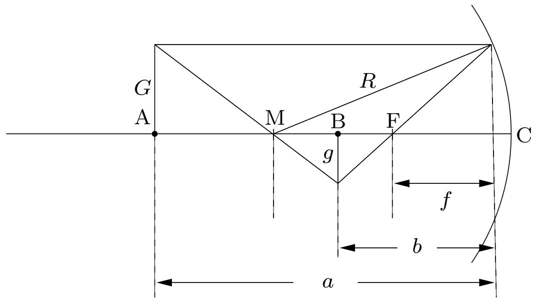
P_0: Leistung einer Quelle, $P_{\mathrm{ges}} = 2P_0$, P: Leistung im Fokus

$$\frac{P}{P_{\mathrm{ges}}} = 1-\omega = \frac{(a+d)^2}{2(a^2+d^2)} \tag{3.33}$$

3.2 Bewegtes Bild

Für achsennahe Strahlen gilt

$$f \approx \overline{\mathrm{FC}} = \frac{R}{2} \qquad (3.34)$$



Aus der Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R} \qquad (3.35)$$

folgt

$$b = \frac{Ra}{2a - R} \tag{3.36}$$

Differenzieren von (3.35):

$$-\frac{\dot{a}}{a^2} - \frac{\dot{b}}{b^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{b} = -\frac{b^2}{a^2}\dot{a} = -\frac{R^2}{(2a-R)^2} \cdot \dot{a} \tag{3.37}$$

Mit $a = d - vt$ folgt

$$v_b = \dot{b} = -\frac{R^2}{(2(d-vt)-R)^2} \cdot v \tag{3.38}$$

Bewegung senkrecht zur Achse ($a = d$):

$$\frac{g}{R-b} = \frac{G}{a-R} \quad \Longrightarrow \tag{3.39}$$

$$\dot{g} = \frac{R-b}{a-R} \cdot \dot{G} = \frac{R - \dfrac{Ra}{2a-R}}{a-R} \cdot \dot{G} = \frac{R}{2a-R} \cdot \dot{G} = \frac{R}{2d-R} \cdot \dot{G} \tag{3.40}$$

oder

$$v_b = \dot{g} = \frac{R}{2d-R} \cdot v \tag{3.41}$$