40. Internationale Physik-Olympiade – Mexiko 2009
Lösungen zur zweiten Runde
R. Reindl

Aufgabe 1: Verkehrsfluss

(a) Mit der Reaktionszeit t_r, der Autolänge L und dem maximalen Reibungskoeffizienten μ ist die Entfernung zweier gleichwertiger Punkte (z.B. vordere Stoßstange) aufeinander folgender Autos:

$$s = L + vt_\mathrm{r} + \frac{v^2}{2\mu g} \tag{1.1}$$

Die Strecke s legt *ein* Auto in der Zeit $\frac{s}{v}$ zurück, der Verkehrsfluss ist also

$$\Phi = \frac{v}{s} = \frac{v}{L + vt_\mathrm{r} + \frac{v^2}{2\mu g}} \tag{1.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}v} = \frac{L - \frac{v^2}{2\mu g}}{\left(L + vt_\mathrm{r} + \frac{v^2}{2\mu g}\right)^2} \tag{1.3}$$

Aus $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}v} = 0$ folgt

$$v_\mathrm{max} = \sqrt{2L\mu g} = 8{,}28\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 29{,}8\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \tag{1.4}$$

$$\Phi_\mathrm{max} = \Phi(v_\mathrm{max}) = \frac{\sqrt{2L\mu g}}{L + t_\mathrm{r}\sqrt{2L\mu g} + \frac{2L\mu g}{2\mu g}} = \frac{\sqrt{2L\mu g}}{2L + t_\mathrm{r}\sqrt{2L\mu g}} =$$

$$= \frac{1}{t_\mathrm{r} + \sqrt{\frac{2L}{\mu g}}} = 0{,}498\,\frac{1}{\mathrm{s}} \tag{1.5}$$

(b) Geschwindigkeit des n-ten Autos nach dem Bremsen (das erste bremsende Auto hat den Index 0), wenn $V_n \geqq 0$:

$$V_n = v_0 - \kappa^n \Delta v \tag{1.6}$$

$$V_n \geqq 0 \quad \Longrightarrow \quad n \leqq \frac{\ln \frac{v_0}{\Delta v}}{\ln \kappa} = 5{,}28 \tag{1.7}$$

$$V_n = \begin{cases} v_0 - \kappa^n \Delta v & \text{für } 0 \leqq n \leqq 5 \\ 0 & \text{für } n \geqq 6 \end{cases} \tag{1.8}$$

Auto n beginnt den Bremsvorgang zur Zeit $t_{1n} = nt_\mathrm{r}$ am Ort

$$x_{1n} = -n(s - v_0 t_\mathrm{r}) \tag{1.9}$$

Auto n beschleunigt wieder zur Zeit $t_{2n} = nt_\mathrm{r} + \Delta t$ am Ort

$$x_{2n} = x_{1n} + V_n \Delta t = \begin{cases} -n(s - v_0 t_\mathrm{r}) + (v_0 - \kappa^n \Delta v)\Delta t & \text{für } 0 \leqq n \leqq 5 \\ -n(s - v_0 t_\mathrm{r}) & \text{für } n \geqq 6 \end{cases} \tag{1.10}$$

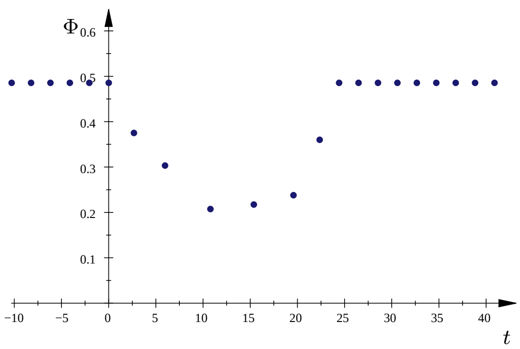
n	0	1	2	3	4	5	6	7
t_{1n} in s	0	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	4,8	5,6
x_{1n} in m	0	−14, 0	−28,0	−42,0	−56,0	−69,9	−83,9	−97,9
t_{2n} in s	10	10,8	11,6	12,4	13,2	14,0	14,8	15,6
x_{2n} in m	83,3	61,0	36,2	8,12	-24,2	−62,0	−83,9	−97,9

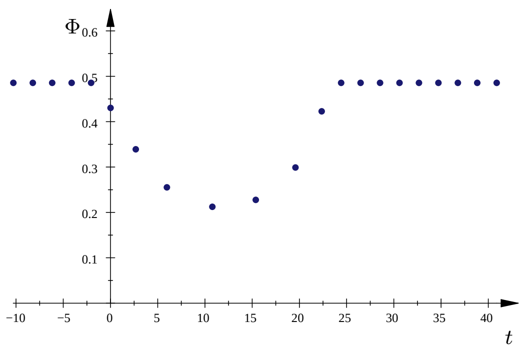
Auto n ist zur Zeit t_{0n} am Ort $x_{10} = 0$:

$$t_{0n} = \begin{cases} -n \cdot \dfrac{s}{v_0} & \text{für } n \leqq 0 \\ t_{1n} - \dfrac{x_{1n}}{V_n} & \text{für } x_{2n} \geqq 0, \text{ d.h. } 0 < n \leqq 3 \\ t_{2n} - \dfrac{x_{2n}}{v_0} & \text{für } n \geqq 4 \end{cases} \tag{1.11}$$

$$t_{0n} = \begin{cases} -n \cdot \dfrac{s}{v_0} & \text{für } n \leqq 0 \\ \dfrac{n\,(s - \kappa^n t_{\mathrm{r}} \Delta v)}{v_0 - \kappa^n \Delta v} & \text{für } 0 < n \leqq 3 \\ \dfrac{ns + \kappa^n \Delta t \Delta v}{v_0} & \text{für } 4 \leqq n \leqq 5 \\ n \cdot \dfrac{s}{v_0} + \Delta t & \text{für } n \geqq 6 \end{cases} \tag{1.12}$$

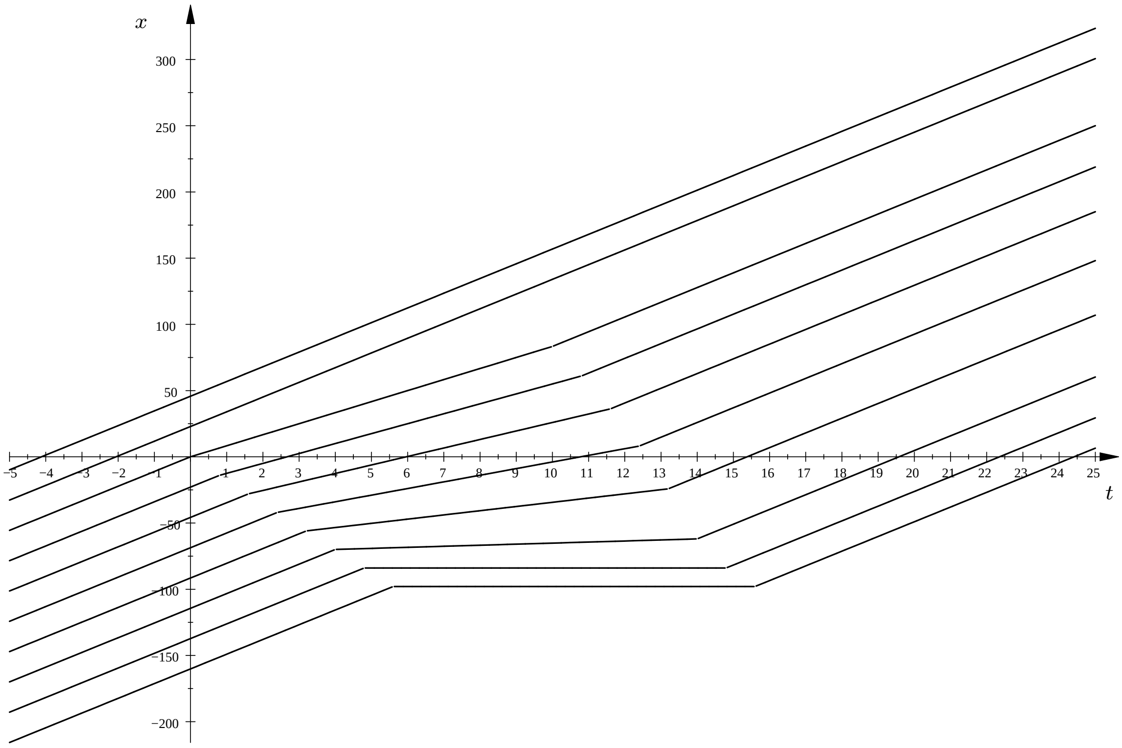
n	t_{0n}	$t_{0n} - t_{0,n-1}$	$\frac{1}{t_{0n}-t_{0,n-1}}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_{0n}-t_{0,n-1}} + \frac{1}{t_{0,n+1}-t_{0,n}}\right)$
−2	−4,118	2,059	0,4857	0,4857
−1	−2,059	2,059	0,4857	0,4857
0	0	2,059	0,4857	0,4304
1	2,665	2,665	0,3752	0.3393
2	5,960	3,295	0,3035	0.2555
3	10,780	4,819	0,2075	0.2125
4	15,376	4,597	0,2175	0.2278
5	19,577	4,201	0,2380	0.2991
6	22,354	2,777	0,3601	0.4229
7	24,413	2,059	0,4857	0,4857
8	26,472	2,059	0,4857	0,4857

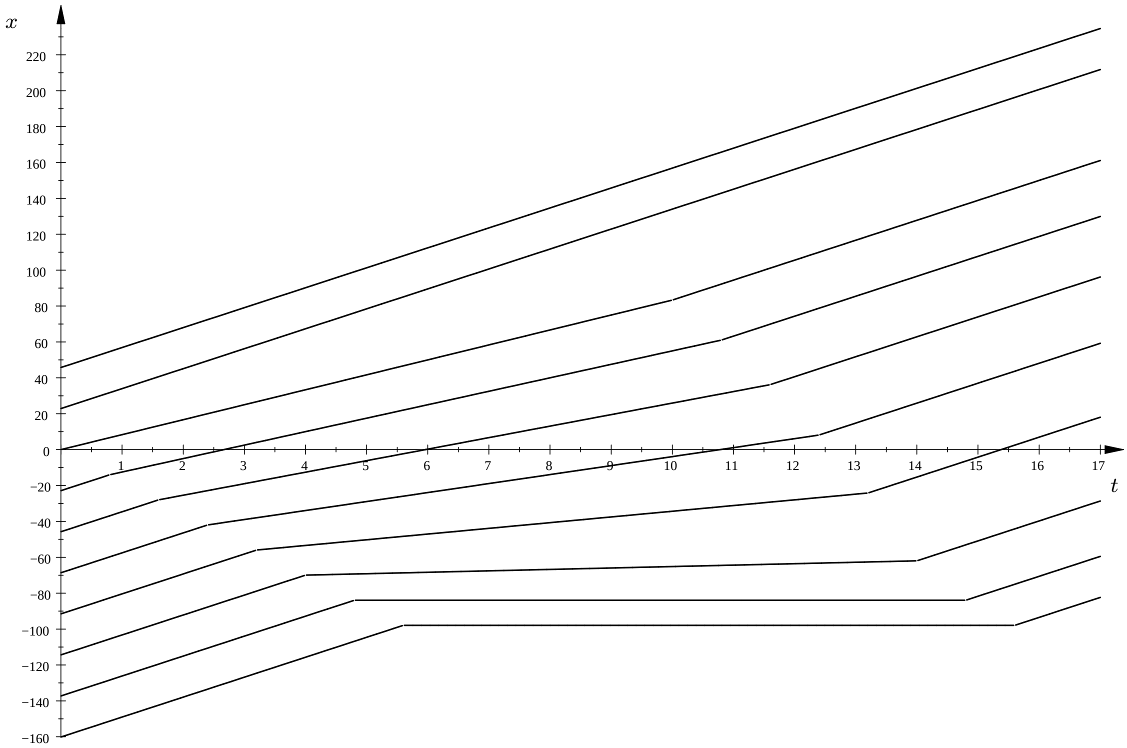




Der minimale Fluss ist also

$$\Phi_{\min} \approx 0{,}21\,\frac{1}{\mathrm{s}} = 760\,\frac{1}{\mathrm{h}} \tag{1.13}$$


x
300
250
200
150
100
50
−50
−100
−150
−200
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
t


x
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
−20
−40
−60
−80
−100
−120
−140
−160
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
t

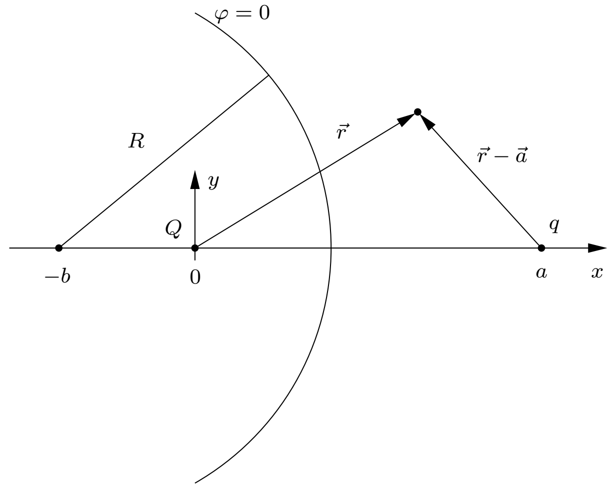
Aufgabe 2: Elektrostatik

(a) Zunächst betrachten wir die Ladungen Q und q an den Orten $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$. Das Potential ist

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{\alpha Q}{|\vec{r}|} - \frac{\alpha q}{|\vec{r} - \vec{a}|} \tag{2.1}$$

mit

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ und } \alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tag{2.2}$$



Wir suchen die Äquipotentialfläche $\varphi(\vec{r}) = 0$:

$$\varphi(\vec{r}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{Q}{|\vec{r}|} = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{a}|} \tag{2.3}$$

(2.3) nur möglich für $\operatorname{sgn}(Q) = -\operatorname{sgn}(q)$. Quadrieren von (2.3):

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 + y^2}{Q^2} &= \frac{(x-a)^2 + y^2}{q^2} \\
x^2(q^2 - Q^2) + 2xaQ^2 + y^2(q^2 - Q^2) &= a^2Q^2 \\
x^2 + 2 \cdot \frac{aQ^2}{q^2 - Q^2} \cdot x + \left(\frac{aQ^2}{q^2 - Q^2}\right)^2 + y^2 &= \frac{a^2Q^2}{q^2 - Q^2} + \frac{a^2Q^4}{(q^2 - Q^2)^2} \\
\left(x + \frac{aQ^2}{q^2 - Q^2}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{aQq}{q^2 - Q^2}\right)^2
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Wegen der Rotationssymmetrie um die x-Achse ist die Äquipotentialfläche also die Kugel

$$(x + b)^2 + y^2 = R^2 \tag{2.5}$$

mit

$$b = \frac{aQ^2}{q^2 - Q^2} \qquad \text{und} \qquad R = \left|\frac{aQq}{q^2 - Q^2}\right| \tag{2.6}$$

$$b + a = \frac{aq^2}{q^2 - Q^2} = \frac{d}{2} \quad \Longrightarrow \quad q^2 - Q^2 = \frac{2aq^2}{d} \tag{2.7}$$

$$R = \frac{|Q|d}{2q} \qquad \text{oder} \qquad \frac{|Q|}{q} = \frac{2R}{d} \tag{2.8}$$

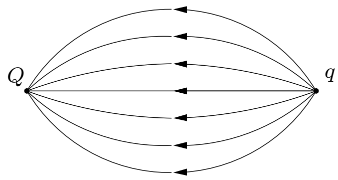
$$b = \frac{aQ^2d}{2aq^2} = \frac{Q^2d}{2q^2} = \frac{2R^2}{d} \tag{2.9}$$

Für das Potential einer Ladungsverteilung gilt im Vakuum die Laplace-Gleichung

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{2.10}$$

Kennt man für eine Ladungsverteilung und eine Anordnung von Leitern ein Potential, das im Vakuum Lösung der Laplace-Gleichung ist und die Randbedingungen „$\varphi = 0$ auf Leiteroberflächen“ erfüllt, dann hat man die eindeutig bestimmte Lösung gefunden. Es folgt also:

Eine geerdete Kugel mit Radius R und die Ladung q in der Entfernung $\frac{d}{2}$ vom Kugelmittelpunkt erzeugen außerhalb der Kugel das gleiche Feld wie q und die *Spiegelladung*

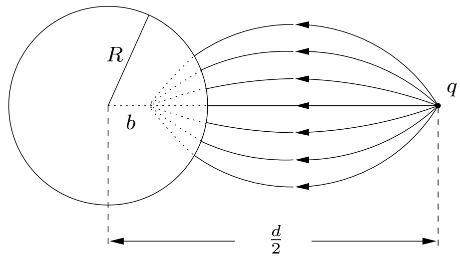


$$Q = -\frac{2rq}{d} \tag{2.11}$$

in der Entfernung

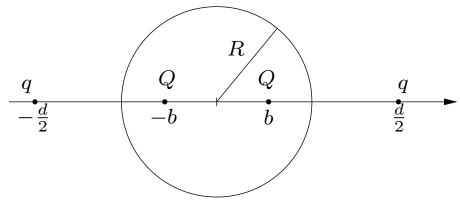
$$b = \frac{2R^2}{d} \tag{2.12}$$

vom Kugelmittelpunkt.



Die Gesamtkraft auf q ist null, wenn

$$\frac{\alpha q^2}{d^2} = \frac{\alpha|Q|q}{\left(\frac{d}{2}-b\right)^2} + \frac{\alpha|Q|q}{\left(\frac{d}{2}+b\right)^2} \tag{2.13}$$



Mit (2.9) folgt daraus

$$\frac{q}{|Q|d^2} = \frac{1}{\left(\frac{d}{2}-\frac{2R^2}{d}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{d}{2}+\frac{2R^2}{d}\right)^2} \tag{2.14}$$

Mit (2.8) wird daraus

$$\frac{1}{2Rd} = \frac{1}{\left(\frac{d}{2}-\frac{2R^2}{d}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{d}{2}+\frac{2R^2}{d}\right)^2} = \frac{4}{d^2\left(1-\frac{4R^2}{d^2}\right)^2} + \frac{4}{d^2\left(1+\frac{4R^2}{d^2}\right)^2} \tag{2.15}$$

$$\frac{d}{8R} = \frac{1}{\left(1-\frac{4R^2}{d^2}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{4R^2}{d^2}\right)^2} \tag{2.16}$$

Mit der Substitution $u = \frac{2R}{d}$ folgt aus (2.16)

$$\frac{1}{4u} = \frac{1}{(1-u^2)^2} + \frac{1}{(1+u^2)^2} \tag{2.17}$$

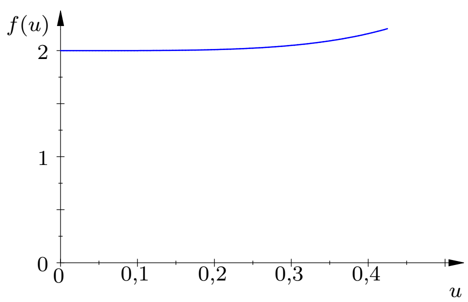
(2.17) führt auf eine Gleichung 8. Grades. Daher verwenden wir eine Näherung ($u^2 \ll 1$):

$$\frac{1}{4u} \approx \frac{1}{1-2u^2} + \frac{1}{1+2u^2} \approx 1 + 2u^2 + 1 - 2u^2 = 2 \tag{2.18}$$

$$u = \frac{2R}{d} = \frac{1}{8} \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{d}{16} \tag{2.19}$$

Nebenstehende Abbildung zeigt die Güte der verwendeten Näherung. Gezeichnet ist der Verlauf der Funktion

$$f(u) = \frac{1}{(1-u^2)^2} + \frac{1}{(1+u^2)^2} \tag{2.20}$$



Eine genauere numerische Lösung:

$$u = 0{,}1249087439 \quad \Longrightarrow$$

$$R = 0{,}06245437197\,d = \frac{d}{16{,}01168931}, \qquad \delta_{\text{rel}} = -0{,}073\,\%$$

(b) Die Kapazität der Kugel ist

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \tag{2.21}$$

Auf die Kugel fließt die Ladung

$$\overline{Q} = CU = 4\pi\varepsilon_0 RU \tag{2.22}$$

Dadurch wirkt auf q die Kraft

$$F = \frac{\overline{Q}q}{4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{RUq}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{dUq}{16\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{Uq}{4d} \tag{2.23}$$

Aufgabe 3: Galaktische Thermodynamik

3.1 Ultrarelativistische und klassische Gase

(a)

$$\gamma = \frac{W}{W_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \gg 1 \quad \Longrightarrow \quad \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \tag{3.1}$$

$$\gamma = 10 \quad \Longrightarrow \quad \beta = 0{,}995 = 99{,}5\%, \qquad \gamma = 100 \quad \Longrightarrow \quad \beta = 0{,}99995 = 99{,}995\% \tag{3.2}$$

(b) Adiabatische Zustandsänderung: $\mathrm{d}Q = T\mathrm{d}S = 0 \quad \Longrightarrow \quad S$ ist konstant $\Longrightarrow$

$$\frac{N\lambda^3}{V} = \text{konstant} \tag{3.3}$$

nichtrelativistisch	**ultrarelativistisch**
$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$ (3.4)	$\lambda = \frac{hc}{2\pi^{\frac{1}{3}}kT}$ (3.5)
$\frac{N\lambda^3}{V} = \frac{Nh^3}{V(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}} = \text{konst.}$ (3.6)	$\frac{N\lambda^3}{V} = \frac{Nh^3c^3}{8V\pi k^3T^3} = \text{konst.}$ (3.7)
$VT^{\frac{3}{2}} = \text{konst.}$ (3.8)	$VT^3 = \text{konst.}$ (3.9)

$$T = \frac{pV}{Nk} \quad \Longrightarrow \tag{3.10}$$

$V^{\frac{5}{2}}p^{\frac{3}{2}} = \text{konst.}$ (3.11)	$V^4p^3 = \text{konst.}$ (3.12)
$pV^{\frac{5}{3}} = \text{konst.}$ (3.13)	$pV^{\frac{4}{3}} = \text{konst.}$ (3.14)

(c) 1. Hauptsatz: $\mathrm{d}U = \mathrm{d}W + \mathrm{d}Q = -p\mathrm{d}V + \mathrm{d}Q = -p\mathrm{d}V$

nichtrelativistisch	**ultrarelativistisch**
(3.10) und (3.15) $\Longrightarrow$	(3.10) und (3.17) $\Longrightarrow$
$\frac{T^{\frac{5}{2}}}{p} = \text{konst.} \quad \Longrightarrow$ (3.15)	$\frac{T^4}{p} = \text{konst.} \quad \Longrightarrow$ (3.17)
$p = T^{\frac{5}{2}}p_0T_0^{-\frac{5}{2}}$ (3.16)	$p = T^4p_0T_0^{-4}$ (3.18)
(3.8) $\Longrightarrow \quad V = V_0T_0^{\frac{3}{2}}T^{-\frac{3}{2}} \quad \Longrightarrow$	(3.9) $\Longrightarrow \quad V = V_0T_0^3T^{-3} \quad \Longrightarrow$
$\mathrm{d}V = -\frac{3}{2}V_0T_0^{\frac{3}{2}}T^{-\frac{5}{2}}\mathrm{d}T$ (3.19)	$\mathrm{d}V = -3V_0T_0^3T^{-4}\mathrm{d}T$ (3.20)
(3.16) und (3.19) in $\mathrm{d}U = -p\mathrm{d}V$:	(3.18) und (3.20) in $\mathrm{d}U = -p\mathrm{d}V$:
$\mathrm{d}U = \frac{3}{2}\frac{p_0V_0}{T_0}\,\mathrm{d}T = \frac{3}{2}Nk\,\mathrm{d}T$ (3.21)	$\mathrm{d}U = 3\frac{p_0V_0}{T_0}\,\mathrm{d}T = 3Nk\,\mathrm{d}T$ (3.23)
$U = \frac{3}{2}NkT$ (3.22)	$U = 3NkT$ (3.24)

(d) Da das Universum abgeschlossen ist, expandiert es adiabatisch.

nichtrelativistisch	**ultrarelativistisch**
(3.8) $\implies$	(3.9) $\implies$
$$a^3T^{\frac{3}{2}} = \text{konst.} \quad \implies \quad T \sim \frac{1}{a^2} \tag{3.25}$$	$$a^3T^3 = \text{konst.} \quad \implies \quad T \sim \frac{1}{a} \tag{3.26}$$
Im nichtrel. Fall ist M die (Ruh-) Masse:	Die Gesamtmasse des Universums ist $\frac{U}{c^2}$:
$$\varrho = \frac{M}{V} \sim \frac{1}{a^3} \tag{3.27}$$	$$\varrho = \frac{U}{Vc^2} = \frac{3NkT}{a^3c^2} \sim \frac{1}{a^4} \tag{3.28}$$

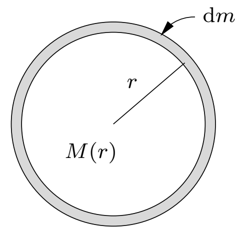
Im jungen Universum fallen Temperatur und Dichte wie bei einem nur mit Strahlung erfüllten All ab (strahlungsdominiert).

3.2 Geburt von Sternen

Wenn die Gaswolke auseinanderfliegen kann, hat sie im Endzustand nur kinetische Energie ($W_{\text{pot}} = 0$), d.h. die Gesamtenergie ist nichtnegativ. Für eine gravitativ gebundene Wolke gilt also

$$W = \underbrace{W_{\text{kin}}}_{U} + W_{\text{pot}} < 0 \tag{3.29}$$

Um die potentielle Energie der Gaskugel vom Radius R zu berechnen, bauen wir die Kugel schichtweise auf. Bringt man die Schicht der Dicke dr und der Masse d$m = 4\pi r^2 \varrho \mathrm{d}r$ aus dem Unendlichen zur Kugeloberfläche, wird die Energie



$$-\mathrm{d}W_{\text{pot}} = \frac{GM(r)\mathrm{d}m}{r} = \frac{G \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 \varrho \cdot 4\pi r^2 \varrho \mathrm{d}r}{r} \tag{3.30}$$

frei.

$$\mathrm{d}W_{\text{pot}} = -\frac{16\pi^2 G\varrho^2}{3} \cdot r^4 \mathrm{d}r \tag{3.31}$$

$$W_{\text{pot}} = -\frac{16\pi^2 G\varrho^2}{3} \int_0^R r^4 \mathrm{d}r = -\frac{16\pi^2 G\varrho^2}{3} \cdot \frac{R^5}{5} = -\frac{3G}{5R} \cdot \frac{4^2\pi^2 R^6 \varrho^2}{3^2} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{GM^2}{R} \tag{3.32}$$

Aus (3.22) und (3.29) folgt mit (3.32)

$$\frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}\frac{MkT}{m} < \frac{3}{5} \cdot \frac{GM^2}{R} \tag{3.33}$$

$$M > \frac{5RkT}{2Gm} \tag{3.34}$$

$$\varrho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} > \varrho_{\text{k}} = \frac{15kT}{8\pi GmR^2} = \frac{375k^3T^3}{32\pi G^3m^3M^2} \tag{3.35}$$

Großes T $\implies$ große Fluchtgeschwindigkeit $\implies$ man braucht große Anziehung und damit eine große Dichte.
Bei großer Teilchenmasse hat man weniger Teilchen und damit weniger gesamte kinetische Energie $\implies$ man braucht weniger Betrag der potentiellen Energie.

Weitere Lösungsmöglichkeiten

(3.29) ist eine notwendige Bedingung für das Kollabieren.

3.2.1 Mit dem Virialsatz

Der *Virialsatz* besagt für die zeitlichen Mittelwerte

$$\overline{W}_{\text{kin}} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau W_{\text{kin}}(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \overline{W}_{\text{pot}} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau W_{\text{pot}}(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.36}$$

der gesamten kinetischen und potentiellen Energie einer gravitativ gebundenen und räumlich beschränkten Teilchenmenge:

$$2\overline{W}_{\text{kin}} = -\overline{W}_{\text{pot}} \tag{3.37}$$

Ist das System auch noch abgeschlossen, dann folgt aus dem Energiesatz für den zeitlichen Mittelwert der Gesamtenergie W:

$$W = \overline{W} = \overline{W}_{\text{kin}} + \overline{W}_{\text{pot}} = -\overline{W}_{\text{kin}} < 0 \tag{3.38}$$

Es folgt also wie in (3.29) $W < 0$.
Eine weiter Formulierung von (3.37) ist

$$W = W_{\text{kin}} + W_{\text{pot}} \quad \Longrightarrow \quad W_{\text{kin}} + \overline{W}_{\text{kin}} = -W_{\text{pot}} \tag{3.39}$$

In einem statischen System ist $W_{\text{kin}} = \overline{W}_{\text{kin}}$ und es gilt

$$2W_{\text{kin}} = -W_{\text{pot}} \tag{3.40}$$

Die Bedingung für das Kollabieren wird dann zu

$$2W_{\text{kin}} < -W_{\text{pot}} \tag{3.41}$$

und mit (3.32) folgt

$$M > \frac{5RkT}{Gm} \tag{3.42}$$

$$\varrho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} > \varrho_{\text{k}} = \frac{15kT}{4\pi GmR^2} = \frac{375k^3T^3}{4\pi G^3m^3M^2} \tag{3.43}$$

3.2.2 Druckbetrachtungen

Ein anderer Lösungsansatz betrachtet den Gravitationsdruck in der Gaskugel:

$$\mathrm{d}p = -\frac{\mathrm{d}F}{A} = -\frac{G\,M(r)\,\varrho\,A\,\mathrm{d}r}{r^2\,A} = -\frac{4\pi G\varrho^2}{3}\,r\mathrm{d}r \tag{3.44}$$

Als Randbedingung für den Druck nehmen wir $p(R) = 0$, d.h. wir integrieren von R bis r:

$$p(r) = -\frac{4\pi G\varrho^2}{3}\int\limits_R^r r\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{3}G\varrho^2R^2\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{3GM^2}{8\pi R^4}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) \tag{3.45}$$

Der Druck im Zentrum ist

$$p_0 = p(0) = \frac{3GM^2}{8\pi R^4} \tag{3.46}$$

Mit der Temperatur T_0 im Zentrum ist der thermische Druck wegen der konstanten Dichte

$$p_{\text{t0}} = \frac{kT_0\mathrm{d}N}{\mathrm{d}V} = \frac{NkT_0}{V} = \frac{3MkT_0}{4\pi mR^3} \tag{3.47}$$

Die Kollapsbedingung ist dann

$$p_0 > p_{\mathrm{t0}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3GM^2}{8\pi R^4} > \frac{3MkT_0}{4\pi m R^3} \tag{3.48}$$

woraus folgt

$$M > \frac{2kT_0 R}{Gm} \qquad \text{und} \qquad \varrho > \frac{3kT_0}{2\pi G m R^2} = \frac{6k^3T_0^3}{\pi G^3 m^3 M^2} \tag{3.49}$$

3.2.3 Über die Fluchtgeschwindigkeit

Diese Lösung ist unbefriedigend, da sie nicht die Gesamtheit der Teilchen betrachtet und auch Einflüsse der Geschwindigkeitsverteilung nicht berücksichtigt.
Unter der Annahme, dass alle Teilchen an der Oberfläche der Gaswolke die gleiche Geschwindigkeit haben, gilt für ein „Nichtexpandieren“:

$$\frac{m}{2}v^2 = \frac{3}{2}kT < \frac{GMm}{R} \quad \Longrightarrow \quad M > \frac{3kTR}{2Gm} \tag{3.50}$$

3.2.4 Zusammenfassung

$W_{\mathrm{kin}} < -W_{\mathrm{pot}}$	$2W_{\mathrm{kin}} < -W_{\mathrm{pot}}$	$p_0 > p_{\mathrm{t0}}$	Fluchtgeschw.
$M > \frac{5RkT}{2Gm}$	$M > \frac{5RkT}{Gm}$	$M > \frac{2kT_0R}{Gm}$	$M > \frac{3kTR}{2Gm}$
$\varrho > \frac{15kT}{8\pi G m R^2} =$	$\varrho > \frac{15kT}{4\pi G m R^2} =$	$\varrho > \frac{3kT}{2\pi G m R^2} =$	$\varrho > \frac{9kT}{8\pi G m R^2} =$
$= \frac{375k^3T^3}{32\pi G^3 m^3 M^2}$	$= \frac{375k^3T^3}{4\pi G^3 m^3 M^2}$	$= \frac{6k^3T^3}{\pi G^3 m^3 M^2}$	$= \frac{81k^3T^3}{32\pi G^3 m^3 M^2}$

3.2.5 Fazit

Wenn die Gaskugel homogen ($\varrho =$ konst.) und im hydrodynamischen Gleichgewicht ist, dann muss (3.45) gelten. Damit ist aber die Temperatur der Kugel nicht konstant:

$$T(r) = \frac{p(r)V}{Nk} = \frac{GMm}{2kR}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{3.51}$$

Die Teilchenzahl in einer Kugelschale mit Radius r und Dicke dr ist

$$\mathrm{d}N = \frac{\varrho \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r}{m} = \frac{3Mr^2}{R^3 m}\,\mathrm{d}r \tag{3.52}$$

Damit ist die thermische Energie der Kugel

$$U = \int_0^R \frac{3}{2}kT(r)\,\mathrm{d}N = \frac{9kM}{2R^3 m}\int_0^R r^2 T(r)\,\mathrm{d}r = \frac{9GM^2}{4R^4}\int_0^R \left(r^2 - \frac{r^4}{R^2}\right)\mathrm{d}r \tag{3.53}$$

$$U = \frac{9GM^2}{4R^4}\left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{5}\right) = \frac{3GM^2}{10R} \tag{3.54}$$

Damit ist

$$2U = -W_{\mathrm{pot}}, \tag{3.55}$$

d.h. der Virialsatz ist erfüllt.

Aufgabe 4: Experiment:

(a)

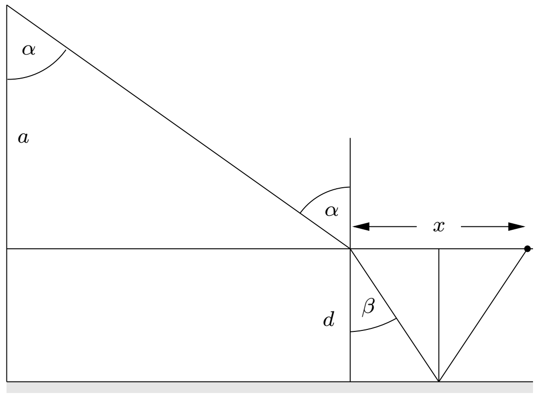
$$\tan\beta = \frac{x}{2d} \tag{4.1}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{h} = \frac{c-x}{h} \tag{4.2}$$

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \tag{4.3}$$

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \tag{4.4}$$

$$\sin\beta = \frac{\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} \tag{4.5}$$



$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{h^2+a^2}}, \qquad \sin\beta = \frac{x}{\sqrt{4d^2+x^2}} \tag{4.6}$$

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a\sqrt{4d^2+x^2}}{x\sqrt{h^2+a^2}} = \sin\alpha\sqrt{1+\frac{4d^2}{x^2}} \tag{4.7}$$

$$x = 2d\tan\beta = \frac{2d\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \frac{2d\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} \tag{4.8}$$

$$d = \frac{x\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{2\sin\alpha} \tag{4.9}$$

$$\sin\alpha = n\sin\beta \quad\Longrightarrow\quad \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{n\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} \tag{4.10}$$

Messwerte a, h, x:

$$\frac{a}{\sqrt{h^2+a^2}} = \frac{nx}{\sqrt{4d^2+x^2}} \tag{4.11}$$

$$a^2(4d^2+x^2) = n^2x^2(h^2+a^2) \tag{4.12}$$

$$\underbrace{\frac{x^2}{4}}_{Y} = n^2\cdot\underbrace{\frac{x^2(h^2+a^2)}{4a^2}}_{X} - d^2 \tag{4.13}$$

Nur zwei Messwerte:

$$n = \frac{a_1\sqrt{4d^2+x_1^2}}{x_1\sqrt{h_1^2+a_1^2}} = \frac{a_2\sqrt{4d^2+x_2^2}}{x_2\sqrt{h_2^2+a_2^2}} = \sin\alpha_1\sqrt{1+\frac{4d^2}{x_1^2}} = \sin\alpha_2\sqrt{1+\frac{4d^2}{x_2^2}} \tag{4.14}$$

$$d = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha_2-\sin^2\alpha_1}{\frac{4\sin^2\alpha_1}{x_1^2}-\frac{4\sin^2\alpha_2}{x_2^2}}} = \frac{x_1x_2}{2}\sqrt{\frac{\sin^2\alpha_2-\sin^2\alpha_1}{x_2^2\sin^2\alpha_1-x_1^2\sin^2\alpha_2}} \tag{4.15}$$

$$n = \sqrt{\frac{x_2^2-x_1^2}{\frac{x_2^2}{\sin^2\alpha_2}-\frac{x_1^2}{\sin^2\alpha_1}}} = \sin\alpha_1\sin\alpha_2\sqrt{\frac{x_2^2-x_1^2}{x_2^2\sin^2\alpha_1-x_1^2\sin^2\alpha_2}} \tag{4.16}$$