41. Internationale Physik-Olympiade – Kroatien 2010
Lösungen zur ersten Runde
R. Reindl

Aufgabe 1:

Geschwindigkeit des Archäologen vor dem Aufprall:

$$v_0 = \sqrt{2gh} = 12{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 45{,}1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \tag{1.1}$$

Geschwindigkeit des „Verbundkörpers“ der beiden Personen nach dem inelastischen Stoß:

$$v = \frac{Mv_0}{M+m} = 8{,}05\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 29{,}0\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \tag{1.2}$$

Das Paar erreicht die Höhe h':

$$(M+m)gh' = \frac{M+m}{2}v^2 = \frac{(M+m)M^2v_0^2}{2(M+m)^2} = \frac{M^2\cdot 2gh}{2(M+m)} \tag{1.3}$$

$$h' = \frac{M^2h}{(M+m)^2} = \frac{h}{\left(1+\frac{m}{M}\right)^2} = 3{,}31\,\mathrm{m} \tag{1.4}$$

Betrachtungen zu den Beschleunigungen beim Stoß

Wegen *Actio gegengleich Reactio* gilt in allen Fällen (a_1 ist die Beschleunigung des Archäologen, a_2 die der Dame)

$$a_1 = -\frac{m}{M}\,a_2 \tag{1.5}$$

Die Beschleunigungen sind im „Dschungelsystem“ S und im Schwerpunktsystem S' gleich.

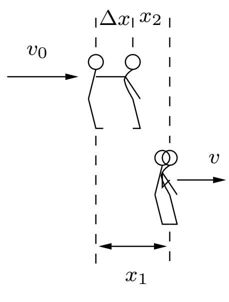
Beschleunigungsstrecke gegeben, Beschleunigung konstant

Unter der Annahme, dass die Dame während des Zusammenstoßes über die Strecke $\Delta x = 0{,}5\,\mathrm{m}$ gleichmäßig beschleunigt wird (im Dschungelsystem S), ist ihre Beschleunigung

$$a = \frac{v^2}{2\Delta x} = g\cdot\frac{h}{\Delta x}\cdot\frac{M^2}{(M+m)^2} = 6{,}6\,g \tag{1.6}$$

Differenz der Beschleunigungsstrecken gegeben, Beschleunigungen konstant

Unter der Annahme, dass sich die Dame und der Archäologe während des Zusammenstoßes um die Strecke $\Delta x = 0{,}5\,\mathrm{m}$ (Armlänge) näherkommen und dabei gleichmäßig beschleunigt werden, gilt:



$$v = v_0 + a_1 t \tag{1.7}$$

$$v = a_2 t \tag{1.8}$$

$$x_1 = v_0 t + \frac{a_1}{2}t^2 \tag{1.9}$$

$$x_1 = \Delta x + x_2 = \Delta x + \frac{a_2}{2}t^2 \tag{1.10}$$

$$(1.7)\text{ und }(1.8) \quad\Longrightarrow\quad a_2 - a_1 = \frac{v_0}{t} \quad\overset{(1.9),(1.10)}{\Longrightarrow}\quad t = \frac{2\Delta x}{v_0} \tag{1.11}$$

$$a_2 = \frac{v}{t} = \frac{vv_0}{2\Delta x} = g\cdot\frac{h}{\Delta x}\cdot\frac{M}{M+m} = 10{,}3\,g \tag{1.12}$$

Lineares Kraftgesetz (Feder), dann Umklammerung

Unter der Annahme, dass die Arme des Archäologen zunächst wie eine Feder der Härte D arbeiten und die Dame genau dann umklammern, wenn beide die gleiche Geschwindigkeit haben, folgt aus dem Energiesatz:

$$Mgh = \frac{M+m}{2}v^2 + \frac{D}{2}\Delta x^2 \tag{1.13}$$

$$D = \frac{2}{\Delta x^2}\left(Mgh - \frac{M+m}{2}v^2\right) = \frac{2}{\Delta x^2}\left(Mgh - \frac{M^2gh}{M+m}\right) = \frac{2Mmgh}{(M+m)\Delta x^2} \tag{1.14}$$

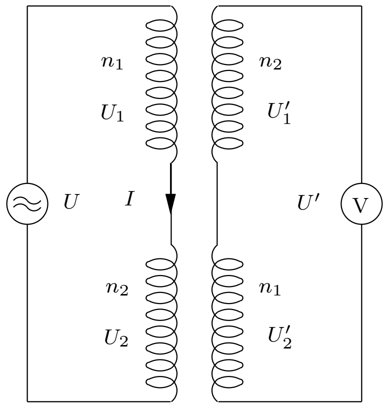
Die Maximalkraft auf die Dame ist dann $F_2 = D\Delta x$ und ihre maximale Beschleunigung

$$a_2 = \frac{2Mgh}{(M+m)\Delta x} = 20{,}6\,g \tag{1.15}$$

Aufgabe 2:

Unter der Annahme fehlender Gegeninduktion (nicht belasteter Sekundärkreis, Innenwiderstand des Spannungsmessers sehr hoch) gilt für die Wechselstromwiderstände der Primärspulen

$$Z_1 = L_1\omega = \frac{\mu_0 A\omega}{l}\cdot n_1^2 \quad \text{und} \quad Z_2 = L_2\omega = \frac{\mu_0 A\omega}{l}\cdot n_2^2 \tag{2.1}$$



Mit

$$k = \frac{n_1}{n_2} \tag{2.2}$$

gilt für die Spannungsabfälle an den Primärspulen

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{n_1^2}{n_2^2} = k^2 \tag{2.3}$$

und

$$U = U_1 + U_2 = \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)U_1 = (1+k^2)U_2 \tag{2.4}$$

$$U_1 = \frac{k^2}{1+k^2}U, \qquad U_2 = \frac{1}{1+k^2}U \tag{2.5}$$

Die Sekundärspannung ist dann

$$U' = U_1' + U_2' = \frac{n_2}{n_1}U_1 + \frac{n_1}{n_2}U_2 = \frac{1}{k}U_1 + kU_2 \tag{2.6}$$

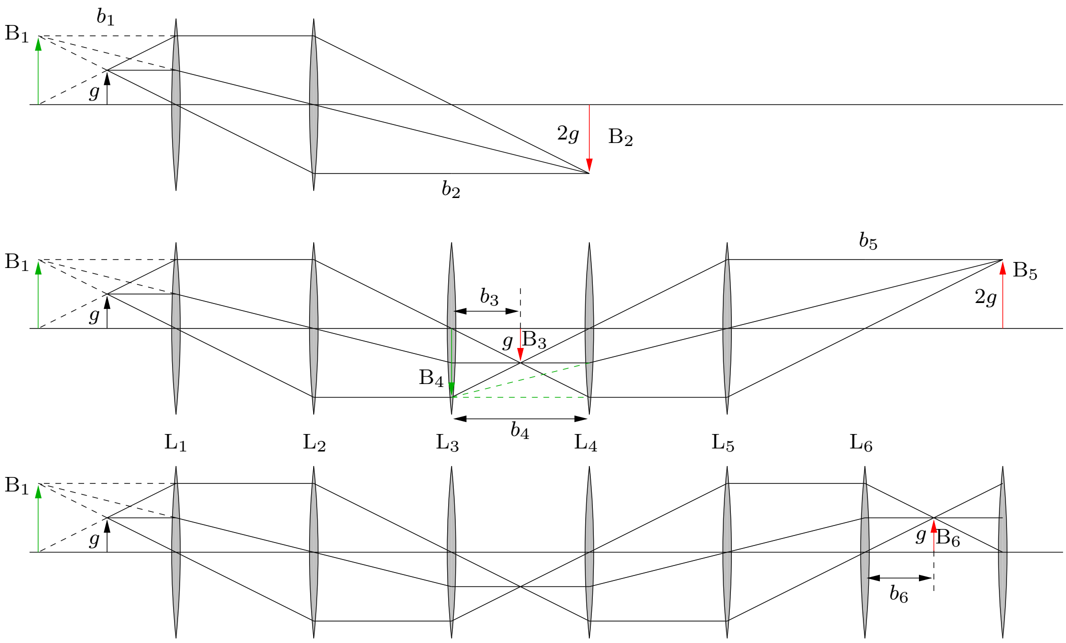
oder

$$U' = \frac{2k}{1+k^2}U \quad \Longrightarrow \quad \frac{2k}{1+k^2} = \frac{U'}{U} = \frac{3}{5} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} k^2 + 1 &= \frac{10}{3}k \\ k^2 - 2\cdot\frac{5}{3}k + \frac{25}{9} &= \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9} \\ k &= \frac{5}{3} \pm \frac{4}{3} \\ k_1 = \frac{1}{3} &\qquad k_2 = 3 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Wegen $k_2 = \frac{1}{k_1}$ beschreiben beide Lösungen die gleichen Verhältnisse.

Aufgabe 3:



nach Linse	Art des Bildes	b	v
L_1	virtuell	$-f$	2
L_2	reell, invertiert	$2f$	-2
L_3	reell, invertiert	$\frac{f}{2}$	-1
L_4	virtuell	$-f$	-2
L_5	reell, aufrecht	$2f$	2
L_6	reell, aufrecht	$\frac{f}{2}$	1

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{a-f}{af} \tag{3.1}$$

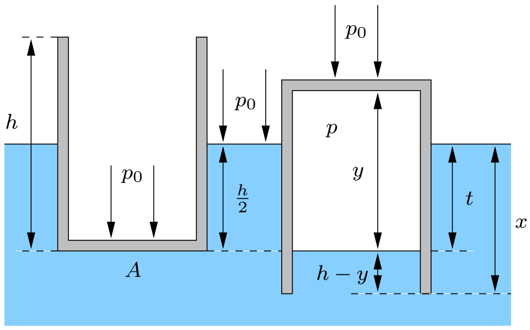
Linse	a	b
L_1	$a_1 = \frac{f}{2}$	$b_1 = \dfrac{f \cdot \frac{f}{2}}{\frac{f}{2} - f} = -f$
L_2	$a_2 = 2f$	$b_2 = \dfrac{f \cdot 2f}{2f - f} = 2f$
L_3	$a_3 = -f$	$b_3 = \dfrac{f \cdot (-f)}{-f - f} = \dfrac{f}{2}$
L_4	$a_4 = \frac{f}{2}$	$b_4 = \dfrac{f \cdot \frac{f}{2}}{\frac{f}{2} - f} = -f$
L_5	$a_5 = 2f$	$b_5 = \dfrac{f \cdot 2f}{2f - f} = 2f$
L_6	$a_6 = -f$	$b_6 = \dfrac{f \cdot (-f)}{-f - f} = \dfrac{f}{2}$

$$b_{i+6k} = b_i \quad \text{mit} \quad i, k \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

Aufgabe 4:

Mit dem Luftdruck p_0 und der Dichte ϱ des Wassers ist der Druck in der Wassertiefe t:

$$p(t) = \varrho g t + p_0 \tag{4.1}$$



Für den Fall „Boden unten“ ist

$$mg + p_0 A = \varrho A g \cdot \frac{h}{2} + p_0 A \quad \Longrightarrow \tag{4.2}$$

$$m = \frac{\varrho A h}{2} \tag{4.3}$$

Für den Fall „Boden oben“ wird die Gegenkraft zur Gewichtskraft und zur Kraft des Luftdrucks vom Gasdruck p erzeugt:

$$pA = mg + p_0 A = \frac{\varrho g A h}{2} + p_0 A = \varrho A g t + p_0 A \tag{4.4}$$

$$\Longrightarrow \quad t_1 = \frac{h}{2} \tag{4.5}$$

Aus der Gasgleichung folgt (isotherm)

$$p_0 A h = p A y \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{p_0 h}{p} = \frac{p_0 h}{\varrho g t + p_0} \tag{4.6}$$

Mit (4.5) folgt aus (4.6)

$$y_1 = \frac{p_0 h}{\frac{\varrho g h}{2} + p_0} = \frac{2 p_0}{\varrho g + \frac{2 p_0}{h}} = \frac{h}{1 + \frac{\varrho g h}{2 p_0}} \tag{4.7}$$

$$x_1 = t_1 + h - y_1 = \frac{h}{2} + h - y_1 = \frac{3h}{2} - \frac{h}{1 + \frac{\varrho g h}{2 p_0}} = \frac{h}{2} + \frac{h}{1 + \frac{2 p_0}{\varrho g h}} = \frac{h}{2} \cdot \frac{1 + \frac{3 \varrho g h}{2 p_0}}{1 + \frac{\varrho g h}{2 p_0}} \tag{4.8}$$

$$\frac{\varrho g h}{2 p_0} = \frac{10^3 \,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81 \,\frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 0{,}15\,\text{m}}{2 \cdot 10^5 \,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = 7{,}36 \cdot 10^{-3} \ll 1 \tag{4.9}$$

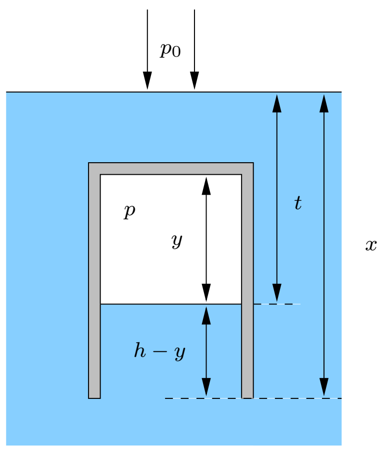
$$x_1 \approx \frac{3h}{2} - h\left(1 - \frac{\varrho g h}{2 p_0}\right) = \frac{h}{2} + \underbrace{\frac{\varrho g h^2}{2 p_0}}_{1{,}1\,\text{mm}} = 7{,}61\,\text{mm} \tag{4.10}$$

Eine andere Betrachtungsweise: Der Auftrieb ist gleich der Gewichtskraft des verdrängten Wassers. Aus dem Fall „Boden unten“ folgt, dass das Volumen des verdrängten Wassers im Fall des Schwimmens oder Schwebens gleich dem halben Glasvolumen sein muss, d.h $t_1 = \frac{h}{2}$ für „Boden nicht eingetaucht“ (siehe (4.5))und $y_2 = \frac{h}{2}$ für „Boden eingetaucht“:

$$y_2 = \frac{h}{2} = \frac{p_0 h}{\varrho g t_2 + p_0} \quad \Longrightarrow \tag{4.11}$$

$$t_2 = \frac{p_0}{\varrho g} \tag{4.12}$$

$$x_2 = \frac{h}{2} + t_2 = \frac{h}{2} + \frac{p_0}{\varrho g} = 10{,}3\,\text{m} \tag{4.13}$$



Genauere Betrachtungen:

Beliebige Eintauchtiefe x (auch $x > h$):

$$p_0 A h = p A y \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{p_0 h}{y} = \varrho g t + p_0 \tag{4.14}$$

$$x = t + h - y \tag{4.15}$$

$$p = \frac{p_0 h}{y} = \varrho g (x + y - h) + p_0 \tag{4.16}$$

$$\varrho g x = \frac{p_0 h}{y} + \varrho g (h - y) - p_0 = p_0 \cdot \frac{h - y}{y} + \varrho g (h - y) \tag{4.17}$$

$$x = (h - y) \left(\frac{p_0}{\varrho g y} + 1 \right) \tag{4.18}$$

Auflösen nach y:

$$y^2 + \left(x - h + \frac{p_0}{\varrho g} \right) y = \frac{p_0 h}{\varrho g} \tag{4.19}$$

$$y = -\frac{\varrho g (x - h) + p_0}{2 \varrho g} \overset{+}{(-)} \frac{1}{2 \varrho g} \cdot \sqrt{4 p_0 h \varrho g + [(x - h) \varrho g + p_0]^2} \tag{4.20}$$

$$y = \frac{h}{2} - \frac{x}{2} - \frac{p_0}{2 \varrho g} + \frac{1}{2 \varrho g} \cdot \sqrt{[(x - h) \varrho g + p_0]^2 + 4 p_0 h \varrho g} = \tag{4.21}$$

$$= \frac{h}{2} - \frac{x}{2} - \frac{p_0}{2 \varrho g} + \frac{1}{2 \varrho g} \cdot \sqrt{\varrho^2 g^2 \left[x - \left(h - \frac{p_0}{\varrho g} \right) \right]^2 + 4 p_0 h \varrho g} \tag{4.22}$$

Gesamtkraft auf das Glas (nach oben positiv):

$$F = \begin{cases} pA - mg - p_0 A = A \varrho g \left(x + y - \frac{3h}{2} \right) & \text{für } x \leqq h \\ pA - mg - p_0 A - \varrho g (x - h) A = A \varrho g \left(y - \frac{h}{2} \right) & \text{für } x > h \end{cases} \tag{4.23}$$

$\tilde{p} = \dfrac{F}{A}$, ausgedrückt durch y:

$$\tilde{p} = \begin{cases} p_0 \left(\frac{h}{y} - 1 \right) - \frac{\varrho g h}{2} & \text{für } x \leqq h \\ \varrho g \left(y - \frac{h}{2} \right) & \text{für } x > h \end{cases} \tag{4.24}$$

$\tilde{p} = \dfrac{F}{A}$, ausgedrückt durch x:

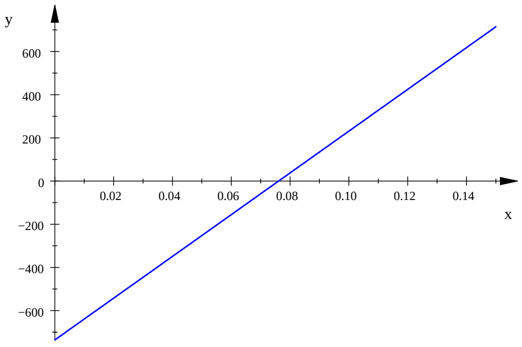
$$\tilde{p} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left[\varrho g (2h - x) + p_0 \right] + \frac{1}{2} \sqrt{\varrho^2 g^2 \left[x - \left(h - \frac{p_0}{\varrho g} \right) \right]^2 + 4 p_0 h \varrho g} & \text{für } x \leqq h \\ -\frac{1}{2} \left[\varrho g x + p_0 \right] + \frac{1}{2} \sqrt{\varrho^2 g^2 \left[x - \left(h - \frac{p_0}{\varrho g} \right) \right]^2 + 4 p_0 h \varrho g} & \text{für } x > h \end{cases} \tag{4.25}$$

Nullstellen von $\tilde{p}$:

$$x < h: \qquad y_1 = \frac{h}{1 + \frac{\varrho g h}{2 p_0}} \qquad x_1 = \frac{h}{2} \cdot \frac{1 + \frac{3 \varrho g h}{2 p_0}}{1 + \frac{\varrho g h}{2 p_0}} = 7{,}6\,\mathrm{mm} \tag{4.26}$$

$$x > h: \qquad y_2 = \frac{h}{2} \qquad x_2 = \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{2 p_0}{\varrho g h} + 1 \right) = 10{,}27\,\mathrm{m} \tag{4.27}$$

Der Graf von $\tilde{p}(x)$ im Interval $[0, h]$



und im Interval $[0, 11\,\mathrm{m}]$