41. Internationale Physik-Olympiade – Kroatien 2010
Lösungen zur zweiten Runde
R. Reindl

Aufgabe 1: Zerplatzender Glaskolben

1.1 Abschätzung der Geschwindugkeit der Teile

Adiabatische Ausdehnung des Gases (l ist die Zahl der Freiheitsgrade):

$$\mathrm{d}U = -p\mathrm{d}V + \underbrace{\mathrm{d}Q}_{0} \quad \Longrightarrow \quad \frac{l}{2}Nk\mathrm{d}T = -p\mathrm{d}V \tag{1.1}$$

Aus der Gasgleichung

$$pV = NkT \quad \Longrightarrow \quad p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = Nk\mathrm{d}T \tag{1.2}$$

folgt

$$\frac{l}{2}p\mathrm{d}V + \frac{l}{2}V\mathrm{d}p = -p\mathrm{d}V \quad \Longrightarrow \quad \frac{l+2}{l}p\mathrm{d}V = -V\mathrm{d}p \tag{1.3}$$

$$\frac{l+2}{l}\frac{\mathrm{d}V}{V} = -\frac{\mathrm{d}p}{p} \quad \Longrightarrow \quad \frac{l+2}{l}\ln V = -\ln p + C' \tag{1.4}$$

$$pV^{\kappa} = \text{konst.} \tag{1.5}$$

mit dem Adiabatenkoeffizienten

$$\kappa = \frac{l+2}{l} = \frac{c_{\mathrm{p}}}{c_{\mathrm{v}}} \tag{1.6}$$

Für Luft bei mittleren Temperaturen ist $l = 5$ oder $\kappa = \frac{7}{5}$.
Das Gas im Kolben expandiert, bis sein Druck p dem Luftdruck p_{L} gleich ist:

$$p_{\mathrm{L}}V_1^{\kappa} = p_0V_0^{\kappa} \quad \Longrightarrow \quad V_1 = \left(\frac{p_0V_0^{\kappa}}{p_{\mathrm{L}}}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = c^{\frac{1}{\kappa}}V_0 \text{ mit } c = 1{,}2 \tag{1.7}$$

Dabei verrichtet das Gas die mechanische Arbeit

$$W_1 = \int_{V_0}^{V_1} p\,\mathrm{d}V = p_0V_0^{\kappa}\int_{V_0}^{V_1}\frac{\mathrm{d}V}{V^{\kappa}} = \frac{p_0V_0^{\kappa}}{1-\kappa}\left(V_1^{1-\kappa} - V_0^{1-\kappa}\right) = 64{,}4\,\mathrm{J} \tag{1.8}$$

Ein Teil dieser Arbeit wird an der umgebenden Luft verrichtet:

$$W_{\mathrm{L}} = p_{\mathrm{L}}(V_1 - V_0) = 58{,}8\,\mathrm{J} \tag{1.9}$$

Zum Beschleunigen der Glasteile bleibt

$$W_{\mathrm{kin}} = \frac{m}{2}v_0^2 = W_1 - W_{\mathrm{L}} = \tag{1.10}$$

$$= \frac{cp_{\mathrm{L}}V_0^{\kappa}}{1-\kappa}\left(c^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}V_0^{1-\kappa} - V_0^{1-\kappa}\right) - p_{\mathrm{L}}V_0\left(c^{\frac{1}{\kappa}} - 1\right) = \tag{1.11}$$

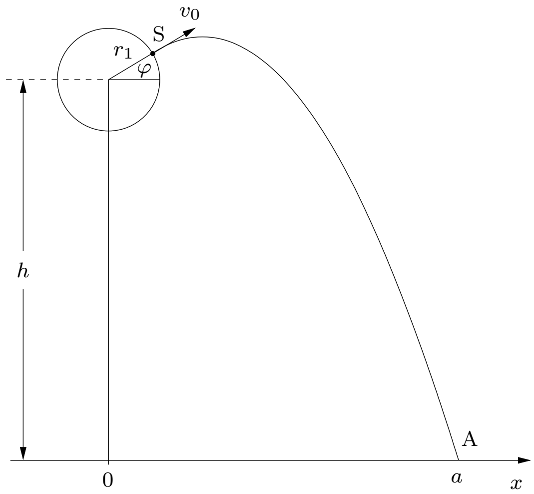
$$= p_{\mathrm{L}}V_0\left[\frac{c^{\frac{1}{\kappa}} - c}{1-\kappa} - c^{\frac{1}{\kappa}} + 1\right] = \frac{4\pi}{3}r_0^3p_{\mathrm{L}}\left[\frac{c^{\frac{1}{\kappa}} - c}{1-\kappa} - c^{\frac{1}{\kappa}} + 1\right] = 5{,}6\,\mathrm{J} \tag{1.12}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2W_{\mathrm{kin}}}{m}} = 8{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{1.13}$$

1.2 Verteilung der Teile auf dem Boden

Bezeichnungen:

Startort	:	$S(r_1 \cos\varphi \mid h + r_1 \sin\varphi)$
Startzeit	:	0
Flugdauer	:	t
Aufprallort	:	$A(a\vert 0)$
Startgeschwindigkeit	:	$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\varphi \\ v_0 \sin\varphi \end{pmatrix}$



$$h + r_1 \sin\varphi + t v_0 \sin\varphi - \frac{g}{2} t^2 = 0 \tag{1.14}$$

$$t = \frac{v_0 \sin\varphi}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{2gh + 2gr_1 \sin\varphi + v_0^2 \sin^2\varphi} \tag{1.15}$$

Kürzeste Fallzeit:

$$t\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{v_0}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{2gh - 2gr_1 + v_0^2 \sin^2\varphi} = 0{,}23\,\mathrm{s} \tag{1.16}$$

Größte Fallzeit:

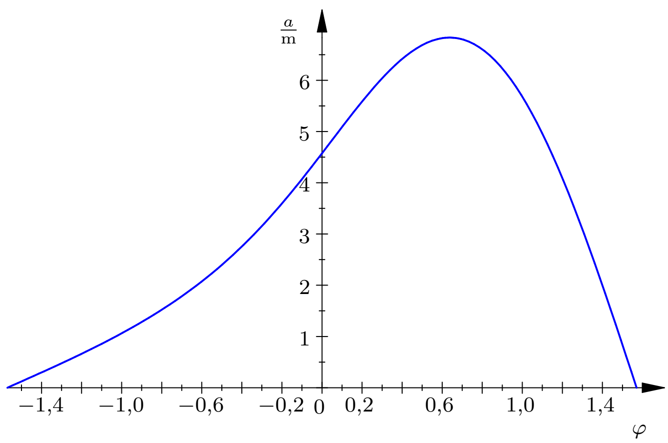
$$t\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_0}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{2gh + 2gr_1 + v_0^2 \sin^2\varphi} = 1{,}68\,\mathrm{s} \tag{1.17}$$

Konstante horizontale Geschwindigkeit $v_x = v_0 \cos\varphi \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} a &= r_1 \cos\varphi + (v_0 \cos\varphi) \cdot t = \\ &= r_1 \cos\varphi + \frac{v_0 \cos\varphi}{g}\left[v_0 \sin\varphi + \sqrt{2g(h + r_1 \sin\varphi) + v_0^2 \sin^2\varphi}\right] = \\ &= \frac{v_0^2}{g} \cos\varphi \left[\frac{r_1 g}{v_0^2} + \sin\varphi + \sqrt{\frac{2g}{v_0^2}(h + r_1 \sin\varphi) + \sin^2\varphi}\right] \end{aligned} \tag{1.18}$$

Numerische Lösung:

φ	a
0,5	6,6864
0,6	6,8218
0,7	6.7999
0,63	6,83255
0,64	6,83290
0,65	6,83160
0,636	6,8329600
0,637	6,8329703
0,638	6,8329643



Maximaler Radius: $a_{\max} = 6{,}83\,\mathrm{m}$.

Exakte Lösung für $r_1 = 0$

Aus (1.18) folgt mit $r_1 = 0$

$$a = \frac{v_0^2}{g} \cos\varphi \left[\sin\varphi + \sqrt{\frac{2gh}{v_0^2} + \sin^2\varphi} \right] \tag{1.19}$$

$$a = \frac{v_0^2}{g} \cdot f(\varphi) \tag{1.20}$$

mit

$$f(\varphi) = \cos\varphi \left[\sin\varphi + \sqrt{k + \sin^2\varphi} \right] \quad \text{mit} \quad k = \frac{2gh}{v_0^2} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} f'(\varphi) &= -\sin\varphi \left[\sin\varphi + \sqrt{k+\sin^2\varphi} \right] + \cos\varphi \left[\cos\varphi + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{k+\sin^2\varphi}} \right] = \\ &= \frac{\left(\sin\varphi + \sqrt{k+\sin^2\varphi} \right) \left(\cos^2\varphi - \sin\varphi\sqrt{k+\sin^2\varphi} \right)}{\sqrt{k+\sin^2\varphi}} \end{aligned} \tag{1.22}$$

Da die erste Klammer im Zähler für $0 \leqq \varphi \leqq 90°$ sicher positiv ist, folgt

$$f'(\varphi) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos^2\varphi - \sin\varphi\sqrt{k+\sin^2\varphi} = 0 \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned} \cos^2\varphi &= \sin\varphi\sqrt{k+\sin^2\varphi} \\ 1-\sin^2\varphi &= \sin\varphi\sqrt{k+\sin^2\varphi} \\ \left(1-\sin^2\varphi\right)^2 &= \sin^2\varphi\left(k+\sin^2\varphi\right) \\ 1 - 2\sin^2\varphi &= k\sin^2\varphi \end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2+k} = \frac{v_0^2}{2(v_0^2+gh)} \tag{1.25}$$

$$\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi = \frac{v_0^2+2gh}{2(v_0^2+gh)} \tag{1.26}$$

In (1.19) eingesetzt:

$$\begin{aligned} a &= \frac{v_0^2}{g}\sqrt{\frac{v_0^2+2gh}{2(v_0^2+gh)}} \left(\sqrt{\frac{v_0^2}{2(v_0^2+gh)}} + \sqrt{\frac{2gh}{v_0^2} + \frac{v_0^2}{2(v_0^2+gh)}} \right) = \\ &= \frac{v_0^2}{g}\sqrt{\frac{v_0^2+2gh}{2(v_0^2+gh)}} \left(\frac{v_0^2}{v_0\sqrt{2(v_0^2+gh)}} + \frac{v_0^2+2gh}{v_0\sqrt{2(v_0^2+gh)}} \right) = \\ &= \frac{v_0^2}{g}\sqrt{\frac{v_0^2+2gh}{2(v_0^2+gh)}} \cdot \frac{2\left(v_0^2+gh\right)}{v_0\sqrt{2(v_0^2+gh)}} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2+2gh} \end{aligned} \tag{1.27}$$

Zahlenwerte:

$$a = 6{,}70\,\text{m}, \qquad \varphi = 36{,}7° \tag{1.28}$$

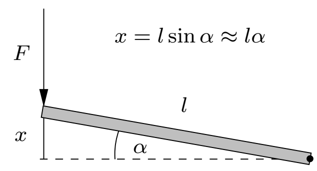
Korrektur:

$$a = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2g(h + r_1\sin\varphi)} + r_1\cos\varphi = 6{,}83\,\text{m} \tag{1.29}$$

Aufgabe 2: Erdmagnetfeldbestimmung

(a) Trägheitsmoment des Stabes um den Drehpunkt F:

$$J = \int_0^l \frac{m}{l} r^2 \,\mathrm{d}r = \frac{m}{3} l^2 \tag{2.1}$$



Unter der Annahme kleiner Auslenkwinkel α des Stabes aus der Horizontalen ist die Richtung der Kraft näherungsweise konstant. Damit ist das Drehmoment auf den Stab

$$M \approx -lF = -lk \cdot l\alpha = -kl^2\alpha \tag{2.2}$$

Aus

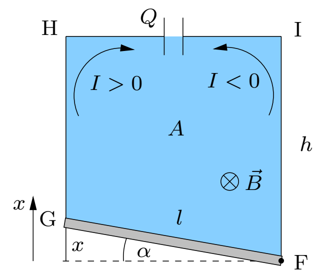
$$M = J\ddot{\alpha} \tag{2.3}$$

folgt

$$\ddot{\alpha} = -\omega_0^2 \alpha \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \tag{2.4}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{3k}} \tag{2.5}$$

(b) Vom Magnetfeld durchsetzte Fläche:



$$A = lh - \frac{1}{2} lx \tag{2.6}$$

Durch B hervorgerufener Fluss durch den Leiterrahmen:

$$\Phi = BA = Bl\left(h - \frac{x}{2}\right) \tag{2.7}$$

Durch die Schwingung des Stabes induzierte Spannung:

$$U = -\dot{\Phi} = -B\dot{A} = \frac{1}{2} Bl\dot{x} \tag{2.8}$$

Vernachlässigt man zunächst die Induktivität L der Leiterschleife, dann fällt U am Kondensator ab, d.h.

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{1}{2} Bl\dot{x} \tag{2.9}$$

und

$$I = \dot{Q} = \frac{1}{2} BCl\ddot{x} \tag{2.10}$$

Die Kraft auf den stromdurchflossenen Stab ist

$$F_\mathrm{B} = -IBl \tag{2.11}$$

woraus das zusätzliche Drehmoment

$$M_\mathrm{B} = \int_0^l \frac{F_\mathrm{B}}{l} r \,\mathrm{d}r = -\int_0^l IBr \,\mathrm{d}r = -\frac{1}{2} IBl^2 \tag{2.12}$$

folgt. Damit gilt

$$J\ddot{\alpha} = \frac{J}{l}\ddot{x} = M_\mathrm{ges} = -klx - \frac{1}{2} IBl^2 \tag{2.13}$$

oder

$$\ddot{x} = -\frac{kl^2}{J} x - \frac{Bl^3}{2J} I = -\frac{3k}{m} x - \frac{3Bl}{2m} I = -\frac{3k}{m} x - \frac{3B^2Cl^2}{4m} \ddot{x} \tag{2.14}$$

$$\ddot{x}\left(1+\frac{3B^2Cl^2}{4m}\right)=\ddot{x}\cdot\frac{4m+3B^2Cl^2}{4m}=-\frac{3k}{m}x \tag{2.15}$$

oder

$$\ddot{x}=-\frac{12k}{4m+3B^2Cl^2}\cdot x=-\omega^2 x \tag{2.16}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{12k}{4m+3B^2Cl^2}}=\sqrt{\frac{3k}{m\left(1+\frac{3B^2Cl^2}{4m}\right)}}=\frac{\omega_0}{\sqrt{1+\frac{3B^2Cl^2}{4m}}}\approx\omega_0\left(1-\frac{3B^2l^2C}{8m}\right) \tag{2.17}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{4m+3B^2Cl^2}{12k}}=T_0\sqrt{1+\frac{3B^2Cl^2}{4m}} \tag{2.18}$$

(c) Aus (2.18) folgt

$$B=\sqrt{\frac{\frac{3kT^2}{\pi^2}-4m}{3Cl^2}}=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{3kT^2-4\pi^2 m}{3Cl^2}}= \tag{2.19}$$

oder

$$B=\sqrt{\frac{4m}{3Cl^2}}\cdot\sqrt{\frac{T^2}{T_0^2}-1}=\sqrt{\frac{4m}{3Cl^2}}\cdot\sqrt{\frac{(T-T_0)(T+T_0)}{T_0^2}}\approx\sqrt{\frac{4m}{3Cl^2}}\cdot\sqrt{\frac{2(T-T_0)}{T_0}} \tag{2.20}$$

Die Horizontalkomponente beträgt in Mitteleuropa ungefähr $B=20\,\mu\mathrm{T}$. Mit dem Drahtradius $R=10^{-3}\,\mathrm{m}$ und $l=1\,\mathrm{m}$ folgt bei einer Dichte von $\varrho=8\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$

$$m=\pi R^2\varrho=0{,}025\,\mathrm{kg} \tag{2.21}$$

Wegen $3B^2Cl^2=1{,}2\cdot10^{-9}\,\mathrm{kg}$ gilt $3B^2Cl^2\ll 4m$ und damit

$$T=T_0\left(1+\frac{3B^2Cl^2}{8m}\right)=T_0(1+6\cdot10^{-9}) \tag{2.22}$$

Die Genauigkeit der B-Messung mit (2.20) ist durch den Term $T-T_0$ begrenzt, da T und T_0 fast gleich sind. Um B mit n geltenden Ziffern zu bestimmen, müssen die Zeiten auf $n+9$ geltende Ziffern gemessen werden!

(d) Aus (2.8) folgt

$$I=\frac{U}{R}=\frac{Bl}{2R}\dot{x}\quad\overset{(2.14)}{\Longrightarrow}\quad\ddot{x}=-\frac{3k}{m}x-\frac{3B^2l^2}{4mR}\cdot\dot{x} \tag{2.23}$$

$$m\ddot{x}+\underbrace{\frac{3B^2l^2}{4R}}_{b}\cdot\dot{x}+m\underbrace{\frac{3k}{m}}_{\omega^2}x=0 \tag{2.24}$$

$$k=1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\quad\Longrightarrow\quad\frac{b}{2m}=\frac{3B^2l^2}{8Rm}=6{,}0\cdot10^{-4}\,\frac{1}{\mathrm{s}},\qquad\omega=\sqrt{\frac{3k}{m}}=11\,\frac{1}{\mathrm{s}}>\frac{b}{2m} \tag{2.25}$$

$$\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\left(\frac{b}{2m}\right)^2}=\sqrt{\frac{3k}{m}-\left(\frac{3B^2l^2}{8Rm}\right)^2},\qquad T'=\frac{2\pi}{\omega'} \tag{2.26}$$

$$e^{-\frac{b}{2m}t_{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\quad\Longrightarrow\quad t_{\frac{1}{2}}=\frac{2m\ln 2}{b}=1{,}2\cdot10^3\,\mathrm{s} \tag{2.27}$$

Durch Messung von $t_{\frac{1}{2}}$ kann man dann B berechnen:

$$B=\sqrt{\frac{8Rm\ln 2}{3Tl^2}} \tag{2.28}$$

Lösung unter Berücksichtigung der Induktivität

Mit der Induktivität L der Leiterschleife (annähernd konstant) gilt

$$U = \frac{Q}{C} + L\dot{I} = \frac{1}{2}Bl\dot{x} \tag{2.29}$$

oder differenziert

$$\frac{I}{C} + L\ddot{I} = \frac{1}{2}Bl\ddot{x} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{I} = -\frac{1}{LC} \cdot I + \frac{Bl}{2L} \cdot \ddot{x} \tag{2.30}$$

Die Bewegung des Stabendes G ist also durch folgendes System von Differentialgleichungen beschrieben:

$$\ddot{x} = -\frac{3k}{m}x - \frac{3Bl}{2m}I \tag{2.31}$$

$$\ddot{I} = -\frac{1}{LC} \cdot I + \frac{Bl}{2L} \cdot \ddot{x} \tag{2.32}$$

Aus (2.31) folgt

$$I = -\frac{2m}{3Bl}\ddot{x} - \frac{2k}{Bl}x \tag{2.33}$$

In (2.32):

$$-\frac{2m}{3Bl}\ddddot{x} - \frac{2k}{Bl}\ddot{x} = \frac{2m}{3BlLC}\ddot{x} + \frac{2kLC}{Bl}x + \frac{Bl}{2L} \cdot \ddot{x} \tag{2.34}$$

oder

$$\ddddot{x} + \left(\frac{3k}{m} + \frac{1}{LC} + \frac{3B^2l^2}{4mL}\right)\ddot{x} + \frac{3k}{mLC}x = 0 \tag{2.35}$$

Gesucht ist also die Lösung der DGL

$$\boxed{\ddddot{x} + a\ddot{x} + bx = 0} \tag{2.36}$$

mit

$$a = \frac{3k}{m} + \frac{1}{LC} + \frac{3B^2l^2}{4mL} \qquad \text{und} \qquad b = \frac{3k}{mLC} \tag{2.37}$$

Der Ansatz

$$x(t) = c\cos(\omega t + \varphi) \tag{2.38}$$

führt in (2.36) eingesetzt auf

$$\left(\omega^4 - a\omega^2 + b\right)c\sin(\omega t + \varphi) = 0 \tag{2.39}$$

Da (2.39) für alle t erfüllt sein muss, folgt

$$\omega^4 - a\omega^2 + b = 0 \tag{2.40}$$

mit den positiven (physikalisch sinnvollen) Lösungen

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - 4b}\right)} \tag{2.41}$$

und

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 - 4b}\right)} \tag{2.42}$$

Die allgemeine Lösung von (2.36) ist dann

$$x(t) = c_1\cos\left(\omega_1 t + \varphi_1\right) + c_2\cos\left(\omega_2 t + \varphi_2\right) \tag{2.43}$$

mit den Konstanten c_1, c_2, φ_1 und φ_2.

Die Induktivität eines rechteckigen Leiterrahmens mit den Seiten h und l und dem Drahtdurchmesser d ist mit $f = \sqrt{h^2 + l^2}$

$$L = \frac{\mu_0}{\pi}\left[h \ln \frac{5hl}{d(h+f)} + l \ln \frac{5hl}{d(l+f)} + 2(f-h-l)\right] \tag{2.44}$$

und hat für $h = l = 1\,\mathrm{m}$, $d = 2\,\mathrm{mm}$ den Wert $L = 5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{H}$. Mit

$$l = h = 1\,\mathrm{m}, \quad k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}, \quad C = 1\,\mathrm{F}, \quad L = 5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{H} \tag{2.45}$$

ist (siehe (2.37))

$$\frac{3k}{m} = 119\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}, \quad \frac{1}{LC} = 1{,}97 \cdot 10^5\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}, \quad \frac{3B^2l^2}{4mL} = 2{,}35 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\mathrm{s}^2} \tag{2.46}$$

$$\Longrightarrow \quad a = 1{,}97 \cdot 10^5\,\frac{1}{\mathrm{s}^2} \tag{2.47}$$

$$b = \frac{3k}{mLC} = 2{,}35 \cdot 10^7\,\frac{1}{\mathrm{s}^4} \tag{2.48}$$

$$\omega_1 = 10{,}9\,\frac{1}{\mathrm{s}} \approx \sqrt{\frac{3k}{m}}, \qquad \omega_2 = 443{,}4\,\frac{1}{\mathrm{s}} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{2.49}$$

Genauere Betrachtung:

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \qquad \omega_{20} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{2.50}$$

$$a = \underbrace{\frac{3k}{m}}_{\omega_{10}^2} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_{20}^2} + \underbrace{\frac{3B^2l^2}{4mL}}_{\varepsilon} = \omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + \varepsilon \tag{2.51}$$

$$b = \frac{3k}{mLC} = \omega_{10}^2\omega_{20}^2 \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}
2\omega_1^2 &= a - \sqrt{a^2 - 4b} = \\
&= \omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + \varepsilon - \sqrt{\left(\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + \varepsilon\right)^2 - 4\omega_{10}^2\omega_{20}^2} = \\
&= \omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + \varepsilon - \sqrt{\left(\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2\right)^2 + 2\left(\omega_{20}^2 + \omega_{10}^2\right)\varepsilon + \underbrace{\varepsilon^2}_{\approx 0}} = \\
&= \omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + \varepsilon - \left(\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2\right)\sqrt{1 + \frac{2\left(\omega_{20}^2 + \omega_{10}^2\right)\varepsilon}{\left(\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2\right)^2}} \approx \\
&\approx \omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + \varepsilon - \left(\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2\right)\left(1 + \frac{\left(\omega_{20}^2 + \omega_{10}^2\right)\varepsilon}{\left(\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2\right)^2}\right) \\
&= 2\omega_{10}^2 + \varepsilon\left(1 - \frac{\omega_{20}^2 + \omega_{10}^2}{\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2}\right) = 2\omega_{10}^2 - \frac{2\omega_{10}^2}{\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2}\varepsilon = \\
&= 2\omega_{10}^2\left(1 - \frac{\varepsilon}{\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2}\right)
\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\frac{\varepsilon}{\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2} = \frac{3B^2l^2}{4mL\left(\frac{1}{LC} - \frac{3k}{m}\right)} = \frac{3B^2l^2C}{4m\left(1 - \frac{3kLC}{m}\right)} \approx \underbrace{\frac{3B^2l^2C}{4m}}_{1{,}2\cdot 10^{-8}}\left(1 + \underbrace{\frac{3kLC}{m}}_{6\cdot 10^{-4}}\right) \tag{2.54}$$

Damit gilt in erster Näherung

$$\omega_1 = \omega_{10}\left(1 - \frac{3B^2l^2C}{8m}\right) \tag{2.55}$$

genauso wie für ω (siehe (2.17)). Analog folgt

$$\omega_2 = \omega_{20}\left(1 + \frac{3B^2l^2C}{8m}\right) \tag{2.56}$$

Aus (2.33) und (2.43) folgt

$$\begin{aligned} I(t) &= -\frac{2m}{3Bl}\ddot{x} - \frac{2k}{Bl}x = \frac{2}{Bl}\left(-\frac{m}{3}\ddot{x} - kx\right) = \\ &= \underbrace{c_1 \cdot \frac{2}{Bl}\left(\frac{m\omega_1^2}{3} - k\right)}_{I_1}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \underbrace{c_2 \cdot \frac{2}{Bl}\left(\frac{m\omega_2^2}{3} - k\right)}_{I_2}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \tag{2.57}$$

Anfangsbedingungen:

Der Stab wird zur Zeit $t_0 = 0$ in der Lage $x_0 = A$ mit der Geschwindigkeit $v_0 = 0$ losgelassen. Der Kondensator sei zu diesem Zeitpunkt entladen und vorher alles in Ruhe, d.h. $I(0) = 0$ und $Q(0) = 0$. Aus (2.29) folgt dann auch $\dot{I}(0) = 0$:

$$x(0) = c_1\cos\varphi_1 + c_2\cos\varphi_2 = A \tag{2.58}$$

$$\dot{x}(0) = -c_1\omega_1\sin\varphi_1 - c_2\omega_2\sin\varphi_2 = 0 \tag{2.59}$$

$$I(0) = c_1 \cdot \left(\frac{m\omega_1^2}{3} - k\right)\cos\varphi_1 + c_2 \cdot \left(\frac{m\omega_2^2}{3} - k\right)\cos\varphi_2 = 0 \tag{2.60}$$

$$\dot{I}(0) = -c_1\omega_1 \cdot \left(\frac{m\omega_1^2}{3} - k\right)\sin\varphi_1 - c_2\omega_2 \cdot \left(\frac{m\omega_2^2}{3} - k\right)\sin\varphi_2 = 0 \tag{2.61}$$

Für $\omega_1 \neq \omega_2$ sind (2.59) und (2.61) nur gleichzeitig erfüllbar, wenn

$$\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos\varphi_1 = \pm 1, \quad \cos\varphi_2 = \pm 1 \tag{2.62}$$

Die vier möglichen Kombinationen für die Kosinusse führen auf die gleiche Lösung, wir wählen $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = 1$. (2.58) und (2.60) $\Longrightarrow$

$$c_1 + c_2 = A \tag{2.63}$$

$$c_1 \cdot \left(\frac{m\omega_1^2}{3} - k\right) + c_2 \cdot \left(\frac{m\omega_2^2}{3} - k\right) = 0 \tag{2.64}$$

mit den Lösungen

$$c_1 = \frac{\omega_2^2 - \frac{3k}{m}}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot A = \frac{\omega_2^2 - \omega_{10}^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot A \quad \text{und} \quad c_2 = -\frac{\omega_1^2 - \frac{3k}{m}}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot A = -\frac{\omega_1^2 - \omega_{10}^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot A \tag{2.65}$$

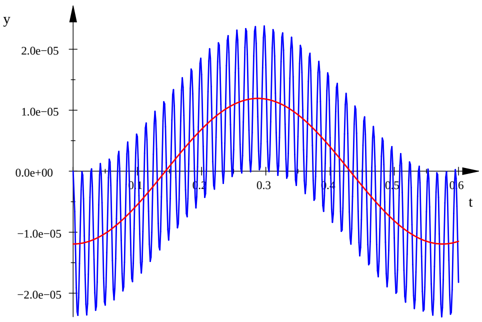
Aus (2.53) und (2.54) folgt

$$c_2 = \frac{3B^2l^2C}{4m} \cdot \frac{\omega_{10}^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot A = 7{,}25 \cdot 10^{-12} A \tag{2.66}$$

Aus (2.57) folgt

$$I_2 = -I_1 = 7{,}25 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{A} \tag{2.67}$$

Für unsere Zahlenwerte: $c_1 = A - c_2 \approx A$



Aufgabe 3: Interferenz von polarisiertem Licht

Vorbemerkungen

Elektrische Feldstärke einer elektromagnetischen Welle:

$$E(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t) \tag{3.1}$$

mit

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \quad \lambda f = \frac{\omega}{k} = c \tag{3.2}$$

Überlagerung von zwei Wellen gleicher Amplitude E_0 und der Phase φ:

$$E' = E_0 \sin(kx - \omega t) + E_0 \sin(kx - \omega t + \varphi) = \underbrace{2E_0 \left|\cos \frac{\varphi}{2}\right|}_{E_0'} \sin(kx - \omega t + \varphi') \tag{3.3}$$

Die Intensität der Welle (3.1) ist

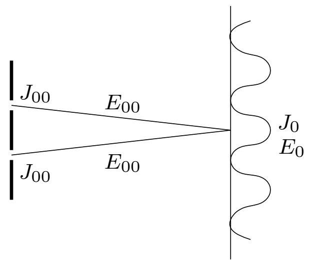
$$J = \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_0^2 \tag{3.4}$$

Die Intensität der Überlagerungswelle (3.3) ist

$$J' = \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_0'^2 = 4 \cdot \frac{\varepsilon_0 c}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} E_0^2 = 4J \cos^2 \frac{\varphi}{2} = 2J(1 + \cos\varphi) \tag{3.5}$$

Feldstärke eines Spalts ohne Filter am Ort des Schirms: E_{00}.
Intensität eines Spalts ohne Filter am Ort des Schirms: J_{00}.

$$E_0 = 2E_{00} \quad \Longrightarrow \quad J_0 = 4J_{00} \tag{3.6}$$



Der Gangunterschied zweier Wellen in Anhängigkeit von α:

$$\delta = d \sin\alpha \tag{3.7}$$

Damit ist die Phase der beiden Wellen

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin\alpha}{\lambda} \tag{3.8}$$

Die Intensität ist somit

$$J(\alpha) = 4J_{00} \cos^2 \frac{\pi d \sin\alpha}{\lambda} = J_0 \cos^2 \frac{\pi d \sin\alpha}{\lambda} \tag{3.9}$$

(a) Winkel β zwischen $\vec{E}$ und der Durchlassrichtung des Polfilters. Hat die einfallende Welle die Amplitude E_e und die Intensität J_e, dann hat die durchgehende Komponente die Amplitude

$$E_\mathrm{d} = E_\mathrm{e} \cos\beta \tag{3.10}$$

und die Intensität

$$J_\mathrm{d} = J_\mathrm{e} \cos^2\beta \tag{3.11}$$

Fällt unpolarisiertes Licht auf das Filter, dann ist

$$J_\mathrm{d} = \int_0^{2\pi} J_\mathrm{e} \cos^2\beta \frac{\mathrm{d}\beta}{2\pi} = \frac{J_\mathrm{e}}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\beta \,\mathrm{d}\beta}_{\pi} = \frac{J_\mathrm{e}}{2} \tag{3.12}$$

Aus (3.9) und (3.12) folgt

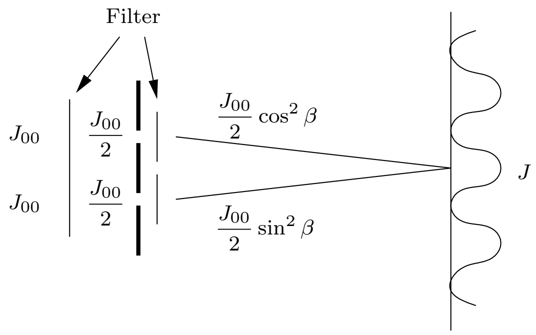
$$J(\alpha) = \frac{J_0}{2} \cos^2 \frac{\pi d \sin\alpha}{\lambda} = \frac{J_0}{4} \left(1 + \cos \frac{2\pi d \sin\alpha}{\lambda}\right) \tag{3.13}$$

(b) Da senkrecht aufeinander stehende Felder nicht interferieren, addieren sich die Intensitäten der Teilstrahlen. Aus

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta \tag{3.14}$$

folgt

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \frac{J_{00}}{2}(\cos^2\beta+\sin^2\beta) = \\ &= \frac{J_{00}}{2} \overset{(3.6)}{=} \frac{J_0}{8} \end{aligned} \tag{3.15}$$



(c) $\vec{E}_I$ ist das Feld vor dem $\frac{\lambda}{2}$-Plättchen, $\vec{E}_I'$ danach:

$$\vec{E}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{I0}\sin\omega t \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

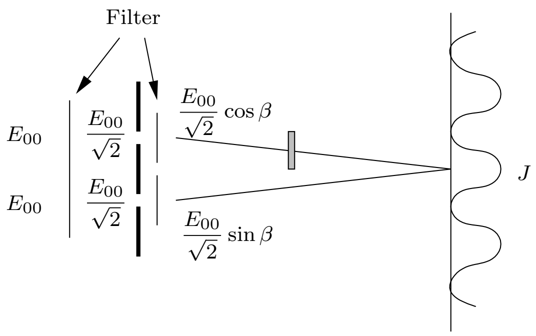
mit

$$E_{I0} = \frac{E_{00}}{\sqrt{2}}\cos\beta \tag{3.17}$$

$$\vec{E}_{II} = \begin{pmatrix} E_{II0}\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

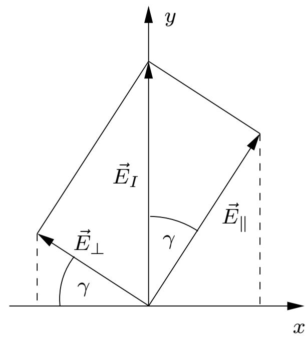
mit

$$E_{II0} = \frac{E_{00}}{\sqrt{2}}\sin\beta \tag{3.19}$$

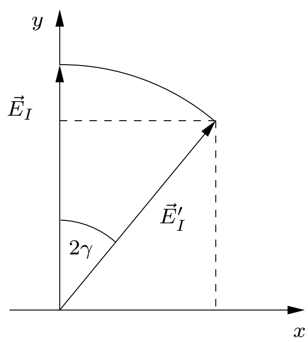


$$\vec{E}_\parallel' = \vec{E}_\parallel = \begin{pmatrix} E_{I0}\cos\gamma\sin\gamma\sin\omega t \\ E_{I0}\cos^2\gamma\sin\omega t \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_\perp &= \begin{pmatrix} -E_{I0}\cos\gamma\sin\gamma\sin\omega t \\ E_{I0}\sin^2\gamma\sin\omega t \end{pmatrix} \\ \vec{E}_\perp' &= \begin{pmatrix} -E_{I0}\cos\gamma\sin\gamma\sin(\omega t+\pi) \\ E_{I0}\sin^2\gamma\sin(\omega t+\pi) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} E_{I0}\cos\gamma\sin\gamma\sin\omega t \\ -E_{I0}\sin^2\gamma\sin\omega t \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.21}$$



$$\begin{aligned} \vec{E}_I' &= \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp = \\ &= \begin{pmatrix} 2E_{I0}\cos\gamma\sin\gamma\sin\omega t \\ E_{I0}\left(\cos^2\gamma-\sin^2\gamma\right)\sin\omega t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} E_{I0}\sin 2\gamma\sin\omega t \\ E_{I0}\cos 2\gamma\sin\omega t \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.22}$$



Die gesamte Feldstärke nach dem Plättchen, E_{II} mit Phase φ:

$$\begin{aligned} \vec{E} = \vec{E}_I' + \vec{E}_{II} &= \begin{pmatrix} E_{I0}\sin 2\gamma\sin\omega t \\ E_{I0}\cos 2\gamma\sin\omega t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{II0}(\sin\omega t+\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{E_{00}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos\beta\sin 2\gamma\sin\omega t + \sin\beta\sin(\omega t+\varphi) \\ \cos\beta\cos 2\gamma\sin\omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Die Überlagerung von zwei Wellen mit den Amplituden A und B und der Phase φ hat die Amplitude

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\varphi} \tag{3.24}$$

Die Welle (3.23) hat die Amplituden

$$E_{x0} = \frac{E_{00}}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos^2\beta\sin^2 2\gamma + \sin^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta\sin 2\gamma\cos\varphi} \tag{3.25}$$

$$E_{y0} = \frac{E_{00}}{\sqrt{2}}\cos\beta\cos 2\gamma \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} J &= \frac{\varepsilon_0 c}{2}(E_{x0}^2 + E_{y0}^2) = \\ &= \frac{\varepsilon_0 c}{2}\cdot\frac{E_{00}^2}{2}\left(\cos^2\beta\sin^2 2\gamma + \cos^2\beta\cos^2 2\gamma + \sin^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta\sin 2\gamma\cos\varphi\right) = \\ &= \frac{\varepsilon_0 c}{2}\cdot\frac{E_0^2}{8}\left(1 + \sin 2\beta\sin 2\gamma\cos\varphi\right) = \frac{J_0}{8}\left(1 + \sin 2\beta\sin 2\gamma\cos\varphi\right) \end{aligned} \tag{3.27}$$

(3.27) ist zu (3.13) proportional, wenn

$$\sin 2\beta\sin 2\gamma = 1 \quad\Longrightarrow\quad \beta = \gamma = \pm\frac{\pi}{4} \tag{3.28}$$

(d) Wenn *vor* den Polfiltern kein Plättchen ist, sind die beiden Strahlen senkrechte Komponenten der einfallenden Welle und daher nicht kohärent, d.h. keine Interferenz.

Wenn *hinter* den Polfiltern kein Plättchen ist, sind die beiden Strahlen orthogonal, d.h. keine Interferenz.

Damit sind (nur *ein* Plättchen) alle Fälle abgedeckt.

Wegen des fehlenden Polfilters ist die Intensität das Doppelte der Intensität in (3.15):

$$J(\alpha) = \frac{J_0}{4} \tag{3.29}$$

Aufgabe 4: Experiment:

4.1 Längenmessung mit einer Stoppuhr

(a) **Freier Fall:**

Man wählt als Fallhöhe ein Vielfaches der Besenlänge:

$$h = \alpha L = \frac{g}{2} t^2 \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{gt^2}{2\alpha} \tag{4.1}$$

Messbeispiel: $t = 1{,}0 \pm 0{,}1\,\mathrm{s}$, $\alpha = 3 \pm 0{,}005 \quad \Longrightarrow \quad L = 1{,}64\,\mathrm{m}$

$$\Delta L = \left|\frac{\partial L}{\partial t}\right| \mathrm{d}t + \left|\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right| \mathrm{d}\alpha = \frac{gt}{\alpha}\,\mathrm{d}t + \frac{gt^2}{2\alpha^2}\,\mathrm{d}\alpha = 0{,}33\,\mathrm{m} \tag{4.2}$$

$$\frac{\Delta L}{L} = 20\% \tag{4.3}$$

(b) **Mit Feder:**

Feder um $d = \alpha L$ spannen und Besenstiel senkrecht nach oben schießen, der Besenstiel (Schwerpunkt!) erreicht die maximale Höhe $h = \beta L$:

$$mgh = mg\beta L = \frac{D}{2}\,d^2 = \frac{D}{2}\alpha^2 L^2 \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{2mg}{D} \cdot \frac{\beta}{\alpha^2} \tag{4.4}$$

Besen an die Feder hängen und schwingen lassen, Schwingungsdauer T messen:

$$\frac{D}{m} = \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{g}{2\pi^2} \cdot \frac{\beta T^2}{\alpha^2} \tag{4.5}$$

Messbeispiel: $T = 0{,}301 \pm 0{,}010\,\mathrm{s}$ (Mehrfachmessung),

$\alpha = 0{,}183 \pm 0{,}002$, $\beta = 1{,}22 \pm 0{,}1 \quad \Longrightarrow \quad L = 1{,}64\,\mathrm{m}$

$$\begin{aligned}\Delta L &= \left|\frac{\partial L}{\partial T}\right| \mathrm{d}T + \left|\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right| \mathrm{d}\alpha + \left|\frac{\partial L}{\partial \beta}\right| \mathrm{d}\beta = \\ &= \frac{g}{2\pi^2}\left(\frac{2\beta T}{\alpha^2}\,\mathrm{d}T + \frac{2\beta T^2}{\alpha^3}\,\mathrm{d}\alpha + \frac{T^2}{\alpha^2}\,\mathrm{d}\beta\right) = 0{,}28\,\mathrm{m}\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\frac{\Delta L}{L} = 17\% \tag{4.7}$$

(c) **Fadenpendel (bifilar aufgehängter, waagrechter Besenstiel)**

Mit der Fadenlänge αL und der Schwingungsdauer T gilt

$$\omega^2 = \frac{g}{\alpha L} \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{g}{\alpha\omega^2} = \frac{g}{4\pi^2} \cdot \frac{T^2}{\alpha} \tag{4.8}$$

Messbeispiel: $T = 2{,}57 \pm 0{,}010\,\mathrm{s}$, $\alpha = 1{,}000 \pm 0{,}002 \quad \Longrightarrow \quad L = 1{,}64\,\mathrm{m}$

$$\Delta L = \left|\frac{\partial L}{\partial T}\right| \mathrm{d}T + \left|\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right| \mathrm{d}\alpha = \frac{g}{4\pi^2}\left(\frac{2T}{\alpha}\,\mathrm{d}T + \frac{T^2}{\alpha^2}\,\mathrm{d}\alpha\right) = 0{,}016\,\mathrm{m} \tag{4.9}$$

$$\frac{\Delta L}{L} = 1{,}0\% \tag{4.10}$$

(d) **Besenstiel als physikalisches Pendel)**

Drehpunkt an einem Ende des Stiels: Trägheitsmoment für einen Stiel konstanten Querschnitts:

$$J = \frac{m}{3} L^2 \tag{4.11}$$

Drehmoment:

$$M = -mg \cdot \frac{L}{2} \sin\varphi \tag{4.12}$$

Aus

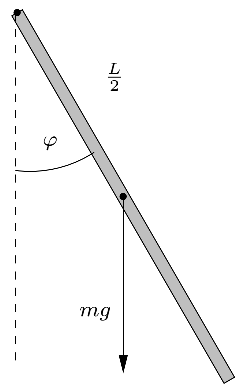
$$M = J\ddot{\varphi} \tag{4.13}$$

folgt

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3mgL\sin\varphi}{2mL^2} = -\frac{3g}{2L}\sin\varphi \tag{4.14}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} \tag{4.15}$$

$$L = \frac{3gT^2}{8\pi^2} \tag{4.16}$$



Messbeispiel: $T = 2{,}10 \pm 0{,}010\,\mathrm{s}, \quad \Longrightarrow \quad L = 1{,}64\,\mathrm{m}$

$$\Delta L = \left|\frac{\partial L}{\partial T}\right| \mathrm{d}T = \frac{3g}{4\pi^2 T}\,\mathrm{d}T = 0{,}016\,\mathrm{m} \tag{4.17}$$

$$\frac{\Delta L}{L} = 1{,}0\% \tag{4.18}$$

4.2 Massenmessung mit einer Stoppuhr

Da nur Zeiten und Längenverhältnisse (keine Benennung) gemessen werden können und an bekannten Konstanten nur g zur Verfügung steht, ist die Einheit jeder möglichen bestimmbaren physikalischen Größe eine Kombination aus den Einheiten m und s, also nicht kg.