42. Internationale Physik-Olympiade – Bangkok 2011
Lösungen zur zweiten Runde
R. Reindl

Aufgabe 1: Luftballon

Gegebene Größen: $p_0 = \frac{6}{5}p_\mathrm{L}$, $T_2 = 283\,\mathrm{K}$, $\varrho = \varrho_\mathrm{Wasser}$

(a) Mit dem Außendruck p_A ist der Innendruck im Ballon

$$p = \frac{\alpha}{r} + p_\mathrm{A} \tag{1.1}$$

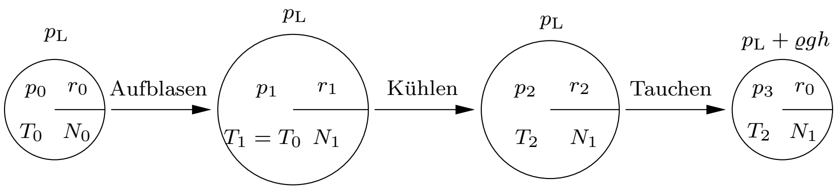
Vor dem Aufblasen Index 0, nach dem Aufblasen Index 1, N ist die Teilchenzahl, $p_\mathrm{A} = p_\mathrm{L}$:

$$\alpha = p_0 r_0 - p_\mathrm{L} r_0 = p_1 r_1 - p_\mathrm{L} r_1 = \frac{3}{2} r_0 (p_1 - p_\mathrm{L}) \tag{1.2}$$

$$p_1 = \frac{2}{3}p_0 + \frac{1}{3}p_\mathrm{L} \tag{1.3}$$

$$p_0 = \frac{6}{5}p_\mathrm{L} \quad \Longrightarrow \quad p_1 = \frac{17}{15}p_\mathrm{L} = \frac{17}{18}p_0 = 1{,}13 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \tag{1.4}$$

(b)



Beim Aufblasen hat sich die Teilchenzahl vergrößert:

$$T_1 = T_0 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{p_0 V_0}{N_0 T_0} = \frac{p_1 V_1}{N_1 T_0} \quad \Longrightarrow \quad \frac{p_0 r_0^3}{N_0} = \frac{p_1 r_1^3}{N_1} \tag{1.5}$$

$$N_1 = \frac{p_1 r_1^3 N_0}{p_0 r_0^3} = \frac{\left(\frac{2}{3}p_0 + \frac{1}{3}p_\mathrm{L}\right) \cdot 27 N_0}{p_0 \cdot 8} = \frac{9}{8}\left(2 + \frac{p_\mathrm{L}}{p_0}\right) N_0 = \frac{51}{16} N_0 \tag{1.6}$$

Wir nehmen an, dass die Tiefe h groß gegen $2r$ ist und damit der Druck im Bereich des Ballons konstant p_3 ist:

$$p_3 = \frac{\alpha}{r_0} + p_\mathrm{L} + \varrho g h = p_0 + \varrho g h \tag{1.7}$$

$$p_3 V_0 = p_0 V_0 + \varrho g h V_0 = N_1 k T_2 \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{N_1 k T_2}{\varrho g V_0} - \frac{p_0}{\varrho g} = \frac{p_1 V_1 T_2}{\varrho g V_0 T_0} - \frac{p_0}{\varrho g} \tag{1.8}$$

$$h = \frac{51 p_0 T_2}{16 \varrho g T_0} - \frac{p_0}{\varrho g} = \frac{p_0}{\varrho g}\left(\frac{51 T_2}{16 T_0} - 1\right) = \frac{120}{9{,}81}\left(\frac{51 \cdot 283}{16 \cdot 300} - 1\right) = 24{,}5\,\mathrm{m} \tag{1.9}$$

(c) Adiabatische Ausdehnung des Gases (l ist die Zahl der Freiheitsgrade):

$$\mathrm{d}U = -p\mathrm{d}V + \underbrace{\mathrm{d}Q}_{0} \quad \Longrightarrow \quad \frac{l}{2} N k \mathrm{d}T = -p\mathrm{d}V \tag{1.10}$$

Aus der Gasgleichung

$$pV = NkT \quad \Longrightarrow \quad p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = Nk\mathrm{d}T \tag{1.11}$$

folgt

$$\frac{l}{2}p\mathrm{d}V + \frac{l}{2}V\mathrm{d}p = -p\mathrm{d}V \quad \Longrightarrow \quad \frac{l+2}{l}p\mathrm{d}V = -V\mathrm{d}p \tag{1.12}$$

$$\frac{l+2}{l}\frac{\mathrm{d}V}{V} = -\frac{\mathrm{d}p}{p} \quad \Longrightarrow \quad \frac{l+2}{l}\ln V = -\ln p + C' \tag{1.13}$$

$$pV^\kappa = \text{konst.} \tag{1.14}$$

mit dem Adiabatenkoeffizienten

$$\kappa = \frac{l+2}{l} = \frac{c_\mathrm{p}}{c_\mathrm{v}} \tag{1.15}$$

Für Luft bei mittleren Temperaturen ist $l = 5$ oder $\kappa = \frac{7}{5}$.

Ausgehend vom Zustand 1 wird untergetaucht:

$$p_1 V_1^\kappa = p_4 V_0^\kappa \tag{1.16}$$

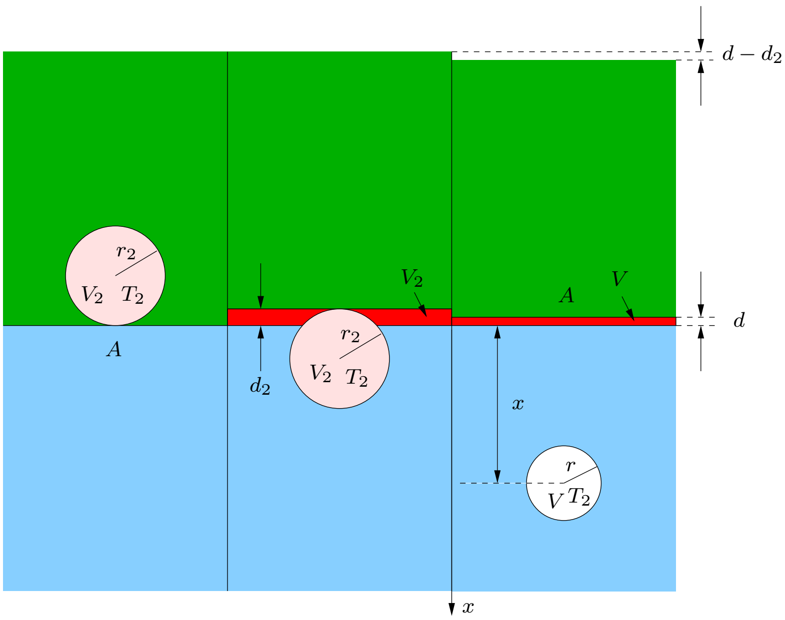
$$p_4 = \left(\frac{2}{3}p_0 + \frac{1}{3}p_\mathrm{L}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{3\kappa} = \frac{17}{15}p_\mathrm{L}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{21}{5}} = 6{,}22\cdot 10^5\,\mathrm{P} \tag{1.17}$$

$$p_4 = \frac{\alpha}{r_0} + p_\mathrm{L} + \varrho g h' = p_0 + \varrho g h' \tag{1.18}$$

$$h' = \frac{p_4 - p_0}{\varrho g} = \frac{p_\mathrm{L}}{\varrho g}\left(\frac{17}{15}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{21}{5}} - \frac{6}{5}\right) = 51{,}2\,\mathrm{m} \tag{1.19}$$

$$\frac{p_4 V_0}{T_4} = \frac{p_1 V_1}{T_0} \quad \Longrightarrow \quad T_4 = \frac{p_4 V_0 T_0}{p_1 V_1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{6}{5}} T_0 = 488\,\mathrm{K} = 215^\circ\mathrm{C} \tag{1.20}$$

(d)



x bezeichnet die Eintauchtiefe des Ballons, $r = r(x)$ seinen Radius bei dieser Eintauchtiefe.

Wegen der Inkompressibilität des Wassers befindet sich das verdrängte Wasser an der Oberfläche.

Innere Energie des Gases:	U	:	$\mathrm{d}U = \mathrm{d}W + \mathrm{d}Q = -p\mathrm{d}V + \mathrm{d}Q$
Am Gas verrichtete Arbeit:	W	:	$\mathrm{d}W = -p\mathrm{d}V = -4\pi p(r) r^2\,\mathrm{d}r$
Ins Gas fließende Wärme:	Q		
Ins Wasser fließende Wärme:	$-Q$		
Potentielle Energie des Wassers:	W_W	:	$W_\mathrm{W} = V(r)\varrho g x$
Potentielle Energie der Ballonhülle:	W_B		
Pot. Energie der Luft über dem Wasser:	W_L	:	$W_\mathrm{L} = p_\mathrm{L} A(d - d_2) = p_\mathrm{L}(V - V_2)$

$$W_\mathrm{B}(r) = \int\limits_0^{V(r)} \frac{\alpha}{r'}\,\mathrm{d}V = 4\pi\int\limits_0^{r}\frac{\alpha}{r'}r'^2\,\mathrm{d}r' = 2\pi\alpha r^2 \tag{1.21}$$

Isotherm:

Zunächst wird das Gas im Ballon durch Kontakt mit dem Wasser auf die Temperatur T_2 gebracht:

$$\frac{p_1V_1}{T_0} = \frac{p_2V_2}{T_2} \quad \text{und} \quad p_2 = \frac{\alpha}{r_2} + p_\mathrm{L} \quad \Longrightarrow \tag{1.22}$$

$$\frac{\alpha}{r_2} + p_\mathrm{L} = \frac{3p_1V_1T_2}{4\pi T_0 r_2^3} \tag{1.23}$$

$$r_2^3 + \frac{\alpha}{p_\mathrm{L}}\, r_2^2 = \frac{3p_1V_1T_2}{4\pi T_0 p_\mathrm{L}} \tag{1.24}$$

Aus $\dfrac{\alpha}{r_0} + p_\mathrm{L} = p_0$ folgt mit $r_0 = 0{,}1\,\mathrm{m}$

$$\alpha = (p_0 - p_\mathrm{L})r_0 = 2{,}0 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \tag{1.25}$$

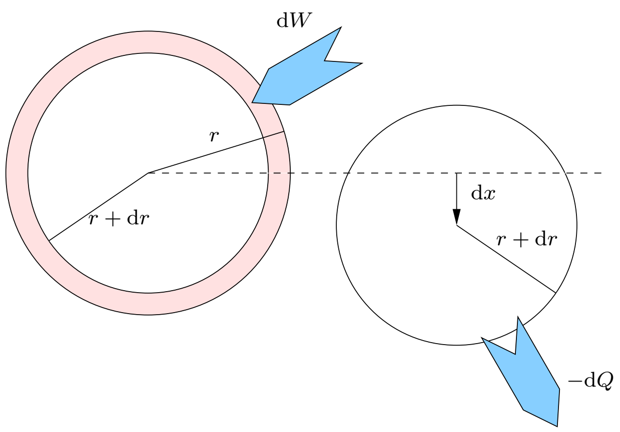
und damit aus (1.24):

$$r_2^3 + 0{,}02\,\mathrm{m}\, r_2^2 = 0{,}00360825\,\mathrm{m}^3 \tag{1.26}$$

mit der numerisch gefundenen Lösung

$$r_2 = 0{,}14699\,\mathrm{m} \approx 0{,}147\,\mathrm{m} \tag{1.27}$$

Energieänderungen während des Abtauchens um $\mathrm{d}x$:



Am Gas im Ballon verrichtete Arbeit:

$$\mathrm{d}W = -p\mathrm{d}V = -N_1kT_2\frac{\mathrm{d}V}{V} = -\frac{p_1V_1T_2}{T_0} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{V} \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned} W &= -\frac{p_1V_1T_2}{T_0}\int_{V_2}^{V_0}\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{p_1V_1T_2}{T_0}\ln\frac{V_2}{V_0} = \frac{3p_1V_1T_2}{T_0}\ln\frac{r_2}{r_0} = \\ &= \frac{3\cdot 17\cdot 27\cdot 283\cdot 4\pi}{15\cdot 8\cdot 300\cdot 3}\cdot \underbrace{p_\mathrm{L}r_0^3}_{100\,\mathrm{J}}\ln\frac{r_2}{r_0} = 1443{,}3\,\mathrm{J}\cdot\pi\ln\frac{r_2}{r_0} = 1747\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{1.29}$$

Wegen $\mathrm{d}U = 0$ gilt $\mathrm{d}Q = -\mathrm{d}W$ für die in das Ballongas fließende Wärme, d.h. die innere Energie des umgebenden Wassers erhöht sich um

$$Q_\mathrm{W} = W \tag{1.30}$$

Die gesamte Energieänderung des Systems Ballon-Wasser-Luft während des Untertauchens ist gleich der von außen am System verrichteten Arbeit:

$$W_\mathrm{A} = \underbrace{V_0 \varrho g h}_{W_\mathrm{W}} + Q_\mathrm{W} + \underbrace{2\pi\alpha(r_0^2 - r_2^2)}_{W_\mathrm{B}} + \underbrace{p_\mathrm{L}(V_0 - V_2)}_{W_\mathrm{L}} =$$
$$= 1009\,\mathrm{J} + 1747\,\mathrm{J} - 146\,\mathrm{J} - 912\,\mathrm{J} = 1698\,\mathrm{J} \tag{1.31}$$

Mit (1.8) und (1.25) folgt

$$\begin{aligned}
W_\mathrm{A} &= Q_\mathrm{W} + \frac{p_1 V_1 T_2}{T_0} - p_0 V_0 + 2\pi(p_0 - p_\mathrm{L})(r_0^3 - r_0 r_2^2) + p_\mathrm{L} V_0 - \frac{4\pi}{3} p_\mathrm{L} r_2^3 = \\
&= Q_\mathrm{W} + \frac{p_1 V_1 T_2}{T_0} - p_0 V_0 + \frac{3}{2}(p_0 - p_\mathrm{L}) V_0 + p_\mathrm{L} V_0 - 2\pi\alpha r_2^2 - \frac{4\pi}{3} p_\mathrm{L} r_2^3 = \\
&= Q_\mathrm{W} + \frac{p_1 V_1 T_2}{T_0} + \frac{1}{2}(p_0 - p_\mathrm{L}) V_0 - \frac{4\pi}{3} p_\mathrm{L} \underbrace{\left(r_2^3 + \frac{\alpha}{p_\mathrm{L}} r_2^2\right)}_{\frac{3 p_1 V_1 T_2}{4\pi T_0 p_\mathrm{L}}} - \frac{2\pi\alpha}{3} r_2^2 = \\
&\overset{(1.24)}{=} Q_\mathrm{W} + \frac{p_1 V_1 T_2}{T_0} + \frac{2\pi\alpha}{3} r_0^2 - \frac{p_1 V_1 T_2}{T_0} - \frac{2\pi\alpha}{3} r_2^2 = \\
&= Q_\mathrm{W} - \frac{2\pi\alpha}{3}(r_2^3 - r_0^3)
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Anderer Weg:

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}Q_\mathrm{W} = -p\,\mathrm{d}V = -\left(\frac{\alpha}{r} + p_\mathrm{L} + \varrho g x\right) \cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r \tag{1.33}$$

Mit

$$\mathrm{d}W_\mathrm{W} = \varrho g[V(r + \mathrm{d}r)(x + \mathrm{d}x) - V(r)x] = \frac{4\pi}{3} \varrho g r^3\,\mathrm{d}x + 4\pi \varrho g r^2\,\mathrm{d}r \tag{1.34}$$
$$\mathrm{d}W_\mathrm{B} = 4\pi\alpha r\,\mathrm{d}r \tag{1.35}$$
$$\mathrm{d}W_\mathrm{L} = p_\mathrm{L}\,\mathrm{d}V = 4\pi p_\mathrm{L} r^2\,\mathrm{d}r \tag{1.36}$$

folgt

$$\mathrm{d}W_\mathrm{A} = \mathrm{d}W_\mathrm{W} + \mathrm{d}Q_\mathrm{W} + \mathrm{d}W_\mathrm{B} + \mathrm{d}W_\mathrm{L} = \frac{4\pi}{3}\varrho g r^3\,\mathrm{d}x = F_\mathrm{A}\,\mathrm{d}x \tag{1.37}$$

mit der Auftriebskraft F_A.

$$W_\mathrm{A} = \frac{4\pi\varrho g}{3} \int_0^h r(x)^3\,\mathrm{d}x \tag{1.38}$$

Aus

$$p = \frac{p_1 V_1 T_2}{T_0 V} = \frac{3 p_1 V_1 T_2}{4\pi T_0 r^3} = \frac{\alpha}{r} + p_\mathrm{L} + \varrho g x \tag{1.39}$$

folgt

$$x = \frac{3 p_1 V_1 T_2}{4\pi \varrho g T_0 r^3} - \frac{\alpha}{\varrho g r} - \frac{p_\mathrm{L}}{\varrho g} \tag{1.40}$$

und

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r = \left[-\frac{9 p_1 V_1 T_2}{4\pi\varrho g T_0 r^4} + \frac{\alpha}{\varrho g r^2}\right]\mathrm{d}r \tag{1.41}$$

$$\begin{aligned}
W_\mathrm{A} &= \int_{r_2}^{r_0} \frac{4\pi\varrho g}{3}\left[-\frac{9 p_1 V_1 T_2}{4\pi\varrho g T_0 r^4} + \frac{\alpha}{\varrho g r^2}\right] r^3\,\mathrm{d}r = \int_{r_2}^{r_0}\left[-\frac{3 p_1 V_1 T_2}{T_0 r} + \frac{4\pi\alpha}{3} r\right]\mathrm{d}r = \\
&= \frac{3 p_1 V_1 T_2}{T_0} \ln\frac{r_2}{r_0} - \frac{2\pi\alpha}{3}(r_2^2 - r_0^2) = Q_\mathrm{W} - \frac{2\pi\alpha}{3}(r_2^2 - r_0^2) = \\
&= \frac{4\pi}{3} r_0^3 \left[\frac{27}{8} \cdot \frac{(p_\mathrm{L} + 2p_0) T_2}{T_0} \ln\frac{r_2}{r_0} - \frac{1}{2}(p_\mathrm{L} - p_0)\left(\frac{r_2^2}{r_0^2} - 1\right)\right]
\end{aligned} \tag{1.42}$$

wie in (1.32).

Adiabatisch:

Wegen des adiabatischen Prozesses gilt $Q'_\mathrm{W} = 0$. Die Änderung der inneren Energie des Gases ist

$$U' = -\int_{r_1}^{r_0} p\,\mathrm{d}V = \frac{5}{2}N_1k(T_4 - T_0) = \frac{5}{2}\cdot p_1V_1\left(\frac{T_4}{T_0} - 1\right) =$$

$$\overset{(1.20)}{=} \frac{5\cdot 17\cdot 27\cdot 4\pi}{2\cdot 15\cdot 8\cdot 3}p_\mathrm{L}r_0^3\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{6}{5}} - 1\right] = \frac{51\pi}{4}p_\mathrm{L}r_0^3\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{6}{5}} - 1\right] = 2510\,\mathrm{J} \qquad (1.43)$$

Die gesamte Energieänderung des Systems Ballon-Wasser-Luft während des Untertauchens ist gleich der von außen am System verrichteten Arbeit:

$$W'_\mathrm{A} = \underbrace{V_0\varrho gh'}_{W_\mathrm{W}} + U' + \underbrace{2\pi\alpha(r_0^2 - r_1^2)}_{W_\mathrm{B}} + \underbrace{p_\mathrm{L}(V_0 - V_1)}_{W_\mathrm{L}} =$$

$$= 2104\,\mathrm{J} + 2510\,\mathrm{J} - 157\,\mathrm{J} - 995\,\mathrm{J} = 3462\,\mathrm{J} \qquad (1.44)$$

Mit (1.19) und $\alpha = \frac{1}{5}p_\mathrm{L}r_0$ folgt

$$W'_\mathrm{A} = \frac{4\pi}{3}p_\mathrm{L}r_0^3\left(\frac{17}{15}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{21}{5}} - \frac{6}{5}\right) + \frac{51\pi}{4}p_\mathrm{L}r_0^3\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{6}{5}} - 1\right] +$$

$$+ \frac{2\pi}{5}p_\mathrm{L}r_0^3\left(1 - \frac{9}{4}\right) + \frac{4\pi}{3}p_\mathrm{L}r_0^3\left(1 - \frac{27}{8}\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{3}p_\mathrm{L}r_0^3\left[\frac{17\cdot 27}{15\cdot 8}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{6}{5}} + \frac{153}{16}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{6}{5}} - \frac{6}{5} - \frac{153}{16} - \frac{3}{8} - \frac{19}{8}\right] =$$

$$= p_\mathrm{L}r_0^3\pi\left[\frac{357}{20}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{6}{5}} - \frac{1081}{60}\right] = 3462\,\mathrm{J} \qquad (1.45)$$

Anderer Weg:

$$p(r) = \frac{p_1V_1^\kappa}{V^\kappa} = \frac{p_1r_1^{3\kappa}}{r^{3\kappa}} = \frac{\alpha}{r} + p_\mathrm{L} + \varrho gx \qquad (1.46)$$

$$x = \frac{p_1r_1^{3\kappa}}{\varrho gr^{3\kappa}} - \frac{\alpha}{\varrho gr} - \frac{p_\mathrm{L}}{\varrho g} \qquad (1.47)$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r = \left[-\frac{-3\kappa p_1r_1^{3\kappa}}{\varrho gr^{3\kappa+1}} + \frac{\alpha}{\varrho gr^2}\right]\mathrm{d}r \qquad (1.48)$$

$$W'_\mathrm{A} = \int_{r_1}^{r_0}\frac{4\pi\varrho g}{3}\left[\frac{-3\kappa p_1r_1^{3\kappa}}{\varrho gr^{3\kappa+1}} + \frac{\alpha}{\varrho gr^2}\right]r^3\,\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{3}\int_{r_1}^{r_0}\left[\frac{-3\kappa p_1r_1^{3\kappa}}{r^{3\kappa-2}} + \alpha r\right]\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{3\kappa}\frac{3\kappa p_1r_0^{3\kappa}}{(3\kappa-3)r^{3\kappa-3}} + \frac{\alpha}{2}r^2\right]_{\frac{3}{2}r_0}^{r_0} =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{3\kappa p_1r_0^3}{3\kappa-3}\left(\frac{3}{2}\right)^{3\kappa}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{3\kappa-3}\right] - \frac{2\pi\alpha}{3}(r_1^2 - r_0^2) =$$

$$= \frac{4\pi}{3}r_0^3\cdot\frac{3\kappa p_1}{3\kappa-3}\left(\frac{3}{2}\right)^3\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{3\kappa-3} - 1\right] - \frac{2\pi(p_0 - p_\mathrm{L})}{3}r_0^3\left(\frac{9}{4} - 1\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{3}r_0^3p_\mathrm{L}\cdot\left\{\frac{7\cdot 17\cdot 27}{2\cdot 15\cdot 8}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{6}{5}} - 1\right] - \frac{1}{8}\right\} =$$

$$= \underbrace{p_\mathrm{L}r_0^3}_{100\,\mathrm{J}}\pi\left[\frac{357}{20}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{6}{5}} - \frac{1081}{60}\right] = 3462\,\mathrm{J} \qquad (1.49)$$

Aufgabe 2: Kugel und Münze im Trichter

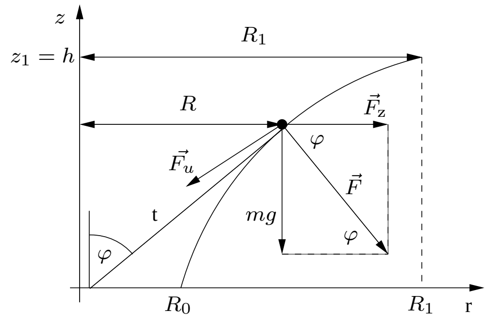
2.1. (a) Bedingung für „gleiche Höhe“: $\vec{F} \perp t$

$$R'(z) = \tan\varphi = \frac{mg}{F_\mathrm{z}} = \frac{gR}{v^2} \qquad (2.1)$$

$$R(z) = R_0 \mathrm{e}^{\frac{g}{v^2} z} \qquad (2.2)$$

$$R(z_1) = R_1 = R_0 \mathrm{e}^{\frac{g}{v^2} z_1} \qquad (2.3)$$

$$z_1 = \frac{v^2}{g} \ln \frac{R_1}{R_0} = \frac{\ln 10}{9{,}81\,\mathrm{m}} = 23{,}5\,\mathrm{cm} \qquad (2.4)$$



(b) Das gegebene v und u bezeichnen wir mit v_1 und u_0, $v(t)$ und $u(t)$ sind dann die horizontale und die dazu senkrechte Geschwindigkeitskomponente zu einer beliebigen Zeit t.

$$R(z) = \frac{R_1}{\sqrt{\frac{2g}{v_1^2}(h-z)+1}} \qquad (2.5)$$

$$R'(z) = \frac{-R_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2g}{v_1^2}\right)}{\left(\frac{2g}{v_1^2}(h-z)+1\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R_1 g}{v_1^2 \left(\frac{2g}{v_1^2}(h-z)+1\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (2.6)$$

Am oberen Rand gilt

$$\tan\varphi = R'(h) = \frac{R_1 g}{v_1^2} = \frac{mg}{F_\mathrm{z}} \qquad (2.7)$$

d.h. die Bedingung für „gleiche Höhe“ ist erfüllt.
Wir nehmen an, dass der Trichter eine sehr große Masse hat (fest mit der Erde verbunden). Wegen der Reibungsfreiheit gilt Energieerhaltung für die Punktmasse.
Ist $\vec{r}$ der Vektor vom Ursprung zur Punktmasse, dann liegen alle Kräfte auf die Punktmasse in der von $\vec{r}$ und der z-Achse aufgespannten Ebene. Das Drehmoment auf die Masse bezüglich eines Punktes auf der z-Achse steht somit senkrecht auf der z-Achse und hat damit die z-Komponente null. Daraus folgt die Drehimpulserhaltung der z-Komponente:

$$vR = v_1 R_1 \qquad (2.8)$$

$$F_\mathrm{z} = \frac{mv^2}{R} = \frac{mv_1^2 R_1^2}{R^3} \qquad (2.9)$$

Die Kraftkomponente parallel zu $\vec{u}$ nennen wir F_u. Mit

$$\sin\varphi = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{R'}{\sqrt{1+R'^2}} \text{ und } \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+R'^2}} \qquad (2.10)$$

folgt

$$F_u = mg\cos\varphi - F_\mathrm{z}\sin\varphi = m\left[g\cos\varphi - \frac{v_1^2 R_1^2}{R^3}\sin\varphi\right] =$$

$$= \frac{m}{\sqrt{1+R'^2}}\left[g - \frac{v_1^2 R_1^2 R'}{R^3}\right] = \frac{m}{\sqrt{1+R'^2}}\left[g - \frac{v_1^2 R_1^2 g R_1}{R^3 v_1^2 \left(\frac{2g}{v_1^2}(h-z)+1\right)^{\frac{3}{2}}}\right] =$$

$$= \frac{mg}{\sqrt{1+R'^2}}\left[1 - \frac{R_1^3}{R^3\left(\frac{2g}{v_1^2}(h-z)+1\right)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{mg}{\sqrt{1+R'^2}}\left[1 - \frac{R^3}{R^3}\right] = 0 \qquad (2.11)$$

Also ist $u(t)$ konstant. Die Länge der Kurve kann numerisch bestimmt werden:

$$s = \int\limits_0^h \sqrt{1 + R'(z)^2}\,\mathrm{d}z \approx 0{,}80\,\mathrm{m} \tag{2.12}$$

$$t = \frac{s}{u} = 8{,}0\,\mathrm{s} \tag{2.13}$$

(c)

$$R(z) = R_0 + cz \quad \text{mit} \quad c = \frac{R_1 - R_0}{h} \tag{2.14}$$

Bedingung für konstante Höhe:

$$\tan\varphi = R'(z) = c = \frac{mg}{F_\mathrm{z}} = \frac{gR}{v^2} = \frac{g(R_0 + cz)}{v^2} \tag{2.15}$$

$$z = \frac{v^2}{g} - \frac{R_0}{c} \tag{2.16}$$

$$z \geqq 0 \quad \Longrightarrow \quad v \geqq \sqrt{\frac{gR_0}{c}} \tag{2.17}$$

(d)

$$c = \frac{R_1 - R_0}{h} = \frac{1}{6} \quad \Longrightarrow \quad R(z) = R_0 + \frac{z}{6} = 0{,}45\,\mathrm{m} + \frac{z}{6} \tag{2.18}$$

$$v_1^2 = g\left(h + \frac{R_0}{c}\right) = 6gR_1 \tag{2.19}$$

Die Kraft auf die Masse parallel zu $\vec{u}$ ist mit $R'(z) = c = \frac{1}{6}$ und(2.19)

$$F_u = \frac{m}{\sqrt{1 + R'^2}}\left[g - \frac{v_1^2 R_1^2 R'}{R^3}\right] = \frac{6mg}{\sqrt{37}}\left[1 - \frac{\left(\frac{h}{6} + R_0\right) R_1^2}{R^3}\right] \tag{2.20}$$

Mit $\frac{h}{6} + R_0 = R_1$ gilt wegen $R \leqq R_1$

$$F_u = \frac{6mg}{\sqrt{37}}\left[1 - \frac{R_1^3}{R^3}\right] \leqq 0 \tag{2.21}$$

F_u zeigt also immer (u_1 nach innen gerichtet) nach außen, bremst also die Bewegung nach unten. Energiesatz (wegen $\vec{u} \perp \vec{v}$ ist $v_\mathrm{ges}^2 = v^2 + u^2$), (2.8) und (2.18)

$$\frac{m}{2}\left(v^2 + u^2\right) + mgz = \frac{m}{2}\left(\frac{v_1^2 R_1^2}{R^2} + u^2\right) + mgz = \frac{m}{2}\left(v_1^2 + u_1^2\right) + mgh \tag{2.22}$$

Wenn die Masse $z = 0$ erreicht, gibt es ein $u_0 = u(0)$ mit

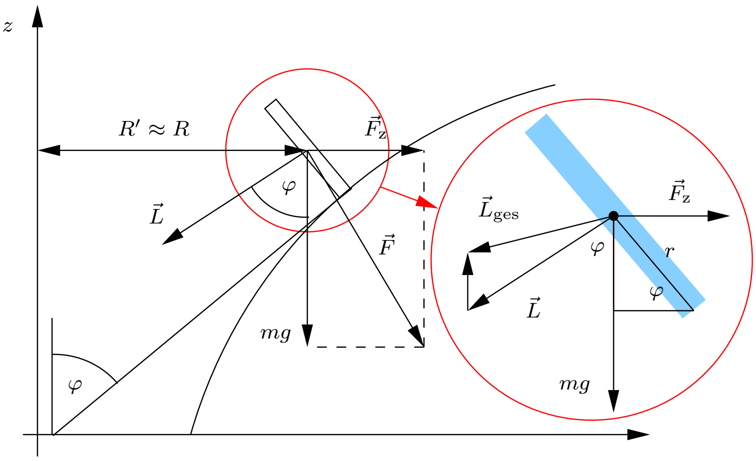
$$\frac{v_1^2 R_1^2}{R_0^2} = v_1^2 + u_1^2 + 2gh - u_0^2 \leqq v_1^2 + u_1^2 + 2gh \tag{2.23}$$

Andererseits, wenn die Masse den Trichter nicht unten verlässt, gilt

$$\frac{v_1^2 R_1^2}{R_0^2} > v_1^2 + u_1^2 + 2gh \quad \Longrightarrow \quad u_1 < \sqrt{v_1^2\left(\frac{R_1^2}{R_0^2} - 1\right) - 2gh} = 1{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{2.24}$$

$u_1 < 0$ ist der triviale Fall einer nach außen gerichteten Anfangsgeschwindigkeit.

(e)



Das Trägheitsmoment der Scheibe um eine Achse senkrecht zur Scheibe und durch den Schwerpunkt ist

$$I = \frac{1}{2} m r^2 \tag{2.25}$$

Die Scheibe rotiert um ihren Schwerpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{v}{r} \tag{2.26}$$

Der Scheibenmittelpunkt rotiert om die z-Achse mit

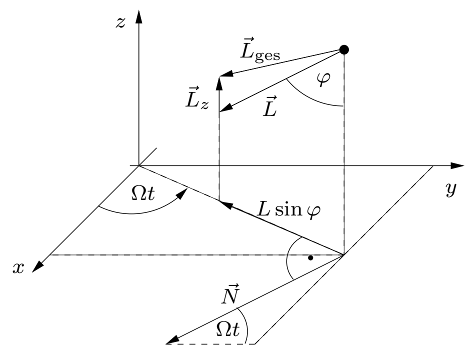
$$\Omega = \frac{v}{R} \tag{2.27}$$

Der Betrag des Eigendrehimpulses der Scheibe ist

$$L = I\omega = \frac{1}{2} m v r \tag{2.28}$$

Im nichtrotierenden Inertialsystem gilt:

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \begin{pmatrix} -L \sin\varphi \cos\Omega t \\ -L \sin\varphi \sin\Omega t \\ -L\cos\varphi + mvR \end{pmatrix} \tag{2.29}$$



Für das Drehmoment gilt

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} N \sin\Omega t \\ -N \cos\Omega t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

mit dem Betrag

$$N = mgr\cos\varphi - F_z r \sin\varphi = mgr\cos\varphi - \frac{mv^2}{R} r \sin\varphi \tag{2.31}$$

$$\dot{\vec{L}}_{\text{ges}} = \vec{N} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} L\Omega \sin\varphi \sin\Omega t \\ -L\Omega\sin\varphi\cos\Omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N\sin\Omega t \\ -N\cos\Omega t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

$$L\Omega\sin\varphi = N \quad \Longrightarrow \quad \frac{mv^2 r}{2R}\sin\varphi = mgr\cos\varphi - \frac{mv^2 r}{R}\sin\varphi \tag{2.33}$$

$$\frac{3mv^2 r}{2R}\sin\varphi = mgr\cos\varphi \quad \Longrightarrow \quad \tan\varphi = \frac{2gR}{3v^2} \tag{2.34}$$

Wie in (2.2) folgt

$$R(z) = R_0 \mathrm{e}^{\frac{2g}{3v^2} z} \tag{2.35}$$

(f) Das Trägheitsmoment der Kugel um eine Achse durch den Schwerpunkt ist

$$I' = \frac{2}{5}mr^2 \tag{2.36}$$

Auf die Kugel wirken die gleichen Kräfte wie auf die Münze. Die Kraft tangential zur Bahn und in Richtung der z-Achse ist

$$F_u = mg\cos\varphi - \frac{mv^2}{R}\sin\varphi \tag{2.37}$$

Aus (2.34) folgt

$$g\cos\varphi = \frac{3v^2}{2R}\sin\varphi \tag{2.38}$$

und damit aus (2.37)

$$F_u = \frac{3mv^2}{2R}\sin\varphi - \frac{mv^2}{R}\sin\varphi = \frac{mv^2}{2R}\sin\varphi > 0 \tag{2.39}$$

d.h. die Kugel rollt auch nach innen/unten (Spiralbahn).

Aufgabe 3: LHC

3.1. (a)

$$\frac{\gamma m v^2}{r} = qvB \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{\gamma m v}{qB} = \frac{mv}{qB\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.1}$$

$$W = \gamma m c^2 r \quad \Longrightarrow \quad B = \frac{\gamma m v}{rq} = \frac{\gamma \beta m c}{rq} = \frac{mc}{rq}\sqrt{\gamma^2 - 1} \tag{3.2}$$

Da $\gamma \gg 1$ gilt $\sqrt{\gamma^2-1} \approx \gamma$:

$$B \approx \frac{\gamma m c}{rq} = \frac{\gamma m c^2}{rqc} = \frac{W}{rqc} = \frac{W}{rec} \tag{3.3}$$

Für beide Teilchen ist also

$$B = \frac{2\pi \cdot 4{,}5 \cdot 10^{10}}{2{,}7 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^8}\,\mathrm{T} = 3{,}49 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{T} \tag{3.4}$$

(b) $[\varepsilon_0] = \dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}, \quad [q] = \mathrm{C}, \quad [c] = \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad [a] = \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$$[P] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \cdot \mathrm{C}^2 \cdot \frac{\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^4}}{\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^3}} = \frac{[q]^2 \cdot [a]^2}{[\varepsilon_0] \cdot [c]^3} \tag{3.5}$$

$$P \sim \gamma^4 \cdot \frac{q^2 a^2}{\varepsilon_0 c^3} \tag{3.6}$$

(c) Aus $a = \frac{v^2}{r} \approx \frac{c^2}{r}$ folgt, dass a für Protonen und Elektronen gleich ist, d.h.

$$\frac{P_{\mathrm{p}^+}}{P_{\mathrm{e}^-}} = \left(\frac{\gamma_{\mathrm{p}^+}}{\gamma_{\mathrm{e}^-}}\right)^4 = \left(\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}\right)^4 = 8{,}8 \cdot 10^{-14}$$

Ist $\vec{p}$ der Impuls und W die Gesamtenergie des beschleunigten Teilchens, dann gilt mit $\vec{\beta} = \frac{1}{c}\vec{v}$ (siehe z.B. Jackson)

$$P = \cdot\frac{q^2 c \gamma^2}{6\pi\varepsilon_0 c^4}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] = \frac{q^2\gamma^6}{6\pi\varepsilon_0 c}\left[\left(\dot{\vec{\beta}}\right)^2 - \left(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}\right)^2\right] \tag{3.7}$$

Für den Ringbeschleuniger ist $\vec{\beta} \perp \dot{\vec{\beta}}$ und damit

$$|\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}| = |\vec{\beta}|\cdot|\dot{\vec{\beta}}| \quad \Longrightarrow \quad \left(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}\right)^2 = |\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}|^2 = |\vec{\beta}|^2\cdot|\dot{\vec{\beta}}|^2 = \beta^2\cdot|\dot{\vec{\beta}}|^2 \tag{3.8}$$

und damit

$$\left(\dot{\vec{\beta}}\right)^2 - \left(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}\right)^2 = |\dot{\vec{\beta}}|^2(1-\beta^2) = \frac{|\dot{\vec{\beta}}|^2}{\gamma^2} = \frac{a^2}{c^2\gamma^2} \tag{3.9}$$

Aus (3.7) folgt dann mit $a = \frac{v^2}{r} \approx \frac{c^2}{r}$

$$P_{\mathrm{Ring}} = \frac{e^2\gamma^4 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{e^2 c}{6\pi\varepsilon_0 r^2}\gamma^4 \tag{3.10}$$

Pro Umlauf verliert ein Teilchen die Energie

$$\Delta W = P_{\mathrm{Ring}} \cdot \frac{2\pi r}{c} = \frac{e^2}{3\varepsilon_0 r}\gamma^4 \tag{3.11}$$

Also gigantische Energieverluste beim Ringbeschleuniger:

$\frac{W}{\mathrm{GeV}}$	γ	$\frac{\Delta W}{\mathrm{GeV}}$
45	$8{,}8 \cdot 10^4$	0,08
500	$9{,}8 \cdot 10^5$	1287

Für den Linearbeschleuniger ist $\vec{a} \| \vec{v}$ und damit $\vec{\beta} \| \dot{\vec{\beta}}$, d.h. $\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} = 0$. Mit $\left(\dot{\vec{\beta}}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2}$ erhält man dann aus (3.7)

$$P_{\mathrm{lin}} = \frac{e^2 \gamma^6 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \tag{3.12}$$

Mit der Teilchenenergie $W = \gamma m c^2$ folgt

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{v} \cdot \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{mc^2}{\beta c}\dot{\gamma} \tag{3.13}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma^3 \beta \dot{\beta} \tag{3.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = \frac{mc^2}{\beta c}\gamma^3 \beta \dot{\beta} = ma\gamma^3 \quad \Longrightarrow \quad \gamma^6 = \frac{1}{m^2 a^2} \left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}\right)^2 \tag{3.15}$$

Aus (3.15) und (3.12) folgt

$$P_{\mathrm{lin}} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 m^2 c^3} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}\right)^2 \tag{3.16}$$

Für $W = 1\,\mathrm{TeV}$ und die Beschleunigerlänge $L = 30\,\mathrm{km}$ ist

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = \frac{W}{L} \tag{3.17}$$

und die während der ganzen Flugzeit abgestrahlte Energie pro Teilchen ist

$$\Delta W = P_{\mathrm{lin}} \cdot \frac{L}{c} = 0{,}12\,\mathrm{eV} \tag{3.18}$$

3.2. (d) $2E_0$

(e) Laborsystem S (hier ruht das Target), Schwerpunktsystem S′, bewegtes Teilchen ruht in S″. Da bewegtes und ruhendes Teilchen die gleiche Masse haben, ist aus Symmetriegründen

$$v_{\mathrm{S''S'}} = v_{\mathrm{S'S}} =: v_{\mathrm{s}} \tag{3.19}$$

Das Additionstheorem liefert die Teilchengeschwindigkeit v:

$$v = \frac{2v_{\mathrm{s}}}{1+\frac{v_{\mathrm{s}}^2}{c^2}} = \frac{2c\beta_{\mathrm{s}}}{1+\beta_{\mathrm{s}}^2} = \beta c \tag{3.20}$$

$$\beta_{\mathrm{s}}^2 - 2\frac{1}{\beta}\beta_{\mathrm{s}} + \frac{1}{\beta^2} = -1 + \frac{1}{\beta^2}$$

$$\beta_{\mathrm{s}} = \frac{1}{\beta} \pm \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - 1} = \frac{1 \overset{(+)}{-} \sqrt{1-\beta^2}}{\beta}$$

$$\beta_{\mathrm{s}} = \frac{1 - \sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \tag{3.21}$$

Mit

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \tag{3.22}$$

folgt

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathrm{s}}^2 &= \frac{1}{1-\beta_{\mathrm{s}}^2} = \frac{1}{1 - \frac{2-\beta^2-2\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}} = \frac{\beta^2}{2\left(\beta^2 - 1 + \sqrt{1-\beta^2}\right)} = \\ &= \frac{1-\frac{1}{\gamma^2}}{2\left(-\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma}\right)} = \frac{\gamma^2 - 1}{2(\gamma - 1)} = \frac{\gamma + 1}{2} \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\gamma_{\mathrm{s}} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} \approx \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \tag{3.24}$$

$$2E_0 = \gamma m c^2 \quad \Longrightarrow \quad \gamma = \frac{2E_0}{mc^2} \tag{3.25}$$

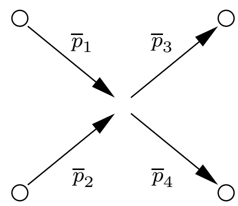
$$E_{\mathrm{s}} = 2\gamma_{\mathrm{s}} m c^2 = mc^2\sqrt{2\gamma} = 2\sqrt{mc^2 E_0} \tag{3.26}$$

Da viele Teilnehmer Wikipedia als Quelle verwenden, sind sie auf die Mandelstam-Variablen gestoßen, die Streuprozesse beschreiben:

$$s = (\overline{p}_1 + \overline{p}_2)^2 = (\overline{p}_3 + \overline{p}_4)^2 \tag{3.27}$$

mit den Vierervektoren

$$\overline{p}_k = \begin{pmatrix} \frac{E_k}{c} \\ \vec{p}_k \end{pmatrix} \tag{3.28}$$



Die Invariante $c\sqrt{s}$ ist dabei die Gesamtenergie beider Teilchen im Schwerpunktsystem. Zu beachten ist, dass das Quadrat in (3.27) das Skalarprodukt in der Lorentzmetrik bedeutet, d.h. $\sqrt{s} \neq \overline{p}_1 + \overline{p}_2$. Jetzt zu unserer Aufgabe:

$$\overline{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2E_0}{c} \\ p \end{pmatrix}, \qquad \overline{p}_2 = \begin{pmatrix} \frac{mc^2}{c} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \overline{p}_1 + \overline{p}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2E_0}{c} + mc \\ p \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

Mit $2E_0 = \gamma mc^2$ und $(2E_0)^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ folgt

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{s}}^2 = c^2 s = c^2 \begin{pmatrix} \frac{2E_0}{c} + mc \\ p \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 2E_0 + mc^2 \\ pc \end{pmatrix}^2 = \\ &= \left(2E_0 + mc^2\right)^2 - p^2c^2 = \\ &= 4E_0^2 + 4E_0 mc^2 + m^2c^4 - 4E_0^2 + m^2c^4 = \\ &= 4E_0 mc^2 + 2m^2c^4 = 2mc^2\left(2E_0 + mc^2\right) = \\ &= 2mc^2\left(\gamma mc^2 + mc^2\right) = 2m^2c^4(\gamma + 1) \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$E_{\mathrm{s}} = mc^2\sqrt{2(\gamma+1)} = \sqrt{2mc^2(\gamma mc^2 + mc^2)} = \sqrt{2mc^2(2E_0 + mc^2)} \tag{3.31}$$

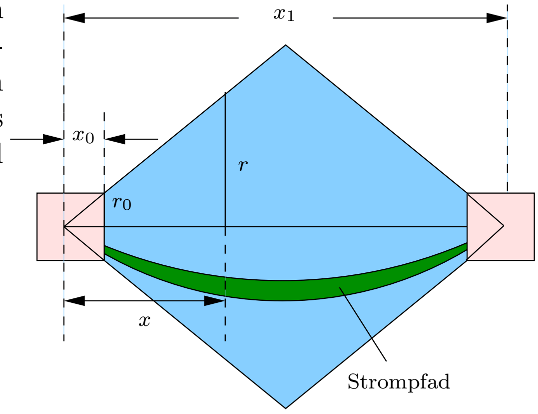
Mit $\gamma + 1 \approx \gamma$ folgt dann

$$E_{\mathrm{s}} \approx mc^2\sqrt{2\gamma} = 2\sqrt{mc^2E_0} \tag{3.32}$$

Das Ganze hätte man einfacher so erreicht (Energie-Impulsinvariante):

$$E_{\mathrm{ges}}^2 - p_{\mathrm{ges}}^2 c^2 = E_{\mathrm{s}}^2 - \underbrace{p_{\mathrm{s}}^2 c^2}_{0} \quad \Longrightarrow \quad E_{\mathrm{s}}^2 = \left(2E_0 + mc^2\right)^2 - p^2c^2 \tag{3.33}$$

3.3. (f) Der Widerstand des Erdreichs wird durch Integration über die Strompfade berechnet. Wir nähern das Erdreich durch einen Doppelkegel an. Eine Scheibe mit Radius r und Dicke dx hat dann den Widerstand



$$\mathrm{d}R_\mathrm{E} = \frac{\varrho_\mathrm{E}\mathrm{d}x}{r^2\pi} \tag{3.34}$$

Wir wählen weiter

$$r(x) = x \tag{3.35}$$

und erhalten

$$R_\mathrm{E} = 2 \cdot \int_{x_0}^{\frac{x_1}{2}} \frac{\varrho_\mathrm{E}\mathrm{d}x}{x^2\pi}\,\mathrm{d}x = \frac{2\varrho_\mathrm{E}}{\pi} \cdot \left[-\frac{1}{x}\right]_{x_0}^{\frac{x_1}{2}} = \frac{2\varrho_\mathrm{E}}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{x_0} - \frac{2}{x_1}\right] \approx \frac{2\varrho_\mathrm{E}}{x_0\pi} \tag{3.36}$$

Mit der Kontaktfläche $A_0 = x_0^2\pi$ des Leiters gilt

$$R_\mathrm{E} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\varrho_\mathrm{E}}{\sqrt{A_0}} \approx \frac{\varrho_\mathrm{E}}{\sqrt{A_0}} \tag{3.37}$$

Der Widerstand des Erdreichs wird also praktisch nur durch die Kontaktfläche der Leiter zur Erde festgelegt. Wählt man als mittlere Kontaktfläche

$$A_0 = 0{,}1\,\mathrm{m} \cdot 100\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{m}^2,$$

dann ist

$$R_\mathrm{E} \approx \frac{100\,\Omega\mathrm{m}}{\sqrt{10}\,\mathrm{m}} = 30\,\Omega \tag{3.38}$$

Bei ungefähr $50\,\mathrm{cm}^2$ Querschnittsfläche der leitenden Teile hat die Vakuumröhre pro km Länge den Widerstand

$$R_\mathrm{Alu} \approx \frac{2{,}7 \cdot 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m} \cdot 10^3\,\mathrm{m}}{5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2} = 5{,}4 \cdot 10^{-3}\,\Omega \tag{3.39}$$

$$R = 2R_\mathrm{E} + R_\mathrm{Alu} \approx 2R_\mathrm{E} = 60\,\Omega \tag{3.40}$$

$$I = \frac{U}{R} = 0{,}17\,\mathrm{A} \tag{3.41}$$

In der Kammer ($r' = 0{,}1\,\mathrm{m}$) erzeugt I das zusätzliche Magnetfeld

$$B' = \frac{\mu_0 I}{2\pi r'} = 3{,}4 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T} \tag{3.42}$$

und führt zur Energieänderung des Strahls:

$$\Delta W = B'rec = \frac{B'W}{B} \approx 10^{-5}W = 0{,}5\,\mathrm{MeV} \tag{3.43}$$

Aufgabe 4: Experiment: Brechungsindex einer Salzlösung

Bezeichnet n den Brechungsindex und y die Koordinate des Lasers am Messort, dann sollte

$$g = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}n} \tag{4.1}$$

möglichst groß sein (Güte der Versuchsanordnung).
Bei einem maximal zu erwartendem $\Delta n = 0{,}04$ ist dann die Breite des Intervalls, in dem die Messgröße liegt:

$$\Delta y \approx g(1{,}33) \cdot 0{,}04 \tag{4.2}$$

4.1 RR

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \tag{4.3}$$

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{n_\mathrm{G}} \tag{4.4}$$

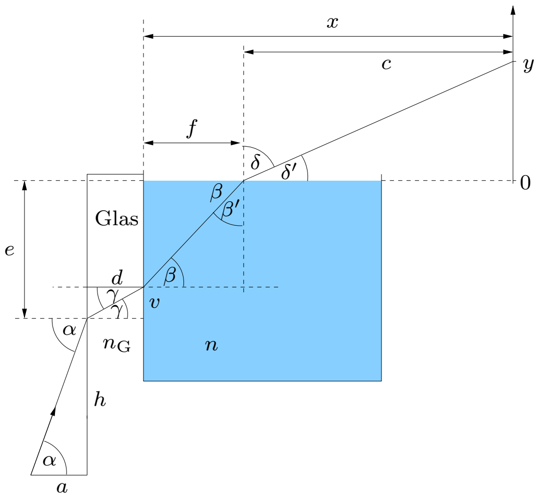
$$\sin\beta = \frac{n_\mathrm{G}}{n}\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{n} \tag{4.5}$$

$$\sin\beta' = \cos\beta = \sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}} \tag{4.6}$$

$$\sin\delta = n\sin\beta' = \sqrt{n^2-\sin^2\alpha} \tag{4.7}$$

$$\sin\delta' = \cos\delta = \sqrt{1+\sin^2\alpha-n^2} \tag{4.8}$$

$$\tan\delta' = \sqrt{\frac{1+\sin^2\alpha-n^2}{n^2-\sin^2\alpha}} \tag{4.9}$$



$$\tan\gamma = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n_\mathrm{G}^2-\sin^2\alpha}}, \qquad \tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} \tag{4.10}$$

$$f = \frac{e-d\tan\gamma}{\tan\beta} = k\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} \quad \text{mit} \quad k = \frac{e}{\sin\alpha} - \frac{d}{\sqrt{n_\mathrm{G}^2-\sin^2\alpha}} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} y = (x-f)\tan\delta' &= x\sqrt{\frac{1+\sin^2\alpha-n^2}{n^2-\sin^2\alpha}} - k\sqrt{1+\sin^2\alpha-n^2} = \\ &= \sqrt{1+\sin^2\alpha-n^2}\left[\frac{x}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} - k\right] \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$g_y(n) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}n} = -\frac{xn}{\sqrt{(n^2-\sin^2\alpha)^3(1+\sin^2\alpha-n^2)}} + \frac{kn}{\sqrt{1+\sin^2\alpha-n^2}} \tag{4.13}$$

$$= -\frac{n}{\sqrt{1+\sin^2\alpha-n^2}}\left[\frac{x}{(n^2-\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} - k\right] \tag{4.14}$$

Totalreflexion: $\beta' < \arcsin\frac{1}{n} = 46{,}88°$, $\beta > 43{,}12°$, $\alpha < 69{,}46°$. Mit $\alpha = 70°$, $e = 1\,\mathrm{cm}$, $d = 0{,}5\,\mathrm{cm}$ und $x = 200\,\mathrm{cm}$ ist ist $g_y(1{,}33) = -940\,\mathrm{cm}$ und $\Delta y = g_y(1{,}33)\cdot 0{,}04 = 38\,\mathrm{cm}$.

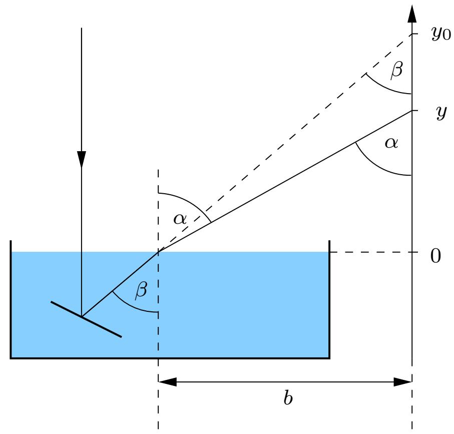
4.2 Anordnung 1 (Musterlösung)

$$\sin\beta = \frac{b}{\sqrt{y_0^2+b^2}} \tag{4.15}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{n\sin\beta}{\sqrt{1-n^2\sin^2\beta}} \tag{4.16}$$

$$\tan\alpha = \frac{nb}{\sqrt{y_0^2+b^2-n^2b^2}} \tag{4.17}$$

$$y = \frac{b}{\tan\alpha} = \frac{1}{n}\sqrt{y_0^2+b^2-n^2b^2} \tag{4.18}$$



$$g(n) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}n} = -\frac{y_0^2+b^2}{n^2\sqrt{y_0^2+b^2-n^2b^2}} \tag{4.19}$$

Mit den Daten der Musterlösung ist $g(1{,}33) = -250\,\text{cm}$. $\Delta n = 0{,}04 \implies \Delta y = 10\,\text{cm}$.

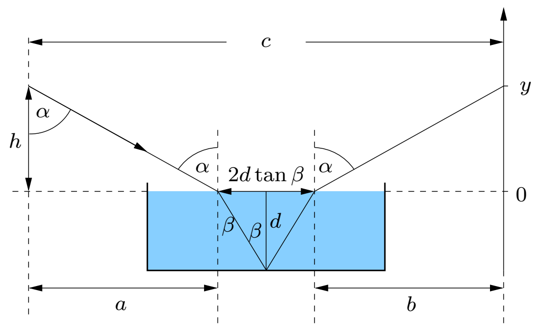
4.3 Anordnung 2

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \tag{4.20}$$

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} \tag{4.21}$$

$$\tan\beta = \frac{a}{\sqrt{n^2(a^2+h^2)-a^2}} \tag{4.22}$$

$$b = \frac{ay}{h} = c - a - 2d\tan\beta \tag{4.23}$$



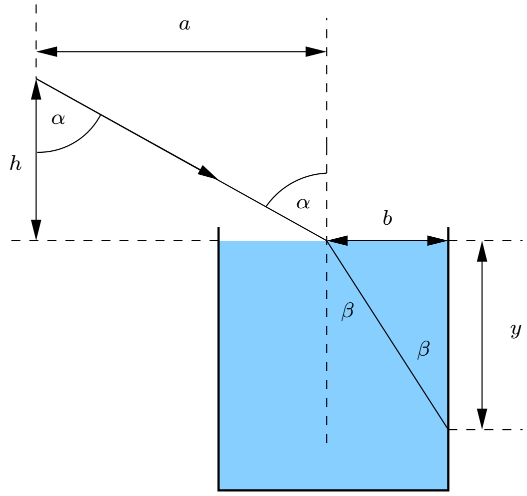
$$y = \frac{hc}{a} - h - \frac{2dh}{a}\tan\beta = \frac{hc}{a} - h - \frac{2dh}{\sqrt{n^2(a^2+h^2)-a^2}} \tag{4.24}$$

$$g(n) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}n} = \frac{2dhn(a^2+h^2)}{(n^2(a^2+h^2)-a^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.25}$$

$$a = h \implies g(n) = \frac{4dn}{(2n^2-1)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.26}$$

Mit $d = 18{,}3\,\text{cm}$ ist $g(1{,}33) = 24\,\text{cm}$. $\Delta n = 0{,}04 \implies \Delta y = 0{,}96\,\text{cm}$.

4.4 Anordnung 3



$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \tag{4.27}$$

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} \tag{4.28}$$

$$\tan\beta = \frac{a}{\sqrt{n^2(a^2+h^2)-a^2}} \tag{4.29}$$

$$b = y\tan\beta \tag{4.30}$$

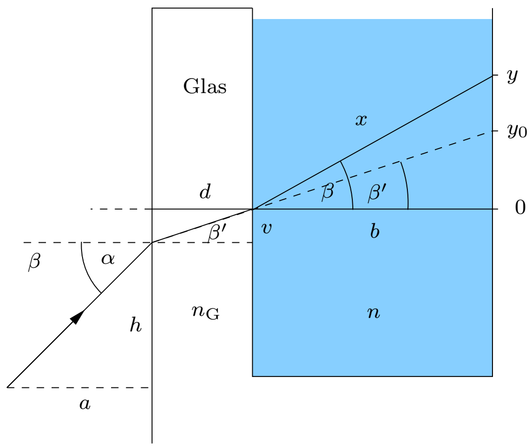
$$y = \frac{b}{\tan\beta} = \frac{b}{a}\sqrt{n^2(a^2+h^2)-a^2} \tag{4.31}$$

$$g(n) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}n} = \frac{bn(a^2+h^2)}{a\sqrt{n^2(a^2+h^2)-a^2}} \tag{4.32}$$

$$a = h \quad\Longrightarrow\quad g(n) = \frac{4bn}{\sqrt{2n^2-1}} \tag{4.33}$$

Mit $b = 2{,}8\,\mathrm{cm}$ und $\alpha = 35^\circ$ ist $g(1{,}33) = 5{,}4\,\mathrm{cm}$. $\Delta n = 0{,}04 \quad\Longrightarrow\quad \Delta y = 0{,}22\,\mathrm{cm}$.

4.5 Anordnung 4



$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \tag{4.34}$$

$$\sin\beta' = \frac{\sin\alpha}{n_\mathrm{G}} \tag{4.35}$$

$$v = d\tan\beta' = \frac{d\sin\alpha}{\sqrt{n_\mathrm{G}^2-\sin^2\alpha}} \tag{4.36}$$

$$\sin\beta = \frac{n_\mathrm{G}}{n}\sin\beta' = \frac{\sin\alpha}{n} \tag{4.37}$$

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} \tag{4.38}$$

$$\tan\beta = \frac{a}{\sqrt{n^2(a^2+h^2)-a^2}} \tag{4.39}$$

$$y = b\tan\beta = \frac{b\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} \tag{4.40}$$

$$x = \frac{b}{\cos\beta} = \frac{bn}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} \tag{4.41}$$

$$g_y(n) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}n} = -\frac{nb\sin\alpha}{(n^2-\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}, \qquad g_x(n) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}n} = -\frac{b\sin^2\alpha}{(n^2-\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.42}$$

Mit $\sin\alpha = 0{,}6$ und $b = 10\,\mathrm{cm}$ ist ist $g_y(1{,}33) = -4{,}8\,\mathrm{cm}$ und $g_x(1{,}33) = -2{,}15\,\mathrm{cm}$.
$\Delta n = 0{,}04 \quad\Longrightarrow\quad \Delta y = 0{,}19\,\mathrm{cm}$ und $\Delta x = 0{,}09\,\mathrm{cm}$.

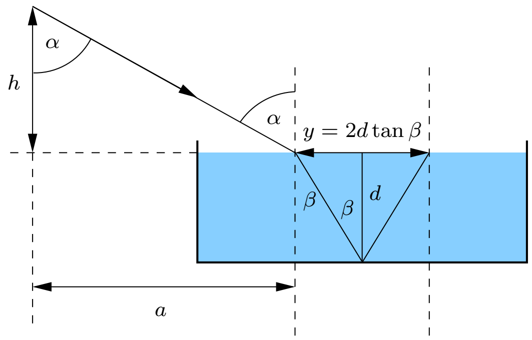
4.6 Anordnung 5

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \tag{4.43}$$

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} \tag{4.44}$$

$$\tan\beta = \frac{a}{\sqrt{n^2(a^2+h^2)-a^2}} \tag{4.45}$$

$$y = \frac{2dh}{\sqrt{n^2(a^2+h^2)-a^2}} \tag{4.46}$$



$$g(n) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}n} = -\frac{2dhn(a^2+h^2)}{(n^2(a^2+h^2)-a^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.47}$$

Mit $h = 9\,\mathrm{cm}$, $a = 15\,\mathrm{cm}$ und $d = 4{,}4\,\mathrm{cm}$ ist $g(1{,}33) = 5{,}7\,\mathrm{cm}$. $\Delta n = 0{,}04 \quad \Longrightarrow \quad \Delta y = 0{,}23\,\mathrm{cm}$.