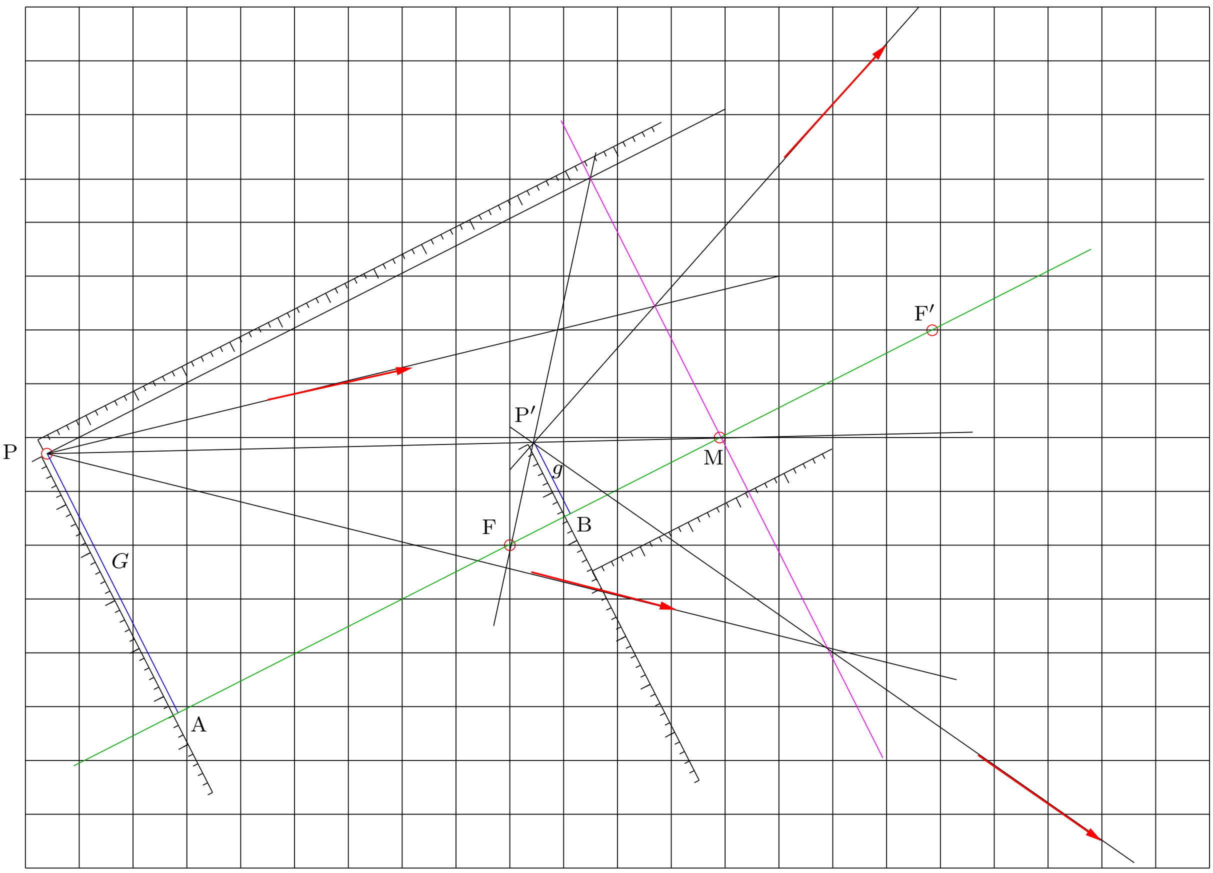
Aufgabe 1: Die verwaschene Abbildung



Zeichnung: ●●●

Erkennen Zerstreuungslinse: ●

Erläuterung Methode für Position und Orientierung Linse: ●●

Erläuterung Methode für Lage optische Achse: ●●

Erläuterung Methode für Lage der Brennpunkte: ●●

$$f = -\overline{\mathrm{FM}} = -\sqrt{1{,}95^2 + 1^2}\,\mathrm{cm} = -2{,}2\,\mathrm{cm} \quad \bullet \tag{1.1}$$

$$v = \frac{g}{G} = \frac{\overline{\mathrm{BP'}}}{\overline{\mathrm{AP}}} = \frac{0{,}75}{2{,}7} = 0{,}28 \tag{1.2}$$

oder

$$v = \frac{b}{a} = \frac{\overline{\mathrm{MB}}}{\overline{\mathrm{MA}}} = \frac{1{,}61}{5{,}69} = 0{,}28 \quad \bullet\bullet \tag{1.3}$$

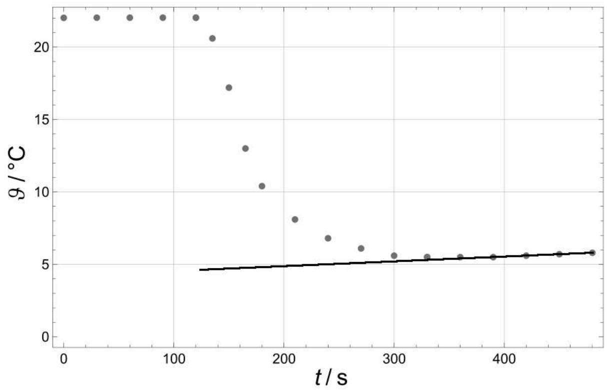
Punkte: $\boxed{13}$

Aufgabe 2: Gekühlter Drink

Umgebungstemperatur:	$\vartheta_1 = 22\,°\mathrm{C}$
Wassertemperatur:	ϑ
Endtemperatur ohne Wärmeaufnahme aus der Umgebung:	ϑ_2
Wassermasse zu Beginn:	$M = 0{,}1\,\mathrm{kg}$
Eismasse zu Beginn:	m
spez. Wärmekapazität Wasser:	$c = 4{,}18\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\cdot K}}$
spez. Schmelzwärme Wasser:	$s = 334\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$

Ist $\vartheta < \vartheta_1$, nimmt das Wasser Wärme von der Umgebung auf. Da diese Wärmeaufnahme von $\Delta\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta$ abhängt, muss die lineare Approximation (siehe Abb.) etwas nach oben korrigiert werden:

$$\vartheta_2 \approx 5\,°\mathrm{C} \qquad (2.1)$$

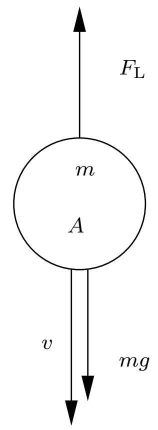


$$ms + mc\vartheta_2 = Mc(\vartheta_1 - \vartheta_2) \qquad (2.2)$$

$$m = \frac{Mc(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{s + c\vartheta_2} = 20\,\mathrm{g} \qquad (2.3)$$

Punkte: $\boxed{9}$

Aufgabe 3: Von Mäusen und Menschen



Der Luftwiderstand F_L ist proportional zur Querschnittsfläche A und zum Quadrat der Geschwindigkeit v:

$$F_\mathrm{L} = \alpha A v^2 \tag{3.1}$$

Konstante Endgeschwindigkeit im Gleichgewicht $F_\mathrm{L} = mg$:

$$mg = \alpha A v^2 \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{mg}{\alpha A}} \tag{3.2}$$

Index 1 für die Maus, 2 für den Menschen:

$$L_2 = kL_2 \quad \Longrightarrow \quad A_2 = k^2 A_1, \quad m_2 = k^3 m_1 \tag{3.3}$$

$$v_2 = \sqrt{k} \cdot v_1 \tag{3.4}$$

Für die Bremswege beim Aufprall (maximale Verformung) gilt

$$s_2 = ks_1 \tag{3.5}$$

und damit für die auftretenden Beschleunigungen

$$a_2 = \frac{v_2^2}{2s_2} = \frac{kv_1^2}{2ks_1} = a_1 \tag{3.6}$$

Für die auftretenden Kräfte gilt dann

$$F_2 = m_2 a_2 = k^3 m_1 a_1 = k^3 F_1 \tag{3.7}$$

Für die Kräfte, bei denen z.B. die Knochen brechen, gilt

$$F_2' = k^2 F_1' \tag{3.8}$$

und damit

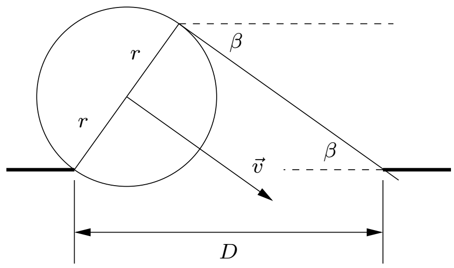
$$\frac{F_2}{F_2'} = k \cdot \frac{F_1}{F_1'} \tag{3.9}$$

Für $k > \dfrac{F_1'}{F_1}$ wird $\dfrac{F_2}{F_2'} > 1$

Punkte: $\boxed{13}$

Aufgabe 4: Der perfekte Wurf

Näherung: Während der Ball durch die Öffnung des Korbes fliegt, ist seine Bahn geradlinig. Bedingung für das berührungslose Durchfliegen:



$$\sin\beta > \frac{2r}{D} = \frac{U}{D\pi} = \frac{76}{45\pi} = 0{,}5376 \qquad (4.1)$$

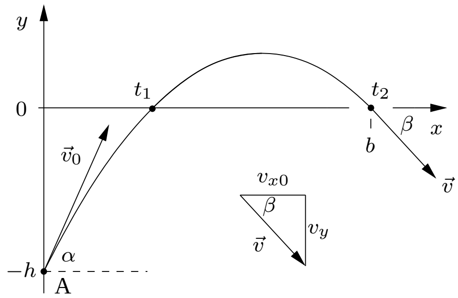
$$\beta > \beta_{\min} = \arcsin\frac{U}{D\pi} = 32{,}5^\circ \qquad (4.2)$$

Abwurfgeschwindigkeit:

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0\cos\alpha \\ v_0\sin\alpha \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

Geschwindigkeit am Ort des Korbes:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0\cos\alpha \\ v\sin\beta \end{pmatrix} \qquad (4.4)$$



Abwurf zur Zeit $t_0 = 0$:

$$-h + v_0 t\sin\alpha - \frac{g}{2}t^2 = 0 \qquad (4.5)$$

$$t = \frac{1}{g}\left[v_0\sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha - 2gh}\right] \qquad (4.6)$$

Flugdauer bis zum Korb:

$$t_2 = \frac{1}{g}\left[v_0\sin\alpha + \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha - 2gh}\right] \qquad (4.7)$$

$$v_y = v_0\sin\alpha - gt_2 = v_0\sin\alpha - \left[v_0\sin\alpha + \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha - 2gh}\right] \qquad (4.8)$$

Oder mit Energiesatz:

$$v_{x0}^2 + v_{y0}^2 = v_{x0}^2 + v_y^2 + 2gh \qquad (4.9)$$

$$v_y = \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha - 2gh} \qquad (4.10)$$

$$\tan\beta = \frac{v_y}{v_{x0}} = \frac{\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha - 2gh}}{v_0\cos\alpha} \qquad (4.11)$$

$$\sin^2\beta = \frac{\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha - 2gh}{v_0^2\cos^2\alpha\left(1 + \frac{v_0^2\sin^2\alpha - 2gh}{v_0^2\cos^2\alpha}\right)} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha - 2gh}{v_0^2 - 2gh} \qquad (4.12)$$

$$\tan^2\beta = \frac{v_0^2\sin^2\alpha - 2gh}{v_0^2\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha - \frac{2gh}{v_0^2\cos^2\alpha} \qquad (4.13)$$

$b = t_2 v_0\cos\alpha \quad \Longrightarrow$

$$\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha - 2gh} = \frac{bg}{v_0\cos\alpha} - v_0\sin\alpha \qquad (4.14)$$

$$-2gh = \frac{b^2g^2}{v_0^2\cos^2\alpha} - \frac{2bg\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (4.15)$$

$$v_0^2 = \frac{b^2 g}{2\cos^2\alpha\,[b\tan\alpha - h]} \qquad (4.16)$$

(4.16) in (4.13):

$$\tan^2\beta = \tan^2\alpha - \frac{4h}{b}\tan\alpha + \frac{4h^2}{b^2} = \left(\tan\alpha - \frac{2h}{b}\right)^2 \tag{4.17}$$

$$\tan\alpha = \frac{2h}{b} \pm \tan\beta \tag{4.18}$$

$\alpha > \beta \quad \Longrightarrow$

$$\tan\alpha = \frac{2h}{b} + \tan\beta \tag{4.19}$$

$$\alpha_{\text{min}} = \arctan\left(\frac{2h}{b} + \tan\beta_{\text{min}}\right) = 45{,}5^\circ \tag{4.20}$$

Der Ball trifft also, wenn $\alpha > \alpha_{\text{min}}$ und (siehe (4.16))

$$v_0 = \frac{b}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2\left[b\tan\alpha - h\right]}} \tag{4.21}$$

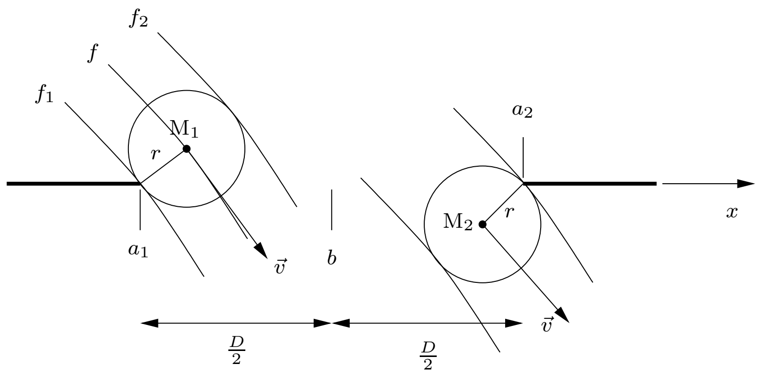
Punkte: $\boxed{15}$

Exakte Lösung:

$a_1 = b - \frac{D}{2}$, $a_2 = b + \frac{D}{2}$

Flugbahn des Ballmittelpunktes: f

Der Ball überstreicht im Dreidimensionalen eine Röhre, im Zeidimensionalen ein Band. f_1 bzw. f_2 sind die Unter- bzw. Obergrenze des Bandes.



Bahngleichung von M:

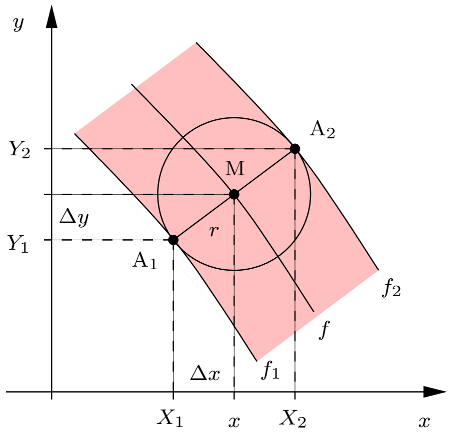
$$f(x) = -h + x\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot x^2 \tag{4.22}$$

$$f'(x) = -\frac{\Delta x}{\Delta y} = \tan\alpha - \frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}\cdot x \tag{4.23}$$

$$\frac{\Delta y}{\sqrt{r^2 - \Delta x^2}} = -\frac{1}{f'(x)^2} \tag{4.24}$$

$$\Delta y = \frac{-r}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \tag{4.25}$$

$$\Delta x = \frac{r f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \tag{4.26}$$



Parameterdarstellung von f_1:

$$X_1(x) = x + \frac{r f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \tag{4.27}$$

$$Y_1(x) = f(x) - \frac{r}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \tag{4.28}$$

Parameterdarstellung von f_2:

$$X_2(x) = x - \frac{r f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \tag{4.29}$$

$$Y_2(x) = f(x) + \frac{r}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \tag{4.30}$$

Numerische Lösung:
Gegeben: α, erste Näherung für v_0 mit (4.21). Numerische Lösung von $X_1(x) = a_1$ mit (4.27) liefert x und daraus berechnet man $A_1(v_0) = Y_1(x)$. Dann mit Newtonverfahren die Lösung von $A_1(v_0) = 0$ suchen, damit hat man das gewünschte $v_{01}(\alpha)$ (Ball berührt linken Korbrand). Analog findet man $v_{02}(\alpha)$ (Ball berührt rechten Korbrand).
Eine sehr gute Näherung für v_{01} und v_{02} erhält man aus (4.22) mit $x = a_1 + r\sin\beta$, $y = r\cos\beta$ (bzw. $x = a_2 - r\sin\beta$, $y = -r\cos\beta$) und (siehe (4.19))

$$\beta = \arctan\left(-\frac{2h}{b} + \tan\alpha\right) \tag{4.31}$$

$$v_{01}(\alpha) \approx v_{01n}(\alpha) = \frac{a_1 + r\sin\beta}{\cos\alpha\sqrt{2\left[(a_1 + r\sin\beta)\tan\alpha - h - r\cos\beta\right]}} \tag{4.32}$$

$$v_{02}(\alpha) \approx v_{02n}(\alpha) = \frac{a_2 - r\sin\beta}{\cos\alpha\sqrt{2\left[(a_2 - r\sin\beta)\tan\alpha - h + r\cos\beta\right]}} \tag{4.33}$$

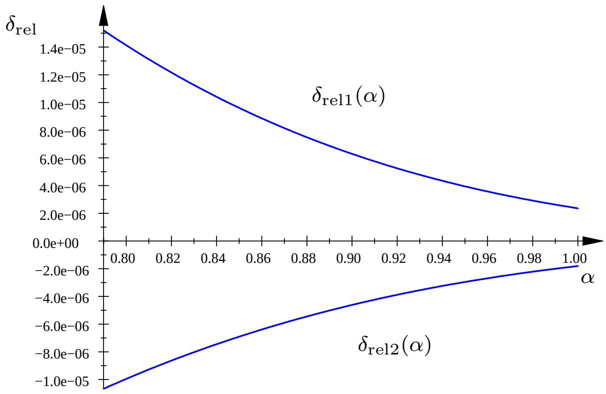
Vergleich von exakter numerischer und Näherungslösung:

α	$v_{01}(\alpha)$	$v_{01n}(\alpha)$	$v_{02}(\alpha)$	$v_{02n}(\alpha)$
0,8	7,75966	7,75955	7,76255	7,76263

Nebenstehende Abbildung zeigt die relativen Fehler

$$\delta_{\mathrm{rel1}}(\alpha) = 1 - \frac{v_{01n}(\alpha)}{v_{01}(\alpha)} \tag{4.34}$$

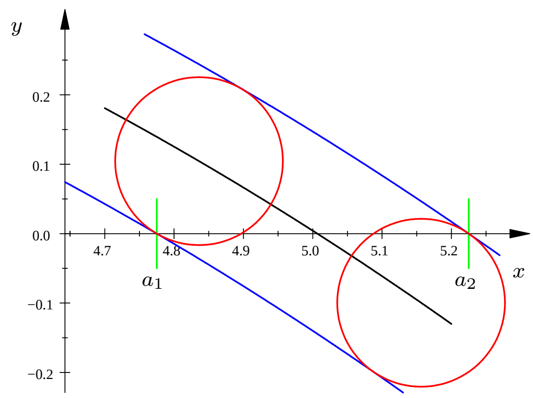
$$\delta_{\mathrm{rel2}}(\alpha) = 1 - \frac{v_{02n}(\alpha)}{v_{02}(\alpha)} \tag{4.35}$$

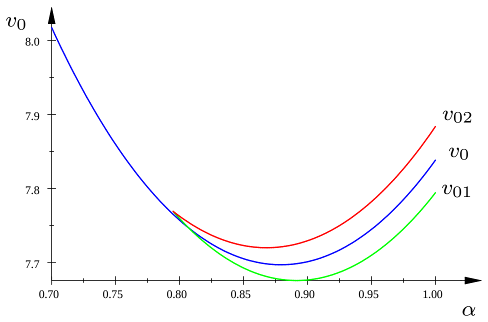


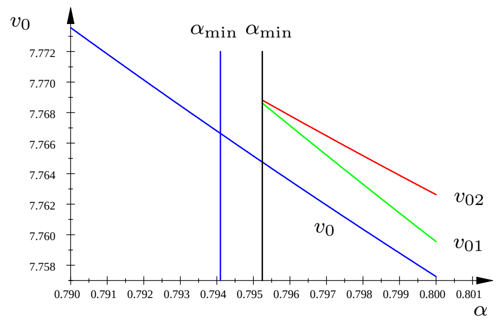
Das exakte $\alpha_{\mathrm{min,e}}$ erhält man numerisch aus $v_{01}(\alpha) = v_{02}(\alpha)$, den guten Näherungswert $\alpha_{\mathrm{min,n}}$ aus $v_{01n}(\alpha) = v_{02n}(\alpha)$, der schlechte Näherungswert ist α_{min} aus (4.20):

$\alpha_{\mathrm{min,e}}$	$\alpha_{\mathrm{min,n}}$	α_{min}
0,79524565	0,79492979	0,79409884
45,5642°	45,5461°	45,4985°

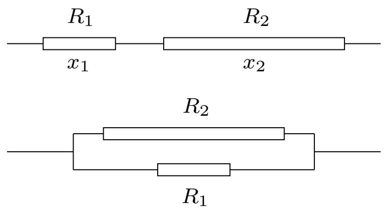
Nebenstehende Abb. zeigt die Situation für $\alpha_{\mathrm{min,e}}$, f (schwarz) geht nicht exakt durch $b = 5{,}0$.







Aufgabe 5: Junioraufgabe–Minenunglück



$$r = 0{,}25\,\mathrm{mm}, \quad A = r^2\pi \tag{5.1}$$

$$R_1 = \frac{\varrho}{A} \cdot x_1 \tag{5.2}$$

$$R_2 = \frac{\varrho}{A} \cdot x_2 \tag{5.3}$$

$$R_1 + R_2 = R_\mathrm{r} \quad \Longrightarrow \quad x_1 + x_2 = \frac{AR_\mathrm{r}}{\varrho} = 99{,}96\,\mathrm{mm} \tag{5.4}$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_\mathrm{p}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{\varrho}{AR_\mathrm{p}} \tag{5.5}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{AR_\mathrm{r}}{\varrho x_1 x_2} = \frac{\varrho}{AR_\mathrm{p}} \tag{5.6}$$

$$x_1 x_2 = x_1 \left(\frac{AR_\mathrm{r}}{\varrho} - x_1 \right) = \frac{A^2 R_\mathrm{r} R_\mathrm{p}}{\varrho^2} \tag{5.7}$$

$$x_1^2 - 2 \cdot \frac{AR_\mathrm{r}}{2\varrho} \cdot x_1 + \left(\frac{AR_\mathrm{r}}{2\varrho} \right)^2 = -\frac{A^2 R_\mathrm{r} R_\mathrm{p}}{\varrho^2} + \frac{A^2 R_\mathrm{r}^2}{4\varrho^2} \tag{5.8}$$

$$\left(x_1 - \frac{AR_\mathrm{r}}{2\varrho} \right)^2 = \frac{A^2 R_\mathrm{r} \left(R_\mathrm{r} - 4R_\mathrm{p} \right)}{4\varrho^2} \tag{5.9}$$

$$x_1 = \frac{A}{2\varrho} \left(R_\mathrm{r} - \sqrt{R_\mathrm{r} \left(R_\mathrm{r} - 4R_\mathrm{p} \right)} \right) = 34{,}75\,\mathrm{mm} \tag{5.10}$$

$$x_2 = \frac{A}{2\varrho} \left(R_\mathrm{r} + \sqrt{R_\mathrm{r} \left(R_\mathrm{r} - 4R_\mathrm{p} \right)} \right) = 65{,}21\,\mathrm{mm} \tag{5.11}$$

$$x_1 + x_2 = 99{,}96\,\mathrm{mm} \tag{5.12}$$

Punkte: $\boxed{10}$