

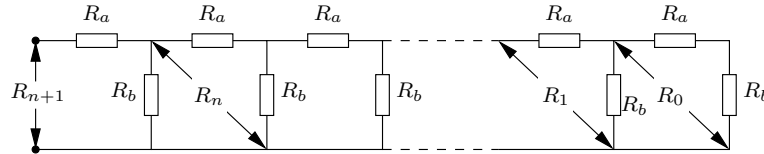
### Aufgabe 1: Wirbelstrombremsung

(a) Der Widerstand eines Drahtstückes der Länge  $x$  ist

5

$$R(x) = \frac{4x}{\sigma_{\text{Cu}} d^2 \pi} = 2,20 \frac{\Omega}{\text{m}} \cdot x \quad (1.1)$$

$$R_a = R(2a) = 0,022 \Omega, \quad R_b = R(b) = 2R_a = 0,044 \Omega \quad \bullet \quad (1.2)$$



Für die unendliche Kette folgt aus  $R_\infty = R_{\infty+1}$  •

$$R_\infty \stackrel{\bullet\bullet}{=} R_a + \frac{R_b R_\infty}{R_b + R_\infty} \quad (1.3)$$

und daraus

$$R_\infty = \frac{R_a}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{R_a^2 + 4R_a R_b} = \frac{R_a}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{R_a^2 + 8R_a^2} \stackrel{\circ}{=} 2R_a \stackrel{\circ}{=} 0,044 \Omega \quad (1.4)$$

Rekursionsgleichung:

$$R_{n+1} = R_a + \frac{2R_a R_n}{2R_a + R_n} \quad (1.5)$$

Definition:

$$y_n = R_n - R_\infty = R_n - 2R_a \quad (1.6)$$

$$y_{n+1} = \frac{2R_a R_n}{2R_a + R_n} - R_a = R_a \cdot \frac{R_n - 2R_a}{R_n - 2R_a + 4R_a} = \frac{R_a y_n}{y_n + 4R_a} = \frac{R_a}{1 + \frac{4R_a}{y_n}} \quad (1.7)$$

Mit der Definition

$$x_n = \frac{R_a}{y_n} \quad (1.8)$$

folgt

$$y_{n+1} = \frac{R_a}{x_{n+1}} = \frac{R_a}{1 + \frac{4R_a}{y_n}} = \frac{R_a}{1 + 4x_n} \quad (1.9)$$

und daraus

$$x_{n+1} = 1 + 4x_n \quad (1.10)$$

Mit  $R_0 = R_a + R_b = 3R_a$  und  $y_0 = R_0 - R_\infty = R_a$  folgt

$$x_0 = \frac{R_a}{y_0} = 1 \quad (1.11)$$

Aus  $x_1 = 1 + 4$ ,  $x_2 = 1 + 4 + 4^2$  usw. folgt

$$x_n = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{3} \quad (1.12)$$

$$R_n = R_\infty + y_n = 2R_a + \frac{R_a}{x_n} = R_a \left( 2 + \frac{3}{4^{n+1} - 1} \right) \quad (1.13)$$

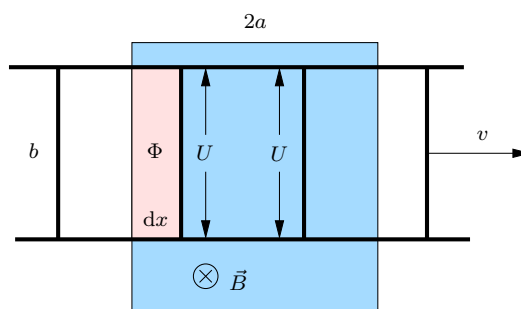
$$R_{\text{AB}} = R_{200} = R_a \left( 2 + \frac{3}{4^{201} - 1} \right) = 2R_a \quad (1.14)$$

(b) Die Leiter rotiert mit der Geschwindigkeit

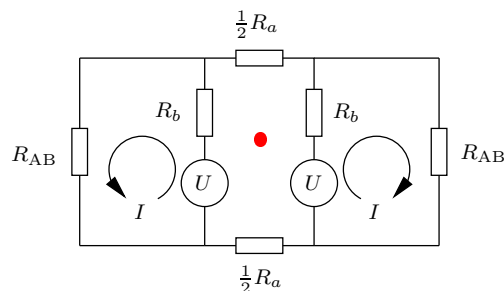
$$v = \omega r = \frac{l\omega}{2\pi} \quad (1.15)$$

$$U = \dot{\Phi} = Bb \cdot \frac{dx}{dt} = Bbv \quad (1.16)$$

$$U = \frac{Bbl\omega}{2\pi} \quad (1.17)$$



Die beiden im Magnetfeld befindlichen Stäbe sind Stromquellen mit der Urspannung  $U$  und dem Innenwiderstand  $R_b$ . Aus Symmetriegründen fließt durch die Verbindungen der beiden Stromquellen ( $\frac{1}{2}R_a$ ) kein Strom. Also werden die beiden „Stromquellendrähte“ vom Strom



$$I = \frac{U}{R_b + R_{AB}} = \frac{U}{4R_a} = \frac{Bbl\omega}{8\pi R_a} \quad (1.18)$$

durchflossen. Die Gesamtkraft auf die beiden Drähte ist

$$F = 2BbI = \frac{B^2 b^2 l \omega}{4\pi R_a} \quad (1.19)$$

und das Drehmoment mit  $r = \frac{l}{2\pi} = 0,159 \text{ m}$

$$M = Fr = \frac{B^2 b^2 l^2 \omega}{8\pi^2 R_a} = \frac{B^2 b^2 r^2 \omega}{2R_a} = \alpha \omega \quad \text{mit } \alpha = \frac{B^2 b^2 r^2}{2R_a} \quad (1.20)$$

(c) Mit  $m_B = 80 \text{ g}$  und  $m_W = 20 \text{ g}$  und der Masse des Leiters

$$m_L = (2l + 200b) \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi \rho_{\text{Cu}} = 0,42 \text{ g} \quad (1.21)$$

ist das Trägheitsmoment des rotierenden Körpers bezüglich seiner Drehachse

$$J = \left(m_W + m_L + \frac{m_B}{2}\right) \cdot r^2 = 0,00153 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (1.22)$$

$$J\dot{\omega} - M = -\alpha\omega \implies \dot{\omega} = -\beta\omega \quad \text{mit } \beta = \frac{\alpha}{J} \quad (1.23)$$

Die Lösung von (1.23) mit  $\omega(0) = \omega_0$  ist

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\beta t} \quad (1.24)$$

Aus

$$\omega(t) = \frac{\omega_0}{2} \quad (1.25)$$

folgt

$$e^{-\beta t} = \frac{1}{2} \implies t = \frac{\ln 2}{\beta} = 12,8 \text{ s} \quad (1.26)$$

## Aufgabe 2: Das Prinzip von Fermat

- (a) Die Zeit, die Licht von A nach B braucht, ist

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c} \quad (2.1)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{2c\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{-2(d-x)}{2c\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \quad (2.2)$$

Aus  $\frac{dt}{dx} \stackrel{\circ}{=} 0$  folgt

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = \sin \beta \quad (2.3)$$

und daraus  $\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta$ .

- (b) Die Zeit, die Licht von A nach B braucht, ist wegen

$$c_k \stackrel{\circ}{=} \frac{c}{n_k}$$

$$t = \frac{n_1 \sqrt{a^2 + x^2}}{c} + \frac{n_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c} \quad (2.4)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2n_1 x}{2c\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{-2n_2(d-x)}{2c\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \quad (2.5)$$

Aus  $\frac{dt}{dx} \stackrel{\circ}{=} 0$  folgt

$$n_1 \sin \alpha = \frac{n_1 x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{n_2(d-x)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = n_2 \sin \beta \quad (2.6)$$

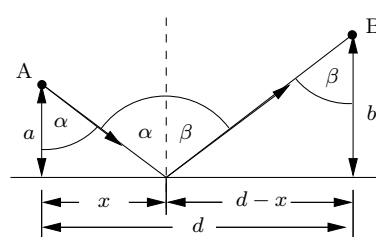
und daraus

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} \quad (2.7)$$

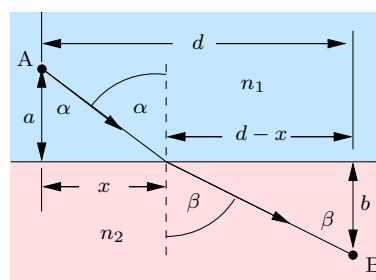
- (c) Da alle von A ausgehenden Strahlen nach B gelangen, müssen alle Wege

$$s_i = \overline{AS_i} + \overline{S_iB} \quad (2.8)$$

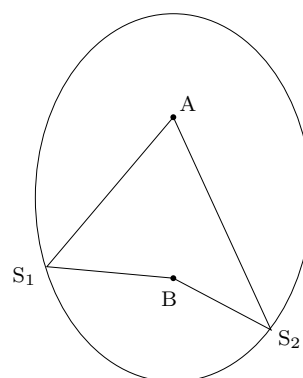
gleich lang sein. Die Reflexionspunkte  $S_i$  liegen also auf einer Ellipse mit den Brennpunkten A und B. (Das ist eine notwendige Bedingung. Es ist noch nachzuweisen, dass in allen Punkten  $S_i$  das Reflexionsgesetz gilt.) ●●●



2



3



3

- (d) Die Lichtwege von der  $x$ -Achse bis zum Brennpunkt müssen alle gleich sein: •

$$-g(x) + \sqrt{g(x)^2 + x^2} = 2f \quad \bullet \quad (2.9)$$

$$g(x)^2 + x^2 = g(x)^2 + 4fg(x) + 4f^2 \quad (2.10)$$

$$g(x) = \frac{x^2}{4f} - f \quad \bullet \quad (2.11)$$

Die Normale  $n$  auf den Spiegel im Punkt  $S(x|g(x))$  hat die Steigung

$$m = -\frac{1}{g'(x)} = -\frac{2f}{x} \quad (2.12)$$

und die Gleichung

$$n(\xi) = g(x) - \frac{2f}{x} \cdot (\xi - x) = \frac{x^2}{4f} + f - \frac{2f}{x} \cdot \xi \quad (2.13)$$

Die Normale schneidet die  $x$ -Achse bei

$$x_n = \frac{x^3}{8f^2} + \frac{x}{2} \quad (2.14)$$

$$\tan \alpha = \frac{x - x_n}{-g(x)} = \frac{\frac{x}{2} - \frac{x^3}{8f^2}}{-\frac{x^2}{4f} + f} = \frac{x(4f^2 - x^2)}{2f(4f^2 - x^2)} = \frac{x}{2f} \quad (2.15)$$

$$\tan \beta = \frac{x}{-g(x)} = \frac{x}{-\frac{x^2}{4f} + f} = \frac{4fx}{4f^2 - x^2} \quad (2.16)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{\frac{x}{f}}{1 - \frac{x^2}{4f^2}} = \frac{4fx}{4f^2 - x^2} = \tan \beta \quad (2.17)$$

Also ist  $\beta = 2\alpha$ , d.h. das Reflexionsgesetz ist erfüllt.

- (e) Gleiche Zeiten von der  $x$ -Achse bis D für alle Strahlen:

$$\frac{ny}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ny_0}{c} + \frac{d - y_0}{c} \quad \bullet \quad (2.18)$$

$$ny + \sqrt{x^2 + (d - y)^2} = ny_0 + d - y_0 \quad (2.19)$$

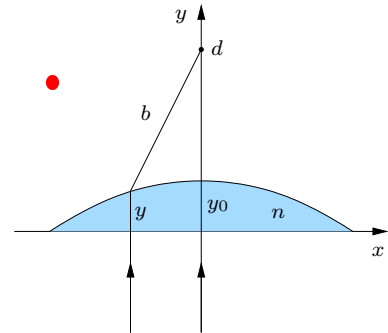
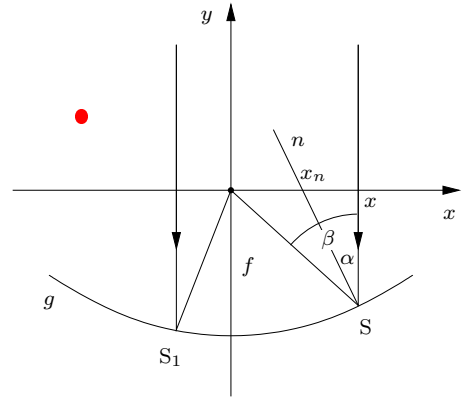
$$x^2 + (d - y)^2 = [n(y_0 - y) + d - y_0]^2 \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} x^2 + d^2 - 2dy + y^2 &= n^2 y_0^2 - 2n^2 y_0 y + n^2 y^2 + \\ &+ 2ny_0(d - y_0) - 2ny(d - y_0) + (d - y_0)^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$(1 - n^2)y^2 + 2(n - 1)(d + ny_0)y = [(n - 1)y_0 + d]^2 - x^2 - d^2 \quad (2.22)$$

$$y^2 - 2 \cdot \frac{d + ny_0}{n + 1} y = \frac{x^2 + d^2 - [(n - 1)y_0 + d]^2}{n^2 - 1} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \left(y - \frac{d + ny_0}{n + 1}\right)^2 &= \frac{[x^2 + d^2 - [(n - 1)y_0 + d]^2](n + 1) + (d + ny_0)^2(n - 1)}{(n - 1)(n + 1)^2} \\ &= \frac{x^2(n + 1) + (n - 1)(d - y_0)^2}{(n - 1)(n + 1)^2} \end{aligned} \quad (2.24)$$



$$y(x) = \frac{1}{n+1} \left[ d + ny_0 \pm \sqrt{\frac{n+1}{n-1} x^2 + (d-y_0)^2} \right] \quad (2.25)$$

$$y(0) = \frac{1}{n+1} [d + ny_0 \pm (d - y_0)] = \begin{cases} \frac{1}{n+1} [2d + (n-1)y_0] \neq y_0 \\ y_0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Also ist endgültig

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{n+1} \left[ d + ny_0 - \sqrt{\frac{n+1}{n-1} x^2 + (d-y_0)^2} \right]} \quad \bullet \bullet \quad (2.27)$$

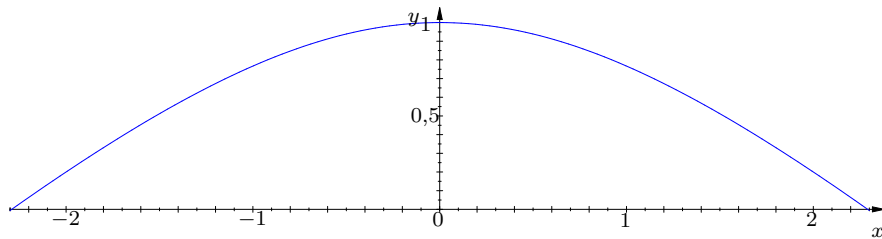
Die Nullstellen von  $y$  sind bei

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{y_0(n-1) [2d + (n-1)y_0]} \quad (2.28)$$

Beispiel:  $n = 1,5$ ,  $d = 5$ ,  $y_0 = 1$ :

$$y(x) = \frac{13}{5} - \frac{2}{5} \sqrt{5x^2 + 16}$$

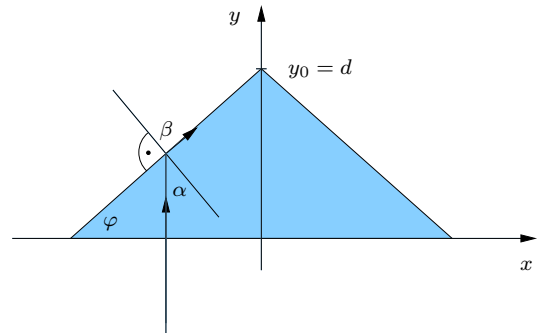
Nullstellen bei  $x_{1,2} = \pm \sqrt{5,25} = \pm 2,29$



$d = y_0 \implies$

$$\boxed{y(x) = d - \frac{|x|}{\sqrt{n^2 - 1}}} \quad \bullet \quad (2.29)$$

$$\tan \alpha = \tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (2.30)$$



$$\tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1} = \frac{1}{n^2 - 1} \implies \sin \alpha = \frac{1}{n} \quad \bullet \quad (2.31)$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = n \implies \sin \beta = n \sin \alpha = 1 \implies \beta = 90^\circ \quad (2.32)$$

$\varphi = \alpha$  ist der Grenzwinkel der Totalreflexion.  $\bullet$

### Aufgabe 3: Pioneer–Anomalie

8

- (a) Radius der Erdbahn:  $r_E = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$   
 Radius der Jupiterbahn:  $r_J = 7,78 \cdot 10^{11} \text{ m}$   
 Gravitationskonstante:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$   
 Umlaufgeschwindigkeit der Erde:  $v_E = \frac{2r_E\pi}{365,25 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} = 2,98 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  ●  
 Umlaufgeschwindigkeit des Jupiters:  $v_J = v_E \sqrt{\frac{r_E}{r_J}} = 1,31 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Die Startgeschwindigkeit der Sonde am Ort der Erdbahn ist

$$v_1 = v_0 + v_E = 3,92 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.1)$$

Die Sonde erreicht die Jupiterbahn mit der Geschwindigkeit  $v_2$ :

$$\frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2) = -GM_s m \left( \frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_J} \right) \quad (3.2)$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2GM_s \left( \frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_J} \right)} = 1,01 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.3)$$

Mit der Sonne im Ursprung lautet die Gleichung der Flugbahn der Sonde (Polarform):

$$r(\vartheta) = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} \quad (3.4)$$

mit

$$p = \frac{r_E^2 v_1^2}{GM_s} = 2,59 \cdot 10^{11} \text{ m} \quad (3.5)$$

und

$$e = \frac{r_E v_1^2}{GM_s} - 1 = 0,730 \quad (3.6)$$

Für den Schnittpunkt der Sondenbahn mit der Jupiterbahn folgt aus  $r_2 = r(\vartheta_2) = r_J$

$$\vartheta_2 = \arccos \left[ \frac{1}{e} \left( \frac{p}{r_J} - 1 \right) \right] = 2,72 = 156^\circ \quad (3.7)$$

Der Schnittwinkel  $\varphi$  der Sondenbahn mit der Jupiterbahn ergibt sich aus

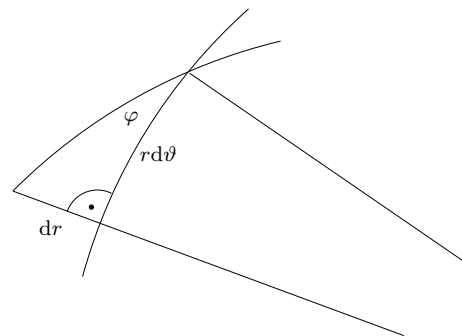
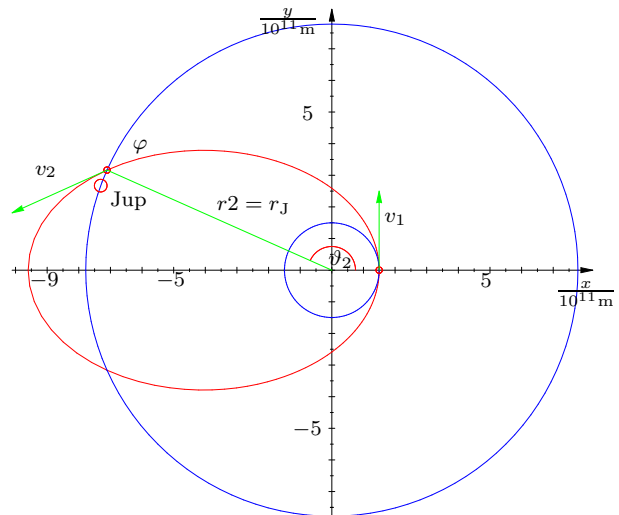
$$\tan \varphi = \frac{dr}{rd\vartheta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\vartheta} \quad (3.8)$$

und

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{pe \sin \vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} \quad (3.9)$$

zu

$$\varphi = \arctan \frac{e \sin \vartheta_2}{1 + e \cos \vartheta_2} = 41,75^\circ \quad (3.10)$$



Im Jupitersystem sind Eintritts- und Austrittsgeschwindigkeit der Sonde betragsmäßig gleich:

$$|\vec{v}'_3| = |\vec{v}'_2| \quad (3.11)$$

Im Inertialsystem S, in dem die Sonne ruht, ist der Betrag der Austrittsgeschwindigkeit  $\vec{v}_3$  wegen

$$\vec{v}_3 = \vec{v}'_3 + \vec{v}_J \quad (3.12)$$

maximal, wenn  $\vec{v}_3 \parallel \vec{v}_J$ .

$$v'_3 = v'_2 = \sqrt{v_2^2 + v_J^2 - 2v_2v_J \cos \varphi} \quad (3.13)$$

Damit ist die Geschwindigkeit der Sonde nach dem Swingby (in S):

$$v_3 = v'_3 + v_J = v_J + \sqrt{v_2^2 + v_J^2 - 2v_2v_J \cos \varphi} = 2,18 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.14)$$

$v_3$  ist maximal für  $\varphi = 180^\circ$

$$v_{3,\text{max}} = 2v_J + v_2 = 3,62 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.15)$$

und minimal für  $\varphi = 0^\circ$

$$v_{3,\text{min}} = 2v_J - v_2 = 1,60 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.16)$$

Um  $v_{3,\text{max}}$  zu erreichen ( $\varphi^* = 180^\circ$ ), müsste die Sonde vor dem Swingby eine Kurskorrektur um

$$\Delta\varphi = 180^\circ - \varphi = 138,2^\circ \quad (3.17)$$

vornehmen.

Die Ausströmgeschwindigkeit der Gase der Korrekturdüse ist  $u$ . Unter der Annahme  $v = v_2 = \text{konst.}$  gilt

$$\frac{mv_2^2}{r} = F_z = -\dot{m}u \quad (3.18)$$

$$\frac{dm}{m} = -\frac{v_2^2}{ru} dt \quad (3.19)$$

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{v_2^2}{ru}t} \quad (3.20)$$

Bezeichnet  $\Delta m$  die gesamte für die Kurskorrektur ausgestoßene Gasmasse, dann gilt

$$\frac{\Delta m}{m_0} = \frac{m_0 - m(t)}{m_0} = 1 - e^{-\frac{v_2^2}{ru}t} \quad (3.21)$$

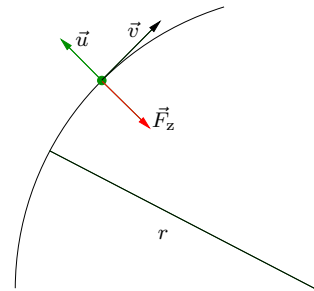
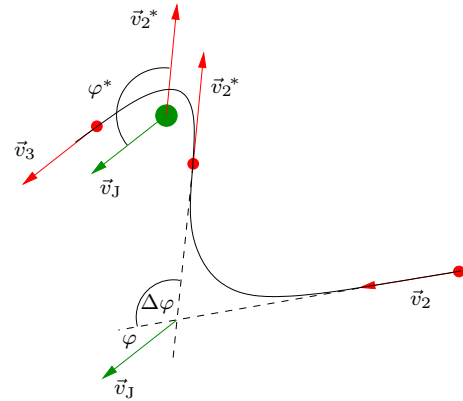
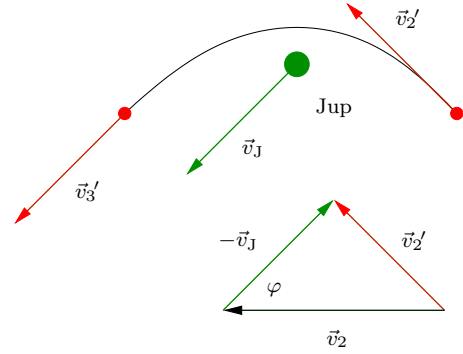
Aus  $r\Delta\varphi = v_2 t$  folgt

$$\frac{v_2^2}{ru}t = \frac{v_2^2 r \Delta\varphi}{r u v_2} = \frac{v_2 \Delta\varphi}{u} \quad (3.22)$$

$$\frac{\Delta m}{m_0} = 1 - e^{-\frac{v_2 \Delta\varphi}{u}} \quad (3.23)$$

Aus (3.20) und (3.23) folgt

$$u \ln \frac{m_0}{m} = v_2 \Delta\varphi = 2,44 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.24)$$



Statt der Kurskorrektur könnte mit dem Treibstoff der Masse  $\Delta m$  auch in Flugrichtung von  $v$  auf  $v^*$  beschleunigt werden:

$$v^* = v + u \ln \frac{m_0}{m} = v + v_2 \Delta \varphi \quad (3.25)$$

Die Kurskorrektur mit einem chemischen Triebwerk ( $u = 4200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) ist illusorisch, da

$$\frac{\Delta m}{m_0} = 1 - e^{-\frac{v_2 \Delta \varphi}{u}} = 0,997, \quad (3.26)$$

d.h. 99,7% der Sondenmasse müssten als Treibstoff mitgeführt werden.

Mit einem Iontriebwerk ( $u = 4,4 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) ist

$$\frac{\Delta m}{m_0} = 1 - e^{-\frac{v_2 \Delta \varphi}{u}} = 0,425 \quad (3.27)$$

Das Iontriebwerk könnte auf drei Arten eingesetzt werden:

(1) Kurskorrektur um  $\Delta \varphi$ :

$$v_{\text{end}} = v_{3,\text{max}} = 2v_J + v_2 = 3,62 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.28)$$

(2) Keine Kurskorrektur, Beschleunigen vor dem Swingby:

$$v_2' = v_2 + v_2 \Delta \varphi = 3,45 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.29)$$

in (3.14):

$$v_{\text{end}} = 3,93 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.30)$$

(3) Keine Kurskorrektur, Beschleunigen nach dem Swingby:

$$v_{\text{end}} = v_3 + v_2 \Delta \varphi = 4,61 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.31)$$

(4) Keine Kurskorrektur, keine Beschleunigung:

$$v_{\text{end}} = v_3 = 2,18 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.32)$$

Außerhalb der Jupiterbahn hat die Sonde die Geschwindigkeit  $v(r)$ :

$$\frac{m}{2} (v^2 - v_3^2) = -GM_s m \left( \frac{1}{r_J} - \frac{1}{r} \right) \quad (3.33)$$

$$v(r) = \sqrt{v_3^2 - 2GM_s \left( \frac{1}{r_J} - \frac{1}{r} \right)} \quad \bullet \quad (3.34)$$

$$v(\infty) = \sqrt{v_3^2 - \frac{2GM_s}{r_J}} = 1,15 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \bullet \quad (3.35)$$



(b) Leuchtkraft der Sonne:  $L_{\odot} = 3,84 \cdot 10^{26} \text{ W}$

Antennenfläche:  $A = \frac{d^2}{4\pi} = 6,03 \text{ m}^2$

Auf die Antenne trifft die Lichtleistung

$$P(r) = \frac{AL_{\odot}}{r^2\pi} \quad \bullet \quad (3.36)$$

mit dem Impuls

$$p_{\gamma} = \frac{W}{c} \quad \circ \quad (3.37)$$

Auf die Sonde wird der Impuls

$$p = p_{\gamma} + 0,8 p_{\gamma} = 1,8 p_{\gamma} \quad (3.38)$$

übertragen. Die Kraft auf die Sonde ist dann

$$F_1 = \dot{p} = \frac{1,8 \dot{W}}{c} = \frac{1,8 P}{c} \quad \bullet \quad (3.39)$$

und führt auf die Beschleunigung

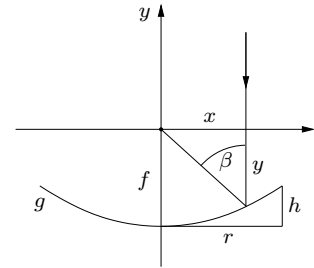
$$a_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{1,8 P}{mc} = \frac{1,8 AL_{\odot}}{4\pi m c r^2} = 8,21 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left( \frac{50 \text{ AE}}{r} \right)^2 \quad \circ \quad (3.40)$$

Eine genauere Rechnung muss die Form der Antenne berücksichtigen (Rotationsparaboloid). Aus (2.11) folgt

$$y = \frac{x^2}{4f} - f \quad (3.41)$$

Aus  $y(r) = h - f$  folgt

$$f = \frac{r^2}{4h} \quad \Longrightarrow \quad \frac{r^2}{f^2} = \frac{16h^2}{r^2} \quad (3.42)$$



Die Komponente der reflektierten Leistung parallel zur  $y$ -Achse ist dann

$$P_r = \frac{P}{r^2\pi} \int_0^r \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2\pi x dx = \frac{-2P}{r^2} \int_0^r \frac{\frac{x^2}{4f} - f}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{4f} - f\right)^2}} \cdot x dx \quad (3.43)$$

Mit der Substitution  $z = \frac{x^2}{4f} - f$  ist  $x dx = 2f dz$  und  $x^2 = 4fz + 4f^2$ :

$$\begin{aligned} P_r &= -\frac{4Pf}{r^2} \int_{-f}^{\frac{r^2}{4f} - f} \frac{z}{\sqrt{4fz + 4f^2 + z^2}} dz = -\frac{4Pf}{r^2} \int_{-f}^{\frac{r^2}{4f} - f} \frac{z}{z + 2f} dz = \\ &= -\frac{4Pf}{r^2} [z - 2f \ln(z + 2f)]_{-f}^{\frac{r^2}{4f} - f} = P \left[ \frac{8f^2}{r^2} \ln \left( 1 + \frac{r^2}{4f^2} \right) - 1 \right] = \\ &= P \left[ \frac{r^2}{2h^2} \ln \left( 1 + \frac{4h^2}{r^2} \right) - 1 \right] = 0,63 P \end{aligned} \quad (3.44)$$

Der Faktor 1,8 in (3.40) muss also abgeändert werden in

$$0,8(1 + 0,63) + 0,2 = 1,50 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = 6,87 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left( \frac{50 \text{ AE}}{r} \right)^2 \quad (3.45)$$

(c) Protonengeschwindigkeit:

3

$$v_p(r) = \sqrt{v_0^2 - 2GM_s \left( \frac{1}{1 \text{ AE}} - \frac{1}{r} \right)} \quad , \quad v_p(50 \text{ AE}) = 3,98 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.46)$$

Protonendichte:

$$n(r) = \frac{n_0 \text{ AE}^2}{r^2} \quad \circ \quad , \quad n(50 \text{ AE}) = 2,00 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{m}^3} \quad (3.47)$$

Mit der Relativgeschwindigkeit  $v'_p(r) = v_p(r) - v(r)$  und

$$dm = Av'_p(r)dt \cdot n(r)m_p \quad \bullet \quad \text{und} \quad dp = v'_p dm \quad (3.48)$$

folgt

$$F_2(r) = \frac{dp}{dt} = Am_p n(r) v'_p(r)^2 \quad \text{mit} \quad F_2(50 \text{ AE}) = 2,99 \cdot 10^{-12} \text{ N} \quad (3.49)$$

$$a_2 = \frac{F_2}{m} = \frac{Am_p n_0 v'_p(r)^2}{m} \cdot \left( \frac{\text{AE}}{r} \right)^2 = 1,24 \cdot 10^{-14} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left( \frac{50 \text{ AE}}{r} \right)^2 \quad \circ \quad (3.50)$$

(d) Mit  $P = 8 \text{ W}$  folgt

2

$$F_3 = \frac{P}{c} = 2,7 \cdot 10^{-8} \text{ N} \quad , \quad a_3 = \frac{F_3}{m} = 1,1 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \bullet \quad (3.51)$$

Zum Vergleich die Beschleunigung der Sonde im Gravitationsfeld der Sonne:

$$a_0 = \frac{GM_s}{(50 \text{ AE})^2} = 2,37 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (3.52)$$

(e) Wegen

4

$$\beta = \frac{v(50 \text{ AE})}{c} \circ = 4,3246 \cdot 10^{-5} \ll 1 \quad (3.53)$$

folgt (Reflexion!)

$$k^2 = \left( \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \right)^2 \approx 1 - 2\beta \quad \bullet \quad (3.54)$$

$$\Delta f = f - f_0 = (k^2 - 1)f_0 \approx -2\beta f_0 = -198 \text{ kHz} \quad \bullet \quad (3.55)$$

$$\frac{d\Delta f}{dt} = -2f_0 \dot{\beta} = -\frac{2f_0}{c} \cdot a \quad (3.56)$$

$$|a| = \frac{c}{2f_0} \cdot 1,34 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Hz}}{\text{s}} \circ = 8,76 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (3.57)$$

- (f) Wärmeleistung der Radioisotopengeneratoren zur Zeit  $t = 18$  a nach dem Start (1990) mit der Halbwertszeit  $T = 88$  a und  $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ :

$$P_g(t) = P_0 e^{-\lambda t} = P_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = P_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{9}{44}} = 2239 \text{ W} \quad \circ \quad (3.58)$$

Die in der Sonde umgesetzte Leistung ist dann

$$P = 0,039 \cdot P_g - P_{\text{Antenne}} = 79,3 \text{ W} \quad \circ \quad (3.59)$$

Deckfläche ( $A_1$ ) und Seitenfläche ( $A_2$ ) des sechseckigen Kastens ( $a = 0,66$  m,  $d = 0,343$  m):

$$A_1 = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} = 1,13 \text{ m}^2, \quad A_2 = 6ad = 1,36 \text{ m}^2 \quad (3.60)$$

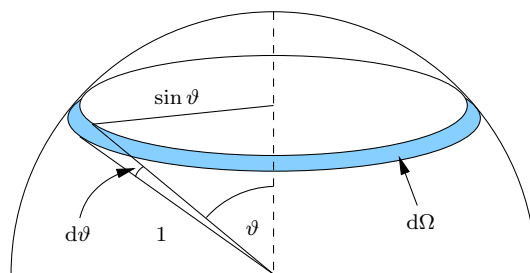
Durch die Deckfläche  $A_1$  wird die Leistung  $P_1$  abgestrahlt, durch die restliche Oberfläche  $A_1 + A_2$  geht  $P - P_1$  verloren:

$$\frac{P_1}{A_1} = 4 \cdot \frac{P - P_1}{A_1 + A_2} \implies P_1 = \frac{4A_1}{5A_1 + A_2} \cdot P = 51,2 \text{ W} \quad \bullet \quad (3.61)$$

In den Raumwinkel  $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$  wird die Leistung  $dP = k \cos \vartheta d\Omega$  gestrahlt. Die Normierungsbedingung lautet dann

$$2\pi k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin \vartheta \cos \vartheta}_{\frac{1}{2} \sin 2\vartheta} d\vartheta = P \quad (3.62)$$

$$\pi k \left[ -\frac{1}{2} \cos 2\vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi k = P \quad (3.63)$$



Also wird in den Raumwinkel  $d\Omega$  die Leistung

$$dP = \frac{P}{\pi} \cos \vartheta d\Omega = 2P \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \quad (3.64)$$

gestrahlt und erzeugt die Antriebskraft

$$dF = \frac{dP}{c} \cos \vartheta = \frac{2P}{c} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta \quad (3.65)$$

Die Antriebskraft einer mit der Leistung  $P$  strahlenden ebenen Fläche ist damit

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2P}{c} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta = -\frac{2P}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \vartheta d(\cos \vartheta) = \frac{2P}{3c} \quad (3.66)$$

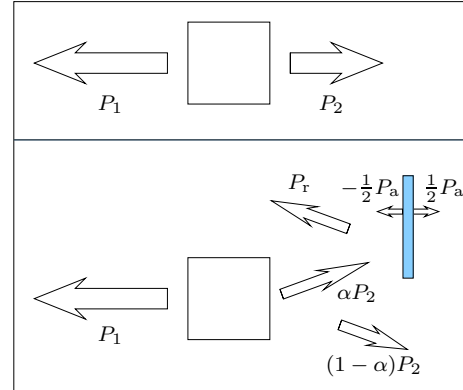
## Leistungsflüsse mit und ohne Reflexion:

Der Bruchteil  $\alpha$  von  $P_2$  (abgestrahlte Leistung entgegen der Flugrichtung) trifft auf den Reflektor, davon wird der Bruchteil  $\beta$  reflektiert. Für die entsprechenden Strahlungsimpulse gilt dann:

$$p_{\text{ohne}} = p_1 - p_2 \quad (3.67)$$

Die Impulse der vom Reflektor wieder abgestrahlten Leistung  $P_a$  heben sich auf.

$$p_{\text{mit}} = p_1 + p_r - (1 - \alpha)p_2 \quad (3.68)$$



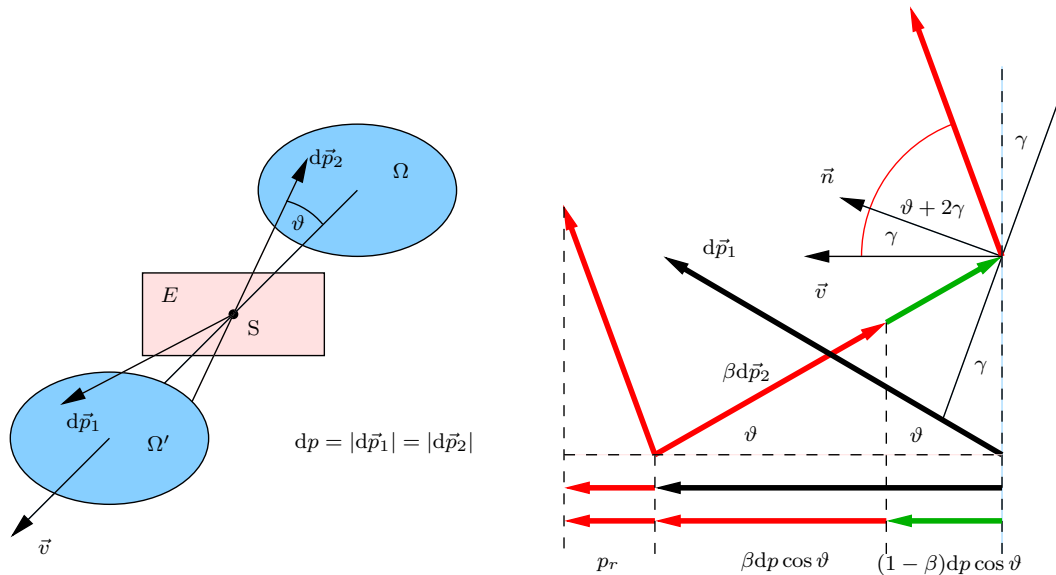
Mit  $p_r = \alpha\beta p_2$  und  $p_a = \alpha(1 - \beta)p_2$  folgt

$$p_{\text{mit}} = p_1 + \alpha\beta p_2 - (1 - \alpha)p_2 = p_1 - p_2 + \alpha(1 + \beta)p_2 \quad (3.69)$$

$$= p_1 - p_2 + 2\alpha\beta p_2 + \alpha(1 - \beta)p_2 \quad (3.70)$$

Die Antriebskraft der Strahlung berechnet man also entweder durch direktes Aufsummieren der Strahlungsimpulse (3.68) oder vor allem bei vorhandenen Symmetrien mit

$$p_{\text{mit}} = p_{\text{ohne}} + 2 \cdot p_{\text{reflektiert}} + p_{\text{absorbiert}} \quad (3.71)$$



(3.71) gilt aber nur, wenn die Beschleunigungsrichtung senkrecht auf der Reflexionsfläche steht. Wird der Reflektor vom Sender  $S$  aus unter dem Raumwinkel  $\Omega$  gesehen und ist  $E$  die Normalebene auf  $\vec{v}$  durch  $S$ , dann sei  $\Omega'$  der an  $E$  gespiegelte Raumwinkel  $\Omega$ . Der Impuls der Strahlung in einen kleinen Raumwinkel  $d\Omega$  ist  $d\vec{p}_2$ , der an  $E$  gespiegelte Impuls  $d\vec{p}_1$ .  $\vec{n}$  ist der Normalenvektor auf den Reflektor im Auftreffpunkt und  $\gamma$  der Winkel zwischen  $\vec{n}$  und  $\vec{v}$ . Die beiden Strahlen verleihen der Sonde den Impuls

$$dp_{\text{ges}} = (\cos \vartheta + \beta \cos(\vartheta + 2\gamma)) dp \quad (3.72)$$

Da die Strahlung in den restlichen Raumwinkelbereich aus Symmetriegründen keinen Impulsbeitrag leistet, ist

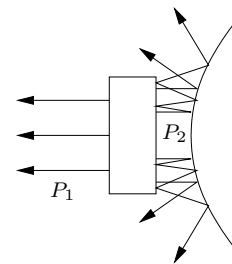
$$p_{\text{ges}} = \int_{\Omega} (\cos \vartheta + \beta \cos(\vartheta + 2\gamma)) dp \quad (3.73)$$

## Einfluss der Strahlung von Boden- und Deckfläche

Für die von der Wärmestrahlung der Boden- und Deckfläche hervorgerufene Beschleunigung  $a_{BD}$  folgt mit  $4P_2 = P_1$ ,  $\beta = 0,8$  und angenommenem  $\alpha = 1$

$$\frac{2P_1}{3mc} < a < \frac{2(P_1 + 0,8P_2)}{3mc} = \frac{4P_1}{5mc} \quad (3.74)$$

$$4,7 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} < a < 5,7 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (3.75)$$

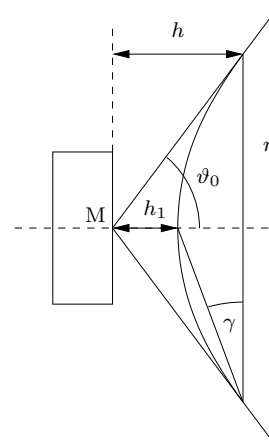


Genauere Abschätzung:

$$\vartheta_0 = \arctan \frac{r}{h} = 64,2^\circ \quad (3.76)$$

Die Antenne wird vom Mittelpunkt M der Kastenfläche aus unter dem Raumwinkel  $\Omega_A$  gesehen:

$$\Omega_A = 2\pi \int_0^{\vartheta_0} \sin \vartheta \, d\vartheta = 2\pi(1 - \cos \vartheta_0) \quad (3.77)$$



Unter der Annahme einer ebenen Antenne und unter Vernachlässigung von Mehrfachreflexionen wirkt auf die Antenne die Kraft  $F_A$  und bewirkt die Beschleunigung

$$a'_A = 0,8 \cdot \frac{2P_2}{mc} \int_0^{\vartheta_0} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta \, d\vartheta = \frac{2P_1}{15mc} (1 - \cos^3 \vartheta_0) = 0,87 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (3.78)$$

Genauer mit (3.73) und  $\gamma = \arctan \frac{h_1 - h}{r} = 19^\circ$  (Paraboloid als Kegel genähert):

$$\begin{aligned} a_A &= 0,8 \cdot \frac{2P_2}{mc} \int_0^{\vartheta_0} \sin \vartheta \cos \vartheta \cos(\vartheta + 2\gamma) \, d\vartheta = \\ &= \frac{P_1}{30mc} (4 \cos 2\gamma - 3 \cos(2\gamma - \vartheta_0) - \cos(2\gamma + 3\vartheta_0)) = 0,25 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Die nicht reflektierte Strahlung erzeugt in Flugrichtung die Beschleunigung

$$\bar{a}_A = \frac{2P_2}{mc} \int_{\vartheta_0}^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta \, d\vartheta = \frac{P_1}{6mc} \cos^3 \vartheta_0 = 0,10 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (3.80)$$

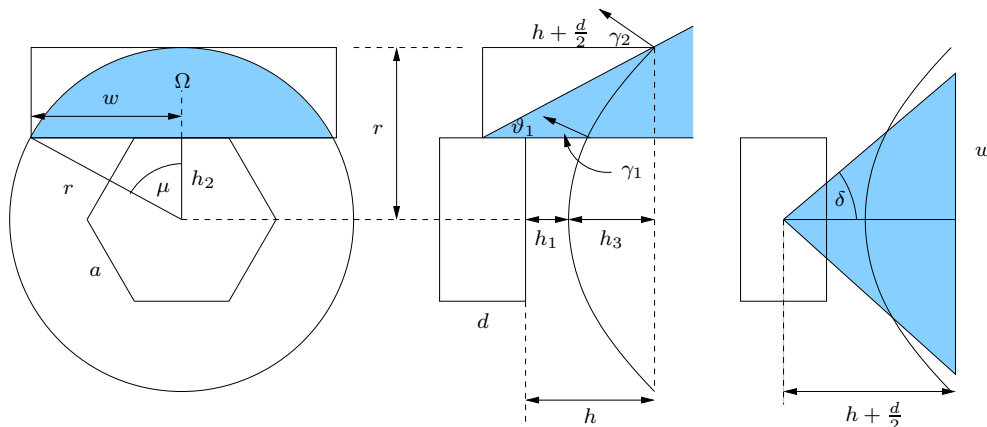
Mit  $a_1 = \frac{2P_1}{3mc} = 4,72 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  ergibt sich dann die zusätzliche Beschleunigung, hervorgerufen durch die Strahlung der Boden- und Deckfläche

$$a'_{BD} = a_1 + a'_A - \bar{a}_A = \frac{4P_1}{5mc} \left(1 - \frac{3}{8} \cos^3 \vartheta_0\right) = 5,5 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (3.81)$$

oder genauer

$$a_{BD} = a_1 + a_A - \bar{a}_A = 4,9 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (3.82)$$

## Einfluss der Strahlung der Seitenfläche



Mit  $h_2 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$  und  $w = \sqrt{r^2 - h_2^2}$  folgt

$$\vartheta_1 = \arctan \frac{r - h_2}{h + \frac{d}{2}} = 44^\circ \quad \text{und} \quad \delta = \arctan \frac{w}{h + \frac{d}{2}} = 56^\circ \quad (3.83)$$

Die Gleichung der Parabel (Antenne): (3.73)

$$f(x) = \frac{h_3}{r^2}x^2 \quad \implies \quad f'(x) = \frac{2h_3}{r^2}x \quad (3.84)$$

$$\gamma_1 = \arctan(f'(h_2)) = \arctan \frac{2h_3h_2}{r^2} = 16^\circ \quad (3.85)$$

$$\gamma_2 = \arctan(f'(r)) = \arctan \frac{2h_3r}{r^2} = 35^\circ \quad (3.86)$$

Die Strahlungsleistung der Seitenflächen ist

$$P_s = \frac{A_2}{4A_1}P_1 = 15,4 \text{ W} \quad (3.87)$$

Die Strahlungsleistung in den Raumwinkel  $d\Omega$  ist hier (vgl. (3.64))

$$dP = 2P_s \sin^2 \vartheta d\vartheta \quad (3.88)$$

Mit (3.73) folgt mit

$$dp = \frac{dP}{mc} = \frac{2P_s}{mc} \sin^2 \vartheta d\vartheta \quad (3.89)$$

für die von der Strahlung der Seitenflächen hervorgerufene Beschleunigung

$$a_s = \frac{2P_s}{mc} \int_{\Omega} \sin^2 \vartheta (\cos \vartheta + \beta \cos(\vartheta + 2\gamma)) d\vartheta \quad (3.90)$$

Eine Schwierigkeit bei diesem Integral ist das variable  $\gamma$ . Als Näherung rechnen wir mit einem konstanten  $\gamma$ , nämlich mit  $\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$ . Die nächste Schwierigkeit ist der Integrationsbereich  $\Omega$ . Wir nähern, indem wir das volle Integral von  $\vartheta = 0$  bis  $\vartheta_1$  mit  $\frac{2\delta}{2\pi}$  und einem weiteren Korrekturfaktor  $\frac{3}{4}$  multiplizieren ( $\beta = 0,8$ ):

$$a_s = \frac{3\delta P_s}{2\pi mc} \int_0^{\vartheta_1} \sin^2 \vartheta (\cos \vartheta + \beta \cos(\vartheta + 2\gamma)) d\vartheta = 0,2 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (3.91)$$

$$a_{\text{BD}} + a_s = 5,1 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (3.92)$$

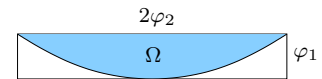
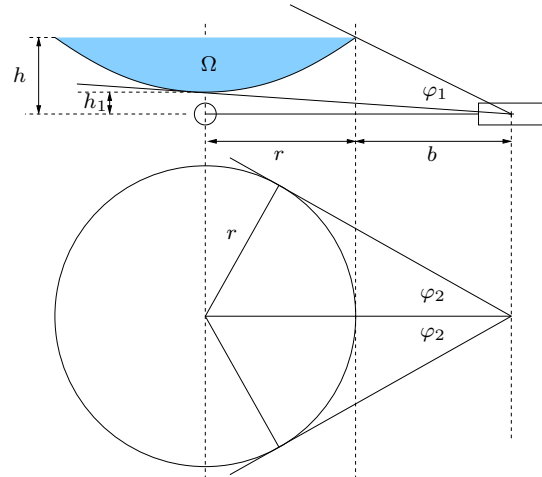
## Einfluss der Strahlung der Isotopenbatterien

Abschätzung des Raumwinkels  $\Omega$ , unter dem die Parabolantenne vom Mittelpunkt einer Isotopenbatterie aus gesehen wird:

$$\begin{aligned} r &= 1,384 \text{ m} \\ r + b &= 2,8 \text{ m} \\ b &= 1,416 \text{ m} \\ h &= 0,67 \text{ m} \\ h_1 &= 0,19 \text{ m} \\ d &= 0,343 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \arctan \frac{h}{b} - \arctan \frac{h_1}{r+b} = \\ &= 0,374 \end{aligned}$$

$$\varphi_2 = \arcsin \frac{r}{r+b} = 0,517$$



Faktor  $\frac{2}{3}$  wegen der Parabel:

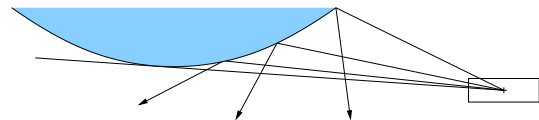
$$\frac{\Omega}{4\pi} \approx \frac{\frac{4}{3}\varphi_1\varphi_2}{4\pi} = \frac{\varphi_1\varphi_2}{3\pi} = 0,0205 \quad (3.93)$$

Auf die Antenne trifft bei isotroper Abstrahlung der Batterien die Leistung

$$P_B = \frac{\Omega}{4\pi} \cdot (1 - 0,039)P_g = 44,2 \text{ W} \quad (3.94)$$

Wir nehmen an, dass ungefähr 25% der reflektierten Strahlung einen Impuls parallel zur Sendengeschwindigkeit erzeugt:

$$a_B \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{P_A}{mc} = 1,5 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (3.95)$$



Aus (3.92) und (3.95) folgt für die Gesamtbeschleunigung aufgrund der Wärmeabstrahlung

$$a = a_{BD} + a_s + a_B \approx 6,6 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \bullet \quad (3.96)$$

Beschreibung einer Näherung ●●

Durchführung ●●●●

Diskussion ●

## Aufgabe 4: Experiment: Rinnsalphysik

### 4.1 Oberflächenspannung von Wasser

(a) RP

3

$$V = r^2 \pi h \quad (4.1)$$

$$A_G = r^2 \pi = \frac{V}{h} \implies h = \frac{V}{r^2 \pi} \quad (4.2)$$

$$A_V = r^2 \pi + 2r \pi h = r^2 \pi + \frac{2V}{r} \quad (4.3)$$

$$E_p = mg \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \rho g r^2 \pi h^2 = \frac{\rho g V^2}{2\pi r^2} \quad (4.4)$$

$$dA_G = 2\pi r dr, \quad dA_V = 2\pi r dr - \frac{2V}{r^2} dr, \quad dE_p = -\frac{\rho g V^2}{\pi r^3} dr \quad (4.5)$$

Für hydrophile Unterlagen ist  $\theta < 90^\circ$  und damit  $\sigma_G = \sigma \cos \theta > 0$ . Für hydrophile Unterlagen verkleinert sich  $E_G$  bei einer Vergrößerung von  $A_G$ , d.h.  $dE_G = -\sigma_G dA_G$ .

$$\begin{aligned} dE &= -\sigma_G dA_G + \sigma dA_V + dE_p = \\ &= -2\pi \sigma_G r dr + \sigma \left( 2r\pi - \frac{2V}{r^2} \right) dr - \frac{\rho g V^2}{\pi r^3} dr \quad \bullet \end{aligned} \quad (4.6)$$

$E$  minimal:

$$\frac{dE}{dr} = -2\pi \sigma_G r + 2\pi \sigma r - \frac{2\sigma V}{r^2} - \frac{\rho g V^2}{\pi r^3} = 0 \quad \bullet \quad (4.7)$$

$$\sigma \cdot r (\pi r^3 - V) - \sigma_G \cdot \pi r^4 = \frac{\rho g V^2}{2\pi} \quad (4.8)$$

Mit

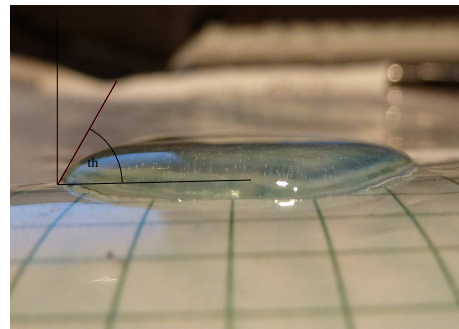
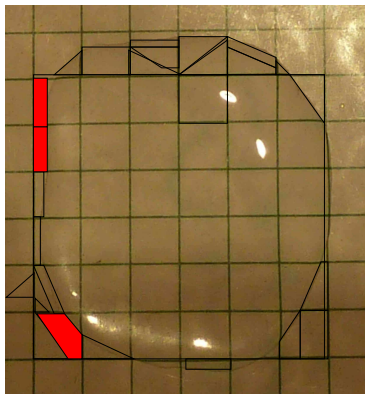
$$\sigma_G = \sigma \cos \theta \quad (4.9)$$

folgt

$$\sigma \cdot r ((1 - \cos \theta) \pi r^3 - V) = \frac{\rho g V^2}{2\pi} \quad (4.10)$$

$$\sigma = \frac{\rho g V^2}{2\pi r [(1 - \cos \theta) \pi r^3 - V]} \quad \bullet \quad (4.11)$$

(b)



5

Versuchsbeschreibung  $\bullet$ , Messwerte  $\bullet\bullet$

$$A = 8,75 \text{ cm}^2 \implies r = 1,67 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \quad \theta = 59^\circ, \quad V = 2,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

Mit  $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  und  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  folgt

$$\sigma = 0,073 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \bullet \quad (4.12)$$



$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = \frac{g \varrho}{2\pi} \cdot \frac{V^2 [4\pi r^3(1 - \cos \theta) - V]}{r^2 [\pi r^3(1 - \cos \theta) - V]^2} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial V} = -\frac{g \varrho}{2\pi} \cdot \frac{V [2\pi r^3(1 - \cos \theta) - V]}{r [\pi r^3(1 - \cos \theta) - V]^2} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = -\frac{g \varrho}{2} \cdot \frac{V^2 r^2 \sin \theta}{[\pi r^3(1 - \cos \theta) - V]^2} \quad (4.15)$$

$$\sigma = \frac{\varrho g V^2}{2\pi r [(1 - \cos \theta)\pi r^3 - V]}$$

$$\begin{aligned} |\Delta \sigma| &= \left| \frac{\partial \sigma}{\partial r} \cdot \Delta r \right| + \left| \frac{\partial \sigma}{\partial V} \cdot \Delta V \right| + \left| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \cdot \Delta \theta \right| = \\ &= \frac{\sigma}{r [(1 - \cos \theta)\pi r^3 - V]} \cdot \left[ |4\pi r^3(1 - \cos \theta) - V| \Delta r + \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{r (2\pi r^3(1 - \cos \theta) - V)}{V} \right| \Delta V + |\pi r^4 \sin \theta| \Delta \theta \right] \quad \bullet \quad (4.16) \end{aligned}$$

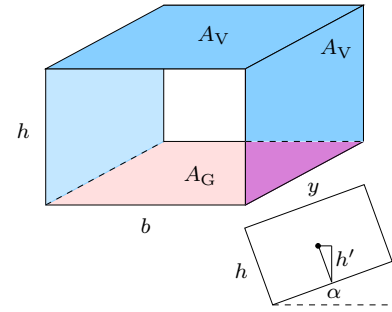
$\Delta r$	$\Delta V$	$\Delta \theta$	$ \Delta \sigma $	$ \frac{\Delta \sigma}{\sigma} $
0,5 mm	0,05 cm <sup>3</sup>	0,02 = 1,15°	0,019 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	26 %
1,0 mm	0,10 cm <sup>3</sup>	0,05 = 2,86°	0,040 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	55 %
0,4 mm	0,10 cm <sup>3</sup>	0,052 = 3°	0,020 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	27 %

(c) Mit der konstanten Querschnittsfläche  $\bar{A} = bh$  gilt

$$A_V = by + 2hy = \frac{\bar{A}y}{h} + 2hy \quad (4.17)$$

$$A_G = by = \frac{\bar{A}y}{h} \quad (4.18)$$

$$E_p = \frac{1}{2} mgh' = \frac{1}{2} \varrho g by h^2 \cos \alpha = \frac{1}{2} \varrho g \bar{A} y h \cos \alpha \quad (4.19)$$



2

$$\begin{aligned} dE &= -\sigma_G dA_G + \sigma dA_V + dE_p = -\sigma \cos \theta dA_G + \sigma dA_V + dE_p = \\ &= \left( \frac{\sigma \bar{A} y \cos \theta}{h^2} - \frac{\sigma \bar{A} y}{h^2} + 2y\sigma + \frac{1}{2} \varrho g \bar{A} y \cos \alpha \right) dh \quad \bullet \quad (4.20) \end{aligned}$$

$E$  minimal:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dE}{dh} = -\frac{\sigma \bar{A} (1 - \cos \theta)}{h^2} + 2\sigma + \frac{1}{2} \varrho g \bar{A} \cos \alpha = 0 \quad \circ \quad (4.21)$$

$$-\frac{\sigma b (1 - \cos \theta)}{h} + 2\sigma + \frac{1}{2} \varrho g b h \cos \alpha = 0 \quad (4.22)$$

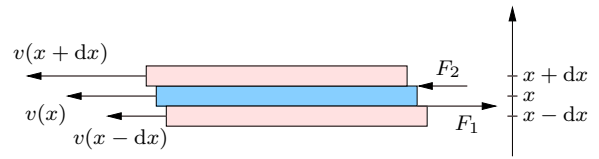
$$h^2 + 2 \cdot \frac{2\sigma}{\varrho g b \cos \alpha} \cdot h = \frac{2\sigma b (1 - \cos \theta)}{\varrho g b \cos \alpha} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} h &= -\frac{2\sigma}{\varrho g b \cos \alpha} + \sqrt{\frac{2\sigma b (1 - \cos \theta) \varrho g b \cos \alpha + 4\sigma^2}{(\varrho g b \cos \alpha)^2}} = \\ &= \frac{2\sigma}{\varrho g b \cos \alpha} \left[ \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta) \varrho g b^2 \cos \alpha}{2\sigma} + 1} - 1 \right] \quad \circ \quad (4.24) \end{aligned}$$

## 4.2 Bestimmung der Viskosität von Wasser

- (d) Auf eine Wasserschicht der Dicke  $dx$  in der Höhe  $x$  wirken die Reibungskräfte

$$F_1 = -A\eta \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x-\frac{dx}{2}} \quad \circ \quad (4.25)$$



3

und

$$F_2 = A\eta \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x+\frac{dx}{2}} \quad \circ \quad (4.26)$$

Im stationären Fall ist die Summe der Reibungskräfte gleich dem negativen Hangabtrieb. Mit

$$v'(x) = \left. \frac{dv}{dx} \right|_x \quad (4.27)$$

gilt

$$A\eta v' \left( x + \frac{dx}{2} \right) - A\eta v' \left( x - \frac{dx}{2} \right) = A\eta v''(x) dx = -\rho A g dx \sin \alpha \quad (4.28)$$

$$v''(x) = -\frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} \quad \bullet \quad (4.29)$$

Mit  $v'(h) = 0$  und  $v(0) = 0$  folgt

$$v'(x) = -\frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} (x - h) \quad (4.30)$$

und

$$v(x) = \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} \left( hx - \frac{x^2}{2} \right) \quad \bullet \quad (4.31)$$

- (e) Aus

$$d(\Delta V) = bv \Delta t dx \quad (4.32)$$

2

folgt

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta t} &= \int_0^h bv(x) dx = \frac{\rho g b \sin \alpha}{\eta} \int_0^h \left( hx - \frac{x^2}{2} \right) dx = \\ &= \frac{\rho g b \sin \alpha}{\eta} \left[ \frac{hx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right] = \frac{\rho g b h^3 \sin \alpha}{3\eta} \quad \bullet \end{aligned} \quad (4.33)$$

- (f) Versuchsbeschreibung ●●

$$\eta = \frac{\rho g b h^3 \sin \alpha}{3 \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}} \quad (4.34)$$

8

Messwerte ●●●

Plausibles Ergebnis (Größenordnung) ●●

Relativer Fehler:

$$\frac{d\eta}{\eta} = \left| \frac{db}{b} \right| + \left| \frac{3dh}{h} \right| + \left| \frac{d\alpha}{\tan \alpha} \right| + \left| \frac{d\dot{V}}{\dot{V}} \right| \quad \bullet \quad (4.35)$$

- (g) Vergleich mit Literaturwert  $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$  ( $20^\circ\text{C}$ ) bis  $\eta = 1,3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$  ( $10^\circ\text{C}$ ) ●

3

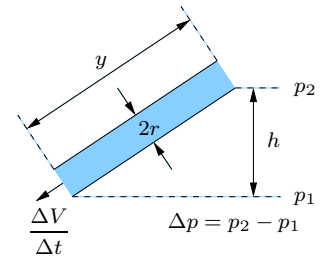
Drei Gründe für Abweichung ●●

### 4.3 Vergleichsexperiment zur Viskositätsbestimmung

(h) Hagen–Poisseuille:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\eta y} \quad (4.36)$$

$$\eta = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8y \frac{\Delta V}{\Delta t}} = \frac{\pi \rho g h r^4}{8y \frac{\Delta V}{\Delta t}} \quad \circ \quad (4.37)$$



Versuchsbeschreibung ●

Messwerte ●●

Ergebnis ●

$$\frac{d\eta}{\eta} = \left| \frac{4dr}{r} \right| + \left| \frac{dh}{h} \right| + \left| \frac{dy}{y} \right| + \left| \frac{d\dot{V}}{\dot{V}} \right| \quad \circ \quad (4.38)$$