R. Reindl

Aufgabe 1: Pendelspiel

Jedes Pendel (harmonischer Oszillator) hat die Schwingungsdauer

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 1{,}1\,\mathrm{s} \tag{1.1}$$

Stoß zweier Kugeln gleicher Masse:

$$mv_1 + mv_2 = mu_1 + mu_2 \qquad \Longrightarrow \qquad v_1 + v_1 = u_1 + u_2 \tag{1.2}$$

$$\frac{m}{2}v_1^2 + \frac{m}{2}mv_2^2 = \frac{m}{2}mu_1^2 + \frac{m}{2}mu_2^2 \qquad \Longrightarrow \qquad v_1^2 + v_1^2 = u_1^2 + u_2^2 \tag{1.3}$$

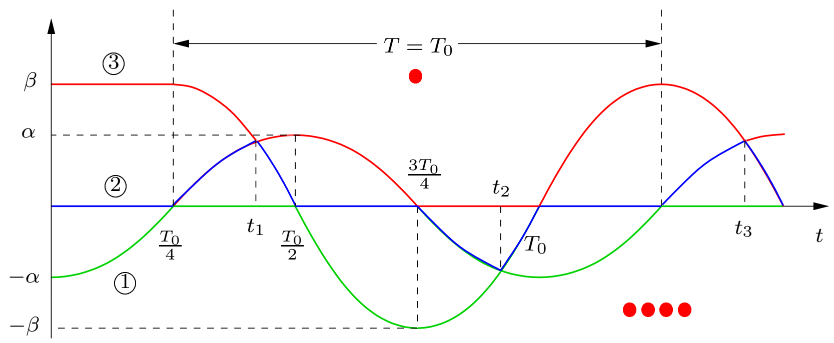
Das System (1.2) und (1.3) hat die Lösungen

$$\underbrace{v_1 = u_1,\ \ v_2 = u_2}_{\text{Vorbeiflug, Durchdringung}} \qquad \text{und} \qquad \underbrace{v_1 = u_2,\ \ v_2 = u_1}_{\text{echter Stoß}} \tag{1.4}$$

wobei nur

$$v_1 = u_2,\ \ v_2 = u_1 \tag{1.5}$$

physikalisch sinnvoll ist.



Die maximale Auslenkung von ① ist $-\beta$ zur Zeit $\frac{3}{4}T_0$, d.h. die maximale Höhe ist

$$h_{\max} = L(1 - \cos\beta) \tag{1.6}$$

Punkte: $\boxed{13}$

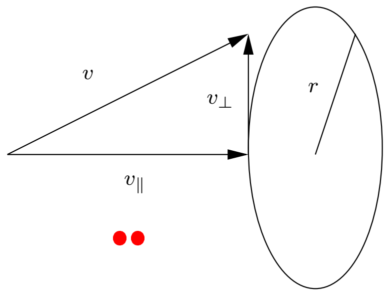
Aufgabe 2: Kathodenstrahlröhre

$$eU = \frac{m}{2}v^2 \tag{2.1}$$

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \tag{2.2}$$

$$v_\perp = v \sin\varphi \tag{2.3}$$

$$v_\parallel = v \cos\varphi \approx v \tag{2.4}$$



$$\frac{mv_\perp^2}{r} = ev_\perp B \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{mv_\perp}{eB} \tag{2.5}$$

Flugdauer ist ganzzahliges Vielfaches von der Umlaufdauer :

$$\frac{L}{v_\parallel} = k \cdot \frac{2r\pi}{v_\perp} = \frac{2\pi k m}{eB} \approx \frac{L}{v} \tag{2.6}$$

$$B = k \cdot \frac{2\pi m v}{eL} = k \cdot \frac{2\pi m}{eL}\sqrt{\frac{2eU}{m}} = k \cdot \frac{2\pi}{L}\sqrt{\frac{2mU}{e}} \tag{2.7}$$

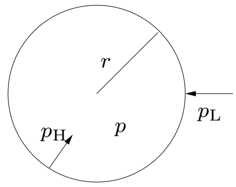
z.B. für $k = 1$

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 U}{B^2 L^2} \tag{2.8}$$

Punkte: $\boxed{13}$

Aufgabe 3: Seifenblasen

(a) Von der Hülle erzeugter Druck:



$$p_\mathrm{H} = \frac{\alpha}{r} \tag{3.1}$$

Gesamtdruck in der Blase:

$$p = p_\mathrm{H} + p_\mathrm{L} = p_\mathrm{L} + \frac{\alpha}{r} \tag{3.2}$$

Die Oberfläche der Seifenhaut (innen und außen) ist

$$A = 2 \cdot 4\pi r^2 = 8\pi r^2 \tag{3.3}$$

Von der Haut geleistete Arbeit:

$$\mathrm{d}W = p_\mathrm{H} \cdot 4\pi r^2 \,\mathrm{d}r = \frac{\alpha}{r} \cdot 4\pi r^2 \,\mathrm{d}r = 4\alpha\pi r \,\mathrm{d}r \tag{3.4}$$

Mit

$$\mathrm{d}A = 16\pi r \,\mathrm{d}r \tag{3.5}$$

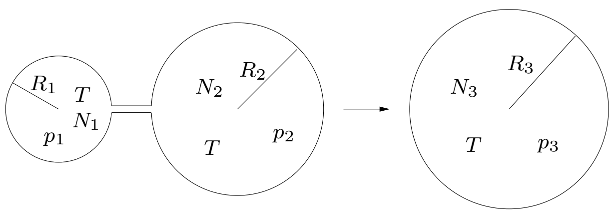
folgt dann

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}A} = \frac{4\alpha\pi r \,\mathrm{d}r}{16\pi r \,\mathrm{d}r} = \frac{\alpha}{4} \tag{3.6}$$

oder

$$\alpha = 4\sigma \tag{3.7}$$

(b) Wegen $R_1 < R_2$ ist $p1 = \frac{\alpha}{R_1} + p_\mathrm{L} > \frac{\alpha}{R_2} + p_\mathrm{L} = p_2$ und damit zieht sich die kleinere Blase zusammen, bis sie verschwindet.



Bei gleicher Temperatur in den Blasen gilt für die Teilchenzahlen

$$N_1 + N_2 = N_3 \tag{3.8}$$

und es folgt aus der allgemeinen Gasgleichung $pV = NkT$

$$\left(\frac{4\sigma}{R_1} + p_\mathrm{L}\right) R_1^3 + \left(\frac{4\sigma}{R_2} + p_\mathrm{L}\right) R_2^3 = \left(\frac{4\sigma}{R_3} + p_\mathrm{L}\right) R_3^3 \tag{3.9}$$

Mit $p_\mathrm{L} \gg \frac{4\sigma}{R_i}$ folgt daraus

$$R_3 \approx \sqrt[3]{R_1^3 + R_2^3} \tag{3.10}$$

(c) Aus (3.9) folgt

$$\sigma = \frac{p_\mathrm{L}}{4} \cdot \frac{R_3^3 - R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 + R_2^2 - R_3^2} \tag{3.11}$$

	R_1 in m	R_2 in m	R_3 in m	σ in $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$
1	0,020	0,051	0,052	$-3{,}6$
2	0,025	0,044	0,047	214,06
3	0,032	0,053	0,057	151,88
4	0,038	0,057	0,062	$-51,15$
5	0,045	0,061	0,068	$-81,86$
			Summe:	229

●● $\overline{\sigma} = 46$

Zur Fehlerabschätzung wählen wir einmal

$$R_1' = R_1 + 1\,\mathrm{mm}, \quad R_2' = R_2 + 1\,\mathrm{mm}, \quad R_3' = R_3 - 1\,\mathrm{mm}$$

	R_1 in m	R_2 in m	R_3 in m	σ in $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$
1	0,021	0,052	0,051	$\boxed{-791}$
2	0,026	0,045	0,046	-486
3	0,033	0,054	0,056	-512
4	0,039	0,058	0,061	-590
5	0,046	0,062	0,067	-593
			Summe:	-2971

$\overline{\sigma} = -594$

und zum anderen

$$R_1' = R_1 - 1\,\mathrm{mm}, \quad R_2' = R_2 - 1\,\mathrm{mm}, \quad R_3' = R_3 + 1\,\mathrm{mm}$$

	R_1 in m	R_2 in m	R_3 in m	σ in $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$
1	0,019	0,05	0,053	$\boxed{8182}$
2	0,024	0,043	0,048	3566
3	0,031	0,052	0,058	2053
4	0,037	0,056	0,063	1109
5	0,044	0,06	0,069	881
			Summe:	15791

$\overline{\sigma} = 3158$

$$-800\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} < \sigma < 8000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$ ●●

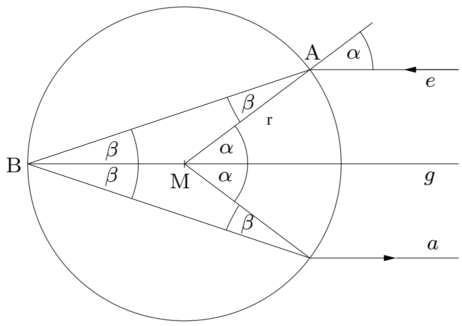
Die Methode ist also völlig unbrauchbar. Der Grund sind die Differenzen fast gleicher Größen, besonders im Nenner. ●

Punkte: $\boxed{14}$

Aufgabe 4: Reflektoren

Wegen $a \| e$ folgt aus Symmetriegründen auch $g \| e$ und damit $\alpha = 2\beta$.
Für achsennahe Strahlen sind α und β klein und es folgt

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \frac{\alpha}{\beta} = 2 \qquad (4.1)$$



Punkte: $\boxed{11}$

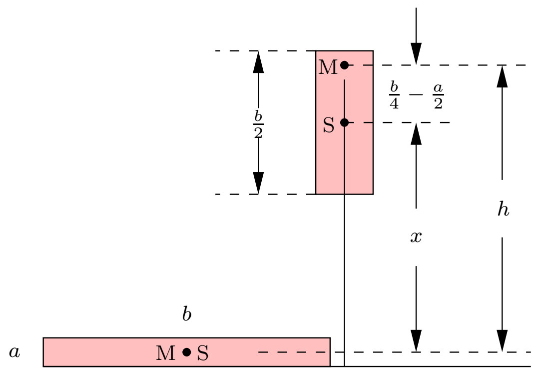
Aufgabe 5: Junioraufgabe–Kletternde Raupen

Wir nehmen eine quaderförmige Raupe der Länge b mit dem Querschnitt $A = a^2$ und der Dichte $\varrho = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ an.
Aus $m = 10\,\mathrm{g}$ folgt dann

$$V = a^2 b = 10\,\mathrm{cm}^3 \qquad (5.1)$$

und daraus

$$a = \sqrt{\frac{V}{b}} \qquad (5.2)$$



Unter der Annahme, dass das Volumen der Raupe konstant ist, muss ihr Schwerpunkt S um

$$x = h - \frac{b}{4} + \frac{a}{2} \qquad (5.3)$$

gehoben werden. Dabei wird die Arbeit

$$W = mgx = mg\left(h - \frac{b}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{V}{b}}\right) \qquad (5.4)$$

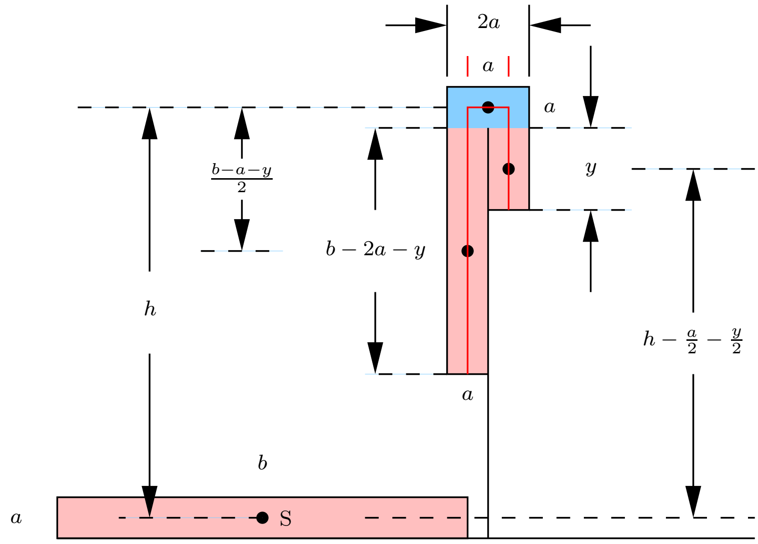
verrichtet. Mit $h = 10\,\mathrm{cm}$, $b_1 = 10\,\mathrm{cm}$ und $b_2 = 20\,\mathrm{cm}$ folgt

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{h - \frac{b_1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{V}{b_1}}}{h - \frac{b_2}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{V}{b_2}}} = \frac{8}{5 + \frac{1}{4}\sqrt{2}} \approx 1{,}494 \qquad (5.5)$$

Unter Vernachlässigung von $\frac{a}{2}$ in (5.3) folgt

$$\frac{W_1}{W_2} \approx \frac{h - \frac{b_1}{4}}{h - \frac{b_2}{4}} = \frac{7{,}5}{5} = \frac{3}{2} \qquad (5.6)$$

Länge der Mittelfaser der Raupe: b



$$W(y) = \varrho g a^2 \left[\left(h - \frac{b-a-y}{2} \right) (b-2a-y) + \left(h - \frac{a}{2} - \frac{y}{2} \right) y + 2ah \right] =$$
$$= \varrho g a^2 \left[-y^2 + (b-2a)y + bh - a^2 - \frac{1}{2} b^2 + \frac{3}{2} ab \right] =$$
$$= \varrho g a^2 \left[- \left(y - \frac{b-2a}{2} \right)^2 + b \left(\frac{2a-b}{4} + h \right) \right] \tag{5.7}$$

$W(y)$ ist maximal für

$$y_{\max} = \frac{b-2a}{2} = \frac{b}{2} - a \tag{5.8}$$

und es ist

$$W_{\max} = g \underbrace{\varrho a^2 b}_{m} \left(h - \frac{b}{4} + \frac{a}{2} \right) \tag{5.9}$$

Sehr dünne Raupe (a in der eckigen Klammer in (5.7) vernachlässigen):

$$W(y) = \varrho g a^2 \left[\left(h - \frac{b-y}{2} \right) (b-y) + \left(h - \frac{y}{2} \right) y \right] =$$
$$= \varrho g a^2 \left[-y^2 + by + bh - \frac{1}{2} b^2 \right] =$$
$$= \frac{mg}{b} \left[- \left(y - \frac{b}{2} \right)^2 + bh - \frac{b^2}{4} \right] \tag{5.10}$$

$W(y)$ ist maximal für

$$y_{\max} = \frac{b}{2} \tag{5.11}$$

und es ist

$$W_{\max} = mg \left(h - \frac{b}{4} \right), \tag{5.12}$$

Punkte: $\boxed{10}$