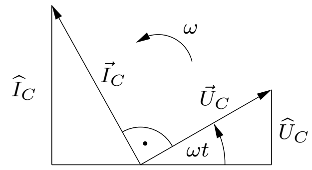
44. Internationale Physik-Olympiade – Dänemark 2013
Lösungen zur zweiten Runde
R. Reindl

Aufgabe 1: Black-Boxen

(a) Kapazität: $\boxed{9}$

$$\widehat{U}_C = U_C \sin \omega t \tag{1.1}$$

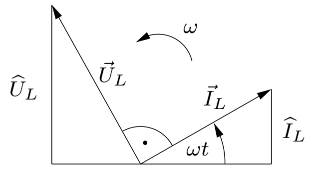
$$\widehat{I}_C = I_C \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ mit } I_C = \omega C U_C \tag{1.2}$$



Induktivität:

$$\widehat{U}_L = U_L \sin \omega t \tag{1.3}$$

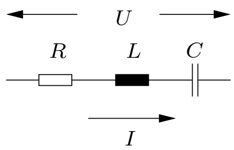
$$\widehat{I}_L = I_L \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ mit } I_L = \frac{U_L}{\omega L} \tag{1.4}$$

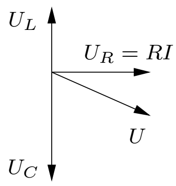


Mögliche Schaltungen für die Boxen A und B mit $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$:

Schaltung 1: $I_R = I_C = I_L = I$

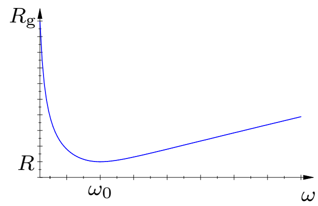
$$U^2 = R^2 I^2 + (U_C - U_L)^2 = \\ = R^2 I^2 + \left(\frac{I}{\omega C} - I\omega L\right)^2 \tag{1.5}$$





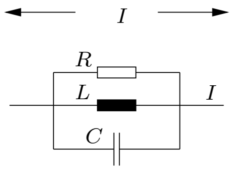
$$R_\mathrm{g} = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2} \tag{1.6}$$

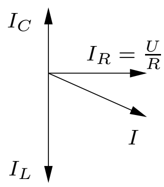
$$R_\mathrm{g}(\omega_0) = R, \quad \lim_{\omega\to 0} R_\mathrm{g}(\omega) = \lim_{\omega\to\infty} R_\mathrm{g}(\omega) = \infty \tag{1.7}$$



Schaltung 2: $U_R = U_C = U_L = U$

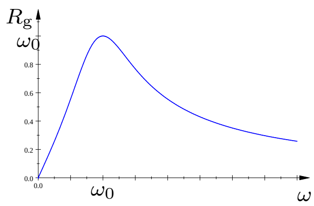
$$I^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2 = \\ = \frac{U^2}{R^2} + \left(\frac{U}{\omega L} - U\omega C\right)^2 \tag{1.8}$$





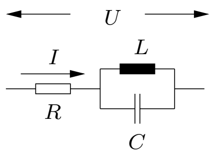
$$R_\mathrm{g} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} \tag{1.9}$$

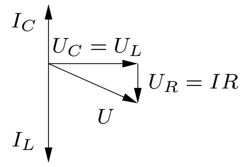
$$R_\mathrm{g}(\omega_0) = R, \quad \lim_{\omega\to 0} R_\mathrm{g}(\omega) = \lim_{\omega\to\infty} R_\mathrm{g}(\omega) = 0 \tag{1.10}$$



Schaltung 3: $U_C = U_L$

$$I = I_L - I_C = U_C\left(\frac{1}{\omega L} - \omega R\right) \tag{1.11}$$

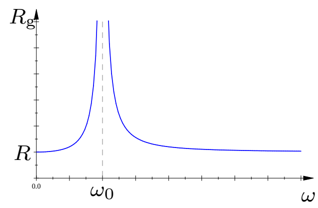




$$\begin{aligned} U^2 &= I^2R^2 + U_C^2 = \\ &= I^2R^2 + \frac{I^2}{\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$R_{\mathrm{g}} = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} \tag{1.13}$$

$$\lim_{\omega\to\omega_0} R_{\mathrm{g}}(\omega) = \infty, \quad \lim_{\omega\to 0} R_{\mathrm{g}}(\omega) = \lim_{\omega\to\infty} R_{\mathrm{g}}(\omega) = R \tag{1.14}$$

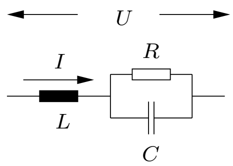


Die weiteren Schaltungen bearbeiten wir mit komplexen Widerständen:

$$Z_R = R, \quad Z_C = -\frac{i}{\omega C}, \quad Z_L = i\omega L \tag{1.15}$$

Für die komplexen Widerstände gelten die bekannten Regeln der Reihen- und Parallelschaltung. Der gesuchte Wechselstromwiderstand ist der Betrag des komplexen Widerstandes.

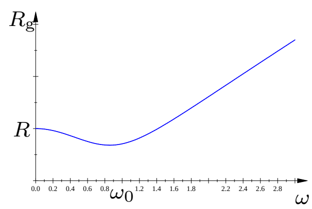
Schaltung 4:



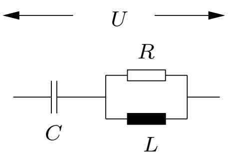
$$\begin{aligned} Z_{\substack{C\\LR}} &= Z_L + \frac{Z_R Z_C}{Z_R + Z_C} = i\omega L + \frac{-\frac{Ri}{\omega C}}{R - \frac{i}{\omega C}} = \\ &= \frac{R}{1+\omega^2R^2C^2} + i\left(\omega L - \frac{\omega R^2 C}{1+\omega^2R^2C^2}\right) \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$R_{\mathrm{g}} = \left|Z_{\substack{C\\LR}}\right| = \sqrt{\frac{R^2(1-\omega^2LC)^2 + \omega^2L^2}{1+\omega^2R^2C^2}} \tag{1.17}$$

$$R_{\mathrm{g}}(\omega_0) = \frac{L}{\sqrt{C(L+R^2C)}}, \quad R_{\mathrm{g}}(0) = R, \quad \lim_{\omega\to\infty} R_{\mathrm{g}}(\omega) = \infty \tag{1.18}$$



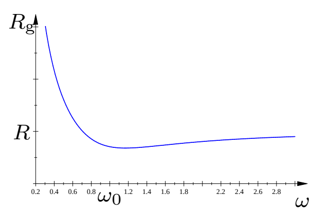
Schaltung 5:



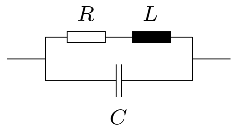
$$\begin{aligned} Z_{\substack{L\\CR}} &= Z_C + \frac{Z_R Z_L}{Z_R + Z_L} = -\frac{i}{\omega C} + \frac{Ri\omega L}{R + Ri\omega L} = \\ &= \frac{R^2\omega^2L^2}{R^2+\omega^2L^2} + i\left(\frac{R^2\omega L}{R^2+\omega^2L^2} - \frac{1}{\omega C}\right) \end{aligned} \tag{1.19}$$

$$R_{\mathrm{g}} = \left|Z_{\substack{L\\CR}}\right| = \sqrt{\frac{R^2(1-\omega^2LC)^2 + \omega^2L^2}{\omega^2C^2(R^2+\omega^2L^2)}} \tag{1.20}$$

$$R_{\mathrm{g}}(\omega_0) = \frac{L}{\sqrt{C(L+R^2C)}}, \quad \lim_{\omega\to 0} R_{\mathrm{g}}(\omega) = \infty, \quad \lim_{\omega\to\infty} R_{\mathrm{g}}(\omega) = R \tag{1.21}$$

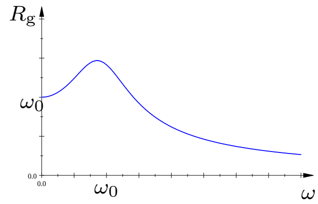


Schaltung 6:



$$\frac{1}{Z_{\frac{RL}{C}}} = \frac{1}{Z_{RL}} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{R + i\omega L} - \frac{\omega C}{i} =$$

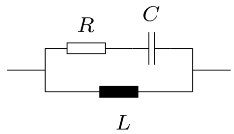
$$= \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right) \qquad (1.22)$$



$$R_\mathrm{g} = \left|Z_{\frac{RL}{C}}\right| = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \qquad (1.23)$$

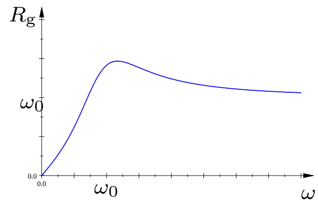
$$R_\mathrm{g}(\omega_0) = \frac{\sqrt{L(L + R^2 C)}}{RC}, \quad R_\mathrm{g}(0) = R, \quad \lim_{\omega\to\infty} R_\mathrm{g}(\omega) = 0 \qquad (1.24)$$

Schaltung 7:



$$\frac{1}{Z_{\frac{RC}{L}}} = \frac{1}{Z_{RC}} + \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{R - \frac{i}{\omega C}} + \frac{1}{i\omega L} =$$

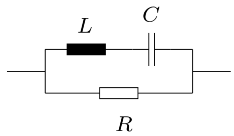
$$= \frac{RC^2\omega^2}{1 + R^2C^2\omega^2} + i\left(\frac{\omega C}{1 + R^2C^2\omega^2} - \frac{1}{\omega L}\right) \qquad (1.25)$$



$$R_\mathrm{g} = \left|Z_{\frac{RC}{L}}\right| = \sqrt{\frac{\omega^2 L^2 (1 + R^2 C^2 \omega^2)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \qquad (1.26)$$

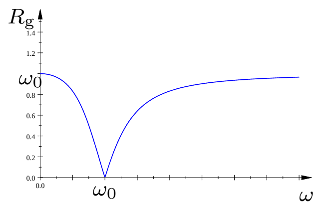
$$R_\mathrm{g}(\omega_0) = \frac{\sqrt{L(L + R^2 C)}}{RC}, \quad R_\mathrm{g}(0) = 0, \quad \lim_{\omega\to\infty} R_\mathrm{g}(\omega) = R \qquad (1.27)$$

Schaltung 8:



$$\frac{1}{Z_{\frac{LC}{R}}} = \frac{1}{Z_{LC}} + \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{i\omega L - \frac{i}{\omega C}} + \frac{1}{R} =$$

$$= \frac{1}{R} - \frac{i}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} \qquad (1.28)$$



$$R_\mathrm{g} = \left|Z_{\frac{LC}{R}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}} \qquad (1.29)$$

$$R_\mathrm{g}(\omega_0) = 0, \quad R_\mathrm{g}(0) = R, \quad \lim_{\omega\to\infty} R_\mathrm{g}(\omega) = R \qquad (1.30)$$

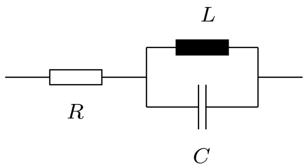
Zusammenfassung:

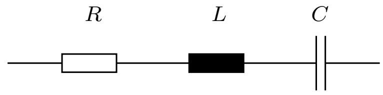
Box A:

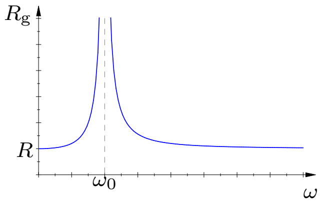
Box B:

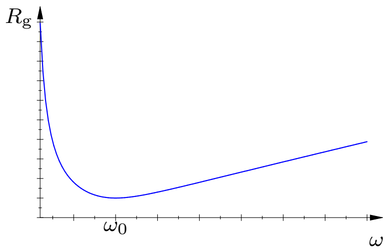
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$R_0 = R$$



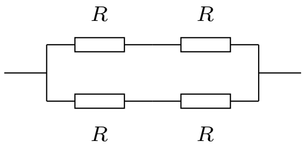




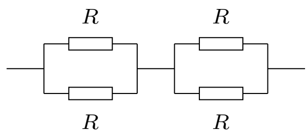


Box C:

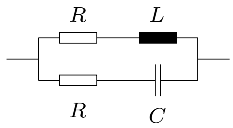
Schaltung 9: $R_g = R$



Schaltung 10: $R_g = R$



Schaltung 11:



$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z} &= \frac{1}{R + i\omega L} + \frac{1}{R - \frac{i}{\omega C}} = \\
&= \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R\omega^2 C^2}{1 + R^2\omega^2 C^2} + i\left(\frac{\omega C}{1 + R^2\omega^2 C^2} - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right) \\
&= \frac{R(1 + \omega^2 R^2 C^2)}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\frac{\omega(L - CR^2)(CL\omega^2 - 1)}{(1 + R^2\omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)} \qquad (1.31)
\end{aligned}$$

Der Realteil von $\frac{1}{Z}$ ist unabhängig von ω gleich $\frac{1}{R}$, wenn

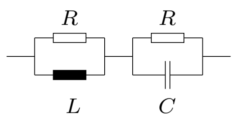
$$\frac{R(1 + \omega^2 R^2 C^2)}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{R} \quad \Longleftrightarrow \quad R^2(1 + \omega^2 R^2 C^2) = R^2 + \omega^2 L^2 \qquad (1.32)$$

d.h. wenn

$$L = R^2 C \qquad (1.33)$$

In diesem Fall ist der Imaginärteil von $\frac{1}{Z}$ null, d.h. $Z = R$.

Schaltung 12:



$$\begin{aligned}
Z &= \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L}} + \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{\omega C}{i}} = \\
&= \frac{R\omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R}{1 + R^2\omega^2 C^2} + i\left(\frac{R^2\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} - \frac{R^2\omega C}{1 + R^2\omega^2 C^2}\right) \\
&= \frac{R(R^2 + 2\omega^2 L^2 + \omega^4 R^2 L^2 C^2)}{(R^2 + \omega^2 L^2)(1 + R^2\omega^2 C^2)} + i\frac{\omega R^2(L - CR^2)(1 - CL\omega^2)}{(1 + R^2\omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)} \\
&\qquad (1.34)
\end{aligned}$$

Der Imaginärteil von Z ist null für $L = R^2 C$. In diesem Fall ist

$$Z = \frac{R^3(1 + 2\omega^2 R^2 C^2 + \omega^4 R^4 C^4)}{R^2(1 + \omega^2 R^2 C^2)(1 + \omega^2 R^2 C^2)} = R \qquad (1.35)$$

(b) Bei Box C mit den Schaltungen 11 und 12 gilt $\boxed{3{,}5}$

$$R_0 = R, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \text{ und } L = R^2 C \tag{1.36}$$

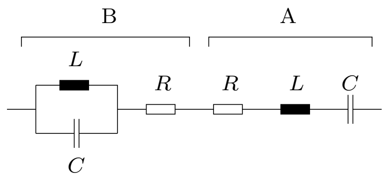
woraus folgt

$$R = R_0 = 100\,\Omega \tag{1.37}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{R_0^2 C^2} \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{1}{R_0 \omega_0} = 2{,}5 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{s}}{\Omega} = 250\,\mathrm{nF} \tag{1.38}$$

$$L = R_0^2 C = \frac{R_0}{\omega_0} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\Omega\mathrm{s} = 2{,}5\,\mathrm{mH} \tag{1.39}$$

(c) Die Reihenschaltung von Box A und Box B: $\boxed{4{,}5}$



$$\frac{1}{Z_{\substack{C\\L}}} = \frac{1}{i\omega L} - \frac{\omega C}{i} \quad \Longrightarrow \quad Z_{\substack{C\\L}} = \frac{i}{\frac{1}{\omega L} - \omega C} \tag{1.40}$$

$$Z = \frac{i}{\frac{1}{\omega L} - \omega C} + i\omega L - \frac{i}{\omega C} + 2R = 2R \quad \Longrightarrow \tag{1.41}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\omega L} - \omega C} + \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \tag{1.42}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\omega L} - \omega C} = \frac{1}{\omega C} - \omega L \tag{1.43}$$

$$\frac{1}{\omega^2 LC} + \omega^2 LC - 2 = 1 \tag{1.44}$$

$$(\omega^2 LC)^2 - 3\omega^2 LC = -1 \tag{1.45}$$

$$\omega^2 LC = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \tag{1.46}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}} \approx \begin{cases} 0{,}62\,\omega_0 \\ 1{,}62\,\omega_0 \end{cases} \tag{1.47}$$

Aufgabe 2: Rotierende Flüssigkeiten

(a) Druck in der rotierenden Flüssigkeit: $\boxed{9}$

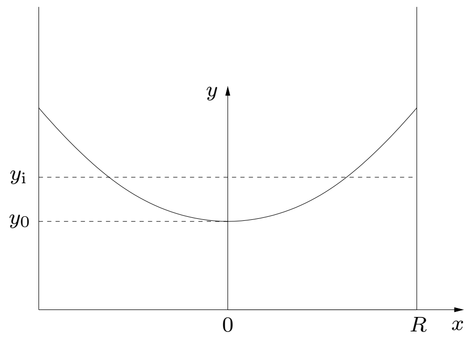
$$p(x,y) = p_\mathrm{L} + \varrho g(y_0 - y) + \frac{\varrho\omega^2}{2}x^2 \tag{2.1}$$

An der Oberfläche gilt

$$p(x,y) = p_\mathrm{L} \tag{2.2}$$

und damit

$$y(x) = y_0 + \frac{\omega^2}{2g}x^2 \tag{2.3}$$



Das Volumen der rotierenden muss gleich dem Volumen der ruhenden Flüssigkeit sein:

$$\int_0^R 2x\pi y(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^R \left(y_0 x + \frac{\omega^2}{2g}x^3\right)\,\mathrm{d}x = R^2\pi y_\mathrm{i} \tag{2.4}$$

$$2\pi\left(\frac{y_0R^2}{2} + \frac{\omega^2}{8g}R^4\right) = R^2\pi y_\mathrm{i} \tag{2.5}$$

$$y_0 = y_\mathrm{i} - \frac{\omega^2}{4g}R^2 \tag{2.6}$$

$$y(x) = y_\mathrm{i} + \frac{\omega^2}{2g}\left(x^2 - \frac{R^2}{2}\right) \tag{2.7}$$

(2.7) gilt nur, wenn

$$y(0) = y_\mathrm{i} - \frac{\omega^2R^2}{4g} \geqq 0 \tag{2.8}$$

d.h.

$$\omega \leqq \omega_1 = \frac{2}{R}\sqrt{gy_\mathrm{i}} = 2\sqrt{\frac{g}{R}} \tag{2.9}$$

Für den Grenzfall $\omega = \omega_1$ schwappt die Flüssigkeit noch nicht über, denn

$$y(R,\omega_1) = y_\mathrm{i} + \frac{\omega_1^2R^2}{4g} = y_\mathrm{i} + R = 2R = 0{,}8H \tag{2.10}$$

Für $\omega > \omega_1$ hat y Nullstellen bei $\pm x_0$. Aus (2.3) folgt

$$y_0 = -\frac{\omega^2x_0^2}{2g} \tag{2.11}$$

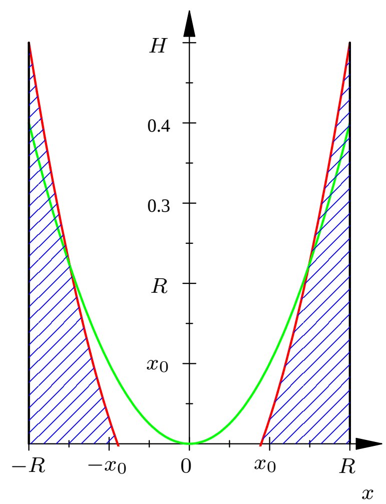
und damit

$$y(x) = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 - x_0^2) \text{ für } |x| \geqq x_0 \tag{2.12}$$

Die Normierungsbedingung (2.4) lautet jetzt

$$\frac{\omega^2}{2g}\cdot 2\pi\int_{x_0}^R (x^3 - xx_0^2)\,\mathrm{d}x = R^2\pi y_\mathrm{i} = R^3\pi \tag{2.13}$$

$$\frac{R^4}{4} - \frac{R^2x_0^2}{2} + \frac{x_0^4}{4} = \frac{R^3g}{\omega^2} \tag{2.14}$$



$$x_0^2 = R^2 \overset{(+)}{-} \frac{2R}{\omega}\sqrt{gR} = R^2 - R^2\frac{\omega_1}{\omega} \tag{2.15}$$

$$x_0 = R\sqrt{1 - \frac{\omega_1}{\omega}} \tag{2.16}$$

Für $\omega > \omega_1$ gilt also

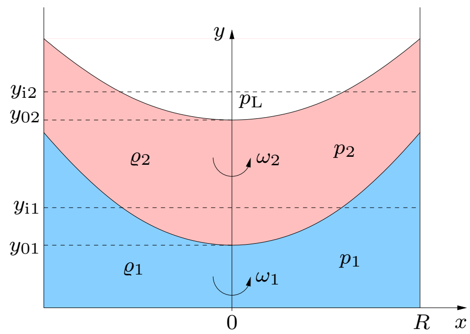
$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \leqq x_0 \\ \frac{\omega^2}{2g}\left(x^2 - R^2 + R^2 \cdot \frac{\omega_1}{\omega}\right) & \text{für } |x| > x_0 \end{cases} \tag{2.17}$$

$$y(R) = \frac{\omega\omega_1 R^2}{2g} = \omega R\sqrt{\frac{R}{g}} \tag{2.18}$$

Die Flüssigkeit erreicht den Gefäßrand, wenn

$$y(R) = \omega R\sqrt{\frac{R}{g}} = H = \frac{R}{0{,}4} \quad\Longrightarrow\quad \omega = \omega_2 = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{g}{R}} = 17{,}5\,\frac{1}{\mathrm{s}} \tag{2.19}$$

(b) 8



$$p_2(x,y) = p_{\mathrm{L}} + \varrho_2 g(y_{02} - y) + \frac{\varrho_2\omega_2^2}{2}x^2 \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} p_1(x,y) = p_{\mathrm{L}} + \varrho_2 g(y_{02} - y_{01}) &+ \\ + \varrho_1 g(y_{01} - y) &+ \frac{\varrho_1\omega_1^2}{2}x^2 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Wegen der Stetigkeit von p an der Grenzfläche $y_1(x)$ gilt $p_1(x,y_1) = p_2(x,y_1)$:

$$p_{\mathrm{L}} + \varrho_2 g(y_{02} - y_{01}) + \varrho_1 g(y_{01} - y_1) + \frac{\varrho_1\omega_1^2}{2}x^2 = p_{\mathrm{L}} + \varrho_2 g(y_{02} - y_1) + \frac{\varrho_2\omega_2^2}{2}x^2 \tag{2.22}$$

und damit

$$y_1(x) = y_{01} + \frac{\varrho_1\omega_1^2 - \varrho_2\omega_2^2}{2g(\varrho_1 - \varrho_2)}\,x^2 \tag{2.23}$$

Aus $V_1 = \pi R^2 y_{i1}$ folgt wie oben

$$y_{01} = y_{i1} - \frac{\varrho_1\omega_1^2 - \varrho_2\omega_2^2}{4g(\varrho_1 - \varrho_2)}\,R^2 \tag{2.24}$$

und damit

$$y_1(x) = y_{i1} + \frac{\varrho_1\omega_1^2 - \varrho_2\omega_2^2}{2g(\varrho_1 - \varrho_2)}\left(x^2 - \frac{R^2}{2}\right) \tag{2.25}$$

Die Gleichung der Oberfläche errechnet sich wie in (a) zu

$$y_2(x) = y_{i2} + \frac{\omega_2^2}{2g}\left(x^2 - \frac{R^2}{2}\right) \tag{2.26}$$

(c) Mit den angegebenen Daten gilt

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{2}{5}H + \frac{\varrho_1\omega_1^2 - \frac{4}{5}\varrho_1\omega_2^2}{2g\cdot\frac{1}{5}\varrho_1}\left(x^2 - \frac{4}{25}H^2\right) \\ &= \frac{2}{5}H - \frac{5\omega_1^2 - 4\omega_2^2}{25g}H^2 + \frac{5\omega_1^2 - 4\omega_2^2}{2g}\,x^2 \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$y_2(x) = \frac{7}{10}H - \frac{\omega_2^2}{25g}H^2 + \frac{\omega_2^2}{2g}\,x^2 \tag{2.28}$$

i. Mit $\omega_1 = 0$ folgt $\boxed{2{,}5}$

$$y_1(x) = \frac{2}{5}H + \frac{4\omega_2^2}{25g}H^2 - \frac{2\omega_2^2}{g}\,x^2 \tag{2.29}$$

Bedingung 1:

$$y_1(0) = \frac{2}{5}H + \frac{4\omega_2^2}{25g}H^2 \leqq y_2(0) = \frac{7}{10}H - \frac{\omega_2^2}{25g}H^2 \tag{2.30}$$

$$\omega_2 \leqq \sqrt{\frac{3g}{2H}} = \tilde{\omega}_2 = 5{,}4\,\frac{1}{\mathrm{s}} \tag{2.31}$$

Bedingung 2:

$$y_1(R) = \frac{2}{5}H + \frac{4\omega_2^2}{25g}H^2 - \frac{2\omega_2^2}{g}\cdot\frac{4}{25}H^2 = \frac{2}{5}H - \frac{4\omega_2^2}{25g}H^2 > 0 \tag{2.32}$$

$$\omega_2 \leqq \sqrt{\frac{5g}{2H}} = 7{,}0\,\frac{1}{\mathrm{s}} \tag{2.33}$$

Bedingung 3:

$$y_2(R) = \frac{7}{10}H - \frac{\omega_2^2}{25g}H^2 + \frac{\omega_2^2}{2g}\cdot\frac{4}{25}H^2 = \frac{7}{10}H + \frac{\omega_2^2}{25g}H^2 \leqq H \tag{2.34}$$

$$\omega_2 \leqq \sqrt{\frac{15g}{2H}} = 12{,}1\,\frac{1}{\mathrm{s}} \tag{2.35}$$

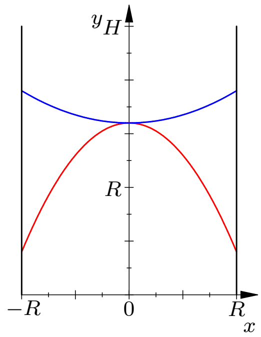
Mit $\omega_1 = 0$ und $\omega_2 = \tilde{\omega}_2$ gilt

$$y_1(x) = \frac{16}{25}H - \frac{3}{H}\,x^2 = \left(\frac{16}{25} - 3\left(\frac{x}{H}\right)^2\right)H \tag{2.36}$$

$$y_2(x) = \frac{16}{25}H + \frac{3}{4H}\,x^2 = \left(\frac{16}{25} + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{H}\right)^2\right)H \tag{2.37}$$

$$y_1(0) = y_2(0) = \frac{16}{25}H = 0{,}64H \tag{2.38}$$

$$y_1(R) = \frac{4}{25}H = 0{,}16H, \quad y_2(R) = \frac{19}{25}H = 0{,}76H \tag{2.39}$$



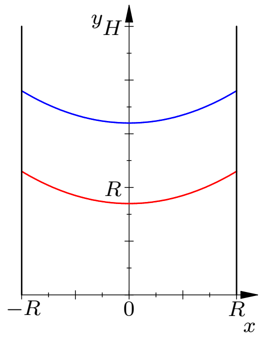
ii. Mit $\omega_1 = \omega_2 = \tilde{\omega}_2$ gilt $\boxed{2}$

$$y_1(x) = \frac{17}{50}H + \frac{3}{4H}\,x^2 = \left(\frac{17}{50} + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{H}\right)^2\right)H \tag{2.40}$$

$$y_2(x) = \frac{16}{25}H + \frac{3}{4H}\,x^2 = \left(\frac{16}{25} + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{H}\right)^2\right)H \tag{2.41}$$

$$y_1(0) = \frac{17}{50}H = 0{,}34H, \quad y_2(0) = \frac{16}{25}H = 0{,}64H \tag{2.42}$$

$$y_1(R) = \frac{23}{50}H = 0{,}46H, \quad y_2(R) = \frac{19}{25}H = 0{,}76H \tag{2.43}$$



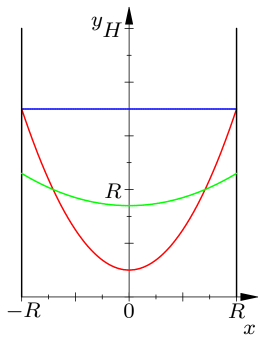
iii. Mit $\omega_1 = \tilde{\omega}_2$ und $\omega_2 = 0$ gilt $\boxed{1{,}5}$

$$y_1(x) = \frac{1}{10}H + \frac{15}{4H}\,x^2 = \left(\frac{1}{10} + \frac{15}{4}\left(\frac{x}{H}\right)^2\right)H \tag{2.44}$$

$$y_2(x) = 0{,}7H \tag{2.45}$$

$$y_1(0) = \frac{1}{10}H = 0{,}1H \tag{2.46}$$

$$y_1(R) = \frac{7}{10}H = 35\,\mathrm{cm} \tag{2.47}$$



Stärker gekrümmt, Faktor bei x^2 ist $\frac{\varrho_1}{\varrho_1-\varrho_2} = 5$ mal größer.

Aufgabe 3: Schrotturm

Dichte von Luft:	$\varrho_{\text{Luft}} = 1{,}29\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Dichte von Blei:	$\varrho_{\text{Pb}} = 11340\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Erdbeschleunigung:	$g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^3}$
Schmelztemperatur von Blei:	$T_{\text{Pb}} = 601\,\text{K}$
Spez. Wärmek. von Blei:	$c_{\text{Pb}} = 131\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\,\text{K}}$
Spez. Schmelzwärme von Blei:	$\kappa_{\text{Pb}} = 23{,}4\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$
Wärmeleitfähigkeit von Luft:	$\lambda_{\text{Luft}} = 2{,}6 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{W}}{\text{m}\,\text{K}}$
Dynamische Viskosität von Luft:	$\eta_{\text{Luft}} = 1{,}7 \cdot 10^{-5}\,\text{Pa}\,\text{s}$
Kugeldurchmesser:	$D = 4\,\text{mm}$
Lufttemperatur:	$T_0 = 293\,\text{K}$
Siedetemperatur Wasser:	$T_{\text{S}} = 373\,\text{K}$
Strahlungskonstante:	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{J}}{\text{m}^2\,\text{s}\,\text{K}^4}$
Oberfläche der Kugeln:	$A = \pi D^2 = 5{,}0 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^2$

(a) Während des Erstarrens haben die Kugeln die konstante Temperatur T_{Pb}. Die abgestrahlte Wärmeleistung ist $\boxed{6}$

$$P_{\text{S}}(T) = \sigma A(T^4 - T_0^4) \leqq \sigma A(T_{\text{Pb}}^4 - T_0^4) = 0{,}35\,\text{W} \tag{3.1}$$

Durch Wärmeleitung verliert die Kugel

$$P_{\text{W}}(T) = \frac{\lambda_{\text{Luft}}}{D} A(T - T_0) \leqq \frac{\lambda_{\text{Luft}}}{D} A(T_{\text{Pb}} - T_0) = 0{,}10\,\text{W} \tag{3.2}$$

Die Kombination der drei gegebenen Gleichungen ergibt

$$P_{\text{KW}}(T) = 0{,}37\pi\lambda_{\text{Luft}} D \left(\frac{\varrho_{\text{Luft}} D}{\eta_{\text{Luft}}}\right)^{\frac{3}{5}} (T - T_0) v^{\frac{3}{5}} \tag{3.3}$$

oder

$$P_{\text{KW}} = \beta(T - T_0) v^{\frac{3}{5}} \tag{3.4}$$

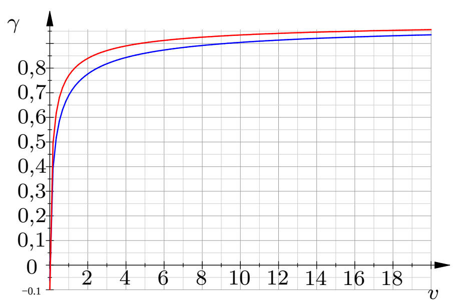
mit

$$\beta = 0{,}37\pi\lambda_{\text{Luft}} D \left(\frac{\varrho_{\text{Luft}} D}{\eta_{\text{Luft}}}\right)^{\frac{3}{5}} = 0{,}00373\,\frac{\text{W}}{\text{K}} \cdot \left(\frac{\text{s}}{\text{m}}\right)^{\frac{3}{5}} \tag{3.5}$$

Das Verhältnis der durch Konvektion zur gesamten abgegeben Leistung ist

$$\gamma = \frac{P_{\text{K}}(T)}{P(T)} = \frac{P_{\text{KW}}(T) - P_{\text{W}}(T)}{P_{\text{KW}}(T) + P_{\text{S}}(T)} \tag{3.6}$$

v in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$P_{\text{KW}}(T_{\text{Pb}})$ in W	$\gamma(T_{\text{Pb}})$	$\gamma(T_{\text{S}})$
0,01728	0,10	0,00	
5	3,0	0,86	0,90
10	4,57	0,90	0,93
20	6,93	0,94	0,96
30	8,84	0,95	0,97



(b) Bewegungsgleichung einer Kugel: 12

$$\dot{v} = g - Cv^2 \tag{3.7}$$

mit

$$C = \frac{c_w \varrho_{\text{Luft}} A^*}{2m} = \frac{c_w \varrho_{\text{Luft}} \pi D^2}{2 \cdot 4 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{D^3}{8} \varrho_{\text{Pb}}} = \frac{3 c_w \varrho_{\text{Luft}}}{4 D \varrho_{\text{Pb}}} \tag{3.8}$$

Für die Kugel ist $c_w = 0{,}47$ und damit

$$C = 0{,}01\,\frac{1}{\text{m}} \tag{3.9}$$

Die Lösung von (3.7) ist

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{C}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{gC}t} - 1}{\mathrm{e}^{2\sqrt{gC}t} + 1} \tag{3.10}$$

Die Grenzgeschwindigkeit der Kugeln ist

$$v_f = \sqrt{\frac{g}{C}} = 31{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{3.11}$$

Die gesamte von einer Kugel abgegebene Wärmeleistung ist

$$P(t) = P_{\text{KW}} + P_{\text{S}} = \beta(T - T_0) v(t)^{\frac{3}{5}} + P_{\text{S}} \tag{3.12}$$

Die Masse einer Kugel ist

$$m = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^3 \varrho_{\text{Pb}} = \frac{\pi \varrho_{\text{Pb}} D^3}{6} = 0{,}38\,\text{g} = 3{,}8 \cdot 10^{-4}\,\text{kg} \tag{3.13}$$

Bis zum Erstarren muss die Kugel die Wärme

$$W_{\text{s}} = \kappa_{\text{Pb}} m = 8{,}89\,\text{J} \tag{3.14}$$

abgeben.

$$W_{\text{s}} = \int_0^{t_1} P(t)\,\mathrm{d}t = \beta(T_{\text{Pb}} - T_0) \int_0^{t_1} v(t)^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}t + P_{\text{S}} t_1 \tag{3.15}$$

$$\int_0^{t_1} v(t)^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}t + \frac{P_{\text{s}} t_1}{\beta(T_{\text{Pb}} - T_0)} = \frac{W_{\text{s}}}{\beta(T_{\text{Pb}} - T_0)} \tag{3.16}$$

$$\int_0^{t_1} v(t)^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}t + 0{,}3237\,\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot t_1 = 7{,}740\,\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot \text{s} \tag{3.17}$$

Unter Vernachlässigung von P_{S} in (3.12) folgt die Näherung

$$\int_0^{t_1} v(t)^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}t = \frac{W_{\text{s}}}{\beta(T_{\text{Pb}} - T_0)} = 7{,}740\,\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot \text{s} =: C_1 \tag{3.18}$$

Die numerischen Lösungen von (3.17) bzw. (3.18) sind

$$t_1 = 1{,}979\,\text{s} \approx 2{,}0\,\text{s} \quad \text{bzw.} \quad t_1' = 2{,}093\,\text{s} \approx 2{,}1\,\text{s} \tag{3.19}$$

mit den dazu gehörenden Fallstrecken (numerische Integration!):

$$s_1 = \int_0^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t = 18{,}1\,\text{m} \quad \text{bzw.} \quad s_1' = \int_0^{t_1'} v(t)\,\mathrm{d}t = 20{,}1\,\text{m} \tag{3.20}$$

Von t_1 bis t_2 muss die Kugel dann von T_{Pb} auf $T_{\mathrm{S}} = 373\,\mathrm{K}$ abkühlen und dabei die Wärme

$$W_{\mathrm{c}} = c_{\mathrm{Pb}} m (T_{\mathrm{Pb}} - T_{\mathrm{S}}) = 11{,}35\,\mathrm{J} \tag{3.21}$$

abgeben. Mit

$$\alpha(t) = \frac{P_{\mathrm{KW}}}{A(T - T_0)} = \frac{\beta}{A} v(t)^{\frac{3}{5}} \tag{3.22}$$

gilt

$$P(t,T) = A\alpha(t)(T - T_0) + P_{\mathrm{S}} = -c_{\mathrm{Pb}} m \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \tag{3.23}$$

Mit der näherungsweise Vernachlässigung von P_{S} erhält man

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{A}{c_{\mathrm{Pb}} m} \alpha(t)(T - T_0) \tag{3.24}$$

$$\int\limits_{T_{\mathrm{Pb}}}^{T_{\mathrm{S}}} \frac{\mathrm{d}T}{T - T_0} = \ln \frac{T_{\mathrm{S}} - T_0}{T_{\mathrm{Pb}} - T_0} = -\frac{A}{c_{\mathrm{Pb}} m} \int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{3.25}$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha(\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\frac{c_{\mathrm{Pb}} m}{A} \ln \frac{80}{308} = 1335\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}} \tag{3.26}$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} v(\tau)^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}\tau = -\frac{c_{\mathrm{Pb}} m}{\beta} \ln \frac{80}{308} = 17{,}99 \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot \mathrm{s} =: C_2 \tag{3.27}$$

Die numerischen Lösungen von (3.27) mit den Untergrenzen t_1 bzw. t_1' sind

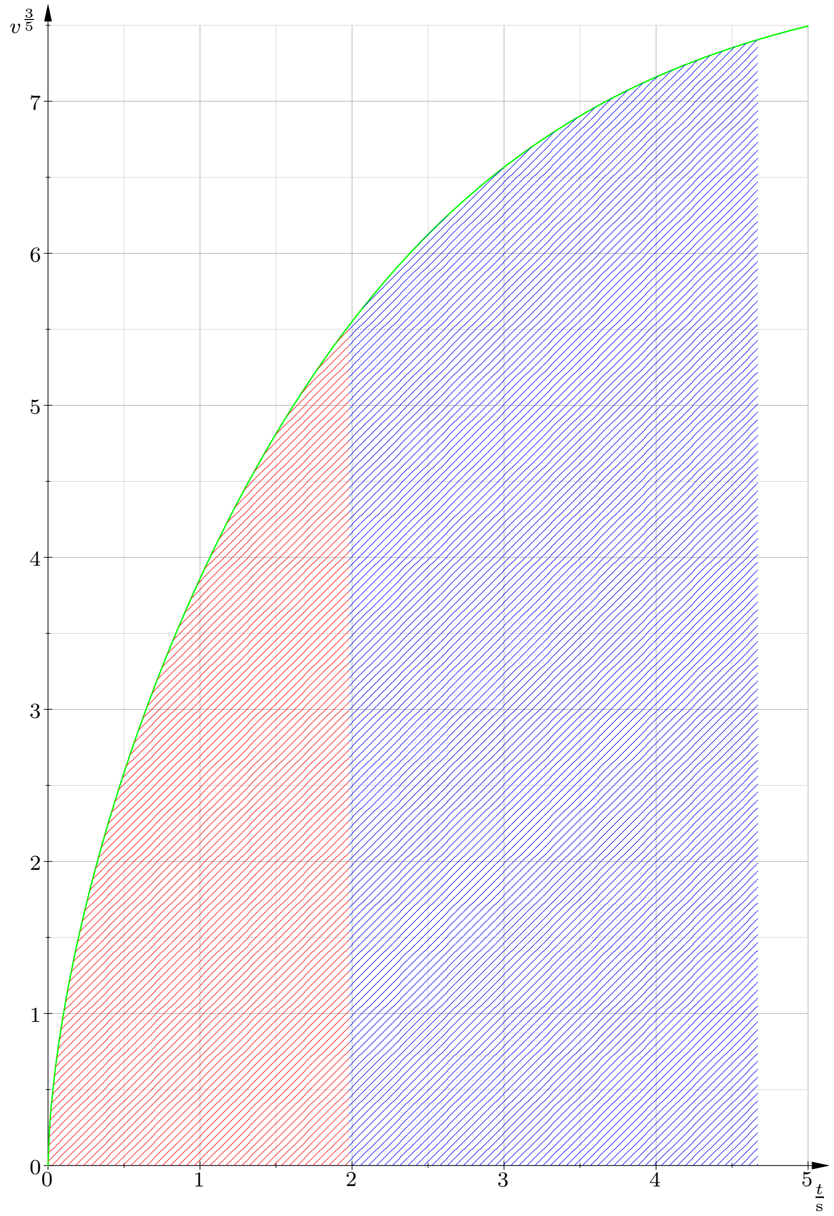
$$t_2 = 4{,}6699\,\mathrm{s} \approx 4{,}7\,\mathrm{s} \quad \text{bzw.} \quad t_2' = 4{,}7562\,\mathrm{s} \approx 4{,}8\,\mathrm{s} \tag{3.28}$$

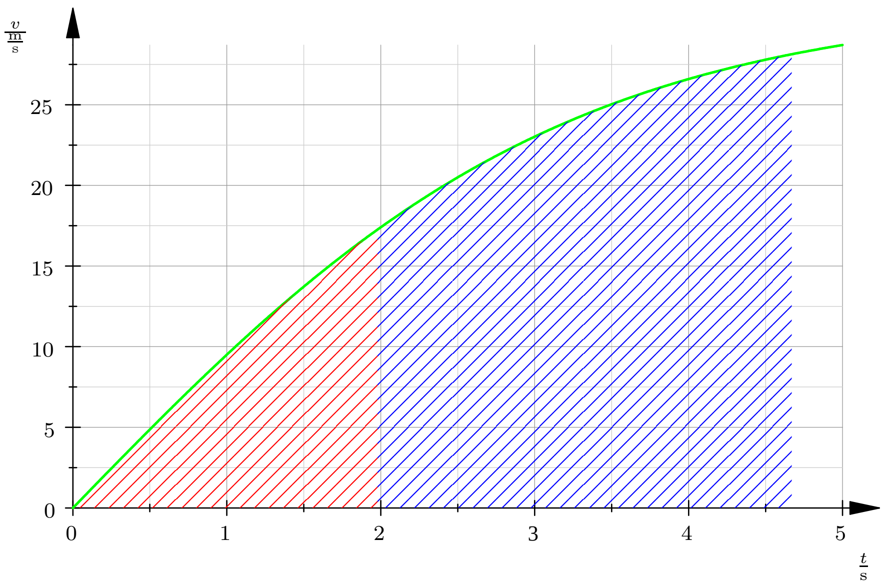
mit den dazu gehörenden Fallstrecken (Turmhöhen):

$$h = \int\limits_0^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t = 82{,}2\,\mathrm{m} \quad \text{bzw.} \quad h' = \int\limits_0^{t_2'} v(t)\,\mathrm{d}t = 84{,}6\,\mathrm{m} \tag{3.29}$$

Daten zur numerischen Integration:

t in s	$v(t)$ in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$v(t)^{\frac{3}{5}}$ in $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^{\frac{3}{5}}$
0,0	0,0	0,0
0,5	4,865291124	2,583838109
1,0	9,501319971	3,860738321
1,5	13,7200928	4,81298191
2,0	17,40131	5,550718031
2,5	20,49761247	6,123813655
3,0	23,02247638	6,565854004
3,5	25,02984752	6,90358891
4,0	26,59387877	7,159274441
4,5	27,79341501	7,351316946
5,0	28,70231946	7,494629985
5,5	29,38470422	7,601036082
6,0	29,89349422	7,679731021


$v^{\frac{3}{5}}$
7
6
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
$\frac{t}{\mathrm{s}}$


$\frac{v}{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$
25
20
15
10
5
0
0
1
2
3
4
5
$\frac{t}{\mathrm{s}}$

(c) $v(t)$ sei die Relativgeschwindigkeit Kugeln–Luft, v_0 die Windgeschwindigkeit. (3.10) kann weiter verwendet werden, wenn man als Startzeit t_0 mit $\boxed{7}$

$$v(t_0) = \sqrt{\frac{g}{C}} \cdot \frac{e^{2\sqrt{gC}t_0} - 1}{e^{2\sqrt{gC}t_0} + 1} = v_0 \tag{3.30}$$

verwendet, d.h.

$$t_0 = \frac{1}{2\sqrt{gC}} \ln \frac{\sqrt{\frac{g}{C}} + v_0}{\sqrt{\frac{g}{C}} - v_0} \tag{3.31}$$

Für $v_0 = v_f$ schweben die Kugeln und es wäre die neue Fallhöhe $h' = 0$.

Man wählt ein v_0 mit $0 < v_0 < v_f$ und bestimmt numerisch t_3 mit

$$\int_{t_0}^{t_3} v(\tau)^{\frac{3}{5}}\, d\tau = \int_0^{t_2} v(\tau)^{\frac{3}{5}}\, d\tau = C_1 + C_2 = 25{,}73 \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot \mathrm{s} =: C_3 \tag{3.32}$$

Gleichbedeutend:

$$\int_0^{t_0} v(\tau)^{\frac{3}{5}}\, d\tau = \int_{t_2}^{t_3} v(\tau)^{\frac{3}{5}}\, d\tau \tag{3.33}$$

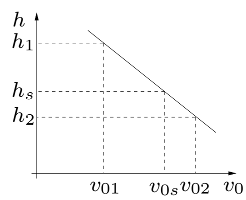
Dann berechnet man durch numerische Integration die neue Fallhöhe

$$h_n = \int_{t_0}^{t_3} (v(t) - v_0)\, dt \tag{3.34}$$

Durch geschicktes Ausprobieren (z.B. lineare Interpolation) werden die Werte verbessert.

Der Sollwert für h ist

$$h_s = \frac{h}{2} = 42{,}3\,\mathrm{m} \tag{3.35}$$



Hat man für zwei Werte v_{01} und v_{02} die dazu gehörenden h_{n1} und h_{n2} berechnet, erhält man ein besseres v_{0s} durch lineare Interpolation:

$$v_{0s} = v_{01} + \frac{v_{02} - v_{01}}{h_{n1} - h_{n2}} (h_{n1} - h_s) \tag{3.36}$$

v_0 in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	t_0 in s	t_3 in s	h_n in m
10	1,06	5,11	48,9
20	2,41	6,03	23,2
12	1,29	5,54	43,16
13	1,41	5,32	40,46
12,3	1,32	5,26	42,3

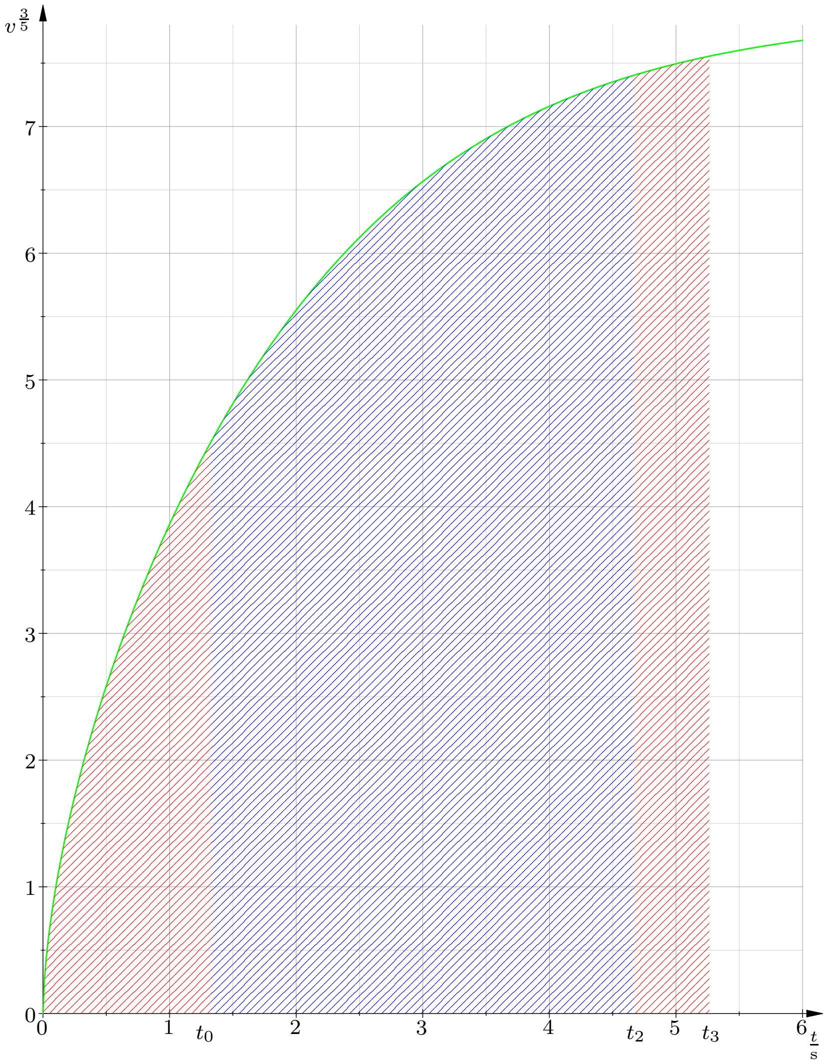
Zwei beliebige Startwerte $v_{01} = 10$ und $v_{02} = 20$.

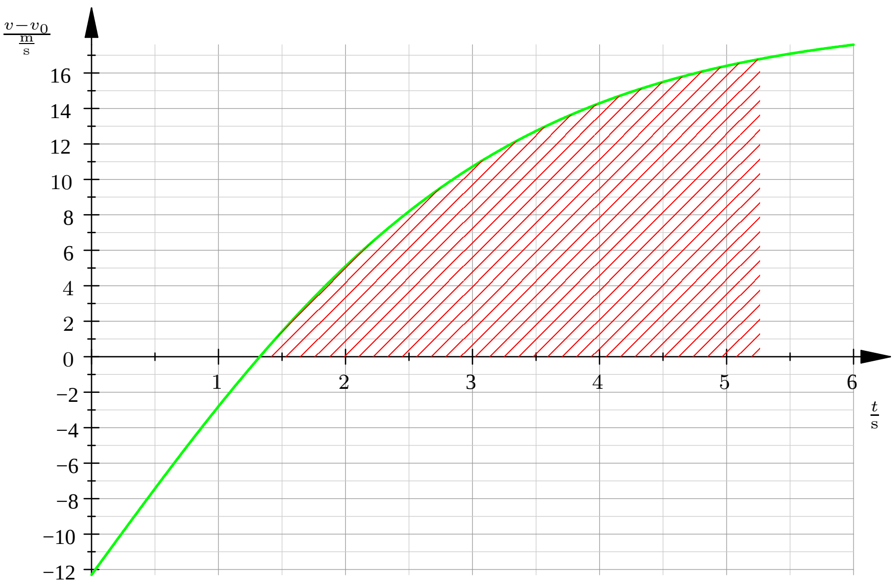
Besserer Wert für v_0:

$v_{0s} = v_1 + \frac{v_2 - v_1}{h_1 - h_2}(h_1 - h_s) = 12,6$

Nächstes Paar für v_0: $v_{03} = 12$ und $v_{04} = 13$.
Die lineare Interpolation liefert den besseren Wert $v_{0s} = 12{,}3$.

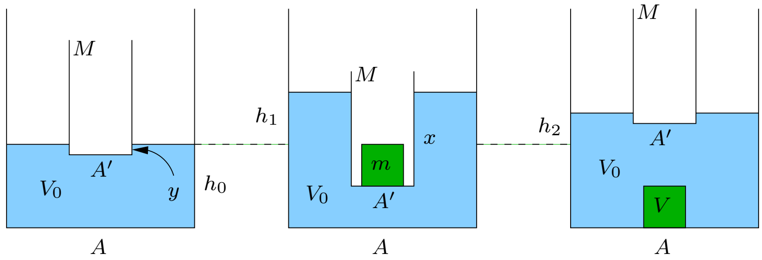
Für $v_0 = 12{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ist die Fallhöhe $h_n = 42{,}3\,\mathrm{m}$.


$v\frac{3}{5}$
7
6
5
4
3
2
1
0
0
1
t_0
2
3
4
t_2
5
t_3
6
$\frac{t}{s}$


$\frac{v-v_0}{\frac{m}{s}}$
16
14
12
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
−12
1
2
3
4
5
6
$\frac{t}{s}$

Aufgabe 4: Experiment: Physik mit Wackelpudding

(a) **Methode 1 (Schwimmende Plattform)** $\boxed{17}$



Mit der Dichte ϱ_w des Wassers gilt

$$M = \varrho_\mathrm{w} A' y, \qquad M + m = \varrho_\mathrm{w} A' x \tag{4.1}$$

$$m = \varrho_\mathrm{w} A'(x - y) \tag{4.2}$$

$$V_0 = A h_0 - A' y = A(h_0 + h_1) - A' x \tag{4.3}$$

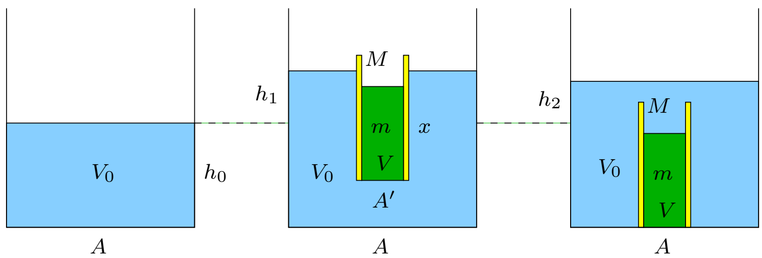
$$A'(x - y) = A h_1 \tag{4.4}$$

$$V = A h_2 \tag{4.5}$$

Aus (4.2), (4.4) und (4.5) folgt dann für die Dichte des Wackelpuddings

$$\varrho = \frac{m}{V} = \varrho_\mathrm{w} \frac{A'(x-y)}{A h_2} = \varrho_\mathrm{w} \frac{h_1}{h_2} \tag{4.6}$$

Methode 2 (Strohhalm)



M, ϱ_s und V_s sind Masse, Dichte und Volumen des Strohhalms.

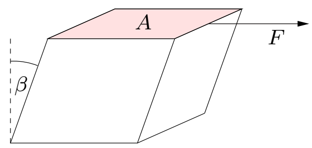
$$V_0 + A' x = A h_0 + A h_1 \quad \Longrightarrow \quad A' x = A h_1 \tag{4.7}$$

$$M + m = \varrho_\mathrm{w} A' x = \varrho_\mathrm{w} A h_1 \tag{4.8}$$

$$V + V_\mathrm{s} = A h_2 \tag{4.9}$$

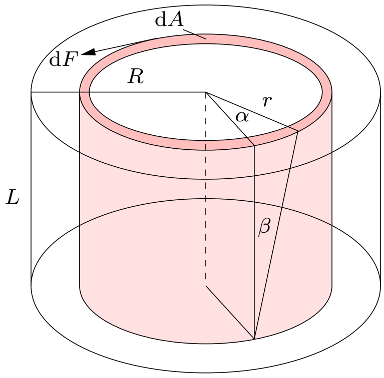
$$\begin{aligned}
\varrho = \frac{m}{V} &= \frac{A h_1 \varrho_\mathrm{w} - \varrho_\mathrm{s} V_\mathrm{s}}{A h_2 - V_\mathrm{s}} = \frac{h_1 \varrho_\mathrm{w}}{h_2} \cdot \frac{1 - \frac{\varrho_\mathrm{s} V_\mathrm{s}}{A h_1 \varrho_\mathrm{w}}}{1 - \frac{V_\mathrm{s}}{A h_2}} \approx \\
&\approx \frac{h_1 \varrho_\mathrm{w}}{h_2} \cdot \left(1 - \frac{\varrho_\mathrm{s} V_\mathrm{s}}{A h_1 \varrho_\mathrm{w}}\right)\left(1 + \frac{V_\mathrm{s}}{A h_2}\right) \approx \\
&\approx \frac{h_1 \varrho_\mathrm{w}}{h_2} \cdot \left[1 + \frac{V_\mathrm{s}}{A h_2}\left(1 - \frac{h_2 \varrho_\mathrm{s}}{h_1 \varrho_\mathrm{w}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.10}$$

(b) Definiton des Torsionsmoduls G: 4



$$\text{Spannung} = G \cdot \text{Schubwinkel}$$

$$\frac{F}{A} = G \cdot \beta \tag{4.11}$$



$$\beta = \frac{\alpha r}{A} \tag{4.12}$$

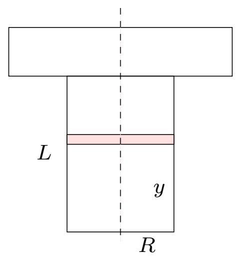
$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A} = G\beta \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}F}{2\pi r \mathrm{d}r} = \frac{Gr\alpha}{L} \tag{4.13}$$

$$\mathrm{d}F = \frac{2\pi G\alpha}{L} r^2 \,\mathrm{d}r \tag{4.14}$$

$$M = \int_0^R r \mathrm{d}F = \frac{2\pi G\alpha}{L} \int_0^R r^3 \,\mathrm{d}r \tag{4.15}$$

$$M = \frac{2\pi G\alpha}{L} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi G\alpha R^4}{2L} \tag{4.16}$$

(c) Ein Körper mit dem Trägheitsmoment J auf einem Zylinder aus Wackelpudding wird in eine Drehschwingung versetzt. Die Winkelgeschwindigkeit des Körpers und damit der Deckfläche des Puddings sei ω. Da der Wackelpudding am Boden haftet, ist die Winkelgeschwindigkeit einer Scheibe in der Höhe y über dem Boden 14



$$\tilde{\omega}(y) = \frac{y\omega}{L} \tag{4.17}$$

Der Drehimpuls dieser Scheibe der Dicke dy ist

$$\mathrm{d}\widehat{L} = \frac{1}{2} R^2 \mathrm{d}m \cdot \tilde{\omega}(y) = \frac{\pi \varrho R^4 \omega}{2L} \, y \mathrm{d}y \tag{4.18}$$

Der gesamte Drehimpuls des Puddings ist

$$\widehat{L} = \int_0^L \frac{\pi \varrho R^4 \omega}{2L} \, y \mathrm{d}y = \frac{\pi \varrho L R^4}{4} \cdot \omega \tag{4.19}$$

Das effektive Trägheitsmoment des Puddings ist also

$$J_\mathrm{P} = \frac{\pi \varrho L R^4}{4} \tag{4.20}$$

Bewegungsgleichung:

$$J_\mathrm{ges} \ddot{\alpha} = J_\mathrm{ges} \dot{\omega} = -M = -\frac{\pi G R^4}{2L} \cdot \alpha \tag{4.21}$$

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\pi G R^4}{2L J_\mathrm{ges}} \quad \Longrightarrow \quad G = \frac{8\pi L J_\mathrm{ges}}{T^2 R^4} = \frac{8\pi L (J + J_\mathrm{P})}{T^2 R^4} \tag{4.22}$$

Ohne Auflage, d.h. für $J = 0$, gilt

$$G = \frac{8\pi L J_\mathrm{P}}{T^2 R^4} = \frac{2\pi^2 L^2 \varrho}{T^2} \tag{4.23}$$