

LK Physik 13

Aufgaben zur Kernphysik

Richard Reindl

Die aktuellste Version der Aufgaben findet man unter

<http://www.stbit.de>

Das Werk steht unter einer Creative Commons

- Namensnennung
- Nicht-kommerziell
- Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Unported Lizenz

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.de>



1 Werkzeuge der Kernphysik

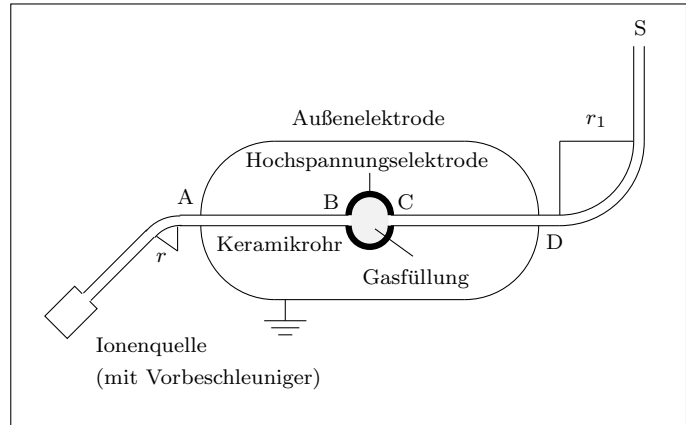
1.1 Teilchenbeschleuniger

1.1.1. Welche kinetische Energie müssen Protonen bzw. Elektronen mindestens haben, um für die Untersuchung der Kernstruktur ($d \approx 10^{-15}$ m) geeignet zu sein?

1.1.2. Diese Aufgabe ist im Wesentlichen dem LK-Abitur 1976 (I, 2a-d) entnommen.

Für schwere Ionen verwendet man u.a. folgenden Beschleunigertyp (siehe Zeichnung):

In das hochevakuierte Keramikrohr dieses Beschleunigers soll ein Gemisch negativer Ionen eingeschossen werden. Diese Ionen wurden aus der Ruhe heraus durch eine Spannung $U_a = 40$ kV vorbeschleunigt. Der Krümmungsradius im Anschlussstück ist $r = 20$ cm. Die Ablenkung wird durch ein geeignetes Magnetfeld B erreicht.



- (a) Welchen Betrag muss B haben, wenn einfach negativ geladene ^{12}C -Ionen in das Keramikrohr eingeschossen werden sollen?
 - (b) Welche Geschwindigkeit besitzen die vorbeschleunigten Ionen am Ende der Strecke [AB], wenn die Spannung zwischen der Hochspannungs- und der Außenelektrode des Beschleunigers $U = 6,3$ MV beträgt? Nichtrelativistische Rechnung!
 - (c) Der Innenraum der Hochspannungselektrode ist mit Gas gefüllt. Beim Durchgang des Ionenstrahls werden die Ionen umgeladen, indem sie mehrere Elektronen verlieren („Stripping“). Vom Energieverlust der Ionen beim Durchgang durch das Gas kann abgesehen werden. Wird die Energie der Ionen auf der Strecke [CD] größer oder kleiner? Begründung!
 - (d) Die Ionen durchlaufen nun außerhalb des Beschleunigers einen 90° -Bogen mit dem Krümmungsradius $r_1 = 1,0$ m aufgrund der Einwirkung eines Magnetfeldes mit $B = 0,70$ T, das senkrecht zur Bahnebene orientiert ist. Berechne die Ladung der ^{12}C -Ionen, die bei S zur Verfügung stehen! Welche Geschwindigkeit haben diese Ionen? Wie groß ist der relative Fehler der Geschwindigkeit, wenn nichtrelativistisch gerechnet wird?
- 1.1.3.
- (a) Berechne für einen Hochfrequenzlinearbeschleuniger die Länge l_k der k -ten Driftröhre in Abhängigkeit von der Masse m und der Ladung q der Teilchen, der Frequenz f und der Amplitude U_0 der Hochfrequenzspannung und der Einschussenergie W_a .
 - (b) Der Linearbeschleuniger am SLAC beschleunigt Elektronen, die mit $W_a = 1,0$ MeV eingeschossen werden, auf die Endenergie $W_e = 22$ GeV. Er hat die Länge $L = 3,0$ km und die Zahl seiner Driftröhren ist $n = 82650$. Berechne mit Hilfe eines CAS die Scheitelspannung U_0 und die Frequenz f der Hochspannung! Der Abstand zwischen den Driftröhren kann vernachlässigt werden.
 - (c) Welche Näherungsformel gilt für die Gesamtlänge L eines langen Linearbeschleunigers mit $W_e \gg m c^2$?
 - (d) Wie lang wäre ein 500 GeV-Beschleuniger, der mit der gleichen Spannungsquelle betrieben wird wie der Beschleuniger am SLAC?

- (e) Was kann über die Längen eines Elektronen- und eines Protonen-Linearbeschleunigers im Vergleich zueinander ausgesagt werden? Wie lang wäre der SLAC-Beschleuniger, wenn er Protonen statt Elektronen auf die Endenergie 22 GeV beschleunigen müsste?

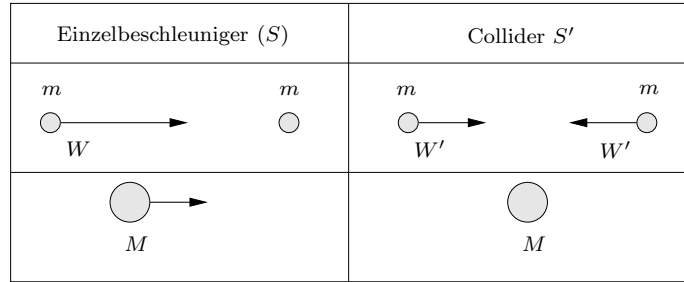
1.1.4. Das Synchrozyklotron

- (a) Wie hängt die Umlaufdauer T im Zyklotron von der kinetischen Energie W_k ab, wenn die Teilchen relativistische Energien erreichen?
- (b) Im Synchrozyklotron wird die Frequenz der Betriebsspannung automatisch an die Umlauffrequenz der Teilchen angepasst. Es ist kein Dauerbetrieb mehr möglich, sondern es können nur noch Teilchenpulks beschleunigt werden. Berechne die minimale und die maximale Frequenz für Protonen und für Elektronen der maximalen kinetischen Energie $W_{k,\max} = 600 \text{ MeV}$ mit $B = 2,00 \text{ T}$
- (c) Leite den relativistischen Zusammenhang zwischen W_k und dem Bahnradius r her (einfach m durch γm im klassischen Ergebnis zu ersetzen ist falsch!). Wie lautet dieser Zusammenhang im ultrarelativistischen Fall ($W_k \gg mc^2$)? Berechne r_{\max} für Elektronen und für Protonen ($W_{k,\max} = 600 \text{ MeV}$ und $B = 2,00 \text{ T}$).

- 1.1.5. (a) Zeichne für ein Protonen- und ein Elektronensynchrotron mit $B = 1,00 \text{ T}$ die kinetische Energie $W_k(r)$ der Teilchen in Abhängigkeit von Radius r im Bereich $10^{-4} \text{ m} \leq r \leq 10^4 \text{ m}$. Verwende einen **doppelt-logarithmischen** Maßstab mit $10 \text{ m} \hat{=} 2 \text{ cm}$ und $10 \text{ eV} \hat{=} 1 \text{ cm}$, d.h. statt r (in m) wird $2 \lg r$ (in cm) und statt W_k (in eV) wird $\lg W_k$ (in cm) angetragen. Überlege zuerst allgemein, wie die Funktion $y = C \cdot x^n$ im doppelt-logarithmischen Maßstab gezeichnet aussieht.
- (b) Welche Endenergie kann ein um den ganzen Äquator gebautes Synchrotron einem Teilchen mit der Ladung e erteilen, wenn $B = 20 \text{ T}$ beträgt?
- (c) Der Energieverlust ΔW pro Umlauf durch Abstrahlung elektromagnetischer Wellen („Synchrotronstrahlung“) ist proportional zu $\left(\frac{W_k}{mc^2}\right)^4$. Berechne das Verhältnis der Energieverluste eines Elektronen- und eines Protonensynchrotrons bei gleicher kinetischer Energie.

1.1.6. Teilchenerzeugung mit Beschleunigern

Durch den Stoß zweier Teilchen der Masse m (Ruhenergie W_0) soll ein Teilchen der Masse M erzeugt werden. Im Einzelbeschleuniger trifft das beschleunigte Teilchen der Gesamtenergie $W = \gamma W_0$ auf das ruhende Teilchen, im Collider (Beschleuniger mit Speicherring)



treffen die beiden Teilchen mit der jeweiligen Gesamtenergie $W' = \gamma' W_0$ aufeinander. \overline{W} ist die Gesamtenergie beider Teilchen im System S des Einzelbeschleunigers, \overline{W}' dagegen die Gesamtenergie beider Teilchen im System S' des Colliders. Mit W_k bezeichnen wir die kinetische Energie des beschleunigten Teilchens in S und mit W'_k die kinetische Energie eines der beiden Teilchen in S' .

(a) Beweise folgende Beziehungen:

$$\boxed{\frac{W}{W'} = 2\gamma' - \frac{1}{\gamma'} \quad , \quad \frac{\overline{W}}{\overline{W}'} = \gamma' \quad , \quad \frac{W_k}{W'_k} = 2(\gamma' + 1)}$$

Wie vereinfachen sich diese Gleichungen für $W' \gg W_0$?

(b) Die Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung sagt die Existenz der „intermediären Vektorbosonen“ voraus. Eines dieser Teilchen, das Z^0 , hat die Ruhenergie 90 GeV und kann durch einen $e^+ e^-$ -Stoß erzeugt werden. Wie groß müssen W und W' mindestens sein, um ein Z^0 erzeugen zu können? Die Kosten eines Beschleunigers oder Speicherrings sind ungefähr proportional zu seinem Umfang. Um welchen Faktor wäre ein Einzelbeschleuniger zur Erzeugung des Z^0 -Bosons teurer als ein Collider?

1.2 Teilchendetektoren

1.2.1. Ein radioaktives Präparat, das α -Teilchen aussendet, wird **in** einem Zählrohr befestigt. Es ist gewährleistet, dass die Teilchen ihre gesamte kinetische Energie innerhalb des Zählrohrs abgeben. Im Auslösebetrieb wird die Zählrate $2000 \frac{1}{s}$ festgestellt. Berechne die Energie eines α -Teilchens, wenn nach dem Vermindern der Betriebsspannung auf 300 V ein konstanter Strom der Stärke $4,9 \cdot 10^{-11}$ A fließt (das Füllgas des Zählrohrs ist Xenon).

1.2.2. (a) Berechne die Kapazität eines zylinderförmigen Zählrohrs mit dem Drahradius a , dem Kammerradius b und der Länge l .

(b) Ein Zählrohr mit $a = 0,1$ mm, $b = 1$ cm und $l = 4$ cm wird mit der Spannung $U = 1200$ V betrieben und befindet sich ab $U_0 = 1000$ V im Auslösebereich, der Arbeitswiderstand beträgt $R = 10^9 \Omega$. Berechne die Totzeit τ !

(c) Das Zählrohr wird jetzt im Proportionalbereich betrieben, der Verstärkungsfaktor ist $A = 5 \cdot 10^4$, die Impulsdauer beträgt $6 \cdot 10^{-4}$ s. Ein α -Teilchen hinterläßt im Zählrohr 10^4 Elektronen und an R wird ein annähernd rechteckiger Spannungsimpuls der Höhe U' registriert. Berechne U' .

1.2.3. Ein Szintillationszähler besteht aus einem NaJ(Tl)-Kristall mit einem nachgeschalteten zehnstufigen Fotomultiplier. Die Dauer eines Spannungspulses am Arbeitswiderstand $R = 1,0 \cdot 10^5 \Omega$ ist ungefähr $\Delta t = 4,5 \cdot 10^{-6}$ s. Im Fotomultiplier werden aus jedem Elektron pro Dynode (Stufe) vier Elektronen. Berechne die Höhe des Spannungspulses an R (rechteckige Form vorausgesetzt), der von einem Gammaquant mit $W_\gamma = 1,0$ MeV durch Fotoeffekt

ausgelöst wird. Warum kann im günstigsten Fall mit $W_e = W_\gamma$ gerechnet werden, obwohl die Ionisierungsenergie für ein Elektron der K-Schale des J-Atoms immerhin 32 keV beträgt?

- 1.2.4. Ein Gammaquant mit $W_\gamma > 2 m_e c^2$ kann seine Energie in der Nähe eines Kerns (Impuls-satz!) auch durch Paarerzeugung verlieren. Gammastrahlung mit

$$W_\gamma = 2 m_e c^2 + \Delta W$$

trifft auf einen Szintillationszähler. An welchen Stellen des aufgezeichneten Energiespektrums muss man nach den durch Paarerzeugung ausgelösten Effekten suchen? Beachte, dass die bei der Zerstrahlung des Positrons entstehenden Quanten den Szintillator ohne Energieabgabe verlassen können. Es darf angenommen werden, dass die Energien der beiden Zerstrahlungsquanten gleich sind (gilt streng genommen nur im Schwerpunktsystem der Zerstrahlungspartner).

1.3 Zählstatistik

- 1.3.1. Bei der Messung des Nulleffektes einer Zählordnung wird mit $\Delta t = 4$ s folgendes Ergebnis erzielt (N_i ist die Zahl der Messungen mit z_i registrierten Teilchen):

z_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N_i	0	1	2	5	7	8	8	7	5	3	2	1	1	0
N_{ip}														

- Überprüfe, ob die Messwerte ungefähr der Poisson-Verteilung genügen (fülle die Tabelle mit den nach Poisson erwarteten Werten N_{ip} aus).
- Berechne die Standardabweichung σ der Messwerte einmal exakt direkt mit der Definition von σ und vergleiche mit der Standardabweichung σ_p nach Poisson.
- Berechne den relativen Fehler der Zählraten exakt und mit der Näherung einer Poisson-Verteilung.
- Zeichne das Histogramm der Messwerte und zeichne die Poisson-Kurve ein.
- Die Halbwertsbreite $\Delta z_{\frac{1}{2}}$ der Poisson-Verteilung ist die Breite der Kurve auf halber Höhe des Maximalwertes:

$$\Delta z_{\frac{1}{2}} = z_r - z_l \quad \text{mit} \quad P(z_r) = P(z_l) = \frac{1}{2} \cdot P_{\max}$$

Ermittle mit einem CAS das Verhältnis der Halbwertsbreite zur Standardabweichung.

2 Radioaktive Strahlung

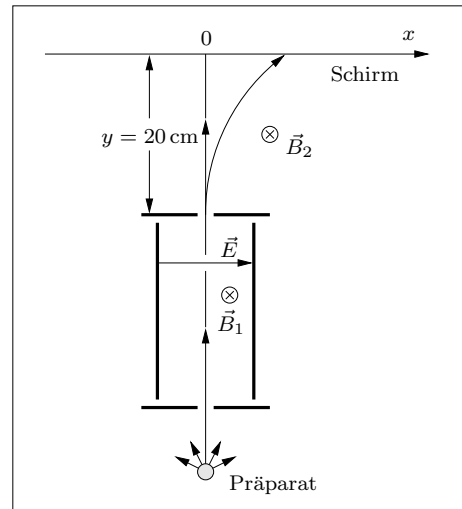
2.1 Identifizierung der radioaktiven Strahlen

2.1.1. Zur Identifizierung der verschiedenen Komponenten der radioaktiven Strahlung wird nebenstehende Anordnung verwendet. Zuerst werden E und B_1 bei abgeschaltetem B_2 so eingestellt, dass die Strahlung das Wienfilter ungehindert passieren kann. Der so auf dem Leuchtschirm entstehende Fleck markiert die Lage $x = 0$.

- (a) Die Messdaten für eine Strahlungskomponente lauten:

$$E = 1665 \frac{\text{V}}{\text{m}}, \quad B_1 = 1,000 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

$$B_2 = 0,5000 \text{ T}, \quad x = -3,000 \text{ cm}$$



In einem Zusatzversuch wurde der Raum nach dem Wienfilter durch eine mit Stickstoff ($W_{\text{Ion}} = 34 \text{ eV}$) gefüllte Nebelkammer ersetzt. Die Spur eines Teilchens bestand im Durchschnitt aus 169 000 Wassertröpfchen. Berechne die Masse und die Ladung der Teilchens.

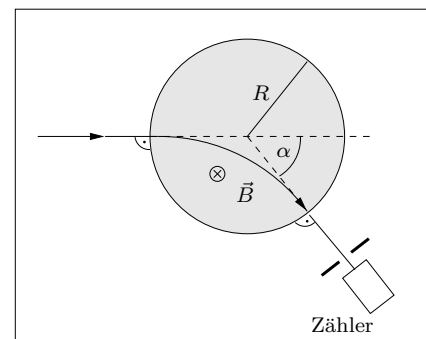
- (b) Für ein anderes Präparat erhält man

$$E = 2,33 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}, \quad B_1 = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ T} \quad B_2 = 5,00 \cdot 10^{-3} \text{ T} \quad \text{und} \quad x = +5,00 \text{ cm}$$

Der Leuchtschirm ist mit einer leitenden Schicht überzogen und wird jeweils nach einer Minute über einen Messverstärker entladen, wobei der Stromstoß $9,6 \cdot 10^{-12} \text{ As}$ gemessen wird. Als Zusatzversuch wird bei abgeschaltetem B_2 an der Stelle $x = 0$ ein Zähler angebracht, der die mittlere Zählrate $\langle n \rangle = 1,00 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}}$ anzeigt. Berechne die Ladung und die Masse der Teilchen.

2.1.2. Auf einen Szintillationszähler mit nachgeschaltetem Fotomultiplier trifft einmal monoenergetische γ - und einmal monoenergetische β -Strahlung mit der **gleichen Energie** (die natürliche β -Strahlung muss dabei natürlich gefiltert werden). Die Ausgangsspannung des Multipliers wird mit einem Impulshöhenanalysator (Vielkanalanalysator) aufgezeichnet. Wie unterscheiden sich die Ergebnisse für die beiden Strahlenarten? Skizze!

2.1.3. Ein β -Spektrum wird mit nebenstehender Anordnung ausgemessen. Warum verlässt der β -Strahl das kreisförmige und homogene Magnetfeld (Radius R) senkrecht, wenn er in Richtung Kreismittelpunkt eingeschossen wird? Berechne die kinetische Energie W_k der Elektronen in Abhängigkeit von R , B und α . In der Praxis sind Präparat und Zähler fest installiert ($\alpha = \text{konst.}$) und B wird variiert. Berechne W_k konkret für $R = 10,0 \text{ cm}$, $B = 6,00 \cdot 10^{-3} \text{ T}$ und $\alpha = 30,0^\circ$.



2.2 Durchgang von Strahlung durch Materie

2.2.1. Warum folgt aus der Bethe-Bloch-Gleichung, dass das durch die Dichte ρ des Absorbermaterials dividierte Bremsvermögen ungefähr materialunabhängig ist? Studiere dazu das

2 Radioaktive Strahlung - Aufgaben

Verhältnis aus relativer Atommasse und Kernladungszahl im Periodensystem.
Wähle exemplarisch $Z \in \{1,2,3,4,5,10,11,18,29,36,47,55,79,92\}$.

2.2.2. Wir untersuchen die Reichweite von α -Teilchen in Luft mit einem CAS.

- (a) Berechne das Bremsvermögen $B(W)$ mit der Bethe-Bloch-Gleichung ($W = W_{\text{kin},\alpha}$)! Verwende $\varrho_{\text{Luft}} = 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $Z = 7,5$ und $A = 15$ (mittlere relative Atommasse). Die Funktion B soll so geschrieben werden, dass das Argument W in der Einheit MeV übergeben und das Ergebnis in der Einheit $\frac{\text{MeV}}{\text{cm}}$ zurückgeliefert wird. Zeichne den Grafen von $B(W)$ im doppelt-logarithmischen Maßstab ($0,17 \text{ MeV} \leq W \leq 10^9 \text{ MeV}$). Zeichne den Grafen von $\frac{1}{B(W)}$ ($0,17 \text{ MeV} \leq W \leq 10 \text{ MeV}$).
- (b) Die numerische Integration von $\frac{1}{B(W)}$ dauert sehr lange. Wir nähern daher $\frac{1}{B(W)}$ im Intervall $1 \text{ MeV} \leq W \leq 10 \text{ MeV}$ durch eine quadratische Funktion

$$\frac{1}{B(W)} \approx f(x) = aW^2 + bW + c$$

an. Berechne die Koeffizienten a , b und c aus den Funktionswerten bei $W = 1 \text{ MeV}$, $W = 4 \text{ MeV}$ und $W = 7 \text{ MeV}$. Die Reichweite von α -Strahlen der kinetischen Energie 1 MeV in Luft beträgt $0,55 \text{ cm}$. Berechne damit eine Näherungsformel für die Reichweite $R(W)$! Erstelle einen Plot von $R(W)$ und berechne $R(5 \text{ MeV})$, $R(7 \text{ MeV})$ und $R(9 \text{ MeV})$. Vergleiche mit dem Diagramm aus der Nuklidkarte.

- (c) Warum sind die Spuren von α -Teilchen in der Nebelkammer an ihrem Ende dichter (mehr Tröpfchen pro Länge) als am Anfang?

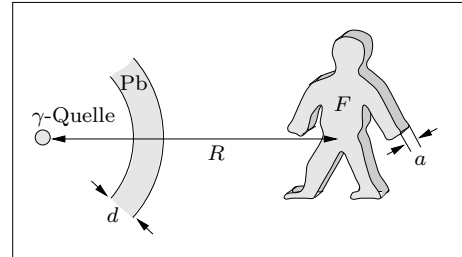
2.2.3. Bei Gültigkeit des Lambert'schen Gesetzes definieren wir die Reichweite R durch

$$I(R) = I_0 \cdot 10^{-4}.$$

- (a) Berechne mit (2.2.1) und (2.2.7) eine Formel für die Reichweite natürlicher β -Strahlung in Abhängigkeit von W_{max} . Vergleiche die mit dieser Formel berechneten Reichweiten in Eisen für $W_{\text{max}} \in \{1 \text{ MeV}, 4 \text{ MeV}, 10 \text{ MeV}\}$ mit den Werten aus dem Diagramm der Nuklidkarte.
- (b) Berechne die Reichweiten von natürlicher β -Strahlung und von γ -Strahlung mit den Energien W_{max} bzw. $hf = 0,1 \text{ MeV}$ und 10 MeV in Luft und in Blei. Die γ -Absorptionskoeffizienten sind dem Diagramm der Nuklidkarte zu entnehmen.

2.3 Biologische Strahlenwirkungen

2.3.1. Eine γ -Quelle der Aktivität $A = 1,00 \cdot 10^{14} \frac{1}{s}$ (entspricht 2,5 g ^{60}Co) sendet Quanten der Energie 1 MeV aus.



- (a) Wie viele absorbierte Quanten pro kg Absorbermaterial entsprechen der Äquivalentdosis 1 rem? Ein Forscher der Masse $m = 68 \text{ kg}$ bietet der Strahlung 40 h pro Woche

und 46 Wochen pro Jahr die Stirnfläche $F = 0,6 \text{ m}^2$. Welchem „Teilchenfluss“ in $\frac{\text{Quanten}}{\text{cm}^2 \text{ s}}$ darf er durchschnittlich während seiner Arbeitszeit ausgesetzt sein, wenn die Halbwertsdicke von Gewebe für γ -Quanten der Energie 1 MeV ungefähr 10 cm beträgt (der Forscher wird „flach“ angenommen, d.h. er hat überall die gleiche Dicke a)?

- (b) Die in den Diagrammen der Nuklidkarte angegebenen „Halbwertsdicken“ haben die Einheit $\frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$ und müssen noch durch die Dichte des Absorbermaterials dividiert werden, um den üblichen Wert in cm zu erhalten. Für γ 's der Energie 1 MeV entnimmt man der Nuklidkarte den Wert $d_{\frac{1}{2}} \approx 10 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$. Welche Dicke d muss die Bleiabschirmung haben, damit bei $R = 2 \text{ m}$ die Strahlenschutzbedingungen ($5 \frac{\text{rem}}{\text{a}}$) für unseren Forscher erfüllt sind? Die Absorption der γ 's in Luft darf für diese kurze Strecke (2 m) vernachlässigt werden. Ist es gleichgültig, ob sich die Abschirmung nahe am Forscher oder nahe am Präparat befindet?
- (c) In welcher Zeit würde der Forscher **ohne** Abschirmung mit $R = 2 \text{ m}$ die tödliche Dosis von 700 rem erhalten? In welcher Entfernung R' von der Quelle müsste sich der Forscher **im Vakuum** aufhalten, damit auch ohne Abschirmung die Strahlenschutzbedingungen erfüllt wären? Wie groß müsste dieses R' für einen α -Strahler sonst gleicher Daten im Vakuum und in Luft sein?
- (d) Wie groß ist die Ionendosisleistung der γ -Quelle mit Abschirmung am Ort des Forschers ($R = 2 \text{ m}$, die mittlere Ionisierungsenergie pro Luftmolekül ist $W_I = 34 \text{ eV}$)? Die Ionendosisleistung ist für Luft als Absorbermaterial definiert; warum ändert sich die Ionendosisleistung kaum, wenn lebendes Gewebe ($W_I = 32 \text{ eV}$, aber viel größere Dichte) als Absorber zugrunde gelegt wird?
- (e) Wie hängt die Äquivalentdosis H bei konstanter Masse des Forschers von der Stirnfläche F ab? Zeichne $H(F)$. Welche Form ist für den Forscher am günstigsten, flach oder dick?

2.3.2. Eine punktförmige γ -Quelle mit der Aktivität A befindet sich in einem Material mit dem Absorptionskoeffizienten μ . Wie lautet die Formel für den Teilchenfluss $\Phi(r) = \frac{\text{Teilchen}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}}$ in der Entfernung r von der Quelle? Berechne mit einem CAS R' aus Aufgabe 2.3.1(c) für Luft zwischen Quelle und Forscher. Die Halbwertsdicke von Luft für γ 's der Energie 1 MeV ist 85 m.

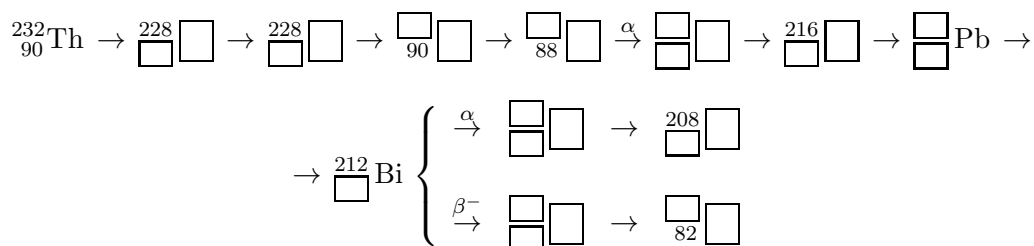
3 Statistische Beschreibung des radioaktiven Zerfalls

3.1 Systematik des Kernaufbaus

- 3.1.1. Neon besteht zu 90,51 % aus ^{20}Ne ($A_{20} = 19,99244$), zu 0,27 % aus ^{21}Ne ($A_{21} = 20,99385$) und zu 9,22 % aus ^{22}Ne ($A_{22} = 21,99138$). Berechne die mittlere relative Atommasse $\langle A \rangle$ des Gemisches.
- 3.1.2. Die relativen Atommassen von ^{14}N und ^{15}N sind $A_{14} = 14,00307$ und $A_{15} = 15,00011$, das natürliche Isotopengemisch hat die mittlere relative Atommasse $\langle A \rangle = 14,0067$. Wieviel Prozent ^{14}N enthält natürlicher Stickstoff?

3.1.3. Die **Uran-Actinium-Reihe** beginnt mit ${}^{235}_{92}\text{U}$. Die auftretenden Zerfallsarten lauten in dieser Reihenfolge: α , β , α , β , α , α , α , α , β , α , β . Bestimme alle Elemente dieser Reihe mit Massen- und Ordnungszahl! Zeichne ein N - Z -Diagramm der ganzen Zerfallsreihe.

3.1.4. **Thorium-Reihe:**



Ergänze die fehlenden Zerfallsarten, Elementzeichen, Massen- und Ordnungszahlen (es treten nur α - und β^- -Zerfälle auf). Zeichne ein N - Z -Diagramm der ganzen Zerfallsreihe.

3.2 Das Zerfallsgesetz

3.2.1. (a) $|\Delta N|$ sei die exakte Zahl der in der Zeit Δt zerfallenden Kerne. Berechne den relativen Fehler δ_r der linearen Näherung $|\Delta N^*| = \lambda N \Delta t$, ausgedrückt durch $x = \lambda \Delta t$. Durch welchen Ausdruck kann δ_r für $\Delta t \ll t_{\frac{1}{2}}$ angenähert werden (Probieren mit dem Rechner oder Taylorentwicklung für e^{-x} bis zum quadratischen Term)? Für welche Δt gilt $|\delta_r| < a$ (speziell für $a = 1\%$)? Welcher Bedingung müssen A , N und Δt genügen, damit $|\delta_r| < a$ ist?

(b) 1 g ${}^{226}\text{Ra}$ hat die Aktivität $A = 3,66 \cdot 10^{10} \frac{1}{\text{s}}$. Berechne $t_{\frac{1}{2}}$. Wie viele Kerne von 1 g ${}^{226}\text{Ra}$ zerfallen in 1 h, 1 d, 1 a, 10 a, 100 a, 1000 a, und 10 000 a? Wie groß ist jeweils der relative Fehler, wenn mit der Näherung für kleine Δt gerechnet wird?

3.2.2. $|\Delta N|$ sei die Zahl der Todesfälle von N gleichaltrigen Menschen in der Zeit Δt ($\Delta t \ll t_{\frac{1}{2}}$). $|\Delta N|$ ist proportional zu N und zu Δt , woraus eine exponentielle Zeitabhängigkeit von N folgt. Die „Halbwertszeit“ von Mitteleuropäern beträgt ungefähr 60 Jahre. Wieviel Prozent der Mitteleuropäer müssten dann das 125-ste Jahr erleben? Das Ergebnis ist offensichtlich falsch; wo steckt der Fehler in unseren Überlegungen? Versuche, ein besseres Modell für die Lebenserwartung zu erstellen!

3.2.3. Bei einem radioaktiven Präparat wird in Abständen von 2 h die Aktivität A gemessen. Die Zählordnung ist so justiert, dass die gemessene Zählrate $n = \frac{Z}{\Delta t}$ (Z ist die Zähleranzeige) genau ein Zehnmillionstel der Aktivität A des Präparats ist, die jeweilige Messdauer beträgt $\Delta t = 0,100 \text{ s}$. Die Messanordnung zeigt den Nulleffekt $Z_0 = 80 \frac{1}{\text{s}}$.

t	2 h	4 h	6 h	8 h	10 h
Z	$4,51 \cdot 10^5$	$3,96 \cdot 10^5$	$3,48 \cdot 10^5$	$3,05 \cdot 10^5$	$2,68 \cdot 10^5$

- (a) Berechne die Halbwertszeit des Präparats! Zur Zeit $t = 0$ betrug die Masse des Präparats 1,00 mg. Um welches Isotop, das in einer der drei natürlichen Zerfallsreihen vorkommt, handelt es sich?
- (b) Wie viele Kerne des ursprünglichen Elements sind nach 30 d noch vorhanden?
- (c) Nach welcher Zeit sinkt die Aktivität des Präparats auf ein Prozent des Ausgangswertes?
- (d) Nach welcher Zeit wird die Zählrate unserer Messanordnung kleiner als der Nulleffekt?
- (e) Nach welcher Zeit werden im Mittel alle Kerne des Präparats zerfallen sein?

- 3.2.4. (a) ^{232}Th hat die Halbwertszeit $t_{\frac{1}{2}} = 1,405 \cdot 10^{10}$ a. Welche Aktivität hat 1 g dieses Präparats? Wie lange muss man die Aktivität messen, damit der relative Fehler kleiner als ein Promille wird?
- (b) Berechne die Zerfallswahrscheinlichkeit eines ^{232}Th -Kerns im Zeitintervall

$$\Delta t = 1 \text{ min, } (1 \text{ a, } 10^9 \text{ a, } 10^{11} \text{ a})!$$

3.2.5. Theorien der **Großen Vereinigung** der starken und der elektroschwachen Wechselwirkung (**GUTs: Grand Unified Theories**) sagen die Instabilität des Protons voraus, z.B. durch den Zerfall $p^+ \rightarrow e^+ + \pi^0$. Die einfachste dieser Theorien, die „minimale SU(5)“, liefert für den Protonenzerfall die Halbwertszeit $t_{SU(5)} \lesssim 2,5 \cdot 10^{31}$ a, andere Theorien lassen Halbwertszeiten bis zu 10^{33} a zu.

- (a) Wie viele Tonnen Eisen braucht man, um mit $t_{SU(5)}$ im Mittel einen Protonenzerfall pro Jahr nachweisen zu können?
- (b) Zur Abschirmung der Höhenstrahlung werden die Experimente zum Protonenzerfall weit unter der Erdoberfläche durchgeführt („Underground Experiments“), z.B. in einem verlassenen Bergwerk oder in einem Tunnel. In einer Garage des Mont-Blanc-Tunnels steht ein 160 t schwerer Eisenwürfel, der mit Tausenden von Detektoren versehen ist. Wie viele Protonenzerfälle pro Jahr müssten mit diesem Experiment nachgewiesen werden, wenn die „minimale SU(5)“ richtig ist?
- (c) Das **Kamioka Underground Observatory** in Japan besteht aus einem zylindrischen Wassertank mit dem Durchmesser $d = 15,6$ m und der Höhe $h = 16$ m. Ungefähr tausend Szintillationszähler lauern auf Cherenkovstrahlung (Licht, das von Teilchen ausgesandt wird, deren Geschwindigkeit größer ist als die Lichtgeschwindigkeit **im Wasser**), um einen Protonenzerfall nachzuweisen. Das bisherige Versuchsergebnis: Höchstens drei Zerfälle pro Jahr! Wie steht es um die Gültigkeit der „minimalen SU(5)“? In welcher Mindestzeit zerfällt 1 kg der Protonen der Erde?

3.3 Das radioaktive Gleichgewicht

- 3.3.1. Das Element A zerfällt in das ebenfalls radioaktive Element B. Zeichne $N_A(t)$, $N_B(t)$ und $N^*(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda_B t}$ mit $N_0 = N_B(0)$ für

$$(a) \lambda_A = \frac{1}{s}, \lambda_B = \frac{0,1}{s} \quad (b) \lambda_A = \frac{10}{s}, \lambda_B = \frac{0,1}{s} \quad (c) \lambda_A = \frac{0,1}{s}, \lambda_B = \frac{1}{s}.$$

- 3.3.2. Das Element A zerfällt in das ebenfalls radioaktive Element B.

Zeichne die Aktivitäten $A_A(t)$ und $A_B(t)$ für $\lambda_A = \frac{0,1}{s}$ und

$$(a) \lambda_B = \frac{0,2}{s} \quad (b) \lambda_B = \frac{1}{s} \quad (c) \lambda_B = \frac{10}{s}.$$

- 3.3.3. Das Element A zerfällt in das ebenfalls radioaktive Element B.

Berechne die Zeit t_{\max} , zu der die Tochteraktivität am größten ist.

Beweise für die Aktivitäten: $A_A(t_{\max}) = A_B(t_{\max})$.

3.4 Radioaktive Altersbestimmungen

- 3.4.1. Ein Gramm lebendes Holz hatte 1950 die Aktivität $A_0 = 6,68 \frac{1}{\text{min}}$. Ein Gramm Holzkohle aus der Zeit, zu der die Malereien der Lascaux-Höhle in Südfrankreich entstanden sind, hat heute die Aktivität $A = 1,02 \frac{1}{\text{min}}$. Wann wurden die Fresken von Lascaux ungefähr gemalt? Gehe davon aus, dass die Aktivität lebenden Holzes konstant ist, da die Dendrochronologie noch nicht bis zur hier relevanten Zeit vorgestoßen ist.

- 3.4.2. Welche Aktivität hat 1 g reiner Kohlenstoff aus lebendem Gewebe im Jahr 1950? Wie lange muss diese Aktivität gemessen werden, damit der Messfehler kleiner als ein Prozent wird?

3.4.3. **Der Gletschermann vom Hauslabjoch**

Das Verhältnis k_0 der ^{14}C - zu den ^{12}C -Atomen in lebendem Gewebe kann durch folgende Funktion angenähert werden, wobei nur die Änderungen des Erdmagnetfeldes, nicht aber die kurzfristigen Schwankungen der Sonnenaktivität berücksichtigt sind:

$$k_0(\tau) = 1,18 \cdot 10^{-12} \cdot \left(1,0294 + 0,05 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5000 \text{ a}} (\tau - 4000 \text{ a})\right) \right)$$

Der Zeitnullpunkt entspricht dem Jahr 1950 und die Zeitachse ist umgekehrt, d.h. $k_0(\tau)$ ist das Verhältnis $\frac{N_{\text{C14}}}{N_{\text{C12}}}$ im Jahre $1950 - \tau$. Diese Näherung gilt bis $\tau_{\text{max}} \approx 8000 \text{ a}$.

- (a) Mit $k_T(t)$ bezeichnen wir das gemessene Verhältnis $\frac{N_{\text{C14}}}{N_{\text{C12}}}$ einer Probe im Jahre T , die im Jahr $T - t$ abgestorben ist. Drücke $k_T(t)$ durch die Funktion k_0 aus und zeichne, am besten mit einem CAS, den Grafen von $k_{1991}(t)$ im Intervall $[0, 10000 \text{ a}]$.
- (b) Im September 1991 wurde am Hauslabjoch in den Ötztaler Alpen eine mumifizierte Gletscherleiche gefunden. Mit einem Massenspektrometer wurde noch im gleichen Jahr das Verhältnis $\frac{N_{\text{C14}}}{N_{\text{C12}}}$ zu $k_{1991}(t) = 6,69 \cdot 10^{-13}$ bestimmt. Berechne das Todesdatum des Gletschermannes
- unter der Annahme, dass k_0 konstant ist
 - durch Auswertung des gezeichneten Diagramms
 - durch numerische Lösung der exakten Gleichung

Die unterschiedlichen Ergebnisse des unkorrigierten Wertes aus i. und des exakten Wertes aus iii. führten bei schlecht recherchierenden und naturwissenschaftlich ungebildeten Autoren zu erheblicher Verwirrung. Es erschienen sogar Bücher, die die Echtheit der Mumie anzweifelten.

- 3.4.4. Für Zeiten, die groß gegen die Einstellzeit des radioaktiven Gleichgewichts sind, kann der Übergang vom Ausgangselement ins stabile Endelement einer Zerfallsreihe näherungsweise durch die Halbwertszeit des Ausgangselements beschrieben werden. Das Verhältnis $k = \frac{N_a}{N_e}$ der Kerne von Ausgangs- und Endelement kann massenspektroskopisch bestimmt werden. In einem Erzbrocken findet man $2,304 \text{ g } ^{235}\text{U}$, $317,4 \text{ g } ^{238}\text{U}$, $416,4 \text{ g } ^{206}\text{Pb}$ und $700,0 \text{ g } ^{207}\text{Pb}$. Berechne das Alter des Erzes

- mit der Uran-Radium-Reihe
- mit der Uran-Actinium-Reihe
- aus dem Verhältnis von ^{235}U und ^{238}U unter der Annahme, dass zur Entstehungszeit beide Isotope gleich häufig vertreten waren.
- Wieviel Helium ist während der Lebenszeit des Erzes entstanden?

- 3.4.5. Eine Raumkapsel mit einem starken Sender an Bord wird 2001 ins All geschickt, um Kontakt mit fremden Zivilisationen aufzunehmen. In der Raumkapsel befindet sich in einem Edelstahlbehälter $1,000 \text{ mg}$ reines ^{14}C , um einem eventuellen Finder die Startzeit zu übermitteln.

- ^{14}C geht durch β^- -Zerfall in ein anderes Element über; in welches? Die Halbwertszeit dieses Zerfalls ist $t_{1/2} = 5730 \text{ a}$. Berechne die Aktivität A_0 von $1,000 \text{ mg } ^{14}\text{C}$.
- Unsere Kapsel wird tatsächlich von einem Raumschiff aufgelesen und analysiert. Unter anderem wird in einem Stahlbehälter ein Gemisch aus ^{14}C und einem anderen Element X im Massenverhältnis $m_{\text{C14}}/m_{\text{X}} = 0,4040$ vorgefunden. In welchem Jahr wird die Kapsel gefunden? (Atommasse: $M_{\text{C14}} = M_{\text{X}} = 14,003 \text{ u}$)

4 Ursachendes radioaktiven Zerfalls - Aufgaben

- (c) Nach welcher Zeit, vom Start ab gerechnet, wird im Mittel nur noch ein ^{14}C -Atom vorhanden sein? Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt dieses eine Atom in der Zeitspanne $\Delta t_1 = 1,00 \cdot 10^{-3}$ s bzw. $\Delta t_2 = 1,00 \cdot 10^4$ a?

3.4.6. Im Jahre 1959 wurde in einem Moor bei Dätgen in der Nähe von Kiel eine noch gut erhaltene Moorleiche gefunden. Ein Gramm Kohlenstoff dieser Leiche ergab 1959 noch die Aktivität $A = 10,86 \frac{1}{\text{min}}$. Bestimme möglichst genau das Sterbedatum der Moorleiche. Welchen Fehler hat das Ergebnis aufgrund des Fehlers von 40 a bei der Halbwertszeit des ^{14}C -Isotops?

3.4.7. 1945 wurde in Holland der Maler van Meegeren verhaftet, weil er angeblich alte Meister an die Nazis verkauft hatte. Van Meegeren gab an, dass er nur selbst angefertigte Fälschungen verkauft habe und wurde somit wegen Fälschung zu einem Jahr Gefängnis verurteilt, wo er einem Herzanfall erlag. Eines seiner angeblichen Werke, „Christus und die Jünger in Emmaus“, wurde von bekannten Kunstkritikern als echter Vermeer identifiziert und für 170 000 Dollar in die USA verkauft. Erst eine Untersuchung der radioaktiven Strahlung des Gemäldes brachte Licht in das Dunkel:

Die früher häufig verwendete Farbe **Bleiweiß** (Bleioxyd) wird aus Bleierz gewonnen, das ^{238}U und somit alle Elemente der Uran-Radium-Reihe enthält. Nach der Farbherstellung befinden sich an radioaktiven Elementen nur noch ^{210}Pb und etwas ^{226}Ra in der Farbe. Nach einer Einstellzeit von einigen Tagen ist die Reihe von ^{226}Ra zu ^{210}Pb im Gleichgewicht und der Übergang $^{226}\text{Ra} \rightarrow ^{210}\text{Pb}$ kann als einstufiger Zerfall mit der Halbwertszeit 1620 a angesehen werden. Die Aktivitäten A von ^{210}Pb und A' von ^{226}Ra können getrennt gemessen werden (α - und β -Zerfall), mit A_0 bezeichnen wir die Aktivität von ^{210}Pb zur Zeit der Farbherstellung ($t = 0$).

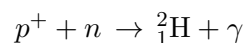
- (a) Drücke A_0 durch $A(t)$ und $A'(t)$ aus. Beachte, dass sich A aus dem Zerfall des ursprünglich vorhandenen und des neu hinzukommenden Bleis ergibt!
- (b) Es gibt keine Bleierzvorkommen, für die $A_0 > 30000 \frac{1}{\text{min}}$ wäre, im Durchschnitt ist $A_0 = 100 \frac{1}{\text{min}}$. Entscheide mit Hilfe des Ergebnisses von (a), welche der folgenden umstrittenen Gemälde sicher gefälscht sind, wobei wir für einen echten Vermeer $t = 300$ a annehmen.

Gemälde	A in $\frac{1}{\text{min}}$	A' in $\frac{1}{\text{min}}$
Christus und die Jünger in Emmaus	8,5	0,8
Die Fußwaschung	12,6	0,26
Die Notenleserin	10,3	0,3
Der Soldat und das lachende Mädchen	5,2	5,0
Die Klöpplerin	1,5	1,4
Die Mandolinenspielerin	8,2	0,17

4 Ursachen des radioaktiven Zerfalls

4.1 Massendefekt und Bindungsenergie

4.1.1. Berechne die Wellenlänge des γ -Quants, das bei der Reaktion



entsteht.

4.1.2. Zeige, dass die Bindungsenergie der Elektronen an den Kern bei der Berechnung der Atommasse vernachlässigt werden kann! Wähle dazu einen Urankern und ein Elektron der K-Schale.

4 Ursachendes radioaktiven Zerfalls - Aufgaben

4.1.3. Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{\text{Atommasse}}{u} && \text{(exakte relative Atommasse)} \\ A_k &= \frac{\text{Kernmasse}}{u} && \text{(exakte relative Kernmasse)} \\ A &= \text{Massenzahl} && \text{(Zahl der Nukleonen)} \end{aligned}$$

Für die Bindungsenergie der gesamten Elektronenhülle gilt die Näherungsformel

$$B_e \approx -15,73 \text{ eV} \cdot Z^{\frac{7}{3}}$$

In Tabellen wird statt der Atommasse oder der Bindungsenergie oft der sogenannte **Massenexzess** M_E angegeben:

$$M_E = (\bar{A} - A) \cdot u c^2$$

- Wie berechnet sich A_k aus A , Z und M_E ? Stelle eine numerische Formel zur Berechnung der Bindungsenergie B auf, die noch die Variablen A , Z und M_E enthält.
- Berechne die relative Kernmasse von ^{52}Cr aus $M_E = -55,412797 \text{ MeV}$. Verwende die Tabelle der Kernmassen in der Formelsammlung und berechne B (in MeV) sowie $\frac{B}{A}$ (in MeV) (Bindungsenergie pro Nukleon) für ^2H , ^3He , ^4He , ^{12}C , ^{52}Cr und ^{235}U . Zeichne $\frac{B}{A}$ in Abhängigkeit von A ($A = 20 \hat{=} 1 \text{ cm}$). Verwende für die Zeichnung die zusätzlichen Werte

Element	^{14}N	^{16}O	^{24}Mg	^{69}Ga	^{84}Kr	^{102}Ru	^{132}Xe	^{153}Eu	^{181}Ta	^{209}Bi
$-\frac{B}{A}$	7,48	7,98	8,26	8,72	8,72	8,61	8,43	8,23	8,02	7,85

4.2 Kernmodelle

4.2.1. Die Yukawa'sche Theorie der Kernkräfte:

Nach Yukawa entsteht die Kraft zwischen zwei Nukleonen durch den Austausch von Teilchen, den sogenannten Mesonen. Die potentielle Energie von zwei Nukleonen im Abstand r ist nach Yukawa

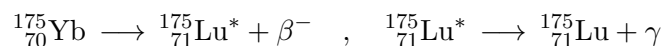
$$V_Y(r) = -\frac{\hbar c}{4\pi} \cdot \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{m c}{\hbar} \quad \text{(Yukawa-Potential)}$$

wobei $m = 135 \frac{\text{MeV}}{c^2}$ die Ruhmasse des ausgetauschten Teilchens (π -Mesons) ist. Die angegebene Formel gilt exakt nur für sogenannte „skalare Mesonen“, zu denen das π -Meson leider nicht zählt. Die Reichweite der Kernkräfte nach Yukawa ist deshalb etwas zu groß. Für $r \lesssim 0,5 \text{ f}$ tritt ein Zusatzterm im Yukawapotential auf, der wieder für eine Abstoßung sorgt ($1 \text{ f} = 10^{-15} \text{ m}$).

- $V_C(r)$ sei die auf der Coulomb-Wechselwirkung beruhende potentielle Energie zwischen zwei Protonen. Zeichne $V_Y(r)$, $V_C(r)$ und $V_{\text{ges}}(r) = V_Y(r) + V_C(r)$ im Intervall $0 \leq r \leq 20 \text{ f}$. Achte auf die Vorzeichen der Potentiale!
- Mit welcher Geschwindigkeit muss ein Proton auf ein ruhendes Proton treffen, um den „Coulomb-Wall“ zu überwinden? Rechne zuerst im Schwerpunktsystem!
- Berechne die Kraft $F_p(r)$ zwischen zwei Protonen und $F_n(r)$ zwischen zwei Neutronen. Wie groß sind diese Kräfte speziell für $r = 1 \text{ f}$?

4.3 Gammaübergänge und Mößbauereffekt

4.3.1. Bei der Reaktion



werden folgende γ -Energien beobachtet:

$$113,81 \text{ keV} \quad 137,65 \text{ keV} \quad 144,85 \text{ keV} \quad 251,3 \text{ keV} \quad 282,57 \text{ keV} \quad 396,1 \text{ keV}.$$

Es ist weiter bekannt, dass der $113,81 \text{ keV}$ -Übergang ganz kurz nach dem $251,3 \text{ keV}$ -Übergang stattfindet. Stelle das Niveauschema des ^{175}Lu -Kerns auf.

4.3.2. **Messung der Gravitationsrotverschiebung mit dem Mößbauereffekt:**

Berechne die relative Frequenzänderung $\frac{\Delta f}{f}$ für Photonen, die im Gravitationsfeld die Höhe H überwinden. Mit welcher Geschwindigkeit v muss sich der Sender auf den Empfänger zubewegen, damit die gravitationsbedingte Frequenzänderung wieder ausgeglichen wird? Berechne v für $H = 23$ m (**Pound** und **Rebka**, 1960 – 1965, sie verwendeten ^{57}Fe als Sender- und Absorbermaterial). Berechne auch Δf für diesen Versuch und vergleiche mit der natürlichen Linienbreite (damit wird deutlich, warum der Versuch fünf Jahre dauerte!).

4.4 Der α -Zerfall

- 4.4.1. (a) Berechne die kinetischen Energien (in MeV) und die Geschwindigkeiten des α -Teilchens und des Tochterkerns beim Zerfall von ^{210}Po . Es darf klassisch gerechnet werden und die kinetischen Energien der beiden freiwerdenden Elektronen sind zu vernachlässigen! Verwende folgende **Atommassen**:

$$M_{\text{Po}} = 209,98286 u \quad \text{und} \quad M_{\text{Pb}} = 205,97445 u$$

- (b) Welchen maximalen Radius kann der Tochterkern auf Grund des Ergebnisses von (a) höchstens haben (Austrittspunkt aus dem „Tunnel“)? Vergleiche mit dem aus $R = 1,3 f \cdot \sqrt[3]{A}$ folgenden Wert.

- 4.4.2. Welche Wärmeleistung erbringt ein Kilogramm ^{240}Pu ($W_\alpha = 5,15$ MeV, $t_{\frac{1}{2}} = 6550$ a)? Die Halbwertszeit des Tochterkerns ^{236}U ist $2,3 \cdot 10^7$ a, d.h. die weiteren Zerfälle können vernachlässigt werden!

4.5 Der β -Zerfall

- 4.5.1. Beim β^- -Zerfall von ^{209}Pb fliegen in einem speziellen Fall Tochteratom und Elektron geradlinig auseinander. Die gemessenen kinetischen Energien sind $L = W_{\text{kin},e} = 0,442485$ MeV und $K = W_{\text{kin},\text{Bi}} = 2,603$ eV. In welche Richtung muss das Neutrino fliegen? Berechne die kinetische Energie und den Impuls und daraus die Ruhmasse des Neutrinos. Achte auf eine sinnvolle Genauigkeit! Verwende folgende **Atommassen**:

$$M_{\text{Pb}209} = 208,981074801 u \quad \text{und} \quad M_{\text{Bi}209} = 208,980383241 u.$$

- 4.5.2. Die Halbwertsdicke der Erde für 1 MeV-Neutrinos beträgt ungefähr 10^{18} m. Von wie vielen 1 MeV-Neutrinos wird durchschnittlich eines beim Durchgang durch den ganzen Erdball absorbiert?

- 4.5.3. (a) Untersuche, welche der folgenden Zerfallsarten für $^{242}_{95}\text{Am}$ möglich sind: α , β^- , β^+ , K-Einfang, p^+ - und ^3He -Zerfall.
 (b) Untersuche ^5Li auf α - und β^+ -Zerfall. Wie steht es mit EC und dem p^+ -Zerfall?
 (c) Ist vom energetischen Standpunkt aus einer der folgenden Zerfälle möglich:

$$p^+ \longrightarrow n + e^+ \quad \text{oder} \quad p^+ \longrightarrow \pi^0 + e^+ \quad \left(m_{\pi^0} = 134,96 \frac{\text{MeV}}{c^2} \right)$$

Tabelle von Atommassen (in u):

^{242}Am	^{242}Cm	^{242}Pu	^{238}Np	^{241}Pu	^{239}Np	^5Li	^5He
242,0595430	242,0588293	242,0587368	238,0509405	241,0568453	239,0529314	5,0125378	5,0122236

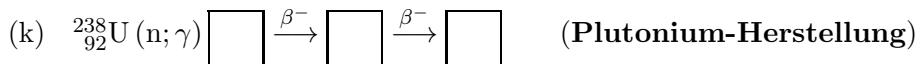
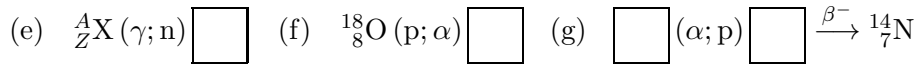
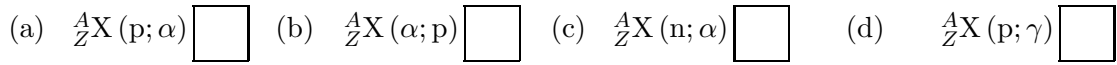
- 4.5.4. Berechne die kinetischen Energien der Zerfallsprodukte (verwende die Energie-Impulsrelation und null für die Masse des Neutrinos):

- (a) $n \longrightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ mit $W_\nu = 0$
 (b) Wie (a), jedoch mit maximalem W_ν
 (c) $p^+ \longrightarrow \pi^0 + e^+$

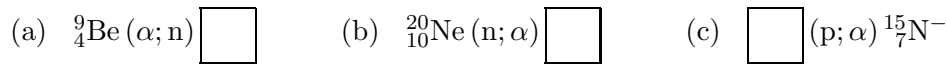
5 Kernreaktionen

5.1 Künstliche Kernumwandlungen

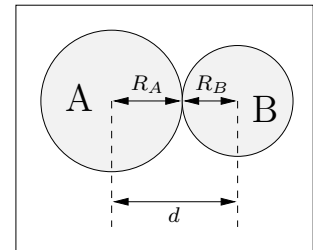
5.1.1. Vervollständige folgende Reaktionsgleichungen. Schreibe sie auch in der ausführlichen Form hin.



5.1.2. Berechne die Q-Werte folgender Reaktionen:



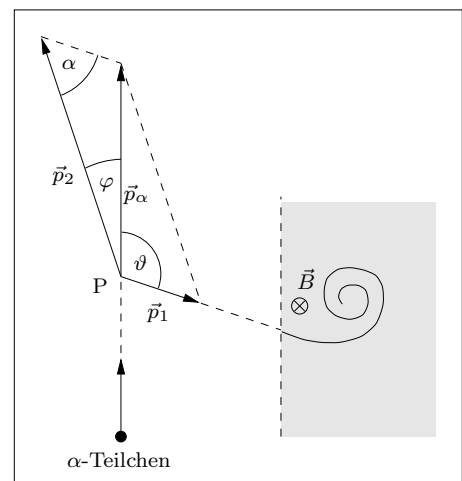
5.1.3. Die Höhe des Coulombwalls für eine Reaktion $A + B \rightarrow C$ wird näherungsweise durch das Coulombpotential an der Stelle d angegeben, wobei d die Summe der Kernradien von A und B ist ($R \approx 1,3f\sqrt[3]{A}$). Mit welchen Geschwindigkeiten von **gleichem Betrag** müssen zwei Deuteriumkerne aufeinander geschossen werden, damit eine Reaktion einsetzen kann? Mit welcher kinetischen Energie müsste dann ein Deuteriumkern auf einen ruhenden Deuteriumkern geschossen werden, um den Coulombwall zu überwinden? Vergleiche diese Energie mit dem Q-Wert der Reaktion



5.1.4. ${}^{212}_{82}\text{Po}$ sendet α -Teilchen mit $W_{\alpha} = 8,8 \text{ MeV}$ aus ($t_{\frac{1}{2}} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ s}$). Beschießt man umgekehrt ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ mit α -Teilchen der kinetischen Energie $W_{\text{kin}} = 8,8 \text{ MeV} + W_{\text{Rückstoß}}$, so beobachtet man **keine** Reaktion, obwohl die Coulombbarriere von beiden Seiten aus mit der gleichen Wahrscheinlichkeit durchtunnelt werden kann. Wie erklärt sich dieses Verhalten?

5.1.5. Nebenstehende Abbildung zeigt schematisch die Nebelkammeraufnahme einer Kernreaktion. Ein α -Teilchen mit der kinetischen Energie $W_{\alpha} = 7,70 \text{ MeV}$ stößt bei P auf einen ruhenden ${}^{14}_7\text{N}$ -Kern und es entstehen zwei Reaktionsprodukte, deren kinetische Energien durch Auszählen der Tröpfchen zu $W_1 = 2,59 \text{ MeV}$ und $W_2 = 2,44 \text{ MeV}$ bestimmt wurden. Die Winkel betragen $\varphi = 12,9^\circ$ und $\vartheta = 117^\circ$. Um welche Kernreaktion handelt es sich (vollständige Reaktionsgleichung)?

Diese Reaktion wurde 1919 von Rutherford entdeckt.



- 5.1.6. Warum gibt es im σW -Diagramm (σ = Wirkungsquerschnitt, W = kinetische Energie des stoßenden Teilchens) bei einer Compoundreaktion scharfe Resonanzlinien, bei einem Teilchenaustausch dagegen nicht?

5.2 Das freie Neutron

- 5.2.1. Das freie Neutron unterliegt einem β^- -Zerfall mit der Halbwertszeit $t_{\frac{1}{2}} = 10,6$ min.
- Berechne die maximale kinetische Energie des emittierten Elektrons.
 - Ein Reaktor erzeugt 10^{17} freie Neutronen pro Sekunde, d.h. seine „Erzeugungsrate“ ist $\alpha = 10^{17} \frac{1}{s}$. Der Reaktor wird zur Zeit $t = 0$ in Betrieb genommen. Stelle eine DGL für die Zahl $N(t)$ der vorhandenen freien Neutronen auf und löse sie (am besten mit einem CAS). Wie groß ist die β -Aktivität der Neutronen zu den Zeiten $t_1 = 1$ min, $t_2 = 10,6$ min und für $t \gg t_{\frac{1}{2}}$?
- 5.2.2. Das freie Neutron unterliegt einem β^- -Zerfall mit der Halbwertszeit $t_{\frac{1}{2}} = 10,6$ min.
- Schreibe die ausführliche Reaktionsgleichung des Zerfalls hin.
 - Zur Zeit $t_0 = 0$ entstehen N_0 freie Neutronen. Zu welcher Zeit t ist die Zahl $N(t)$ der freien Neutronen auf ein Prozent von N_0 abgesunken?
 - Ein ruhendes Neutron zerfällt. Berechne die maximale kinetische Energie Q des emittierten Elektrons.
 - Das Zerfallselektron bewegt sich mit der kinetischen Energie $T_e = \frac{Q}{4}$ in Richtung der positiven y -Achse. Berechne die Energie W_ν des Neutrinos und die Impulsbeträge p_e und p_ν des Elektrons und des Neutrinos. Dabei darf angenommen werden, dass die Ruhmasse des Neutrinos null ist und dass das Proton zwar Impuls, aber praktisch keine Energie aufnimmt.
 - Das Proton bewegt sich in Richtung der negativen x -Achse. Erstelle eine Überlegungsfigur mit allen Impulsen und berechne den Winkel φ , den der Neutrinoimpuls mit der x -Achse einschließt.

5.2.3. **Abbremsen von Neutronen**

- (a) Ein Teilchen der Masse m und der kinetischen Energie W stößt **zentral** und **elastisch** auf ein ruhendes Teilchen der Masse M und verliert dabei die kinetische Energie ΔW . Drücke das Verhältnis $f(k) = \frac{\Delta W}{W}$ durch $k = \frac{m}{M}$ aus (nichtrelativistische Rechnung). Zeichne den Grafen der Funktion $f(k)$ in der Einheit 2 cm. Berechne f speziell für den Stoß eines Neutrons mit einem Elektron, einem Proton, einem α -Teilchen, einem ^{12}C - und einem ^{238}U -Kern.
- (b) Werden Neutronen in einem Stoff mit der Massenzahl A abgebremst, dann treten Stöße mit allen möglichen Streuwinkeln auf. Unter der Annahme, dass alle Streuwinkel im Schwerpunktsystem gleichwahrscheinlich sind, folgt für den **mittleren relativen Energieverlust pro Stoß**

$$\frac{\langle \Delta W \rangle}{W} = \frac{1 - \alpha}{2} \quad \text{mit} \quad \alpha = \left(\frac{A - 1}{A + 1} \right)^2 \quad (1)$$

(Eine Herleitung dieser Formel findet man z.B. in Bergmann/Schäfer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band IV, Teil 2.) Berechne die Anzahl der Stöße, nach denen ein 2 MeV-Neutron in atomarem Wasserstoff, in reinem Kohlenstoff bzw. in ^{238}U auf die mittlere Energie bei $T = 300\text{ K}$ abgebremst wird. Gehe davon aus, dass bei jedem Stoß der mittlere Energieverlust nach (1) auftritt.

- (c) Die Vorgehensweise in Teilaufgabe (b) ist nicht korrekt, da der Mittelwert einer Funktion von ΔW i.a. nicht gleich der Funktion des Mittelwertes ist:

$$f(\langle \Delta W \rangle) \neq \langle f(\Delta W) \rangle \quad (2)$$

Das Gleichheitszeichen in (2) gilt nur, wenn f eine lineare Funktion ist. Die Größe

$$u = \ln \frac{W_0}{W} \quad (3)$$

nennt man die **Lethargie** (Trägheit) der Neutronen, wobei W_0 die kinetische Anfangsenergie der Neutronen ist. Berechne die Lethargieänderung Δu unter der Annahme, dass bei jedem Stoß der mittlere Energieverlust nach (1) auftritt. Damit hat man allerdings den gleichen Fehler begangen wie in (b). Eine genauere Analyse (siehe Bergmann/Schäfer) ergibt für den **mittleren Lethargiegewinn pro Stoß**

$$\langle \Delta u \rangle = 1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot \ln \alpha \quad (4)$$

Beachte, dass $\langle \Delta u \rangle$ konstant ist und löse jetzt noch einmal (b).

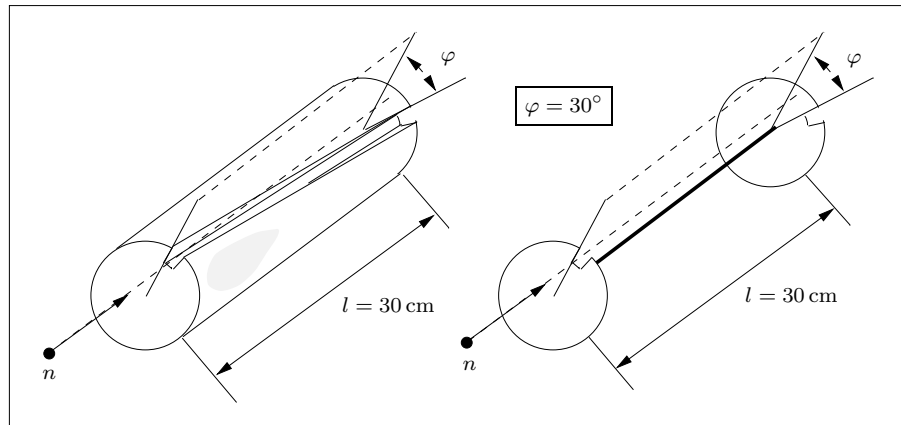
5.2.4. **Die Entdeckung des Neutrons**

- (a) Auch vor der Entdeckung des Neutrons war bekannt, dass beim Beschuss von ^9Be mit α -Teilchen eine durchdringungsfähige Strahlung entsteht, die man zunächst für eine hochenergetische Gammastrahlung hielt, die sogenannte „Berylliumstrahlung“. Trifft die Berylliumstrahlung auf Protonen bzw. ^{14}N -Kerne, dann werden die **maximalen** Rückstoßenergien $W_p = 5,7\text{ MeV}$ und $W_N = 1,4\text{ MeV}$ gemessen. Wenn es sich bei der Berylliumstrahlung um Gammaquanten handelt, dann berechnet sich die Rückstoßenergie der freien Kerne natürlich genauso wie bei der Streuung an freien Elektronen (Comptoneffekt). Zeige, dass die beobachteten Rückstoßenergien auf **verschiedene** Gammaenergien ein und derselben Strahlung führen, was die Gammahypothese der Berylliumstrahlung zu Fall bringt.
- (b) **Chadwick** nahm an (1932), dass die Berylliumstrahlung aus Teilchen der Masse m_n besteht, eben den Neutronen. Beweise, dass für die **maximalen** kinetischen Energien W_p und W_N der Rückstoßkerne sowie für die Massen m_n , m_p und m_N die Beziehung

$$\frac{m_n + m_N}{m_n + m_p} = \sqrt{\frac{W_p m_N}{W_N m_p}}$$

gilt und berechne daraus m_n .

5.2.5. Geschwindigkeitsfilter für Neutronen

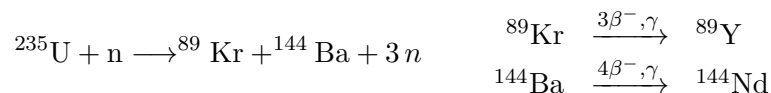


Da Neutronen keine Ladung tragen, kann man mit einem Wienfilter keine Neutronen mit bestimmten Geschwindigkeiten selektieren.

- Die nebenstehenden Abbildungen zeigen zwei mechanische Filter. Aus thermischen Neutronen der Temperatur $T = 300\text{ K}$ (wie groß ist deren mittlere Geschwindigkeit?) sollen Teilchen mit der Geschwindigkeit $v = 2000\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ausgefiltert werden. Mit welcher Frequenz müssen sich die Anordnungen drehen? Wie unterscheiden sich die beiden Anordnungen in Bezug auf die ausgefilterten Geschwindigkeiten?
- Beschreibe genau (mit Skizzen und Rechnungen), wie mit einem NaCl-Kristall ein Neutronenstrahl mit $v = 2000\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ausgefiltert werden kann. Der Netzebenabstand im NaCl-Kristall ist $d = 2,82\text{ \AA}$.

5.3 Die Kernspaltung

5.3.1. Eine mögliche Spaltungsreaktion von ^{235}U ist (HAHN, STRASSMANN, 1939)



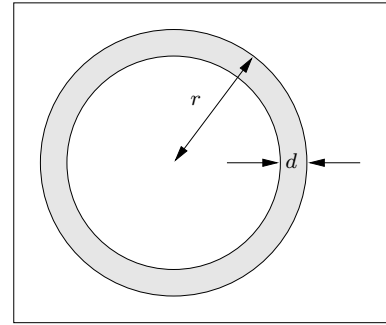
Atommassen in u :

^{235}U	^{89}Y	^{144}Nd
235,043923062	88,905847902	143,910082629

- Berechne die insgesamt bei der Spaltung und den Zerfällen frei werdende Energie. Wieviel Prozent der ursprünglichen Gesamtmasse werden dabei in kinetische und in Strahlungsenergie verwandelt?
- Bei der Explosion von einem Kilogramm des chemischen Sprengstoffes TNT (Trinitrotoluol) wird die Energie $4 \cdot 10^6\text{ J}$ frei. Wie viele Tonnen TNT haben die gleiche Sprengwirkung wie $20\text{ kg } ^{235}\text{U}$?

5.3.2. Berechnung der kritischen Masse:

Zur Berechnung der kritischen Masse einer Kugel aus spaltbarem Material nehmen wir an, dass alle Neutronen, die in einem Abstand kleiner als d von der Kugeloberfläche erzeugt werden, die Kugel verlassen.



- (a) Berechne den „Entweichungsfaktor“ b . Drücke die kritische Masse m_{kr} durch d , den Kugelradius r , den Absorptionsfaktor a , die Gesamtzahl μ_g der im Mittel pro Spaltung erzeugten Neutronen und durch die Dichte ρ des spaltbaren Materials aus. Verwende die Näherung $d \ll r$.
- (b) Die Halbwertsdicke von ^{235}U für thermische Neutronen ist $d_{\frac{1}{2}} = 0,26 \text{ mm}$, die Neutronenerzeugungsrate ist $\mu_g = 2,5$ und der Absorptionsfaktor ist $a = 0,5925$. Berechne die kritische Masse einer ^{235}U -Kugel mit der Näherung $d \approx d_{\frac{1}{2}}$.

5.3.3. Die Energie einer 20 kg- ^{235}U -Bombe verteile sich gleichmäßig als kinetische Energie auf die Luftmoleküle einer Kugel mit dem Radius r . Wie groß ist der Radius der glühenden Luftkugel, wenn ihre Temperatur gleich der Temperatur $T = 5800 \text{ K}$ an der Sonnenoberfläche ist? Durch welchen Mechanismus verteilt sich die Energie in kürzester Zeit auf die Luftmoleküle?

5.3.4. Warum wird in Kernreaktoren oft schweres Wasser (D_2O) dem normalen Wasser als Moderator vorgezogen?

5.3.5. Das zeitliche Verhalten einer Atombombe und eines Reaktors:

Im Folgenden sei τ die Generationszeit der prompten und δ die der verzögerten Neutronen, $N(t)$ ist die Zahl der freien Neutronen zur Zeit t . δ hat die Größenordnung von einigen Sekunden bis zu einer Minute, $\tau \approx 10^{-8} \text{ s}$ bei der Bombe (kein Moderator) und $\tau \approx 10^{-4} \text{ s}$ beim Reaktor (mit Moderator). k_p und k_v sind die Vervielfältigungsfaktoren für prompte und verzögerte Neutronen. Für die Bombe ist $k_p > 1$, im Reaktor ist $k_p < 1$. Die Kettenreaktion beginne zur Zeit $t = 0$. Für $t < \delta$ gibt es noch keine verzögerten Neutronen. Für $N(t)$ gelten die folgenden **Funktionalgleichungen**:

$$\tau < t < \delta : \quad N(t) = N(t - \tau) \cdot k_p \quad (1)$$

$$t > \delta : \quad N(t) = N(t - \tau) \cdot k_p + N(t - \delta) \cdot k_v \quad (2)$$

- (a) Für die Bombe ist nur (1) maßgebend, da in einer Zeit $t_0 \ll \delta$ alles Material gespalten ist. Zeige, dass

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\alpha t} \quad (3)$$

eine Lösung von (1) ist und berechne α . Für eine ^{239}Pu -Bombe ist $k_p = 1,8$. Nach welcher Zeit sind 20 kg ^{239}Pu explodiert?

- (b) Zeige, dass (3) auch eine Lösung von (2) ist. Welcher Gleichung muss α genügen? Berechne α mit der äußerst guten Näherung $e^{-\alpha \tau} = 1$. Beweise damit

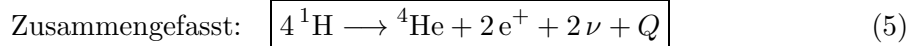
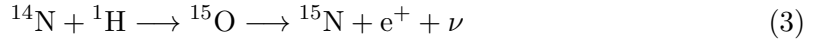
$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{k_v}{1 - k_p} \right)^{\frac{t}{\delta}} \quad (4)$$

Diese Lösung berücksichtigt nicht das Verhalten von $N(t)$ für $t < \delta$, genausowenig die Tatsache, dass δ und τ nur Mittelwerte darstellen, was aber am groben Verlauf von $N(t)$ nichts ändert. Nach welcher Zeit verdoppelt sich $N(t)$ für $k_p = 0,8$, $k_v = 0,4$ und $\delta = 40 \text{ s}$?

5.4 Die Kernfusion

5.4.1. Energieerzeugung in der Sonne:

Die Sonne erzeugt ihre Energie durch folgenden Reaktionszyklus (**Bethe** und **Weizsäcker**):



^{12}C tritt in diesem Zyklus nur als Katalysator auf! Berechne den Q -Wert der gesamten Reaktion unter Vernachlässigung der Neutrinoenergien. Welche Sonnenenergie trifft pro Sekunde auf 1 m^2 der Erdoberfläche (Solarkonstante), wenn in der Sonne $6,6 \cdot 10^8\text{ t } ^4\text{He}$ pro Sekunde gebildet werden?

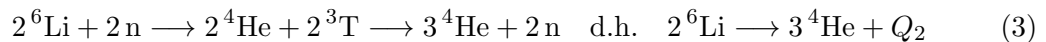
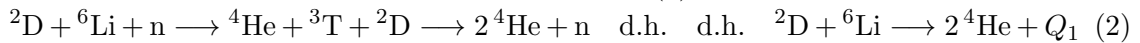
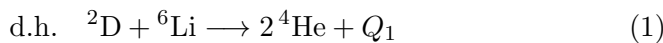
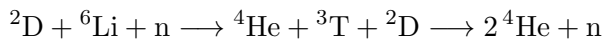
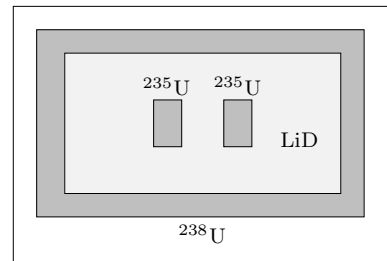
5.4.2. Berechne die Energie, die bei der Fusion von einem Kilogramm Protonen zu Deuterium freigesetzt wird.

5.4.3. Zwei mit gleichem Geschwindigkeitsbetrag zentral aufeinanderstoßende Deuteriumkerne können den Coulombwall überwinden, wenn jeder Kern die kinetische Energie $W_0 = 0,22\text{ MeV}$ mitbringt (siehe Aufgabe 5.1.3).

(a) Welche Temperatur besitzt ein Deuteriumgas mit der mittleren kinetischen Energie $\langle W_k \rangle = W_0$?

(b) Warum kann sich die Reaktion $\text{D} + \text{D} \longrightarrow \text{T} + \text{p}$ schon bei $T = 3 \cdot 10^8\text{ K}$ von selbst aufrecht erhalten?

5.4.4. Wie nahe Genie und Wahnsinn beieinander liegen, zeigt die Konstruktion folgender „Superbombe“: Um eine „kleine“ ^{235}U -Bombe als Zünder ist Lithiumdeuterid (LiD) als Fusionsmaterial angeordnet. Die hohe Temperatur und die Neutronen der Spaltungsbombe leiten im LiD folgende Reaktionen ein:



Die bei den Fusionsreaktionen entstehenden schnellen Neutronen spalten den ^{238}U -Mantel, wobei ca. 200 MeV pro Kern freigesetzt werden.

(a) Berechne Q_1 und Q_2 . Wir nehmen an, dass die Reaktionen (1) und (2) mit gleicher Wahrscheinlichkeit ablaufen. Wie groß ist dann der mittlere Q -Wert der Fusionsreaktion eines LiD-Moleküls?

(b) Berechne die gesamte freiwerdende Energie der Bombe für $20\text{ kg } ^{235}\text{U}$, 100 kg LiD und $500\text{ kg } ^{238}\text{U}$. Welche Kantenlänge hat ein Würfel aus TNT, der die gleiche Energie liefert wie unsere Bombe ($\rho_{\text{TNT}} = 1654\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)? Eine LKW-Kolonne transportiert diese TNT-Menge. Wie lang ist die Kolonne, wenn jeder LKW 10 t laden kann und 20 m Weg beansprucht?

5 Kernreaktionen - Aufgaben

- (c) Im September 1996 brach auf Island ein Vulkan aus, der eine riesige Menge Gletschereis zum Schmelzen brachte. Das Schmelzwasser sammelte sich zunächst in einem See unter der Eisdecke. Nach dem Brechen des Eises wälzte sich ein gewaltiger Strom zur Küste, der zwei Tage lang mit $45\,000 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ dahinströmte. Wie viele unserer Superbomben wären nötig, um die gleiche Eismenge zu schmelzen wie der Vulkan?