Ausgewählte Themen der Physik

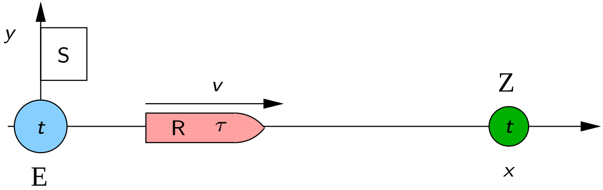
Richard Reindl

30. Mai 2015

1. Eine Reise durch das Universum
2. Durch Wände gehen?
3. Das Universum – endlich oder unendlich?

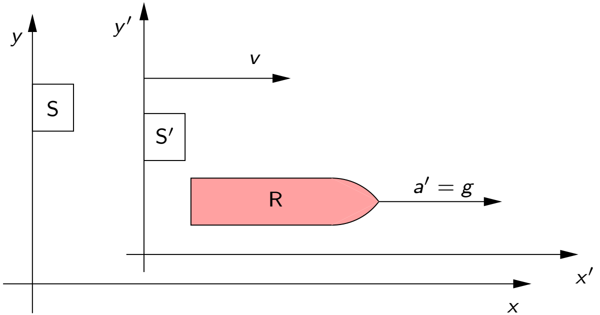
Problemstellung

Ein Raumschiff R fliegt von der Erde E zu einem Zielplaneten Z.
E und Z ruhen im Inertialsystem S.
Auf E und Z messen Uhren die Zeit t.
Uhren in R messen die Eigenzeit τ.
R beschleunigt so, dass die Insassen immer eine Beschleunigung vom Betrag g (Erdbeschleunigung) spüren.



Bezugssysteme

S ist das System, in dem die Erde und der Zielplanet ruhen.
S′ ist ein Inertialsystem, das zur Zeit t die gleiche Geschwindigkeit v relativ zu S hat wie die Rakete (momentanes Ruhsystem).
Erste Hälfte des Fluges: $a' = g$ (Beschleunigungsphase)
Zweite Hälfte des Fluges: $a' = -g$ (Bremsphase)



Flugdauer

Die Flugdauer an Bord des Raumschiffes für die Entfernung x zwischen Start- und Zielplanet:

$$\tau(x) = \frac{2c}{g} \ln \left[1 + \frac{gx}{2c^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4c^2}{gx}} \right) \right]$$

Für $x \gg 1\,\mathrm{LJ}$ gilt in guter Näherung

$$\boxed{\tau(x) \approx \frac{2c}{g} \ln \frac{gx}{c^2} = 1{,}94\,\mathrm{a} \cdot \ln \frac{x}{0{,}97\,\mathrm{LJ}}}$$

Jede Verdopplung von x verlängert die Reise nur um $1{,}34\,\mathrm{a}$.

maximale Geschwindigkeit

Die maximale Geschwindigkeit v erreicht das Raumschiff nach der Beschleunigungsphase auf halber Strecke. Es gilt

$$\beta(x) = \frac{v(x)}{c} = \sqrt{\frac{gx(gx+4c^2)}{gx(gx+4c^2)+4c^4}} \approx 1 - \frac{2c^4}{g^2x^2}$$

Maximaler Lorentzfaktor:

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta(x)^2}} \approx \frac{gx}{2c^2} = 0{,}52 \cdot \frac{x}{\mathrm{LJ}}$$

Maximaler Dopplerfaktor:

$$k(x) = \sqrt{\frac{1+\beta(x)}{1-\beta(x)}} \approx 2\gamma(x) = \frac{gx}{c^2} \approx 1{,}03 \cdot \frac{x}{\mathrm{LJ}}$$

Photonenrakete

Eine Rakete stößt die Antriebsgase mit der Geschwindigkeit u relativ zur Rakete aus.
Der effektivste Raketenantrieb ist der Photonenantrieb. Dabei werden durch die Zerstrahlung von Materie mit Antimaterie erzeugte Photonen als Reaktionsmasse genutzt ($u = c$).
Um die Nutzlast m ans Ziel zu bringen, ist die Startmasse

$$m_0 = m\left(k^{\frac{c}{u}}\right)^2 \approx m\left(\frac{gx}{c^2}\right)^{\frac{2c}{u}}$$

erforderlich. Speziell für die Photonenrakete gilt

$$\frac{m_0}{m} \approx \left(\frac{gx}{c^2}\right)^2 = 1{,}07 \cdot \left(\frac{x}{\mathrm{LJ}}\right)^2$$

Eine Reise durch das Universum

Ziel	$\frac{x}{\mathrm{LJ}}$	$\frac{\tau}{\mathrm{a}}$	$\frac{m_0}{m}\ (u = c)$
Mond	384000 km	3,5 h	1,0004
α-Centauri	4	3,46	26,3
Andromeda-Galaxie	$2 \cdot 10^6$	28,2	$4{,}3 \cdot 10^{12}$
Rand des sichtbaren Universums	$46 \cdot 10^9$	47,6	$2{,}3 \cdot 10^{21}$

Man könnte also durchaus im Laufe eines Menschenlebens das ganze sichtbare Universum durchqueren. Um dabei 10 t Nutzlast ans Ziel zu bringen, bräuchte man eine Rakete mit der Startmasse $m_0 = 2{,}3 \cdot 10^{25}$ kg, also mehr als 300 Mondmassen, davon die Hälfte als Antimaterie!

Gefahren der Reise

Zum Zeitpunkt der Maximalgeschwindigkeit würde eine Kollision mit einem Partikel der Masse $M = 10^{-5}\,\mathrm{kg}$ (Sandkorn) die Energie

$$W = (\gamma - 1)Mc^2 \approx \gamma Mc^2 = 2{,}3 \cdot 10^{11}\,\mathrm{J} \cdot \frac{x}{\mathrm{LJ}}$$

freisetzen. Beim Flug zum Rand des sichtbaren Universums wären das $\approx 10^{22}$ J, der Energie von ungefähr 10^5 Atombomben.
Das Sternenlicht ($\lambda \approx 500\,\mathrm{nm}$) wäre im Raumschiffsystem harte Gammastrahlung der Wellenlänge $\lambda' = \frac{\lambda}{k}$ und der Photonenenergie $W'_\gamma = \frac{hc}{\lambda'} = k \cdot \frac{hc}{\lambda}$. Beim Flug durchs Universum ($k = 4{,}7 \cdot 10^{10}$):

$$\lambda' \approx 10^{-17}\,\mathrm{m}, \quad W'_\gamma \approx 120\,\mathrm{GeV}$$

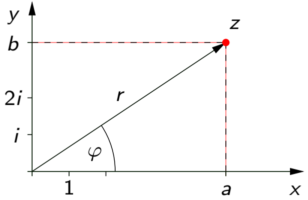
Komplexe Zahlen

Komplexe Zahl z ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$):

$$z = a + bi \text{ mit } i^2 = -1$$

$$z = r\mathrm{e}^{i\varphi} = r\cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$z^2 = (a+bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2 i^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \neq z^2$$

Wellenfunktion

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf eindimensionale Bewegungen.
Ein Teilchen wird durch eine im allgemeinen komplexwertige Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ beschrieben. Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit t im Intervall $[a, b]$ anzutreffen, ist

$$P([a, b]) = \int_a^b w(x, t)\,\mathrm{d}x \text{ mit } w(x, t) = |\Psi(x, t)|^2$$

w ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte.

Stationäre Zustände

Ein Zustand, dessen Wahrscheinlichkeitsdichte nicht von der Zeit abhängt, heißt stationär. Die Wellenfunktion eines stationären Zustands hat die Form

$$\Psi(x,t) = \varphi(x)\mathrm{e}^{-i\omega t},$$

da wegen $|\mathrm{e}^{-i\omega t}|^2 = |\cos\omega t - i\sin\omega t|^2 = \cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$

$$w(x,t) = |\varphi(x)|^2 \cdot |\mathrm{e}^{-i\omega t}|^2 = |\varphi(x)|^2$$

zeitunabhängig ist.

Die Schrödingergleichung

Die Wellenfunktion des stationären Zustands eines Teilchens der Gesamtenergie W und der potentiellen Energie $V(x)$ genügt der zeitunabhängigen Schrödingergleichung

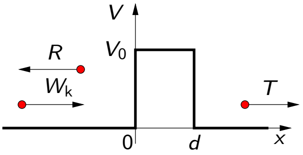
$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\cdot\varphi''(x)+V(x)\cdot\varphi(x)=W\cdot\varphi(x)$$

mit $\hbar=\frac{h}{2\pi}$. Die Lösung der Schrödingergleichung für eine konstante potentielle Energie $V(x)=V_0$ lautet

$$\varphi(x)=A\cdot e^{\alpha\,x}+B\cdot e^{-\alpha\,x}\quad\text{mit}\quad\alpha=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2\,m(V_0-W)}$$

Tunneleffekt

Teilchen der Masse m und der kinetischen Energie W_k treffen auf eine Rechtecksbarriere der Höhe $V_0 > W_\mathrm{k}$ und der Breite d. Klassisch gesehen müssen die Teilchen umkehren.



Mit Hilfe der Schrödingergleichung kann man zeigen, dass nur ein Bruchteil R der Teilchen reflektiert wird und der Bruchteil $T = 1 - R$ die Barriere ohne Energieverlust durchdringt. Für den Transmissionskoeffizienten T (Tunnelwahrscheinlichkeit) gilt

$$T = \frac{\gamma}{\mathrm{e}^{2\,\alpha\,d} + \mathrm{e}^{-2\,\alpha\,d} + \gamma - 2}$$

mit

$$\gamma = 16 \cdot \frac{W_\mathrm{k}}{V_0} \cdot \left(1 - \frac{W_\mathrm{k}}{V_0}\right) \text{ und } \alpha = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\,m(V_0 - W_\mathrm{k})}$$

Beispiel 1

Ein Elektron der kinetischen Energie $W_\mathrm{k} = 3\,\mathrm{eV}$ trifft auf eine Barriere der Höhe $V_0 = 5\,\mathrm{eV}$ und der Breite $d = 10^{-10}\,\mathrm{m}$.

$$2d\alpha = 1{,}449, \quad \gamma = 3{,}84 \quad \Longrightarrow \quad T = 0{,}606 = 60{,}6\%$$

Beispiel 2

Ein Mensch der Masse $m = 70\,\mathrm{kg}$ rempelt mit der Geschwindigkeit $v = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ an eine geschlossene Tür der Dicke $d = 5\,\mathrm{cm}$. Mit der Geschwindigkeit $v_0 = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ würde er die Tür durchbrechen.

$$W_\mathrm{k} = \frac{m}{2}v^2 = 140\,\mathrm{J}, \quad V_0 = \frac{m}{2}v_0^2 = 31500\,\mathrm{J}$$

$$2d\alpha = 2{,}0 \cdot 10^{36}, \quad \gamma = 0{,}071$$

$$T \approx \frac{\gamma}{\mathrm{e}^{2d\alpha}} = 0{,}071 \cdot \mathrm{e}^{-2\cdot 10^{36}} \approx 10^{-8{,}6\cdot 10^{35}}$$

$$T = 0{,}\underbrace{0000\ldots0000}_{8{,}6\cdot 10^{35}\text{ Nullen}}1$$

Bei einem Kästchen ($5\,\mathrm{mm}$) pro Ziffer wäre die ausgeschriebene Zahl $4{,}3 \cdot 10^{33}\,\mathrm{m} = 4{,}6 \cdot 10^{17}\,\mathrm{LJ}$ lang, das entspricht ungefähr 10^7-mal dem Durchmesser des sichtbaren Universums.

Quantenzustände

Ein Satz der Quantenmechanik:

> In einem endlichen Volumen gibt es nur endlich viele verschiedene Quantenzustände.

Mit R bezeichnen wir den Radius und mit V das Volumen des sichtbaren Universums:

$$R = 4{,}6 \cdot 10^{10}\,\mathrm{LJ} = 4{,}35 \cdot 10^{26}\,\mathrm{m}$$

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 = 3{,}45 \cdot 10^{80}\,\mathrm{m}^3$$

Identische Teiluniversen

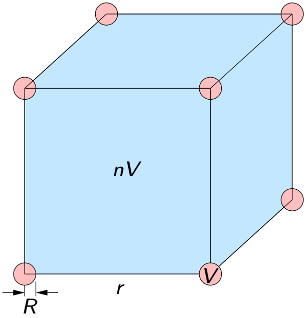
Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Raumgebiet mit dem Volumen V des sichtbaren Universums genau in dem Quantenzustand unseres sichtbaren Universums zu einem bestimmten Zeitpunkt befindet, ist extrem klein, aber größer als null. Da ein räumlich unendliches Universum unendlich viele Raumgebiete mit dem Volumen V enthält, gibt es *zu jedem Zeitpunkt* unendlich viele Raumgebiete, in denen haargenau das gleiche abläuft wie in unserem Teil des Universums.

Abstand identischer Bereiche

Unter der Annahme einer gleichmäßigen Verteilung der identischen Teiluniversen gilt für ihren mittleren Abstand r voneinander

$$nV = r^3 \quad \Longrightarrow$$

$$r = \sqrt[3]{nV} = R \cdot \sqrt[3]{\frac{4\pi n}{3}} \approx R \cdot \sqrt[3]{n}$$



Abschätzungen von n liegen zwischen $10^{10^{118}}$ und $10^{10^{124}}$. Mit $n = 3 \cdot 10^{10^{120}}$ folgt

$$r \approx R \cdot 10^{10^{120}}$$

irrsinnig groß

Der mittlere Abstand r zweier identischer Teiluniversen ist so riesig, dass es unerheblich ist ob man als Einheit fm (Femtometer, 10^{-15} m), m, LJ oder gar R wählt:

$$R = 4{,}6 \cdot 10^{10}\,\mathrm{LJ} = 4{,}35 \cdot 10^{41}\,\mathrm{fm} = 10^{41{,}64}\,\mathrm{fm}$$

$$r \approx 10^{10^{120}} R = 10^{10^{120}} \cdot 10^{41{,}64}\,\mathrm{fm} = 10^{10^{120}+41{,}64}\,\mathrm{fm}$$

10^{120} stimmt in den ersten 119 Stellen mit $10^{120} + 41{,}64$ überein, d.h.

$$r \approx 10^{10^{120}} R \approx 10^{10^{120}}\,\mathrm{LJ} \approx 10^{10^{120}}\,\mathrm{m}$$

unendlich?

Die Konsequenz eines räumlich unendlichen Universums ist die Existenz unendlich vieler identischer Teiluniversen.
Aber ist unser Universum wirklich unendlich groß, obwohl es beim Urknall aus einem sehr kleinen Volumen entstanden ist?
Es könnte sein, wenn die von Alexander Vilenkin vorgeschlagene Theorie der ewigen Inflation tatsächlich auf Teilbereiche unseres Universums zutrifft.
Näheres z.B bei
Alexander Vilenkin, *Kosmische Doppelgänger, Springer 2008 oder*
Max Tegmark, Unser mathematisches Universum, Ullstein, 2015

Kursmaterialien

Ausführlichere Materialien zum Kurs unter

http://www.stbit.de/SAkademie.htm

oder direkt zu den pdf-Files

http://www.stbit.de/ReiseUni.pdf
http://www.stbit.de/Quanten.pdf
http://www.stbit.de/Universum.pdf
http://www.stbit.de/praes_werdenfels.pdf