

LK Physik 13

Aufgaben zur Quantenphysik

Richard Reindl

Die aktuellste Version der Aufgaben findet man unter

<http://www.stbit.de>

Das Werk steht unter einer Creative Commons

- Namensnennung
- Nicht-kommerziell
- Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Unported Lizenz

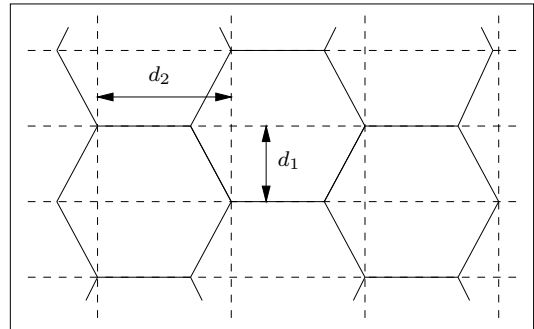
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.de>



1 Materiewellen

1.1 Elektronenbeugung

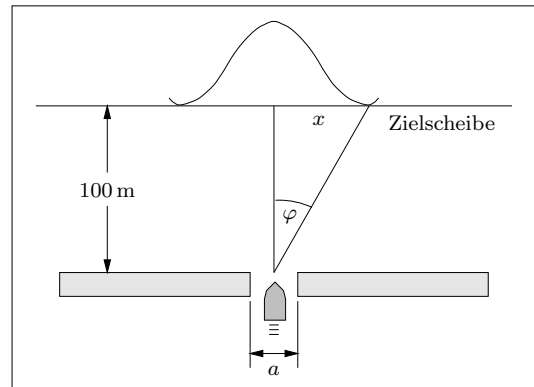
- 1.1.1. In einer bestimmten Ebene des Graphitkristalls liegen die Atome auf Ecken regelmäßiger Sechsecke mit der Seitenlänge $a = 1,42 \text{ \AA}$. Berechne die in der Abbildung eingezeichneten Netzebenenabstände d_1 und d_2 !



- 1.1.2. Zwei Teilchen der gegenseitigen Entfernung d werden mit Strahlung der Wellenlänge λ untersucht. Die Teilchen können dann als getrennte Objekte erkannt werden, wenn $d \gtrsim \frac{\lambda}{2}$ ist. Vergleiche das Auflösungsvermögen des Lichtmikroskops mit dem eines Elektronenmikroskops bei der Beschleunigungsspannung $U = 10^5 \text{ V}$. Wie groß ist der relative Fehler der nichtrelativistischen Rechnung? Warum ist das tatsächliche Auflösungsvermögen bei beiden Geräten schlechter?
- 1.1.3. α -Teilchen sind die Atomkerne von ${}^4\text{He}$ -Atomen ($m \approx 4u$, $q = 2e$). α -Teilchen werden durch die Spannung $U = 100 \text{ V}$ beschleunigt und durchdringen dann eine polykristalline Goldfolie mit dem Netzebenenabstand $d = 2,05 \text{ \AA}$. Welchen Radius hat der Beugungskreis 1. Ordnung, wenn der Leuchtschirm 20 cm von der Goldfolie entfernt ist?

- 1.1.4. Eine Gewehrkuugel der Masse $m = 5 \text{ g}$ fliegt mit der Geschwindigkeit $v = 600 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ durch einen Spalt der Breite $a = 2 \text{ cm}$.

- (a) Welche Wellenlänge hat die der Kugel zugeordnete Materiewelle?
- (b) Welchem Winkel φ entspricht das erste Minimum der Beugungsfigur? Welcher Ablenkung x entspricht das auf der Zielscheibe, wenn diese 100 m vom Spalt entfernt ist?



- (c) Welchen Wert müsste h haben, damit x einen Zentimeter betragen würde?

- 1.1.5. Welche Geschwindigkeit v müssen Elektronen mindestens haben, damit am Graphitgitter für $d = 1,23 \text{ \AA}$ in 1. Ordnung keine Beugung mehr festgestellt werden kann, wenn ein Winkel von $0,1''$ gerade noch messbar ist?

- 1.1.6. (a) Welche Wellenlänge hat ein Elektron mit der Geschwindigkeit $v = 2,00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?
- (b) Welche Energie, welchen Impuls und welche Geschwindigkeit hat ein Proton mit der Wellenlänge $\lambda = 1,00 \cdot 10^{-20} \text{ m}$?

1.2 Die Wellenfunktion und ihre physikalische Bedeutung

1.2.1. Wie muss der Faktor A in der Wellenfunktion

$$\psi(x, t) = A \cdot e^{-\frac{(x-vt)^2}{a^2}} \cdot e^{i(kx-\omega t)}$$

lauten, damit sie normiert ist? In einer Formelsammlung findet man das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-b^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2b}$$

Führe die Substitution $y = x - vt$ aus und beachte, dass für $t = \text{konst.}$ dy gleich dx ist. Zeichne den Grafen der Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x)$ für $a = 0,1 \text{ nm}$, $v = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $t = 4 \cdot 10^{-12} \text{ s}$ in den Einheiten $0,1 \text{ nm} \hat{=} 1 \text{ cm}$ und $w = \frac{10}{\text{nm}} \hat{=} 5 \text{ cm}$.

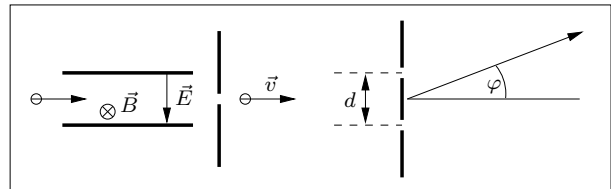
1.2.2. Die Wellenfunktionen von zwei Elektronen sind zur Zeit $t = 0$ durch

$$\psi_1(x) = A_1 \cdot e^{-\frac{x^2}{8}} \cdot e^{i\pi x} \quad \text{und} \quad \psi_2(x) = A_2 \cdot e^{-\frac{x^2}{8}} \cdot e^{i \cdot 2\pi x}$$

gegeben. Zum Lösen der Aufgabe ist ein CAS vorteilhaft. Der Einfachheit halber rechnen wir ohne Benennungen.

- Berechne A_1 und A_2 !
- Die Wellenfunktionen veranschaulicht man am besten durch das gemeinsame Zeichnen des Realteils, des Imaginärteils und der beiden Einhüllenden. Veranschauliche die Wellenfunktionen der beiden Elektronen auf diese Weise!
- Berechne $\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$ und die Wahrscheinlichkeitsdichten $w(x) = |\psi(x)|^2$, $w_1(x) = |\psi_1(x)|^2$ und $w_2(x) = |\psi_2(x)|^2$. Zeichne die drei Wahrscheinlichkeitsdichten in ein Diagramm! Welche physikalische Bedeutung haben w_1 , w_2 und w ?

1.2.3. Elektronen, die ein Wienfilter ($E = 291 \frac{\text{V}}{\text{m}}$, $B = 0,4 \text{ T}$) passiert haben, treffen auf einen Doppelspalt (Spaltbreite: $a = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, Spaltabstand: $d = 10^{-5} \text{ m}$).



- Zeichne die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(\varphi)$ zwischen -30° und 30° . Wähle die Einheiten $w_{\text{max}} \hat{=} 5 \text{ cm}$ und $10^\circ \hat{=} 2 \text{ cm}$. Die aus der Elektrodynamik bekannte Spaltfunktion lautet

$$I = I_0 \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2} \quad \text{mit} \quad u = \frac{a \pi \sin \varphi}{\lambda}$$

- Im Zeitintervall $[0, T]$ ist der eine Spalt, im Intervall $[T, 2T]$ der andere Spalt geschlossen. Zeichne die über $[0, 2T]$ gemittelte Wahrscheinlichkeitsdichte $\bar{w}(\varphi)$ in das Diagramm aus Teilaufgabe (a) ein.
- Ohne Computer kann der konstante Faktor in $w(\varphi)$ nur sehr mühsam ermittelt werden. Aber auch ohne Kenntnis dieses Faktors können Verhältnisse $\frac{w(\varphi_1)}{w(\varphi_2)}$ angegeben werden. In das Maximum 1. Ordnung werden in einen Winkelbereich von $0,1^\circ$ 300 Elektronen gestreut. Wie viele Elektronen sind im Maximum 3. Ordnung in einem gleich großen Winkelbereich zu erwarten? Berechne den konstanten Faktor in $w(\varphi)$ mit dem Computer!

1.3 Wellenpakete als Überlagerung ebener Wellen

1.3.1. Berechne für das Wellenpaket

$$\psi(x, t) = \int_{k_1}^{k_2} e^{i(kx - \omega t)} dk \quad \text{mit} \quad k_1 = 10 \frac{1}{\text{m}} \quad \text{und} \quad k_2 = 11 \frac{1}{\text{m}}$$

und der Dispersionsrelation

$$\omega(k) = 5 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot k^3$$

die Gruppengeschwindigkeit v_g und die Phasengeschwindigkeiten der Teilwellen.

1.3.2. Im Folgenden sind Wellenfunktionen zur Zeit Null gegeben. Berechne die dazugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten $w(x, 0)$ und zeichne ihre Grafen!

$$(a) \quad \psi(x, 0) = e^{i \cdot 10x} + e^{i \cdot 12x} \quad (b) \quad \psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (e^{i \cdot 10x} + e^{i \cdot 11x} + e^{i \cdot 12x})$$

$$(c) \quad \psi(x, 0) = \int_{10}^{12} e^{ikx} dk \quad (d) \quad \psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(k-11)^2} \cdot e^{ikx} dk$$

1.3.3. Für die rechteckige Wellenzahlverteilung

$$A(k) = \begin{cases} A & \text{für } k_1 \leq k \leq k_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

haben wir die Wellenfunktion

$$\psi(x, 0) = \frac{2A}{x} \cdot \sin \frac{\Delta k \cdot x}{2} \cdot e^{ik_0 x}$$

mit

$$\Delta k = k_2 - k_1 \quad \text{und} \quad k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

erhalten. Berechne die Konstante A so, dass die Wellenfunktion normiert ist! Verwende die Integralformel

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot |a|$$

1.3.4. Die Dirac'sche Deltafunktion kann als Grenzwert der Funktionenfolge

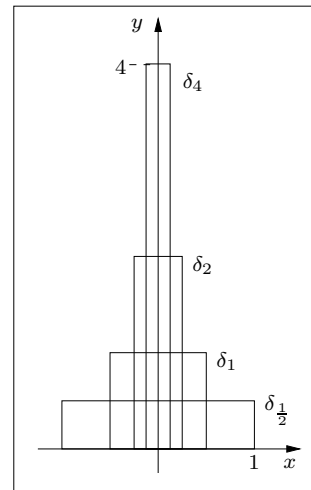
$$\delta_n(x) = \begin{cases} n & \text{für } -\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dargestellt werden: $\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x)$

Zeige, dass damit die Integralformel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) \cdot f(x) dx = f(a)$$

erfüllt ist!

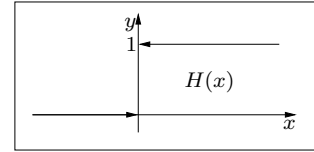


- 1.3.5. (a) Wie lautet die inverse Fouriertransformierte von $A(u) = \delta(u - a)$?
 (b) Berechne die Wellenfunktion zur Wellenzahlverteilung

$$A(k) = \delta(k - k_1) + 3\delta(k - k_2) + 2\delta(k - k_3)$$

- 1.3.6. Die Heaviside'sche Sprungfunktion ist definiert durch

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$



- (a) Berechne $F(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt$ und drücke das Ergebnis durch $H(x)$ aus.
 Berechne die Ableitung von $H(x)$.
 (b) Drücke

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

durch $H(x)$ aus und berechne $f'(x)$. Mache die Probe durch Integrieren.

1.4 Teilchen als Wellenpakete

- 1.4.1. Ein Elektron durchläuft die Spannung $U = 100 \text{ V}$. Durch eine geeignete Vorrichtung wird erreicht, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte des Elektrons zur Zeit Null und am Ort Null die $\frac{1}{e}$ -Breite $\Delta x_0 = 1,13 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ hat. Zur Zeit t_0 befindet sich das Maximum des Wellenpakets bei $x_0 = 1000 \text{ m}$.
- (a) Zeichne $w(x, t_0)$ im Intervall $[990 \text{ m}, 1010 \text{ m}]$ und berechne die Wahrscheinlichkeit P , das Elektron zur Zeit t_0 im Intervall $[999 \text{ m}, 1001 \text{ m}]$ zu finden.
 (b) Berechne die Wahrscheinlichkeit P_t , mit der das Elektron irgendwann im Zeitintervall $[t_0, t_0 + 5 \cdot 10^{-7} \text{ s}]$ den Ort x_0 passiert.
- 1.4.2. (a) Drücke die Phasengeschwindigkeit v_p einer Materiewelle einmal im klassischen und einmal im relativistischen Fall durch die Teilchengeschwindigkeit (Gruppengeschwindigkeit) v aus. Steht das Ergebnis des relativistischen Falles im Widerspruch zur speziellen Relativitätstheorie?
 (b) Zeige, dass für $v \ll c$ (nichtrelativistischer Grenzfall)

$$\omega_{\text{relativistisch}} = \omega_{\text{klassisch}} + \text{konst.}$$

gilt. Warum widerspricht sich die Physik hier trotzdem nicht selbst?

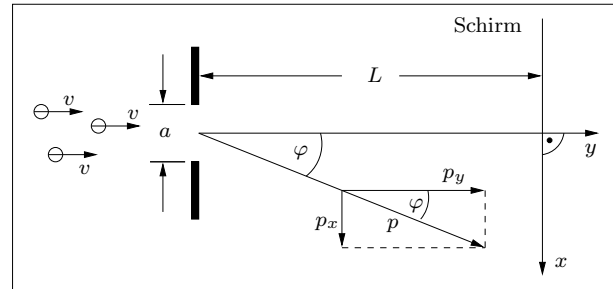
- 1.4.3. Berechne für Elektronen mit den Geschwindigkeiten $v = 300 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v = 600 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v = 0,1 c$ bzw. $v = 0,99 c$ klassisch und relativistisch die Wellenlänge und die Frequenz.
 1.4.4. Thermische Neutronen stehen bei Zimmertemperatur ($\approx 300 \text{ K}$) mit der Umgebung im thermischen Gleichgewicht. Untersuche, ob thermische Neutronen zur Strukturuntersuchung von Festkörpern geeignet sind!
 1.4.5. Berechne Geschwindigkeit, Phasengeschwindigkeit, Masse, Energie, Impuls und Frequenz eines Elektrons, dem die Wellenlänge $\lambda = 2,00 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ zugeordnet ist.

1.5 Die Unschärferelationen

1.5.1. Vor der Entdeckung des Neutrons wurde angenommen, dass der Kern von ${}^4\text{He}$ ($m = 4u$, $q = 2e$) aus vier Protonen und zwei Elektronen besteht. Berechne die Impuls- und die daraus resultierende Energieunschärfe eines Protons bzw. eines Elektrons im ${}^4\text{He}$ -Kern, wenn für die Ortsunschärfe der Kerndurchmesser $2r = 4,4\text{f}$ ($1\text{f} = 1\text{Fermi} = 10^{-15}\text{m}$) angenommen wird. Warum folgt daraus, dass es **keine** Kernelektronen gibt?

1.5.2. Einfachspalt mit Teilchen:

Ein Strahl von identisch präparierten Teilchen mit dem scharf definierten Impuls p_y ($\Delta p_y = 0$) trifft auf einen Einfachspalt der Breite a . Der Mittelwert des Impulses der Teilchen in x -Richtung sei Null und die Teilchen treffen jeden Ort des Spaltes mit gleicher Wahrscheinlichkeit.



- Wie lautet die Wellenfunktion ψ_y der Teilchen in y -Richtung? Wie groß ist Δy ? Ist ψ_y normierbar?
- Wie lautet die normierte Wellenfunktion $\psi_x(x, 0)$ für ein Teilchen, das zur Zeit Null durch den Spalt geht? Berechne (Tabelle!) die Fourieramplitude $A(k)$ ($k = k_x$) für die Bewegung in x -Richtung.
- Berechne aus $A(k)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte $w_p(p_x)$ für den Impuls in x -Richtung (es darf angenommen werden, dass x und y groß gegen die Spaltbreite a sind). Drücke $w_p(p_x)$ durch die Wellenlänge λ und den Winkel φ aus. Wie heisst die Wahrscheinlichkeitsdichte $w_\varphi(\varphi)$, dass das Teilchen in die Richtung von φ gestreut wird? Vergleiche mit der Intensitätsformel, die wir für die Beugung elektromagnetischer Wellen am Einfachspalt gewonnen haben!
- Bei dieser Teilaufgabe ist ein CAS von großem Vorteil!

Berechne, wiederum unter der Annahme $x \geq a$, $y \geq a$ und $L \geq a$, die Wahrscheinlichkeitsdichten (beachte, dass p konstant ist (Energiesatz))

$$w(x, t) \quad (\text{Teilchen hat zur Zeit } t \text{ die } x\text{-Koordinate } x) \text{ und}$$

$$w_x(x) \quad (\text{Teilchen trifft bei } x \text{ auf den Schirm}).$$

Zeige, dass $w(x, 0)$ **nicht** mit $|\psi(x, 0)|^2$ übereinstimmt! Woran liegt das?

Wir versuchen jetzt, diesen Missstand folgendermaßen zu beseitigen:

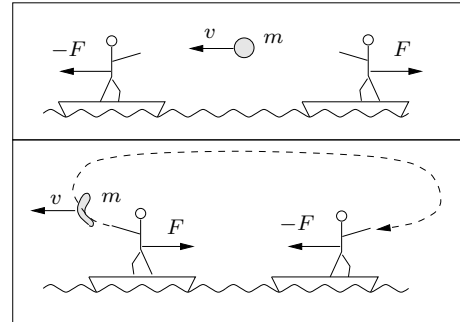
In dem gefundenen Ausdruck für $w(x, t)$ ersetzen wir x durch $x - b$ und integrieren über die Spaltbreite:

$$w^*(x, t) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} w(x - b, t) db$$

Begründe diesen Ansatz und erstelle mit dem Computer die Grafen von $w^*(x, t)$ zu verschiedenen Zeiten (wähle der Einfachheit halber $a = 1$, $\hbar = 1$ und $m = 1$).

1.5.3. Austauschkräfte

In der Quantenmechanik werden die Kräfte aller bekannten Wechselwirkungen (Gravitation, elektromagnetische, starke und schwache Wechselwirkung) durch den Austausch von virtuellen Teilchen beschrieben. Auch in der klassischen Mechanik gibt es abstoßende und anziehende Austauschkräfte, die z.B. durch das Hin- und Herwerfen von Medizinbällen oder Bumerangs zwischen den beiden Spielern übertragen werden.



- (a) Zwei Spieler werfen einen Medizinball der Masse $m = 10 \text{ kg}$ mit der Geschwindigkeit $v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ hin und her, zwischen jedem Wurf liegen 5 s. Berechne den Mittelwert der Austauschkraft!
- (b) Die Austauschteilchen der quantenmechanischen Kräfte sind virtuelle Teilchen, d.h. sie haben wegen der Unschärferelation eine beschränkte Lebensdauer τ . Mit $r(\beta)$ bezeichnen wir die Strecke, die ein virtuelles Teilchen der Ruhmasse m_0 und der Geschwindigkeit $v = \beta c$ zwischen Entstehung und Vernichtung zurücklegt, R sei das Maximum von $r(\beta)$. Wie hängt R mit m_0 zusammen (verwende die 68%-Version der Unschärferelation)?
- (c) Im Atomkern steht die elektrische Abstoßung der Protonen im Widerstreit mit der starken Wechselwirkung, die den Kern zusammenhält. Das Austauschteilchen der starken WW ist das neutrale **Pion** (π). Robert Hofstadter (Nobelpreis 1961) bestimmte durch Elektronenstreuversuche den Radius der virtuellen Pionenwolke um ein Proton zu $r_\pi = 0,8 f$. Beim wechselwirkungsfreien (isolierten) Proton gehen wir davon aus, dass die Pionen im Zentrum des Protons entstehen und auch dort wieder entwinden ($R = 2 r_\pi$). Schätze die Ruhenergie des Pions ab und vergleiche mit dem tatsächlichen Wert 140 MeV.

1.5.4. Gegen die Unschärferelation wird oft folgendes Argument vorgebracht:

Ein Teilchen, das nacheinander die beiden Spalte S_1 und S_2 der Breite a durchfliegt, hat in y -Richtung eine Geschwindigkeitsunschärfe

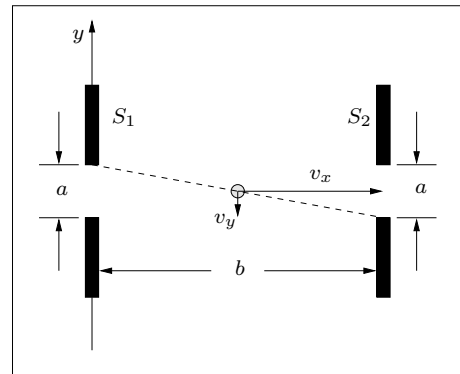
$$\Delta v_y \leq \frac{a}{t},$$

wobei $t = \frac{b}{v_x}$ die Flugzeit zwischen den Spalten ist. Mit $\Delta y = a$ folgt daraus

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \leq \frac{m a^2 v_x}{b}$$

Da b beliebig groß gewählt werden kann, kann auch $\Delta y \cdot \Delta p_y$, im Widerspruch zur Unschärferelation, beliebig klein werden! Wo liegt der Fehler in dieser Schlussweise?

Berechne $\Delta y \cdot \Delta p_y$ speziell für ein Elektron mit $v_x = 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $b = 1 \text{ m}$ und $a = 10^{-5} \text{ m}$.



1.5.5. Unschärferelationen gibt es nicht nur in der Quantenmechanik, sondern auch in der klassischen Physik. Ein Ton endlicher Dauer der Frequenz $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ ist eine Schwingung der Form (nur der Realteil ist physikalisch relevant)

$$\psi(t) = \varphi(t) \cdot e^{i\omega_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

2 Stationäre Zustände - Aufgaben

- (a) Die Einhüllende $\varphi(t)$ eines Tones der Dauer Δt sei eine Gauß'sche Kurve

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{4}}$$

mit der $\frac{1}{e}$ -Breite Δt , $\Delta\omega$ sei die $\frac{1}{e}$ -Breite von $A(\omega)$. Beweise mit Hilfe unserer Tabelle der Fouriertransformationen

$$\boxed{\Delta f \cdot \Delta t = \frac{6}{2\pi} \approx 1} \quad (1)$$

- (b) Wie kann man aus (1) die quantenmechanische Energie-Zeit-Relation ableiten?
 (c) Ist f die Frequenz eines Tones, dann ist $f' = \sqrt[12]{2} \cdot f$ die Frequenz des Halbtones darüber. Berechne den relativen Frequenzabstand $R = \frac{f'-f}{f}$ und die relative Frequenzunschärfe $r = \frac{\Delta f}{2f}$ (warum der Faktor 2 im Nenner?).
 (d) Berechne R und r und skizziere $\varphi_f(t)$ und $\varphi_{f'}(t)$ einmal für den Kammerton a' ($f = 440$ Hz) der Dauer $\Delta t = 0,5$ s (Viertelnote) und einmal für den um zwei Oktaven tieferen Ton A , der als Zweiunddreissigstelnote gespielt wird. Warum muss ein Kontrabassist bei kurzen und tiefen Tönen nicht so genau greifen?

1.5.6. Ist unser Universum nur eine Vakuumfluktuation?

- (a) Berechne einen Ausdruck für die Gesamtenergie $W(r)$ eines Systems zweier gleicher Teilchen der Masse m und der Ladung e im Schwerpunktsystem (r ist der Abstand der Teilchen voneinander). Für welche Gesamtmasse m eines Teilchens sind die Beträge der elektrischen und der gravitativen potentiellen Energien gleich?
 (b) Für welche mittlere Zeitdauer Δt kann aus dem Nichts ein Elektron-Positron-Paar mit $r = 4f$ und $m = 2m_0$ erzeugt werden?
 (c) Für welches r ist die Gesamtenergie eines ruhenden Elektron-Positron-Paares gleich Null?
 (d) Wir betrachten das Universum, stark vereinfacht, als Elektron-Positron-Paar. Was folgt aus der Unschärferelation und dem bisherigen Alter des Universums von einigen Milliarden Jahren für die Gesamtenergie des Universums, wenn es einfach so aus dem Nichts entstanden ist? Berechne für diesen Fall den „Radius“ $R = \frac{r}{2}$ des Universums aus $m \approx 10^{54}$ kg. Verträgt sich dieses R mit dem heute bekannten Wert von ungefähr zwanzig Milliarden Lichtjahren?
 (e) Berechne die Geschwindigkeit eines Teilchens unseres Modelluniversums in der Form $v = (1 - \alpha) \cdot c$.

2 Stationäre Zustände

2.1 Die Schrödingergleichung

- 2.1.1. Wir haben schon erwähnt, dass die Schrödingergleichung nicht zwingend aus den Forderungen „lineare DGL“ und „ebene Welle ist Lösung“ hergeleitet werden kann. Beweise, dass $\psi = C \cdot e^{i(kx - \omega t)}$ mit der klassischen Dispersionsrelation für Materiewellen eine Lösung folgender Gleichung ist:

$$i \ddot{\psi} = -\frac{\hbar^2 k^3}{4m^2} \cdot \psi'$$

- 2.1.2. Die Konstanten A und B in $\varphi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$ sind i.a. komplex, d.h. $A = a_1 + a_2 i$ und $B = b_1 + b_2 i$. Beweise für $w(x) = |\varphi(x)|^2$:

$$\begin{aligned} w(x) &= |A|^2 \cdot [1 + |D|^2 + 2d_1 \cos 2kx + 2d_2 \sin 2kx] \\ &= |A|^2 \cdot [1 + |D|^2 + 2|D| \sin(2kx + \sigma)] \end{aligned}$$

2 Stationäre Zustände - Aufgaben

mit $D = \frac{B}{A} = d_1 + d_2 i$ und $\tan \sigma = \frac{d_1}{d_2}$. Verwende die Formel

$$a \cdot \sin x + b \cdot \sin y = A_0 \cdot \sin \left(\frac{x+y}{2} + \varrho \right) \quad \text{mit} \quad A_0 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(y-x)}$$

$$\text{und} \quad \sin \varrho = \frac{b-a}{A_0} \cdot \sin \frac{y-x}{2}, \quad \cos \varrho = \frac{b+a}{A_0} \cdot \cos \frac{y-x}{2}$$

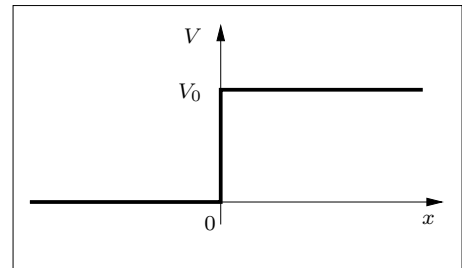
Berechne den maximalen und den minimalen Wert von $w(x)$ und den Mittelwert

$$\langle w \rangle = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} w(x) dx$$

mit geeignet gewählten Grenzen x_1 und x_2 . Unter welcher Bedingung hat $w(x)$ Nullstellen? Skizziere $w(x)$ für $|D| = 1$ und für $|D| \neq 1$.

2.2 Potentialbarrieren

2.2.1. Im Unterricht haben wir Formeln hergeleitet, die das Auftreffen von Teilchen der Energie $W < V_0$ auf eine Potentialschwelle der Höhe V_0 beschreiben. Führe die im Unterricht nicht gemachten Zwischenrechnungen aus! Warum hat $w(x)$ Nullstellen (vgl. Aufgabe 2.1.2)? Vereinfache $w(x)$ soweit wie möglich. Als „Eindringtiefe“ in den klassisch verbotenen Bereich bezeichnen wir d

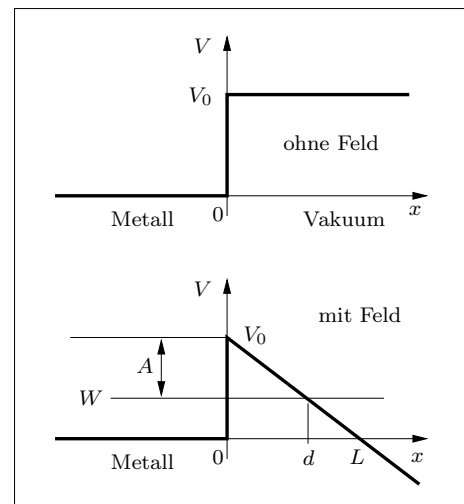


mit $w(d) = \frac{w(0)}{e}$. Berechne d und die Wellenlänge λ^* der stehenden Welle für $V_0 = 2W$.

2.2.2. Untersuche das Auftreffen von Teilchen der Energie W auf eine Potentialschwelle der Höhe $V_0 < W$ klassisch und quantenmechanisch!

2.2.3. Die Feldemission

Die nebenstehenden Abbildungen zeigen den Verlauf der potentiellen Energie $V(x)$ für ein Elektron un der Nähe einer Metalloberfläche. Die **Austrittsarbeit** A ist die Energie, die zum Ablösen eines Elektrons von der Metalloberfläche benötigt wird (siehe Abb.). Ein Elektron mit der kinetischen Energie $W < V_0$ kann das Metall nicht verlassen. Liegt jedoch ein äusseres Feld $E = E_x$ an, dann kann das Elektron durch das jetzt dreiecksförmige Potential tunneln. In der Literatur (z.B. **Dawydow**: „Quantenmechanik“, 8. Auflage, S.99 oder **French, Taylor**: „An Introduction to Quantum Physics“) findet



man als Näherungswert für den Transmissionskoeffizienten

$$T \approx e^{-\frac{4}{3} \alpha d} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - W)}$$

- (a) Gib eine Formel für T in Abhängigkeit von der äusseren Feldstärke E an! Zeichne $T(E)$ für $A = 1 \text{ eV}$ im Bereich zwischen $E = 10 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ und $E = 10^{12} \frac{\text{V}}{\text{m}}$, wobei auf der E -Achse ein logarithmischer Maßstab zu verwenden ist (statt E wird $\lg E$ angetragen, d.h. pro Zehnerpotenz geht es einen cm weiter).

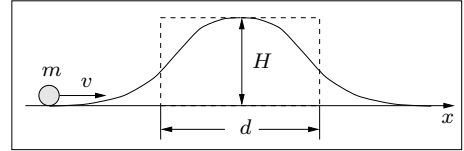
2 Stationäre Zustände - Aufgaben

- (b) Berechne die Wellenfunktion, die Wahrscheinlichkeitsdichte und den Transmissionskoeffizienten T numerisch mit einem CAS und vergleiche mit den Werten der Näherungsformel! Rechne für $V_0 = 4 \text{ eV}$, $A = 1 \text{ eV}$ und

$$E = \begin{cases} 10^{10} \frac{\text{V}}{\text{m}} & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $V(L) = 0$.

- 2.2.4. (a) Eine Kugel der Masse $m = 0,20 \text{ kg}$ rollt mit der Geschwindigkeit $v = 1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf einen Hügel der Höhe $H = 10,2 \text{ cm}$ und der mittleren Breite $d = 6,1 \text{ cm}$ zu. Welche Höhe H' erreicht die Kugel? Mit welcher Wahr-



rscheinlichkeit T tunnelt die Kugel durch den Hügel? Für die Rechnung darf eine rechteckige Potentialbarriere der Breite d angenommen werden. Wie viele Nullen enthält T zwischen dem Komma und der ersten von Null verschiedenen Ziffer? Wie lang ist die ausgeschriebene Zahl T , wenn pro Ziffer $0,5 \text{ cm}$ veranschlagt werden?

- (b) Für welchen Wert der Planckkonstanten h wäre $T = 0,5$?

- 2.2.5. Ein Teilchen der Energie W trifft auf eine rechteckige Potentialbarriere der Höhe $V_0 > W$ und der Breite d . Im Unterricht haben wir für den Transmissionskoeffizienten T die Formel

$$T = \frac{\gamma}{e^{2\alpha d} + e^{-2\alpha d} + \gamma - 2}$$

mit

$$\alpha = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - W)} \quad , \quad \gamma = 16\beta(1 - \beta) \quad \text{und} \quad \beta = \frac{W}{V_0}$$

hergeleitet.

- (a) Wie groß kann γ höchstens werden? Berechne eine Näherung T_n für T , wenn $\alpha d \gg 1$ gilt.
- (b) Jetzt sei $V_0 = 2W$. Berechne T und T_n . Zeichne die Grafen von $T(d)$ und $T_n(d)$ in ein Diagramm ($d = \frac{1}{\alpha} \hat{=} 2 \text{ cm}$, $T = 1 \hat{=} 5 \text{ cm}$). Berechne den prozentualen Fehler δ_r , wenn T durch T_n ersetzt wird. Wie groß ist δ_r speziell für $d \in \{\frac{1}{\alpha}, \frac{3}{\alpha}, \frac{5}{\alpha}\}$?
- (c) T ist für $W = V_0$ nicht definiert (warum?). Schreibe T als Funktion von β und berechne

$$\lim_{W \rightarrow V_0} T = \lim_{\beta \rightarrow ?} T(\beta)$$

Hinweis: Verwende $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$

- (d) Ein Elektronenstrahl, der die Spannung $U = 100 \text{ V}$ durchlaufen hat und dessen Stromstärke $I = 1 \text{ mA}$ ist, trifft auf einen rechteckigen Potentialwall der Höhe $V_0 = 1000 \text{ eV}$ und der Breite $d = 0,013 \text{ nm}$. Wie groß ist die Stromstärke nach dem Wall?

- 2.2.6. Ein Teilchen der Energie W trifft auf eine rechteckige Potentialbarriere der Höhe $V_0 < W$ und der Breite d . Mit einem CAS berechnet man für den Transmissionskoeffizienten T die Formel (Aufgabe für MAPLE)

$$T = \frac{k^2(k^2 - \varepsilon)}{8k^2(k^2 - \varepsilon) + 2\varepsilon^2 \sin^2 k_1 d}$$

mit

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mW} \quad , \quad k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(W - V_0)} \quad \text{und} \quad \varepsilon = k^2 - k_1^2$$

2 Stationäre Zustände - Aufgaben

- (a) Wie unterscheidet sich die Funktion $T(d)$ grundsätzlich von der aus Aufgabe 2.2.5? Berechne die Extremwerte von $T(d)$. Zeichne $T(d)$ für ein Elektron mit $W = 1,1 \text{ eV}$ und $V_0 = 1 \text{ eV}$ im Bereich $0 \leq d \leq 40 \text{ \AA}$.
- (b) T ist für $W = V_0$ nicht definiert (warum?). Schreibe T als Funktion von ε und berechne

$$\lim_{W \rightarrow V_0} T = \lim_{\varepsilon \rightarrow ?} T(\varepsilon)$$

Hinweis: Verwende die lineare Näherung für $\sin x$. Vergleiche das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 2.2.5.

2.3 Gebundene Zustände

2.3.1. Der harmonische Oszillator

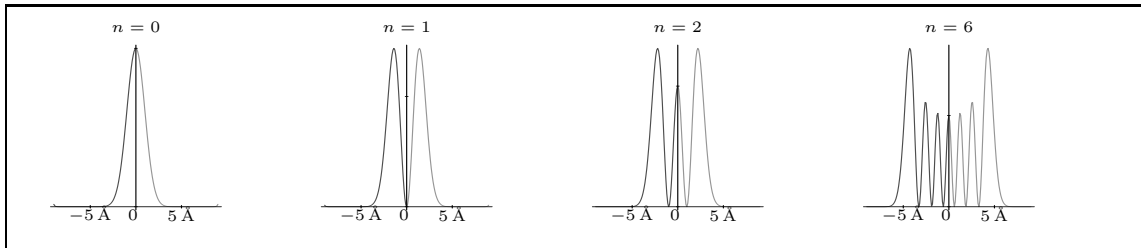


Abbildung: $w(x)$ für ein paar Energieeigenwerte eines Elektrons mit $U(X) = \alpha X^2$

Wir betrachten ein Elektron mit der potentiellen Energie

$$U(X) = \alpha \cdot X^2 \quad \text{mit} \quad \alpha = 1 \frac{\text{eV}}{\text{\AA}^2}$$

- (a) Schreibe die Schrödingergleichung für unser Elektron in einer einheitenfreien Form hin. Dabei sollen Energien in eV und Längen in \AA angegeben sein.
- (b) Welche **klassische** Kreisfrequenz ω hat unser schwingendes Elektron? Skizziere den Verlauf der **klassisch** berechneten Aufenthaltswahrscheinlichkeit w_k des Elektrons.
- (c) Mit der im Unterricht behandelten numerischen Methode werden mit einem CAS folgende Energieeigenwerte (in eV) für unser Elektron gefunden:

n	0	1	2	3	4	5
W_n	1.951924891	5.855774715	9.759624788	13.66347430	17.56732415	21.47117475

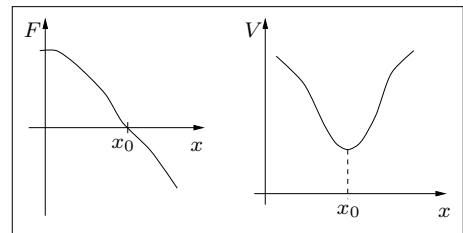
Mit diesen Daten ist eine Formel für W_n zu finden, die n und das klassisch gefundene ω enthält! Berechne dazu die Differenzen aufeinanderfolgender Energiewerte und denke an die Planckrelation!

- (d) Berechne die Energieeigenwerte bis zu $n = 5$ mit der exakten Formel und vergleiche mit den numerisch gewonnenen Werten der Tabelle (relativer Fehler).

- 2.3.2. (a) Auf einen Körper wirkt die Kraft F mit

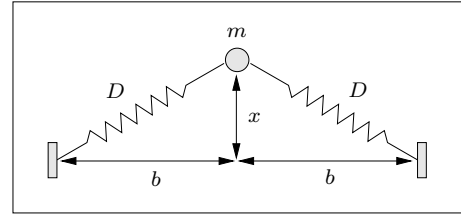
$$F(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad F'(x_0) \neq 0$$

Der Körper führt eine Schwingung um die Ruhelage x_0 aus. Zeige, dass diese Schwingung für **kleine** Auslenkungen aus der Ruhe-



lage harmonisch ist und die potentielle Energie des Körpers in einer kleinen Umgebung von x_0 eine quadratische Funktion ist.

- (b) Untersuche, ob die Masse m in nebenstehend gezeichneter Anordnung für kleine Auslenkungen harmonisch schwingt. Unterscheide die beiden Fälle:
- Die Federn sind für $x = 0$ entspannt.
 - Die Federn sind für $x = 0$ schon um die Strecke a gedehnt.



2.3.3. Eingesperrte Elektronen

Es gibt langgestreckte Farbstoffmoleküle (**Carbocyanin**), die ein Elektron enthalten, das sich längs des Moleküls der Länge a frei bewegen kann. Für nicht zu große Anregungsenergien verhält sich das Elektron wie ein Teilchen in einem unendlich tiefen Potentialtopf der Breite a .

- Berechne die drei ersten Anregungsenergien (in eV) für $a = 1,37$ nm.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält sich das Elektron für $n = 3$ im Intervall $[\frac{a}{3}, \frac{a}{2}]$ auf (sehr einfache Lösung ohne lange Rechnung)?
- Berechne die Wahrscheinlichkeit für den Aufenthalt des Elektrons (wieder für $n = 3$) im Bereich $[x, x + \Delta x]$ mit $x = \frac{13}{24} a$ und $\Delta x = 0,01 a$.

2.3.4. Ein Modell des Protons

1951 entdeckte **Enrico Fermi** den ersten angeregten Zustand des Protons, dessen relativistische Gesamtenergie $W_2 = 1232$ MeV beträgt. Das Proton besteht aus Quarks, die sich aufgrund ihrer gegenseitigen Anziehungskräfte in einem Potentialtopf befinden. Wir betrachten ein einfacheres Modell des Protons:

Das Proton besteht aus einem Rumpfteilchen der Ruhenergie W_R , das sich in einem unendlich tiefen Potentialtopf der Breite a befindet. Die relativistische Gesamtenergie des Teilchens im Grundzustand ist $W_1 = 938$ MeV.

- Skizziere für ein Teilchen der Ruhemasse m , das sich im eindimensionalen Potentialtopf der Breite a mit unendlich hohen Wänden bewegt, die Wellenfunktionen des Teilchens für die drei ersten Eigenzustände und beweise für den (nichtrelativistischen) Impuls des Teilchens die Formel

$$p_n = \frac{h}{2a} \cdot n \quad (1)$$

- Leite aus (1) und der relativistischen Energie-Impulsbeziehung eine Formel für die Gesamtenergien W_n des Protons her und berechne W_R sowie a ! Welche Energie W_3 hat der zweite Anregungszustand?

2.3.5. Der rechteckige Potentialtopf endlicher Tiefe

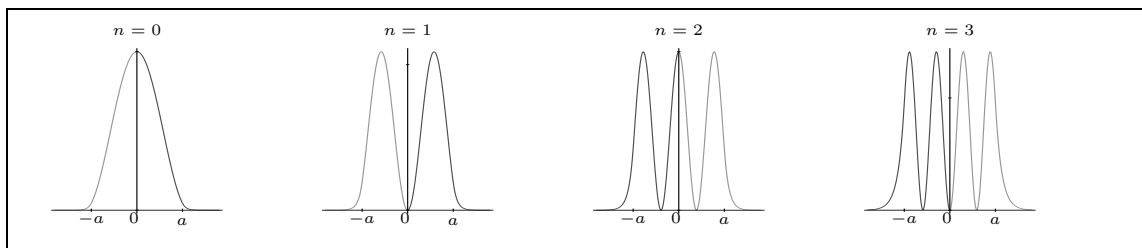
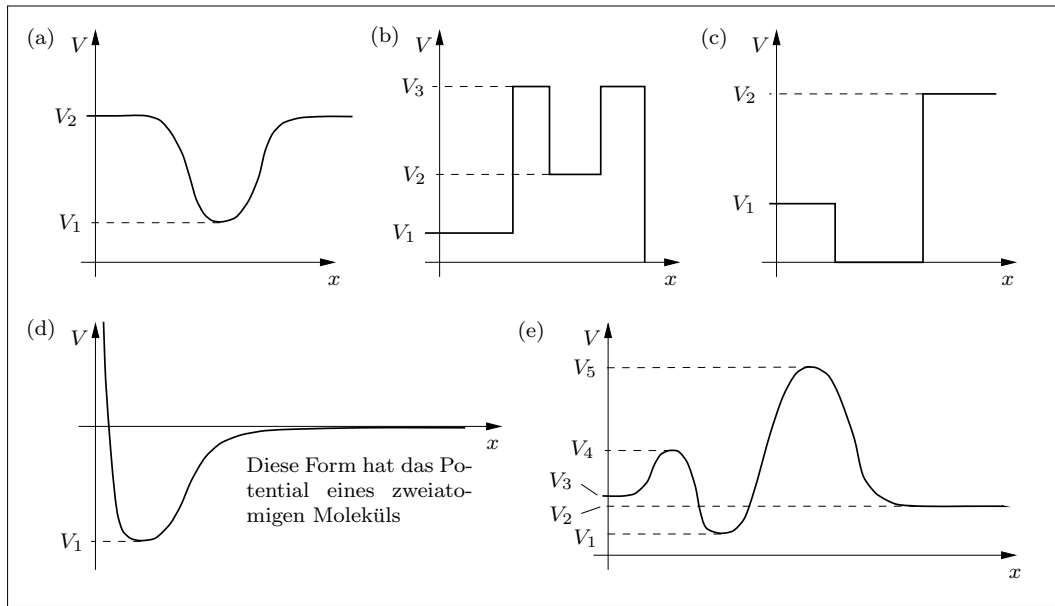


Abbildung: $w(x)$ für ein Elektron im rechteckigen Potentialtopf endlicher Tiefe

Zeichne in **ein** Diagramm $w(x)$ für den endlich und den unendlich tiefen Potentialtopf (z.B. für $n = 1$). Welche Ungleichung folgt daraus für W_n (endlich) und W'_n (unendlich)?

- 2.3.6. Für welche der folgenden Potentiale gibt es gebundene Zustände? Wie groß ist gegebenenfalls die Maximalenergie eines gebundenen Zustands?

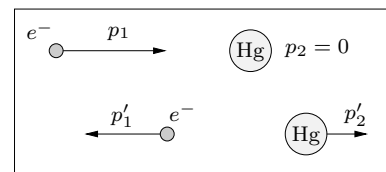


2.4 Der Versuch von Franck und Hertz

- 2.4.1. (a) Zeichne den Verlauf der kinetischen Energie eines Elektrons im mit Hg-Dampf gefüllten Franck-Hertz-Rohr zwischen der Kathode K , dem Gitter G und der Anode A mit $\overline{KG} \cong 6 \text{ cm}$ und $\overline{GA} \cong 1 \text{ cm}$ für $U_B = 1 \text{ V}$ und
- (i) $U = 3 \text{ V}$, (ii) $U = 7 \text{ V}$ bzw. (iii) $U = 9,8 \text{ V}$.
- (b) Für welches U zwischen $4,9 \text{ V}$ und $9,8 \text{ V}$ erreicht ein Elektron, das die Kathode mit $v = 0$ verlassen hat, gerade noch die Anode?
- (c) Skizziere $I(U)$ im Franck-Hertz-Versuch unter der Voraussetzung, dass **alle** Elektronen mit $v = 0$ an der Kathode starten.

- 2.4.2. Wieviel Prozent seiner kinetischen Energie gibt ein Elektron beim **elastischen** Stoß mit einem ruhenden Hg-Atom maximal an dieses ab?

- 2.4.3. Ein Elektron stößt auf ein ruhendes Hg-Atom und verleiht ihm die Anregungsenergie A . Der Impulssatz verlangt, dass die Energie E_1 des Elektrons vor dem Stoß größer als A ist. Berechne mit einem CAS die Minimalenergie E_0 von E_1 .

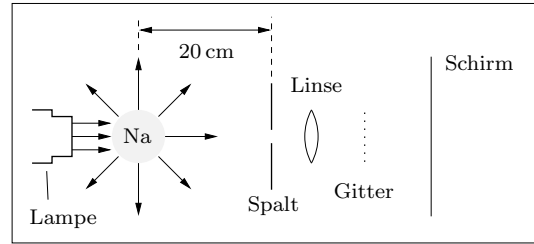


3 Wechselwirkung elektromagnetischer Strahlung mit Materie

3.1 Der Übergang zwischen stationären Zuständen - Spektrallinien

- 3.1.1. Die durch Elektronenstoß im Franck-Hertz-Versuch angeregten Hg-Atome senden monochromatisches Licht aus, das nach Durchgang durch ein Gitter mit $5700 \frac{\text{Linien}}{\text{cm}}$ in 1. Ordnung eine Ablenkung um den Winkel $\varphi = 8^\circ 19'$ erfährt. Weise nach, dass dieses Versuchsergebnis eine experimentelle Bestätigung der Bohr'schen Frequenzbedingung ist.

3.1.2. Der Spalt im Versuch zur Resonanzabsorption in Na-Dampf hat die Abmessungen $2\text{ cm} \times 0,1\text{ mm}$ und ist vom Na-Dampf 20 cm entfernt. I_0 sei die Intensität der gelben Na-Linie **ohne** Na-Dampf zwischen Lampe und Spalt, gemessen am Ort des Schirms, I dagegen die Intensität **mit** Na-Dampf. Berechne das Verhältnis $\frac{I}{I_0}$.



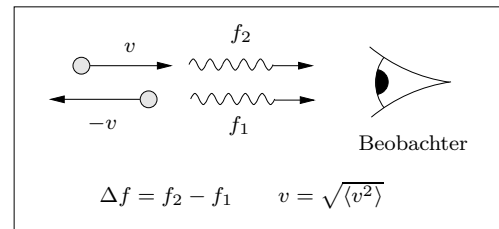
3.1.3. Zwischen einer Natriumlampe und einem Schirm ist die Flamme eines Bunsenbrenners, die nur einen sehr schwachen Schatten wirft. Was geschieht, wenn man Kochsalzkristalle in die Flamme hält?

3.1.4. **Die Breite von Spektrallinien:**
 (a) **Die natürliche Linienbreite:**

Beweise, dass die relative Linienbreite $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ ungefähr gleich der relativen Frequenzbreite $\frac{\Delta f}{f}$ ist. Die Größenordnung der Zeitdauer eines angeregten Zustands ist $\tau \approx 10^{-8}\text{ s}$. Berechne mit der Unschärferelation die relative Linienbreite in Abhängigkeit von λ .

(b) **Die Dopplerbreite:**

Eine weitere Quelle der Linienverbreiterung ist der Dopplereffekt. Drücke zuerst Δf und dann $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ durch die Temperatur T und die Molekülmasse m aus. Verwende die für alle „normalen“ Temperaturen gültige Näherung $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$.



(c) Berechne die natürliche und die Dopplerbreite (absolut und relativ) für die größte Wellenlänge der Balmer Serie bei $T = 1000\text{ K}$.

3.1.5. Ein Bündel aus weißem Licht, das alle Wellenlängen von 400 nm bis 800 nm enthält, durchstrahlt ein Gas aus Carbocyaninmolekülen (siehe Aufgabe 2.3.3) der Länge $a = 1,23\text{ nm}$, die sich fast alle im Grundzustand befinden. Welche Wellenlängen sind im Bündel nach dem Gas nur noch mit sehr geringer Intensität vorhanden? Welche Wellenlängen, wenn auch in geringer Intensität, enthält das gestreute Licht? Welchen Bereichen, bezogen auf die Sichtbarkeit, sind diese Wellenlängen zuzuordnen? Veranschauliche die zu diesen Wellenlängen gehörenden Übergänge an einem Termschema.

3.1.6. **Die Balmer-Formel:**

Die sichtbaren Linien des Wasserstoffspektrums haben die Wellenlängen

n	n_1	n_2	n_3	n_4
λ_n	$656,3\text{ nm}$	$486,2\text{ nm}$	$434,1\text{ nm}$	$410,2\text{ nm}$

mit aufeinanderfolgenden n -Werten, d.h. $n_4 = n_3 + 1 = n_2 + 2 = n_1 + 3$. Nur mit diesen Daten fand 1885 der Baseler Gymnasiallehrer J. Balmer eine Formel zur Berechnung der Wellenlängen. Nur wer selbst schon tagelang (sicher vergeblich) versucht hat, **ohne weitere Information** eine Gesetzmäßigkeit in diesen vier Zahlenwerten zu finden, weiß die Leistung Balmers zu würdigen. Die Formel, die er schließlich fand, hat folgende Form:

$$\frac{1}{\lambda_n} = R_H \cdot \left(a - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

3 Wechselwirkung - Aufgaben

- (a) Drücke das Verhältnis $\beta = \frac{\frac{1}{\lambda_{n_2}} - \frac{1}{\lambda_{n_1}}}{\frac{1}{\lambda_{n_3}} - \frac{1}{\lambda_{n_2}}}$ mit Hilfe von (1) durch n_1 aus und berechne β auch direkt mit den Werten der Tabelle. Bestimme aus der so entstehenden Gleichung n_1 durch Probieren (Einsetzen kleiner natürlicher Zahlen für n_1).
- (b) Berechne a und die **Rydbergkonstante** R_H . Überprüfe den Tabellenwert von λ_{n_4} .
- (c) Beweise jetzt für die Energiestufen W_n des H-Atoms die Formel

$$W_n = -\frac{hcR_H}{n^2},$$

wobei der Energienullpunkt so gewählt wird, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = 0$ gilt. Zeichne das Termschema und die zu den sichtbaren Linien gehörenden Übergänge ($1 \text{ eV} \cong 1 \text{ cm}$). Aus Elektronenstoßversuchen ist bekannt, dass einer größeren Quantenzahl n auch eine größere Energie W_n entspricht.

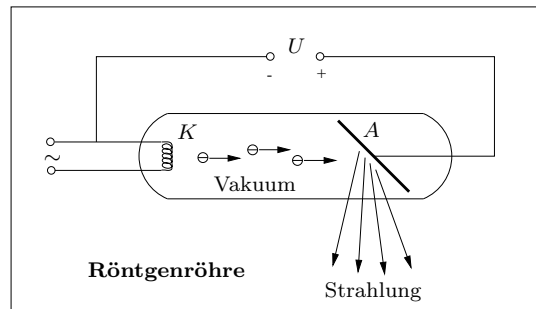
- (d) Neben der **Balmer-Serie** (Übergänge zu W_2) sind noch die folgenden Serien von Wellenlängen, die das H-Atom aussenden oder absorbieren kann, jeweils nach ihren (experimentellen) Entdeckern benannt:

Übergang zu	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
Entdecker	Lyman	Balmer	Paschen	Brackett	Pfund

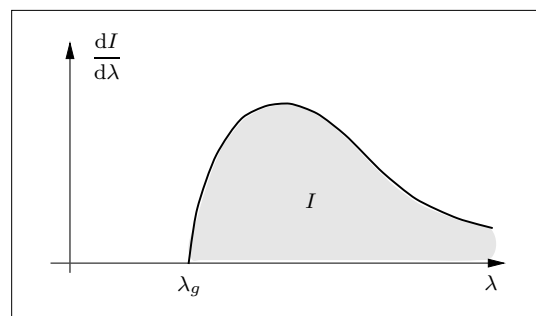
Wie lautet die Verallgemeinerung von (1), die alle Wellenlängen λ_{mn} des H-Atoms beschreibt? Zeichne die Übergänge der Lyman- und der Paschen-Serie in das schon vorhandene Termschema ein. In welchen Bereichen (bezogen auf die Sichtbarkeit) liegen die Wellenlängen der Lyman- und der Paschen-Serie? Leite eine Formel für die **Grenzwellenlänge** $\lambda_{m\infty}$ der einzelnen Serien her. Was könnte man unter dem Begriff „**Grenzkontinuum**“ verstehen?

3.1.7. Bremsstrahlung und Röntgenröhre:

Elektronen werden von der Spannung U zwischen Kathode K und Anode A beschleunigt und treffen dann mit hoher Geschwindigkeit auf die Anode, in der sie abgebremst werden. Dabei senden sie, wie jede beschleunigte Ladung, elektromagnetische Strahlung aus.



- (a) In nebenstehender Abbildung ist die Spektralfunktion $S_\lambda(\lambda) = \frac{dI}{d\lambda}$ dargestellt, wobei dI die Intensität der Strahlung im Wellenlängenintervall $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ ist. Erkläre das Zustandekommen dieses Grafen und berechne die Grenzwellenlänge λ_g . Zeichne den Verlauf der Funktion $S_f(f) = \frac{dI}{df}$ und berechne die Grenzfrequenz f_g .



- (b) Mit der Beschleunigungsspannung $U = 249,1 \text{ V}$ ergibt sich die Grenzwellenlänge $\lambda_g = 4,977 \text{ nm}$. Welchen Wert erhält man daraus für die Planckkonstante?

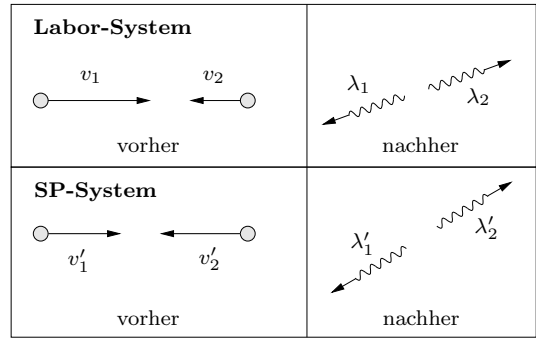
3.1.8. Schreibe alle möglichen Anwendungen eines Lasers hin, die dir einfallen!

3.2 Die Lichtquantenhypothese

- 3.2.1. Berechne Energie, Masse und Impuls des Photons einer Radiowelle ($\lambda = 3 \text{ m}$) und eines γ -Quants ($\lambda = 10^{-16} \text{ m}$). (Ein γ -Quant ist ein energiereiches Photon, das bei Übergängen zwischen Zuständen eines Atomkerns erzeugt wird.)
- 3.2.2. Ein Laser mit der Leistung $P = 1,00 \cdot 10^6 \text{ W}$ sendet einen Lichtblitz der Dauer $\Delta t = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ auf ein schwebendes Stück Alufolie der Masse $m = 1,00 \text{ mg}$.
- Berechne Energie, Masse und Impuls des Laserblitzes.
 - Welche Geschwindigkeit erhält die vorher ruhende Alufolie, wenn sie geschwärzt ist, d.h. wenn sie alles auftreffende Licht absorbiert?
 - Welche Geschwindigkeit erhält die Folie, wenn sie das auftreffende Licht zu hundert Prozent parallel zur Einfallrichtung zurückreflektiert?
- 3.2.3. Ein Schwarzweißfilm besteht aus einer Trägerschicht mit eingelagerten Silberbromid-Kriställchen (AgBr) der Querschnittsfläche A^* . Der Film ist richtig belichtet, wenn jedes Kriställchen im Durchschnitt von zwei Photonen getroffen wird. Wir nehmen vereinfachend an, dass alle Kristalle an der Oberfläche des Films liegen und die Filmfläche gleich der Summe der Kristallflächen ist. Für unseren Film sei $A^* = 1,60 \cdot 10^{-16} \text{ m}^2$.
- Wie viele Photonen müssen ein Kleinbildnegativ ($A = 18 \text{ mm} \times 24 \text{ mm}$) für eine richtige Belichtung treffen? Ist ein grob- oder ein feinkörniger Film empfindlicher?
 - Der Film wird mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 600 \text{ nm}$ belichtet und die Belichtungszeit beträgt $\Delta t = \frac{1}{125} \text{ s}$. Welche Intensität muss das Licht am Ort des Films haben? Wie weit müsste eine 100-Watt-Lampe vom Film entfernt sein, um diese Intensität zu erzeugen?
- 3.2.4. Ein Stern kann mit bloßem Auge noch gesehen werden, wenn ungefähr 100 Lichtquanten pro Sekunde die weit geöffnete Pupille (Durchmesser: 8 mm) treffen.
- Die Intensität der Sonnenstrahlung am Ort der Erde beträgt $1400 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$, als mittlere Frequenz des Sonnenlichts wählen wir $5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Welche Entfernung darf ein Beobachter zu unserer Sonne haben, damit er sie mit freiem Auge gerade noch erkennen kann?
 - Welchen Objektivdurchmesser muss ein Fernrohr mindestens haben, damit ein mit diesem Teleskop bewaffnetes Auge einen 300 000 LJ entfernten Stern der Sonnenhelligkeit beobachten kann? Wie kann man mit dem gleichen Fernrohr noch viel weiter entfernte Sterne erfassen?
- 3.2.5. **Paarerzeugung:**
Im Feld eines Atomkerns kann sich ein Photon in ein Elektron-Positron-Paar verwandeln.
- Welche Frequenz muss das Photon mindestens haben, damit dieser Prozess möglich ist?
 - Warum kann ein freies Photon (kein Kern in der Nähe) kein Elektron-Positron-Paar erzeugen? Hinweis: Rechne im Schwerpunktsystem nach der Umwandlung!
- 3.2.6. **Paarvernichtung:**
Ein Teilchen und sein Antiteilchen (z.B. ein Elektron und ein Positron) verwandeln sich beim Zusammentreffen in elektromagnetische Strahlung.

3 Wechselwirkung - Aufgaben

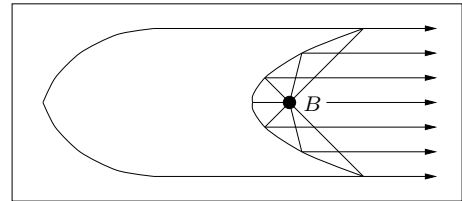
- (a) Ist es möglich, dass bei der Paarvernichtung nur ein Photon entsteht?
- (b) Ein Elektron und ein Positron treffen im Schwerpunktsystem mit den Geschwindigkeiten $v'_1 = -v'_2 = 0,800c$ aufeinander und zerstrahlen in zwei Photonen. Berechne die Wellenlängen der beiden Photonen im SP-System.



- (c) Im Laborsystem gilt $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$ und es bewegt sich eines der Photonen parallel zu \vec{v}_1 und hat die Wellenlänge $\lambda_1 = 4,00 \cdot 10^{-12} \text{ m}$; berechne die Wellenlänge λ_2 des anderen Photons. Mit welcher Geschwindigkeit v bewegt sich das SP-System relativ zum Laborsystem? Berechne die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der beiden Teilchen vor dem Zusammenstoß im Laborsystem.

3.2.7. Die Photonenrakete:

Im Brenner B , der im Brennpunkt eines Parabolspiegels angeordnet ist, wird Materie mit Antimaterie zu γ -Quanten zerstrahlt. Die Quanten treffen auf den Spiegel und verlassen das Raumschiff parallel zu dessen Achse.



- (a) Warum überträgt jedes Photon, ganz gleich unter welchem Winkel es auf den Spiegel trifft, nach **Betrag und Richtung** den gleichen Impuls auf die Rakete?
- (b) Wie viele Photonen, die durch Proton-Antiproton-Zerstrahlung entstehen, muss die Rakete pro Sekunde abstrahlen, um bei der Startmasse $m_0 = 100 \text{ t}$ von der Erdoberfläche abheben zu können? Welche Masse wird dabei pro Sekunde abgestrahlt?
- (c) Die Rakete startet jetzt, weit weg von allen Himmelskörpern, mit der Geschwindigkeit Null und der Masse m_0 . Die **Ruh**masse der Rakete bei Erreichen der Geschwindigkeit $v = \beta c$ sei m . Beweise:

$$\beta = \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{m}{m_0} \quad (1)$$

Hinweis: Energie- und Impulssatz! Beachte, dass die Frequenz der ausgestrahlten Photonen im System S , in dem die Rakete beim Start ruht, von der Geschwindigkeit abhängt (Dopplereffekt)!

- (d) Beweise, dass (1) auch für das Abbremsen der Rakete von v auf Null gilt! m_0 ist dabei die Masse zu Beginn des Bremsvorgangs und m die Masse beim Stillstand.
- (e) Welche Startmasse m_0 muss eine Photonenrakete haben, damit eine Kapsel der Masse $m = 10 \text{ t}$ (Nutzlast) auf $v = 0,9998c$ beschleunigt werden kann? Wie groß muss m_0 sein, wenn die Nutzlast auch wieder auf Null abgebremst werden soll?

3.3 Der Compton-Effekt

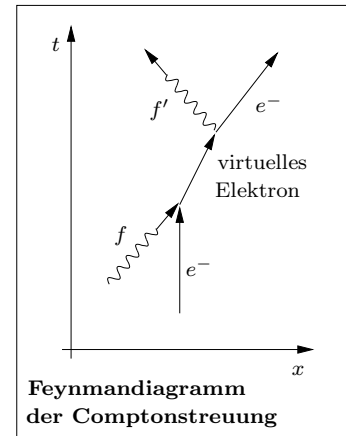
- 3.3.1. Die Ionisierungsenergie von atomarem Wasserstoff beträgt $13,6 \text{ eV}$. Welche Frequenz und Energie müssen Photonen mindestens haben, um an freien Wasserstoffatomen den Compton-Effekt an „freien Elektronen“ auslösen zu können?
- 3.3.2. Monochromatische Röntgenstrahlung fällt auf ein einatomiges Gas. Die Streustrahlung unter dem Winkel $\varphi = 120^\circ$ enthält die Wellenlängen $\lambda_1 = 5,189268936 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ und

3 Wechselwirkung - Aufgaben

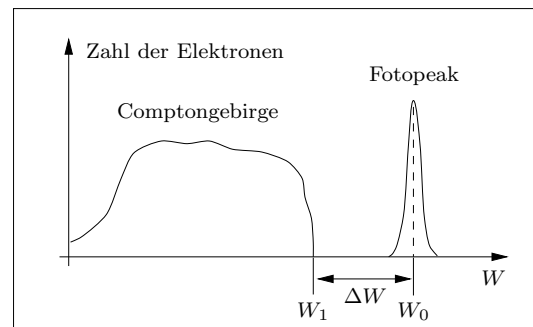
$\lambda_2 = 1.550298587 \cdot 10^{-12}$ m. Berechne die Wellenlänge λ_0 der einfallenden Strahlung und die Masse der streuenden Atome. Um welches Gas handelt es sich?

- 3.3.3. Ein Photon, dessen Wellenlänge gleich der Comptonwellenlänge des Elektrons ist, trifft auf ein freies Elektron, das gestreute Quant schließt mit der Richtung des einfallenden Photons den Winkel $\varphi = 60^\circ$ ein. Berechne die Energie W' und den Impuls p' des gestreuten Photons und konstruiere den Impulsvektor des Rückstoßelektrons. Überprüfe das Konstruktionsergebnis durch eine Rechnung. Welche Geschwindigkeit hat das Rückstoßelektron?

- 3.3.4. Die exakte Theorie der Comptonstreuung (Quantenelektrodynamik) zeigt, dass zuerst das Photon vom Elektron absorbiert wird und ein virtuelles Elektron mit dem Impuls p^* und der kinetischen Energie W^* entsteht. Nach einer kurzen Zeit τ sendet das virtuelle Elektron ein Photon der Frequenz f' aus. Für das virtuelle Elektron gilt die Impulserhaltung. Zeige, dass das virtuelle Elektron den Energiesatz verletzt und berechne W^* aus dem Impuls. Schätze mit der Unschärferelation die Lebensdauer τ des virtuellen Elektrons ab (verwende $hf = 4$ MeV).



- 3.3.5. Monochromatische Röntgenstrahlung der Wellenlänge λ trifft auf einen Bleizylinder. Ein Elektronenzähler mit angeschlossenem Vielkanalanalysator (die Elektronen werden nach Zugehörigkeit zu bestimmten Energieintervallen gezählt) wird rings um den Bleizylinder geführt und liefert nebenstehend gezeichnetes Energiespektrum der Comptonelektronen.



Da der Zähler nicht absolut geeicht ist, kann nur die Energiedifferenz zwischen der „Comptonkante“ (W_1) und dem Fotoppeak (W_0) gemessen werden. Der Fotoppeak stammt von Elektronen, die durch den Fotoeffekt ausgelöst werden, W_0 ist also gleich der Energie W der einfallenden Quanten minus der Austrittsarbeit W_A aus dem Blei. Da W_A in der Größenordnung von einigen eV liegt, kann sie gegen die Energie der Röntgenquanten vernachlässigt werden. Berechne λ , W_0 und W_1 aus $\Delta W = 180$ keV.

- 3.3.6. Gammaquanten der Energie W werden an freien Elektronen gestreut, das gestreute Quant schließt mit der Richtung der einfallenden Photonen den Winkel φ ein.

- (a) Beweise für die kinetische Energie W_e des Rückstoßelektrons die Formel

$$\frac{W_e}{W} = \frac{1}{1 + \frac{m_e c^2}{W(1 - \cos \varphi)}}$$

- (b) Für welche Energie W der einfallenden Quanten ist die **maximale** Rückstoßenergie der Elektronen genau so groß wie die Energie W' des dabei gestreuten Quants?
- (c) Berechne die notwendigen Grenzwerte und skizziere $\frac{W_e}{W}$ in Abhängigkeit von W für $\varphi = 90^\circ$ und $\varphi = 180^\circ$.
- (d) Skizziere $\frac{W_e}{W}$ für $W = m_e c^2$ in Abhängigkeit von φ .

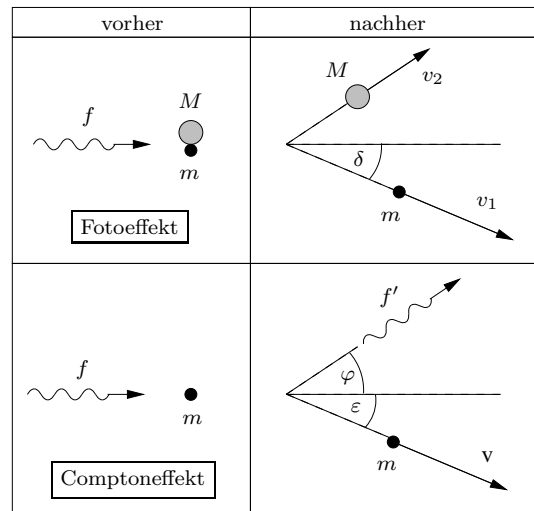
3.4 Der Fotoeffekt

- 3.4.1. Monochromatisches Licht fällt auf eine Silberplatte, die Austrittsarbeit des Silbers ist $A = 4,43 \text{ eV}$. Die ausgelösten Elektronen können gerade noch gegen die Spannung $U_g = 1,82 \text{ V}$ anlaufen. Welche Energie wurde den Elektronen vom Licht übertragen? Berechne die Frequenz und die Wellenlänge des einfallenden Lichts.
- 3.4.2. Eine Natrium-Kathode wird nacheinander mit monochromatischem Licht der Hg-Wellenlängen $\lambda_1 = 436 \text{ nm}$ und $\lambda_2 = 365 \text{ nm}$ bestrahlt. Dabei werden die maximalen kinetischen Energien der Fotoelektronen gemessen: $W_{k1} = (0,5140 \pm 0,0005) \text{ eV}$ und $W_{k2} = (1,0670 \pm 0,0007) \text{ eV}$. Berechne die Austrittsarbeit von Natrium und den Zahlenwert von h mit Fehlerangabe.
- 3.4.3. Das sofortige Einsetzen des Fotostroms kann mit der klassischen Physik (Newton, Maxwell) nicht erklärt werden, wenn man annimmt, dass ein Elektron nur die Energie aus dem Wellenfeld aufnehmen kann, die durch die Querschnittsfläche eines Atoms ($\approx 10^{-20} \text{ m}^2$) eingestrahlt wird. Berechne klassisch die Zeitdauer Δt bis zum Einsetzen des Fotostroms für ein Material mit der Austrittsarbeit $2,0 \text{ eV}$ und für die Intensität $I = 100 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ der einfallenden Strahlung.

3.4.4. Vergleich Fotoeffekt-Comptoneffekt

Bei der Streuung an freien Molekülen bedeutet M die Ruhmasse des Moleküls, bei der Streuung am Festkörper ist M die Masse des Festkörpers, m ist die Ruhmasse des Elektrons.

- (a) Zeige am Beispiel $\lambda = 500 \text{ nm}$ und $A = 2 \text{ eV}$, dass die Streuung an freien Elektronen nicht den Fotoeffekt erklären kann!
- (b) Beweise für die kinetische Energie des Elektrons beim Fotoeffekt für $\delta = 90^\circ$ folgende Formel (relativistisch rechnen!):



$$W_k = \frac{hf - A - \frac{(2hf - A)A}{2Mc^2}}{1 + \frac{hf - A}{Mc^2} + \frac{m}{M}}$$

Wie vereinfacht sich diese Formel im Fall eines Festkörpers, wie im ultrarelativistischen Fall ($hf \gg Mc^2$)?

- (c) Wir betrachten die **Fotoionisation** (Fotoeffekt an freien Atomen) von H-Atomen ($A = 13,6 \text{ eV}$) für $\lambda = 52,54 \text{ nm}$. Um wieviel Prozent weicht W_k von $hf - A$ ab? Wieviel Prozent des Photonenimpulses nimmt das Atom auf?

3.5 Der Wirkungsquerschnitt

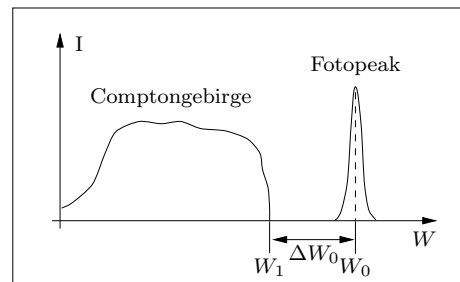
- 3.5.1. Silber hat bei der Wellenlänge $\lambda = 630 \text{ nm}$ den Absorptionskoeffizienten $\alpha = 5,0 \cdot 10^8 \frac{1}{\text{m}}$, das Reflexionsvermögen von Silber beträgt 95 %. Licht mit $\lambda = 630 \text{ nm}$ und der Intensität $I_0 = 1000 \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{ s}}$ fällt auf Silberfolien der Dicken 1 nm, 10 nm 30 nm, 50 nm, 70 nm, 80 nm und 100 nm und der jeweiligen Fläche 1 cm^2 .
- (a) Wie viele Photonen N werden pro Sekunde hinter jeder der Folien registriert? Skizziere N in Abhängigkeit von der Dicke x der Folien. Verwende einen logarithmischen Maßstab auf der N -Achse, d.h. statt N wird $\lg(N)$ angetragen.

- (b) Für welche Foliendicke d_h (Halbwertsdicke) gilt $N(d_h) = \frac{1}{2} N_0$?
- (c) Für welche Foliendicke registriert man hinter der Folie genau ein Photon pro Sekunde?
- (d) Berechne den Wirkungsquerschnitt der Silberatome für Absorption bei $\lambda = 630 \text{ nm}$.
- 3.5.2. Ein Lichtstrahl der Intensität I_0 trifft einmal auf ein Target der Dicke $x_1 = 5 \text{ mm}$ und einmal auf ein Target der Dicke $x_2 = 3 \text{ mm}$. Die beiden Targets bestehen aus demselben Material, dessen Reflexionsvermögen mit R bezeichnet wird. Hinter den Targets misst man die Intensitäten $I_1 = 0,05 I_0$ und $I_2 = 0,1 I_0$.
- (a) Berechne R und den Absorptionskoeffizienten α des Targetmaterials.
- (b) Bei welcher Targetdicke beträgt die Intensität hinter dem Target $0,001 I_0$?
- (c) Wie groß ist die Halbwertsdicke des Targetmaterials?

3.6 Wesentliche Wechselwirkungen zwischen elektromagnetischer Strahlung und Materie - Überblick

- 3.6.1. Der Absorptionsquerschnitt für Gammaquanten zeigt oberhalb der Quantenenergie $2m_e c^2$ ein deutliches Minimum. Gib eine qualitative Erklärung für dieses Verhalten.
- 3.6.2. Die Resonanzfrequenzen der Luftmoleküle liegen im Ultravioletten. Erkläre, warum der Himmel blau ist und die untergehende Sonne rot erscheint.

- 3.6.3. Monochromatische Röntgenstrahlung der Wellenlänge λ trifft auf ein Target. Nebenstehende Abbildung zeigt das Energiespektrum der aus dem Target austretenden Elektronen. W ist dabei die kinetische Energie der Elektronen. Ist ΔN die Zahl der Elektronen mit Werten der kinetischen Energie zwischen W und $W + \Delta W$, dann ist $I = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta W}$.



- (a) Beschreibe eine Versuchsanordnung, mit der $I(W)$ gemessen werden kann.
- (b) Gib eine genaue Erklärung für die experimentell gefundene Verteilung $I(W)$.
- (c) Berechne die Wellenlänge für die im Versuch verwendete Röntgenstrahlung für $\Delta W_0 = 140 \text{ keV}$. Wie groß sind W_0 und W_1 ?
- (d) Wie groß kann, bei beliebiger Wellenlänge der einfallenden Strahlung, ΔW_0 höchstens werden?

4 Atommodelle

4.1 Das Atommodell von Rutherford

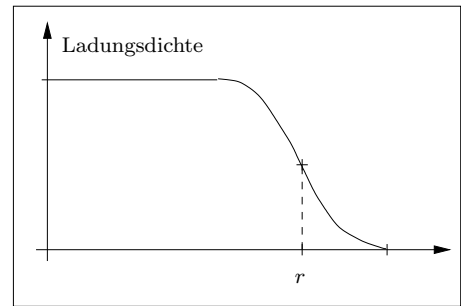
- 4.1.1. (a) Bei der Streuung von Alphateilchen an Bleiatomen stimmen die experimentellen Ergebnisse bei der 180° -Streuung bis zur kinetischen Energie $W_{\text{kin}} = 20 \text{ MeV}$ ausgezeichnet mit der Rutherfordformel überein. Für größere Energien gelangen die Alphateilchen in den Wirkungsbereich der Kernkräfte und die auf der Coulombwechselwirkung beruhende Rutherfordformel verliert ihre Gültigkeit. Berechne den Radius eines Bleikerns.
- (b) Zeige unter der Annahme, dass die Dichte der Kernmaterie konstant und der Kern kugelförmig ist, die Gültigkeit folgender Formel für den Kernradius in Abhängigkeit von der relativen Atommasse A :

$$r = r_0 \cdot \sqrt[3]{A}$$

4 Atommodelle - Aufgaben

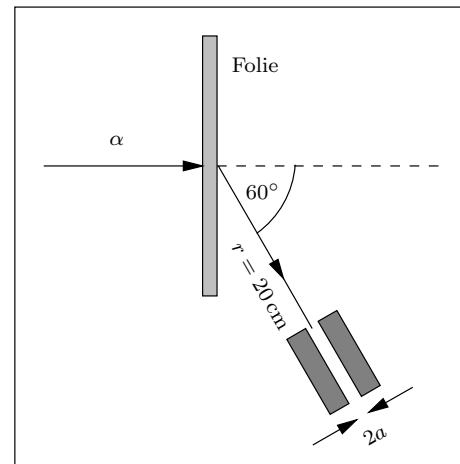
- (c) Welches r_0 ergibt sich aus dem Ergebnis von Teilaufgabe (a)? Dieser „Rutherfordradius“ ist etwas zu groß, da Rutherford von einer homogen verteilten Kernladung ausging. Für den geeignet definierten Radius r einer realen Kernladungsverteilung (siehe Abbildung) gilt

$$r_0 \approx 1,3 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$



- (d) Berechne die Dichte ρ der Kernmaterie. Berechne den Kernradius von Gold und von Blei.

- 4.1.2. $3,00 \cdot 10^5$ Alphateilchen der kinetischen Energie 2,5 MeV werden pro Sekunde auf eine Folie der Dicke $x = 0,100 \text{ mm}$ geschossen, das Folienmaterial hat die Teilchendichte $z = 6,64 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$. Im Abstand $r = 20,0 \text{ cm}$ vom Auftreffpunkt der Alphateilchen auf die Folie befindet sich die kreisförmige Öffnung des Registriergerätes mit dem Radius $a = 1,00 \text{ mm}$, der Streuwinkel beträgt $60,0^\circ$. In 1000 s Beobachtungszeit werden 1264 gestreute Alphateilchen beobachtet. Um welches Targetmaterial handelt es sich?



4.2 Das Bohr'sche Atommodell

- 4.2.1. Ein Gas aus dissoziiertem Wasserstoff wird von Elektronen der kinetischen Energie 12,5 eV zum Leuchten angeregt. Welche Frequenzen bzw. Wellenlängen enthält das ausgesandte Licht?
- 4.2.2. S_n sei die Menge aller Frequenzen der n -ten Spektralserie des Wasserstoffatoms (z.B. S_2 für die Balmerserie). Bis zu welchem n sind die Serien isoliert, d.h. bis zu welchem n ist die größte Frequenz von S_{n+1} kleiner als die kleinste Frequenz von S_n ?

Zeichnung wie nebenstehend bis $n = 4$!

Einheit: $R_H \cdot c \hat{=} 20 \text{ cm}$



- 4.2.3. (a) Drücke die Geschwindigkeit v_n des Elektrons auf der n -ten Bohr'schen Bahn durch n aus. Berechne speziell v_1 und v_2 für H und Be^{+++} .
- (b) Berechne den Radius und die Ionisierungsenergie von Be^{+++} in den Zuständen mit $n = 1$ und $n = 10$.
- 4.2.4. Die Bohr'sche Theorie geht von klassischen Bahnen des Elektrons aus, was quantenmechanisch nicht haltbar ist. Schätze dazu die Geschwindigkeitsunschärfe des Elektrons auf der ersten Bohr'schen Bahn ab.

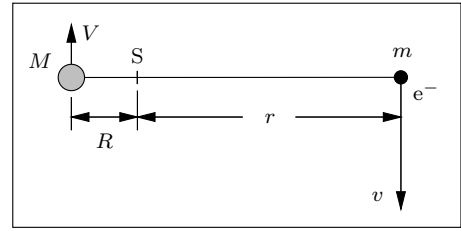
4.2.5. Die Kernmitbewegung:

4 Atommodelle - Aufgaben

- (a) Berechne die Rydbergkonstante R_∞ so genau wie möglich und vergleiche mit dem äußerst genauen experimentell bestimmten Wert für Wasserstoff

$$R_{\text{H,exp}} = (10967758 \pm 1) \frac{1}{\text{m}}.$$

- (b) Da die Kernmasse nicht unendlich ist, muss eine exaktere Theorie die Kern-



mitbewegung berücksichtigen. Kern und Elektron bewegen sich um den gemeinsamen Schwerpunkt S. Das erste Bohr'sche Postulat gilt jetzt für den Gesamtdrehimpuls von Kern und Elektron:

$$mvr + MVR = n \cdot \hbar$$

Beweise für die Energiestufen des Einelektronensystems:

$$W_n = -Z^2 h c \cdot \frac{R}{n^2} \quad \text{mit} \quad R = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m}{M}}$$

Suche im Internet die genauen Werte der benötigten physikalischen Konstanten (CODATA, 1998) und berechne den exakten Wert von R_{H} .

- 4.2.6. 1897 entdeckte der Astronom PICKERING in einem Sternenspektrum eine Spektralserie, deren Wellenlängen nebenstehend im Vergleich zur Balmer Serie angegeben sind. Zeige, dass die Pickering Serie näherungsweise durch halbzahlige Quantenzahlen der Balmerformel beschrieben werden kann. Bohr erkannte, dass die Pickering Serie dem He^+ -Ion zugeschrieben werden muss. Welche „Grundquantenzahl“ gehört zu dieser Serie? Überprüfe die Werte der Tabelle durch Rechnung ($m_\alpha = 4,001506 u$).

n	Balmer	Pickering
3	656,47 nm	656,20 nm
	-	541,31 nm
4	486,27 nm	486,08 nm
	-	454,29 nm
5	434,17 nm	434,00 nm
im Vakuum gemessen		

- 4.2.7. Deuterium (D) ist ein Wasserstoffisotop, dessen Kern aus einem Proton und einem Neutron besteht. Die Kernmasse von Deuterium ist $m_{\text{D}} = 2,013553 u$.

- (a) Berechne zu folgenden H-Linien (im Vakuum gemessen) die Wellenlängen der entsprechenden D-Linien: $\lambda_1 = 121,56845 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 97,25476 \text{ nm}$.
- (b) Zu welchen Übergängen gehören die beiden Linien?

4.2.8. Exotische Atome

Wird ein Target mit negativ geladenen Elementarteilchen beschossen, dann werden diese abgebremst und können schließlich von einem Kern des Targetmaterials eingefangen werden. Die Massen dieser Teilchen (Myonen, Pionen, Antiprotonen, ...) sind viel größer als die Elektronenmasse, wodurch sich so ein eingefangenes Teilchen innerhalb der Elektronenbahnen bewegt und somit von den Elektronen nicht gestört wird (quantenmechanisch gilt diese Aussage nur näherungsweise, da die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen auch in Kernnähe nicht ganz verschwindet). Das System Kern-Teilchen kann daher angenähert mit der Bohrschen Theorie behandelt werden.

Berechne den kleinsten Bahnradius und die Wellenlänge λ_{21} für folgende Systeme:

- (a) Blei-Myonenatom: Pb 207 und Myon (μ), $m_\mu = 206,768 m_e$, $Q_\mu = -e$
- (b) Antiproton (p^-) um Alphateilchen (He 4): $m_\alpha = 4,001506 u$, $m_{p^-} = m_{p^+}$, $Q_{p^-} = -e$
- (c) Positronium: Positron (e^+) um Elektron

Bemerkung:

- Das Myon zerfällt nach ca. $2 \cdot 10^{-6}$ s in andere Teilchen. Trotz dieser Kurzlebigkeit kann das Spektrum des Myonenatoms experimentell beobachtet werden!
- Wegen der großen Kernnähe des Myons im Myonenatom kann aus Abweichungen vom Bohr'schen Spektrum Aufschluss über die Ladungsverteilung im Kern erhalten werden.

Literatur: BERGMANN-SCHÄFER, *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Bd. IV, Teil 2

- 4.2.9. Berechne die Frequenz $f_{n+1,n}$, die im Einelektronensystem beim Übergang von W_{n+1} auf W_n abgestrahlt wird. Vergleiche diese Frequenz für $n \gg 1$ mit der Umlauffrequenz des Elektrons auf der n -ten Bahn.

4.3 Das quantenmechanische Atommodell

- 4.3.1. Beweise durch vollständige Induktion oder durch eine geschickte Anwendung der Summenformel für $1 + 2 + 3 + \dots + n$ die Beziehung

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2$$

- 4.3.2. Die Ionisierungsenergie für das Leuchtelektron des Natriums beträgt 5,12 eV. Berechne die effektive Kernladung Z_{eff} und den kleinsten Bahnradius des Leuchtelektrons.

- 4.3.3. Wir betrachten ein Wasserstoffatom im Zustand (n, l, m) . Für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $w(r) dr$, das Elektron in einer Kugelschale zwischen r und $r + dr$ anzutreffen, gilt

$$w(r) = w_{n,l}(r) = [R_{n,l}(r)]^2 \cdot r^2$$

Mit der Abkürzung $x = \frac{r}{r_1}$, wobei r_1 den Radius der ersten Bohr'schen Bahn bezeichnet, gilt

$$R_{1,0} = \frac{2}{\sqrt{r_1^3}} \cdot e^{-x} \quad \text{und} \quad R_{2,0} = \frac{2}{\sqrt{(2r_1)^3}} \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

- (a) Zeichne die Wahrscheinlichkeitsdichten $w_{1,0}(r)$ und $w_{2,0}(r)$ im Intervall $[0, 10r_1]$. Verwende die Einheiten $x = 1 \hat{=} 1 \text{ cm}$ und $w = 10^9 \frac{1}{\text{m}} \hat{=} 1 \text{ cm}$.
- (b) Berechne mit einem CAS die Wahrscheinlichkeit, das Elektron für $n = 2$ und $l = 0$ im Bereich $r < 2r_1$ anzutreffen.

4.4 Röntgenspektren

- 4.4.1. Welche Röntgenlinien können in welcher zeitlichen Reihenfolge von einer Cu-Antikathode emittiert werden?

4.4.2.

Element	Ca	Zn	Zr	Sn	Nd	Yb	Hg	Th	Fm
Z	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$W_{k,\alpha}$ [keV]	3,69	8,64	15,78	25,27	37,36	52,39	70,82	93,35	121,06

- (a) Welche Kernladungszahl erhält man mit dem Mosley'schen Gesetz aus der Energie $W_{k,\alpha}$ für die Elemente obiger Tabelle, wenn man die Abschirmkonstante $a = 1$ setzt?
- (b) Berechne die tatsächliche Abschirmkonstante a für obige Elemente. Zeichne $a(Z)$ unter Verwendung der Einheiten $Z = 10 \hat{=} 1 \text{ cm}$ und $a = 1 \hat{=} 1 \text{ cm}$.

4 Atommodelle - Aufgaben

- (c) Die Zeichnung legt die Vermutung nahe, dass das wahre $a(Z)$ durch $a^*(Z) = 1 - A \cdot Z^n$ angenähert werden kann. Berechne A und n so, dass für $Z = 50$ und $Z = 100$ $a^*(Z) = a(Z)$ gilt. Berechne dann $a^*(Z)$ für alle obigen Elemente und vergleiche mit den Werten $a(Z)$ aus Teilaufgabe (b).
- (d) Welches Element sendet folgende K_α -Wellenlänge aus:
(i) $7,09 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ (ii) $1,802 \cdot 10^{-11} \text{ m}$?