

LK Physik

Spezielle Relativitätstheorie

Richard Reindl

2004

Die aktuellste Version des Skriptes findet man unter

<http://www.stbit.de>

Das Werk steht unter einer Creative Commons

- Namensnennung
- Nicht-kommerziell
- Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Unported Lizenz

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.de>



8. Oktober 2013

1 Newtonsche Mechanik in verschiedenen Bezugssystemen

1.1 Bezugssysteme, Ereignisse, Weltlinien

Unter einem Bezugssystem versteht man ein räumliches Koordinatensystem mit einer Uhr. Die raum-zeitliche Lage eines Körpers ist eindeutig festgelegt, wenn man seine drei Raumkoordinaten $(x|y|z)$ und die Zeit t kennt. $(x|y|z|t)$ nennt man einen **Weltpunkt** oder ein **Ereignis**. Die Menge aller Weltpunkte eines punktförmigen Körpers ist seine **Weltlinie** (WL). Da die Zeit aus rein praktischen Gründen rechnerisch als vierte Koordinate verwendet wird, spricht man von einer vierdimensionalen **Raumzeit** und von der Zeit als **vierter Dimension**.

Für eine eindimensionale Bewegung ($y = z = 0$) kann die Weltlinie eines Massenpunktes in einem tx -Diagramm veranschaulicht werden. Um für trigonometrische Berechnungen gleiche Einheiten auf der Orts- und Zeitachse zu erhalten, wählt man statt der t -Achse eine ct -Achse, wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bezeichnet. Der Zeit $t = 1$ s entspricht auf der ct -Achse die **Strecke**

$$ct = c \cdot 1 \text{ s} = 299792458 \text{ m} = 1 \text{ Lichtsekunde} = 1 \text{ Ls} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m} .$$

Beispiel:

$$x(0) = 6 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$v = \text{konst.} = \frac{c}{2}$$

$$\tan \varphi = \frac{\Delta x}{c \cdot \Delta t} = \frac{v}{c}$$

Für Lichtsignale gilt:

$$v = \pm c \implies$$

$$\tan \varphi = \pm 1 \implies$$

$$\varphi = \pm 45^\circ$$

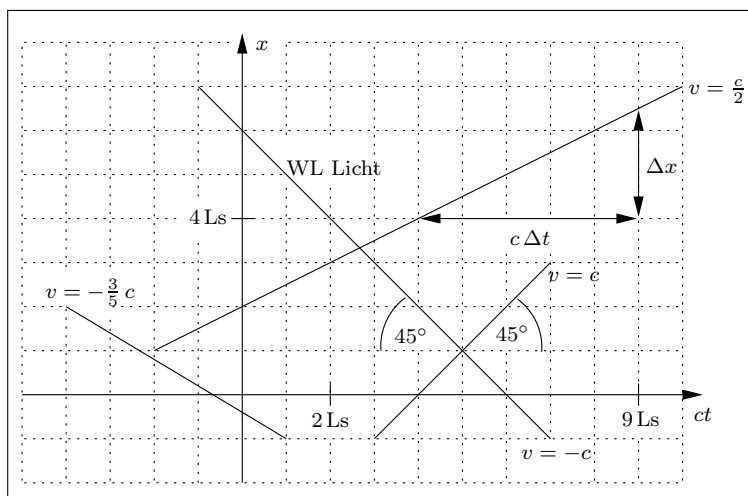


Abb.1.1.1 Weltlinien

Aufstellen der Gleichung einer Weltlinie für $v = \text{konst.}$:

$$v = \frac{x - x_0}{t - t_0} \implies x - x_0 = v \cdot (t - t_0)$$

$$\implies x(t) = x_0 + v \cdot (t - t_0)$$

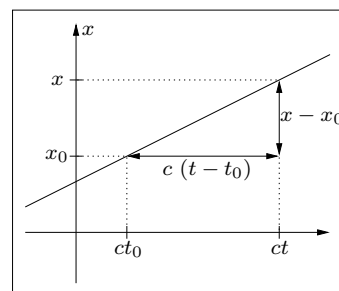


Abb.1.1.2 Weltlinie

1.2 Die Galileitransformation

Eine Bewegung $x = x(t)$ wird in einem Koordinatensystem S beschrieben. Oft ist es vorteilhaft, die Bewegung in einem relativ zu S bewegten System S' zu beschreiben. Der Ursprung O des Systems S hat in S' die x' -Koordinate η , der Ursprung O' von S' hat in S die x -Koordinate ξ (siehe Abb.1.2.1).

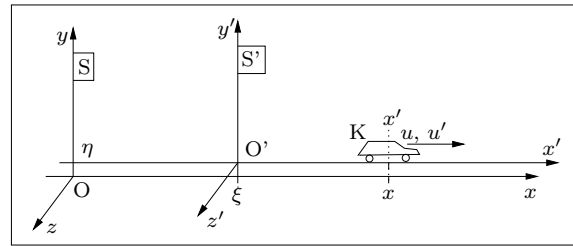


Abb.1.2.1 Bezugssysteme

Die x - und x' -Achse liegen aufeinander (in der Zeichnung der Deutlichkeit halber etwas versetzt dargestellt), y -Achse \parallel y' -Achse und z -Achse \parallel z' -Achse.

Der Abbildung entnimmt man:

$$\boxed{\begin{matrix} x = x' + \xi \\ y = y' \\ z = z' \end{matrix}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\begin{matrix} x' = x - \xi \\ y' = y \\ z' = z \end{matrix}} \quad (1.2.1)$$

S' bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = v_{S'S}$ relativ zu S; v ist gleich der Geschwindigkeit des Ursprungs O' im System S. Da O' in S die x -Koordinate ξ besitzt, ist

$$v = \dot{\xi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \quad (1.2.2)$$

Wegen $\eta = -\xi$ gilt für die Geschwindigkeit $v_{SS'}$ von S relativ zu S':

$$v_{SS'} = \dot{\eta} = -\dot{\xi} = -v_{S'S} = -v \quad (1.2.3)$$

Bewegt sich ein Körper K relativ zu S' mit der (nicht notwendig konstanten!) Geschwindigkeit $u' = \dot{x}'$, dann folgt aus (1.2.1) und (1.2.2) für seine Geschwindigkeit $u = \dot{x}$ relativ zu S:

$$u = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x' + \xi) = \dot{x}' + \dot{\xi} = u' + v \quad (1.2.4)$$

$$\boxed{u = u' + v} \quad (1.2.5)$$

Für die Beschleunigungen $a = \dot{u}$ bzw. $a' = \dot{u}'$ des Körpers K in S bzw. S' und die Beschleunigung $b = \dot{v}$ von S' relativ zu S folgt aus (1.2.4):

$$\boxed{a = \dot{u} = \dot{u}' + \dot{v} = a' + b} \quad (1.2.6)$$

Bewegt sich S' parallel zur x -Achse mit der **konstanten** Geschwindigkeit $v_{S'S} = v$ relativ zu S und befinden sich O und O' zur Zeit Null am gleichen Ort ($\xi(0) = 0$), dann ist $\xi(t) = v \cdot t$ und (1.2.1) geht über in:

$$\boxed{x = x' + v \cdot t \quad \text{bzw.} \quad x' = x - v \cdot t} \quad (1.2.7)$$

(Galilei-Transformation)

Für $v = \text{konst.}$ ist $b = \dot{v} = 0$ und aus (1.2.6) folgt:

$$\boxed{a = a'} \quad (1.2.8)$$

und damit für die Kräfte

$$\boxed{F = F'} \quad (1.2.9)$$

Ein Körper, der sehr weit von anderen Körpern entfernt ist, kann als **kräftefrei** angesehen werden.

Ein Bezugssystem heißt **Inertialsystem**, wenn in ihm ein kräftefreier Körper keine Beschleunigung erfährt, d.h. wenn in ihm der Trägheitssatz gilt.

Logischer Aufbau der Newton'schen Mechanik:

Grundgrößen:

Länge; Zeit; Masse
Zur Definition der Masse:

Zwei zunächst ruhende Körper, von denen einer die bekannte Masse m_0 hat, stehen in Wechselwirkung miteinander. Gemessen werden die Geschwindigkeiten v_0 und v nach der Wechselwirkung.

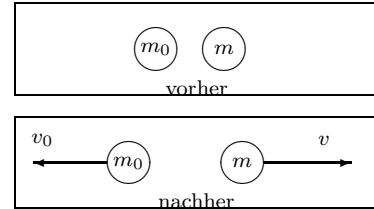


Abb.1.2.2 Def. der Masse

Die Masse m ist dann definiert durch $m = m_0 \cdot \frac{v_0}{v}$!

Definitionen:

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}} \quad ; \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{x}} \quad ; \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad ; \quad \vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$W_{\text{pot}} = \int \vec{F} d\vec{x} \quad ; \quad W_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \cdot \vec{v}^2$$

Logische Folgerungen:

Der Energiesatz und der Impulssatz sind logische Konsequenzen der **Definitionen** von Energie und Impuls und somit keine **Naturgesetze**! Allenfalls in der Möglichkeit der widerspruchsfreien Definition der Grundgrößen steckt ein Naturgesetz!

Naturgesetze:

Naturgesetze sind die Eigenschaften der Wechselwirkungen zwischen den Elementarteilchen, wie das Gravitationsgesetz und das Coulomb'sche Gesetz.

Newton'sches Relativitätsprinzip:

Die Gesetze der Mechanik haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form!

Beispiel:

$$\begin{array}{l} \text{System S:} \quad F = m \cdot a \\ \text{System S':} \quad m' = m \quad ; \quad a' = a \quad ; \quad F' = F \quad \implies \quad F' = m' \cdot a' \end{array}$$

Das Newton'sche Relativitätsprinzip beinhaltet folgende Aussagen:

- Kein Inertialsystem ist vor einem anderen ausgezeichnet!
- Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt!
- Es gibt keine absolute Ruhe!

Zum Beispiel kann in einem fensterlosen Zug auf ideal glatten Schienen mit keinem Experiment festgestellt werden, ob der Zug fährt oder nicht!

Bisher sind vier fundamentale Wechselwirkungen bekannt:

1. Die **Gravitation**: Anziehende Kraft zwischen allen mit Masse behafteten Körpern. Im Spezialfall kleiner Massen und kleiner Geschwindigkeiten wird die Schwerkraft durch die **Newton'sche Gravitationstheorie** beschrieben. Eine allgemeinere Theorie der Gravitation, die vor allem zur Beschreibung des ganzen Universums benötigt wird, ist die **allgemeine Relativitätstheorie** Albert Einsteins.

2. Die **elektromagnetische Wechselwirkung** (Maxwellsche Gleichungen)
3. Die **schwache Wechselwirkung**: Beschreibung des radioaktiven Zerfalls
4. Die **starke Wechselwirkung** Beschreibung der Kernkräfte (Quantenchromodynamik)

Die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung werden zur Zeit schon durch eine einheitliche Theorie, die sogenannte **elektroschwache Theorie** beschrieben. Dafür erhielten SHELDON LEE GLASHOW, ABDUS SALAM und STEVEN WEINBERG 1979 den Nobelpreis.

Zur Beschreibung der elektroschwachen Theorie und der starken Wechselwirkung ist die Newtonsche Mechanik nicht mehr geeignet, sondern man muss auf deren Verallgemeinerung, die **Quantenmechanik**, zurückgreifen. Eine andere Verallgemeinerung der Newtonschen Mechanik ist die **spezielle Relativitätstheorie**, die das Verhalten von kleinen Massen mit großen Relativgeschwindigkeiten beschreibt. Diese von ALBERT EINSTEIN 1905 veröffentlichte Theorie ist unser nächstes Ziel.

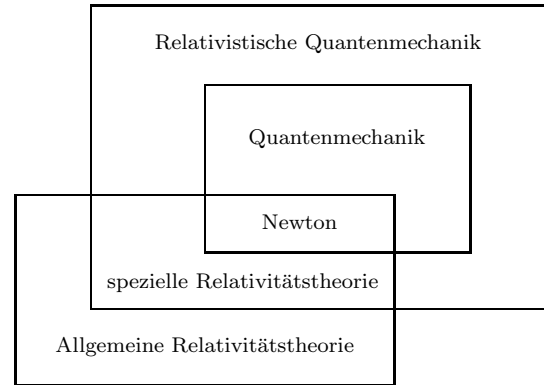


Abb.1.2.3 Aufbau der Physik

1.3 Das Brehmediagramm der Galileitransformation

Um die verschiedenen Koordinaten x und $x' = x - vt$ eines Ereignisses in **einem** Diagramm darstellen zu können, gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten:

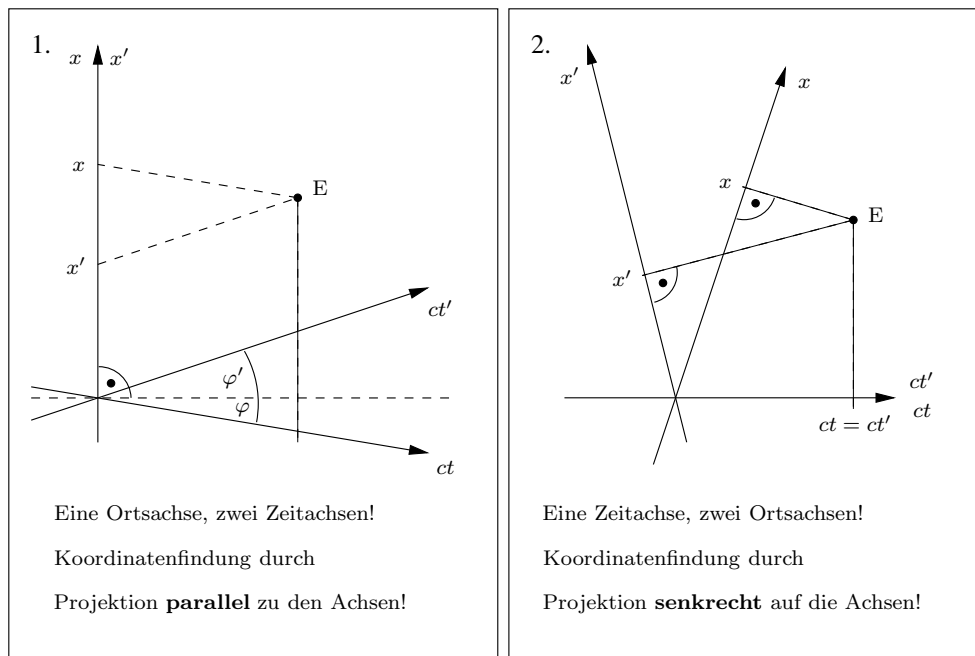


Abb.1.3.1 Darstellung von Koordinaten in verschiedenen Systemen

Beide Möglichkeiten sind gleichwertig! Aus Gründen der Verträglichkeit mit dem in der Literatur fast ausschließlich verwendeten **Minkowski**diagramm verwenden wir Methode 1.

Die Forderung nach gleichen Einheiten auf der ct - und ct' -Achse ergibt $\varphi = \varphi'$.

Aus Abb.1.3.2 folgt unter der Voraussetzung gleicher Einheiten auf allen Achsen

$$x' = x - (2c \sin \varphi) \cdot t = x - vt \quad (1.3.1)$$

$$v = 2c \sin \varphi \quad (1.3.2)$$

$$\sin \varphi = \frac{v}{2c} = \frac{\beta}{2} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (1.3.3)$$

Für die Weltlinien der beiden Koordinatensprünge gilt

$$\begin{aligned} \text{WL}_O &= ct - \text{Achse} \quad (x = 0) \\ \text{WL}_{O'} &= ct' - \text{Achse} \quad (x' = 0) \end{aligned}$$

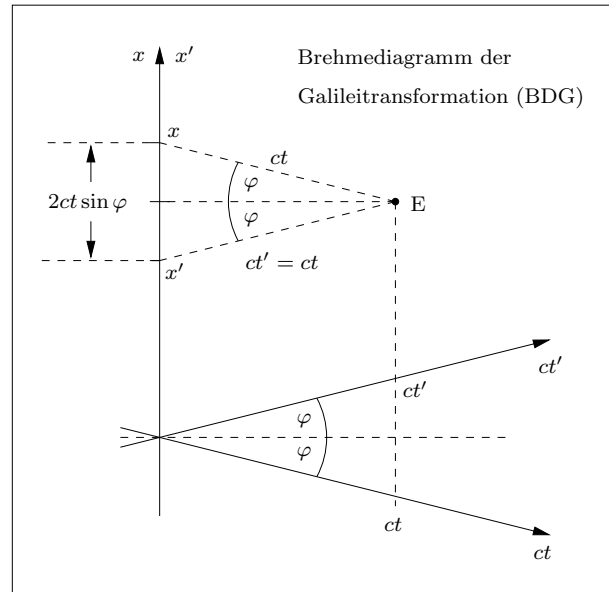


Abb.1.3.2 Brehmediagramm der GT

Parallelen Weltlinien entsprechen Bewegungen mit gleichen Geschwindigkeiten!

Als Beispiel betrachten wir die Erde (ruhend im System S) und eine Raumstation R (ruhend im System S'). Die Relativgeschwindigkeit der Raumstation zur Erde sei $v = v_{S'S} = 0,6c$. Ein Raumschiff R₁ bewegt sich mit der Geschwindigkeit $u'_1 = \frac{c}{3}$ relativ zur Raumstation und ein weiteres Raumschiff R₂ mit $u_2 = \frac{c}{3}$ relativ zur Erde. Die beiden Raumschiffe treffen sich zur Zeit 4s am Ort 2Ls im System S' der Raumstation (Ereignis E).

Die x-Koordinate von E ist

$$x = x' + vt = 4,4 \text{ Ls}$$

d.h.

$$E(2 \text{ Ls} | 4 \text{ s})_{S'} = E(4,4 \text{ Ls} | 4 \text{ s})_S$$

$$\sin \varphi = \frac{\beta}{2} = 0,3$$

$$\Rightarrow \tan \varphi = 0,314$$

Damit zeichnet man die ct-Achsen: 6 cm nach rechts und 1,89 cm nach oben und unten. Zu $\Delta t = 3 \text{ s}$ gehört $\Delta x = \frac{c}{3} \cdot \Delta t = 1 \text{ Ls}$. Damit zeichnet man die Ereignisse E₁ und E₂ auf den Weltlinien von R₁ und R₂.

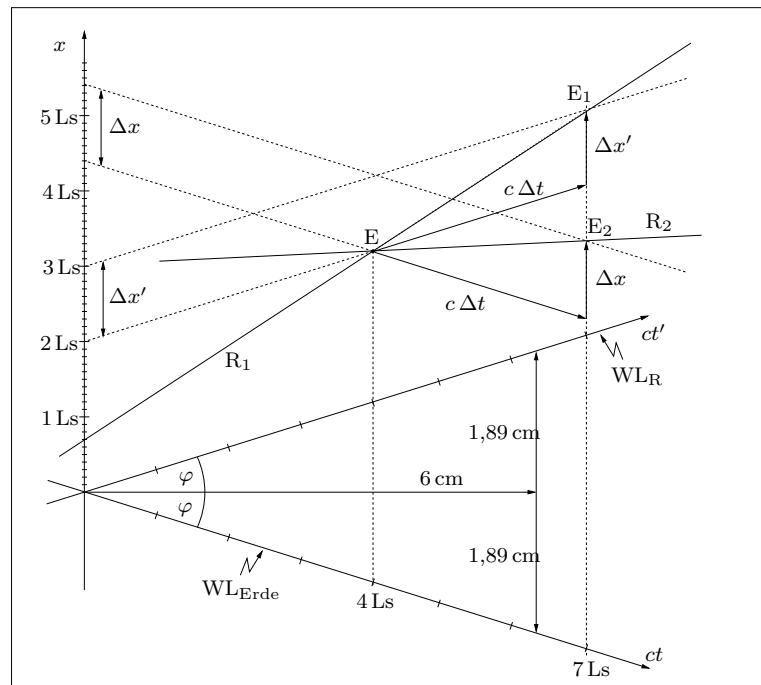


Abb.1.3.3 Beispiel

1.4 Zeit- und Längenmessung

1.4.1 Atomuhr

Die Frequenz f der vom Sender ausgestrahlten Welle ist im Idealfall gleich der Eigenfrequenz $f_0 = 9192631770 \text{ Hz}$ der Cs-Atome. In diesem Fall wird die Strahlung von den Cs-Atomen völlig absorbiert. Weicht f von f_0 ab, dann erreicht ein Teil der Strahlung den Empfänger. In Abhängigkeit von der empfangenen Intensität wird über einen elektronischen Mechanismus f solange reguliert, bis am Empfänger wieder nichts mehr ankommt, d.h. bis f wieder exakt gleich f_0 ist. Ein Teil der Welle wird vor den Cs-Atomen von einer Antenne aufgenommen und zu einem schnellen elektronischen Zähler geleitet. Die kleinste messbare Zeit beträgt ungefähr eine Periodenlänge $\frac{1}{f_0} \approx 0,1 \text{ ns}$. Bei der Messung von längeren Zeiten wird eine Genauigkeit von $\frac{\Delta t}{t} \approx 10^{-14}$ (Physik in unserer Zeit, 6/77) erreicht, was einer Gangungenauigkeit von 1 s in ca. $3 \cdot 10^6$ Jahren entspricht! Die Fontänen Atomuhr CSF1 der Physikalisch-Technischen-Bundesanstalt erreicht sogar die Genauigkeit $\frac{\Delta t}{t} \approx 10^{-15}$, d.h. sie geht in ca. $3 \cdot 10^7$ Jahren nur um 1 s falsch.

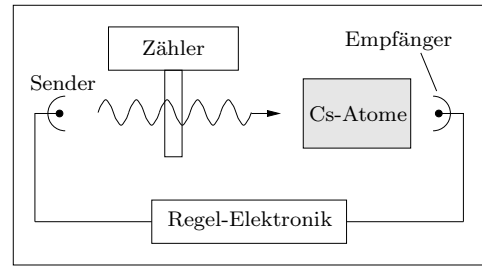


Abb.1.4.1 Atomuhr

1.4.2 Laufzeitmessungen

Trifft z.B. ein kurzer Lichtimpuls auf den Sensor S_1 , schaltet die Uhr ein, trifft der Impuls auf den Sensor S_2 , schaltet die Uhr wieder aus. Wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Sensorimpulse auf den Zuleitungen zur Uhr müssen diese Leitungen zur exakten Messung von Δt genau gleich lang sein. Für die Geschwindigkeit des Lichtimpulses erhält man $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

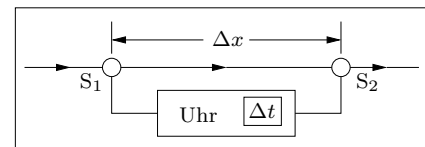


Abb.1.4.2 Laufzeitmessung

1.4.3 Entfernungsmessung über die Laufzeitmessung von Signalen

c ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, z.B. die Licht- oder Schallgeschwindigkeit.

$$\Delta t = \frac{2 \cdot \Delta s}{c} \implies \Delta s = \frac{c \cdot \Delta t}{2} \quad (1.4.1)$$

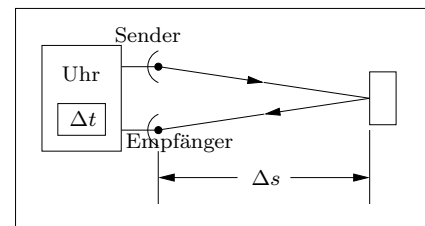


Abb.1.4.3 Entfernungsmessung

1.4.4 Längenmessung bewegter Körper

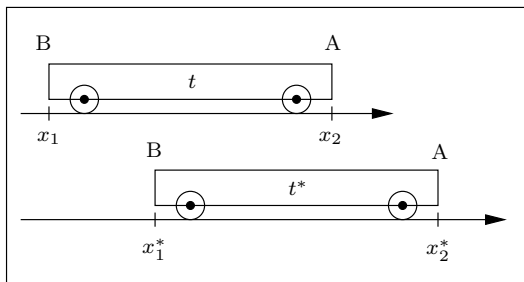


Abb.1.4.4 Längenmessung

Bei der Längenmessung bewegter Körper müssen die Koordinaten von Anfangs- und Endpunkt *gleichzeitig* gemessen werden.

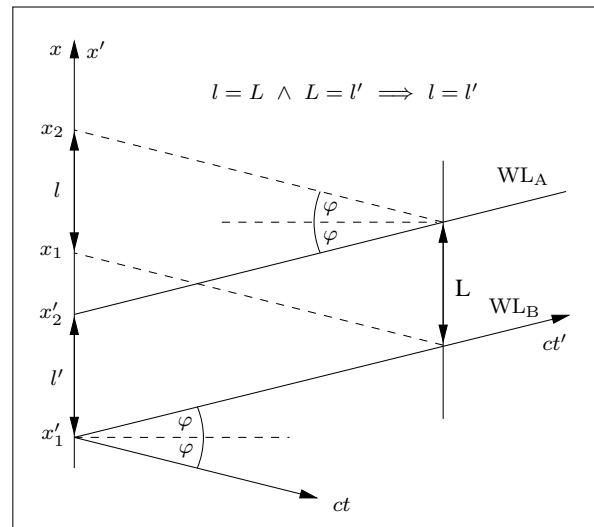


Abb.1.4.5 BDG der Längenmessung

$$l = x_2 - x_1 = x'_2 + vt - (x'_1 + vt) = x'_2 - x'_1 = l' \quad (1.4.2)$$

2 Lichtausbreitung in verschiedenen Bezugssystemen

2.1 Zwei Modellvorstellungen der Lichtausbreitung

2.1.1 Äthertheorie des Lichtes

Es gibt einen alles durchdringenden und ideal elastischen Stoff, den sogenannten **Äther**, der als Träger der Lichtwellen fungiert. Die Lichtgeschwindigkeit relativ zum Äther ist im Vakuum **überall** und **in alle Richtungen** konstant.

Die Gleichheit der Lichtgeschwindigkeit an jedem Ort des Universums nennt man ihre **Homogenität**, die Gleichheit in alle Richtungen dagegen ihre **Isotropie**.

Eine modernere Fassung der Äthertheorie, die allerdings auf den geheimnisvollen stofflichen Äther verzichtet, die wesentlichen Aussagen zur Lichtgeschwindigkeit aber beibehält, lautet:

Es gibt ein Inertialsystem S_0 , den absoluten Raum , relativ zu dem die Vakuumlichtgeschwindigkeit homogen und isotrop ist. In S_0 gilt also $ \vec{c} = c = \text{konstant}$.	(2.1.1)
--	---------

S' sei ein Inertialsystem, das sich mit $\vec{v} = \vec{v}_{S'/S_0}$ relativ zu S_0 bewegt.

Aus der Galileitransformation folgt dann:

$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}$	(2.1.2)
--------------------------------	---------

Drei Spezialfälle:

$\vec{v} \parallel \vec{c} \implies c' = c + v \text{ oder } c' = c - v$	(2.1.3)
$\vec{v} \perp \vec{c}' \implies c' = \sqrt{c^2 - v^2}$	
$\vec{v} \perp \vec{c} \implies c' = \sqrt{c^2 + v^2}$	

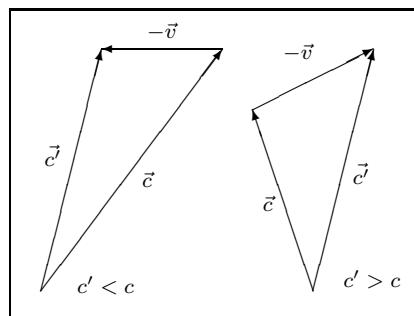


Abb.2.1.1 Lichtgeschwindigkeiten

2.1.2 Korpuskulartheorie des Lichtes

Licht besteht aus Teilchen (Wellenpaketen), deren Geschwindigkeit im System S_L der Lichtquelle homogen und isotrop ist, falls S_L ein Inertialsystem ist. In S_L gilt also $ \vec{c} = c = \text{konstant}$.	(2.1.4)
--	---------

S' sei ein Inertialsystem, das sich mit $\vec{v} = \vec{v}_{S'/S_L}$ relativ zu S_L bewegt. S_L bewegt sich dann mit $\vec{v}_L = -\vec{v}$ relativ zu S' . Aus der Galileitransformation folgt dann für die Lichtgeschwindigkeit \vec{c}' in S' , wenn \vec{c} die Geschwindigkeit des Lichtes in S_L ist:

$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v} = \vec{c} + \vec{v}_L$	(2.1.5)
--	---------

2.2 Der Versuch von Michelson und Morley

MICHELSON wollte mit seinem Versuch, der nebenstehend schematisch abgebildet ist, die Relativbewegung der Erde zum Äther nachweisen (1877). Wegen der Bewegung der Erde um die Sonne hat die Erde wenigstens einmal im Jahr die Geschwindigkeit $v \geq 30 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ relativ zum Äther. Der monochromatische Lichtstrahl wird von dem halbdurchlässigen Spiegel S in zwei Teilstrahlen zerlegt, die an S_1 bzw. S_2 reflektiert werden. Die reflektierten Strahlen gelangen zum Fernrohr, wo sie sich überlagern und ein Interferenzmuster bilden. Die Ursache für die Ausbildung der Interferenzstreifen liegt daran, dass das Spiegelbild S'_1 von S_1 nicht exakt parallel zu S_2 ist (Interferenz am Luftkeil zwischen S_2 und S'_1).

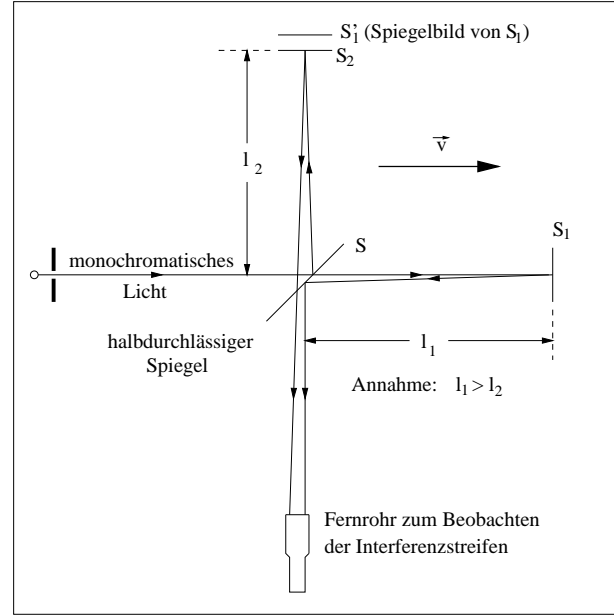


Abb.2.2.1 Der Versuch von Michelson

Wir nehmen an, dass die Relativgeschwindigkeit \vec{v} der Erde relativ zum Äther parallel zu $\overrightarrow{SS'_1}$ ist. Wegen (2.1.3) gilt dann für die Lichtgeschwindigkeiten:

$$\begin{array}{ll} \text{Von S nach } S_1: & c_1 = c - v \\ \text{Von S nach } S_2: & c_2 = \sqrt{c^2 - v^2} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{Von } S_1 \text{ nach S:} & c_1' = c + v \\ \text{Von } S_2 \text{ nach S:} & c_2 = \sqrt{c^2 - v^2} \end{array}$$

Der an S_1 reflektierte Teilstrahl gelangt um die Zeit τ später am Fernrohr an als der an S_2 reflektierte Strahl:

$$\tau = \frac{l_1}{c - v} + \frac{l_1}{c + v} - \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad (2.2.1)$$

Nach einer Drehung der ganzen Versuchsanordnung um 90° beträgt die Zeitdifferenz der beiden Teilstrahlen:

$$\tau' = \frac{2l_1}{\sqrt{c^2 - v^2}} - \frac{l_2}{c - v} - \frac{l_2}{c + v} \quad (2.2.2)$$

Für den Gangunterschied δ der beiden Teilstrahlen gilt mit der Wellenlänge λ und der Frequenz $f = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda}$:

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{\tau}{T} = \frac{c \cdot \tau}{\lambda} \implies \delta = c \cdot \tau \quad (2.2.3)$$

Bei der 90° -Drehung der ganzen Apparatur ändert sich der Gangunterschied der beiden Teilstrahlen um

$$\delta^* = \delta - \delta' = c \cdot (\tau - \tau') \quad (2.2.4)$$

Ändert sich der Gangunterschied um eine ganze Wellenlänge, dann verschiebt sich das Interferenzmuster um einen vollen Streifenabstand. Der Quotient $\frac{\delta^*}{\lambda}$ ist also gleich der Anzahl der vollen Streifenabstände, um die sich das Interferenzmuster bei der 90° -Drehung verschiebt. Aus (2.2.1) und (2.2.2) folgt mit $l = l_1 + l_2$ und $\beta = \frac{v}{c}$:

$$\begin{aligned} \Delta t = \tau - \tau' &= \frac{l_1 + l_2}{c - v} + \frac{l_1 + l_2}{c + v} - \frac{2(l_1 + l_2)}{\sqrt{c^2 - v^2}} \\ &= \frac{l(c + v + c - v) - 2l\sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v^2} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

$$\Delta t = \frac{2l(1 - \sqrt{1 - \beta^2})}{c(1 - \beta^2)} \quad (2.2.6)$$

Für $v \ll c$ ist $\beta \ll 1$ und die lineare Näherung liefert

$$\sqrt{1 - \beta^2} \approx 1 - \frac{\beta^2}{2} \quad (2.2.7)$$

Aus (2.2.6) und (2.2.7) folgt:

$$\Delta t \approx \frac{2l}{c} \cdot \frac{\beta^2}{2(1 - \beta^2)} \approx \frac{l\beta^2}{c} \quad (2.2.8)$$

Für die Streifenverschiebung erhält man aus (2.2.4) und (2.2.8):

$$\frac{\delta^*}{\lambda} = \frac{c\Delta t}{\lambda} \approx \frac{l\beta^2}{\lambda} \quad (2.2.9)$$

Michelson verwendete Licht der Wellenlänge $\lambda = 550 \text{ nm}$ und l betrug 22 m . Mit $v = 30 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ hätte er mindestens einmal im Jahr eine Verschiebung von

$$\frac{\delta^*}{\lambda} \approx \frac{l\beta^2}{\lambda} = \frac{22 \text{ m} \cdot \left(\frac{3 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}\right)^2}{550 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 0,4 \text{ Streifenabstände} \quad (2.2.10)$$

messen müssen.

Michelson's Messapparatur war so genau, dass er viel kleinere Streifenverschiebungen hätte beobachten können. In jahrelangen, sorgfältigsten Messungen konnten aber Michelson und sein Partner Morley überhaupt keine Verschiebung feststellen. Aus (2.2.9) folgt daher $\beta \approx 0$ und damit auch $v \approx 0$. Die experimentell gesicherte Aberration des Sternenlichtes verlangt aber bei Gültigkeit der Äthertheorie ein von Null verschiedenes v . Daraus folgt:

Die Äthertheorie ist falsch, d.h. es gibt keinen absoluten Raum.

Die **Korpuskulartheorie** (siehe Kapitel 2.1) erklärt die Aberration **und** den negativen Ausgang des Michelson-Experiments, da die Lichtquelle relativ zum ganzen Versuchsaufbau ruht!

Oft wird behauptet, dass aus dem negativen Ausgang des Versuches von Michelson die Konstanz (Homogenität und Isotropie) der Lichtgeschwindigkeit im Laborsystem folgt. In den Aufgaben wird gezeigt, dass es eine Funktion $c(\varphi) \neq \text{konst.}$ gibt, die auch den negativen Ausgang des Michelson-Versuchs erklärt.

Aus dem negativen Ausgang des Michelson-Versuchs folgt *nicht* die Konstanz (Homogenität und Isotropie) der Lichtgeschwindigkeit.

Ohne die Näherung (2.2.7) folgt aus der fehlenden Streifenverschiebung auch exakt $v = 0$ (siehe Aufgaben).

2.3 Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Einstein verallgemeinerte das Newton'sche Relativitätsprinzip dahingehend, dass er „die Gesetze der Mechanik“ durch „alle Gesetze der Physik“ ersetzte.

Damit lautet das **Einstein'sche Relativitätsprinzip**:

Alle Gesetze der Physik gelten in der gleichen Form in allen Inertialsystemen. (2.3.1)

Insbesondere gelten die Maxwell'schen Gleichungen in allen Inertialsystemen! Da die allgemeinen Naturkonstanten wie ϵ_0 und μ_0 Bestandteile der Naturgesetze sind, sind diese Konstanten

2 Lichtausbreitung in verschiedenen Bezugssystemen

nach dem Relativitätsprinzip auch in allen Inertialsystemen gleich. Daraus folgt, dass die Vakuumlichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen den konstanten Wert $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ hat.

Beispiel: Das Licht einer weit entfernten Galaxis, die sich mit $v = 0,8c$ von der Erde fortbewegt, erreicht die Erde mit der Geschwindigkeit c und nicht mit $c - 0,8c = 0,2c$.

Der Versuch von Alväger, Farley, Kjellmann und Wallin (CERN, 1964):

Ein Strahl sehr stark beschleunigter Protonen wird auf Materie geschossen. Dabei entsteht eine Sorte von neutralen Teilchen, die sogenannten π^0 -Mesonen. Diese Teilchen zerfallen nach der Zeit $2 \cdot 10^{-16}$ s in zwei energiereiche Lichtteilchen (Photonen):

$$\pi^0 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$$

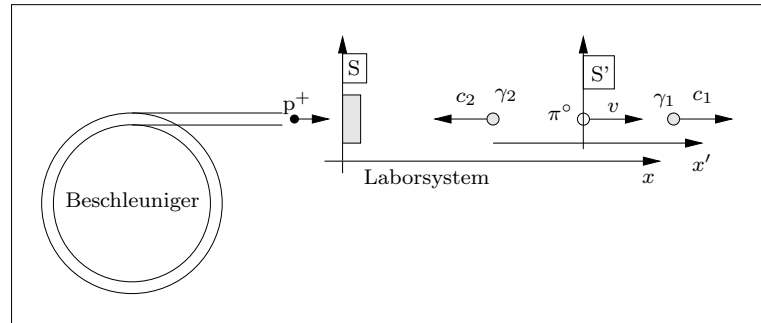


Abb.2.3.1 Der Versuch am CERN

Die Mesonen hatten in dem Versuch eine Geschwindigkeit von $v = 0,99975c$, d.h. sie stellten eine relativ zum Labor (System S) sehr schnell bewegte Lichtquelle (S') dar. Die Geschwindigkeit c_1 der von den Mesonen in Flugrichtung ausgesandten Photonen wurde im Laborsystem gemessen. Nach der Galileitransformation ist $c_1 = c_1' + v \approx 2c$, gemessen wurde aber exakt $c_1 = c$! Zahlreiche Präzisionsmessungen und die Theorie (Maxwell) führen auf das

Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:

Die Lichtgeschwindigkeit hat in allen Inertialsystemen, unabhängig von der Geschwindigkeit der Lichtquelle, des Ortes, der Richtung und der Frequenz im Vakuum den konstanten Wert

(2.3.2)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der Zahlenwert von c in (2.3.2) ist nach Definition exakt. Da auch $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ exakt ist, ist somit auch ϵ_0 ein exakter Wert. Die Längeneinheit 1 m ist definiert als die Strecke, die das Licht in der Zeit $\frac{1\text{s}}{299792458}$ zurücklegt.

Die Korpuskulartheorie des Lichtes (\vec{c} ist im System der Lichtquelle homogen und isotrop) ist mit (2.3.2) vereinbar, nicht aber die Galileitransformation!

Die Galileitransformation ist falsch, sie gilt aber näherungsweise für $v \ll c$.

3 Relativistische Kinematik

3.1 Das relativistische Brehmediagramm

Die Relativitätstheorie beruht auf zwei Annahmen:

Postulat 1: Einstein'sches Relativitätsprinzip Postulat 2: Konstanz der Lichtgeschwindigkeit	(3.1.1)
---	---------

Zwei Inertialsysteme S und S' bewegen sich mit $v = v_{S'S} \neq 0$ relativ zueinander, zur Zeit $t = 0$ seien die Ursprünge der beiden Systeme am selben Ort. Ebenfalls zur Zeit $t = 0$ wird vom Ursprung aus ein Lichtsignal in positiver x-Richtung abgesandt. Wegen Postulat 2 hat dieses Signal in beiden Systemen die gleiche Geschwindigkeit c . Abb.3.1.1 entnimmt man, dass die Weltlinie des Signals die Winkelhalbierende der x-Achse (A_x) und der ct -Achse (A_{ct}) sowie gleichzeitig auch die Winkelhalbierende der x-Achse und der ct' -Achse ($A_{ct'}$) sein muss.

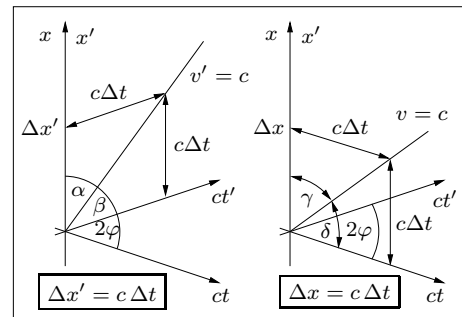


Abb.3.1.1 Lichtsignal im BDG

Abb.3.1.1 entnimmt man weiter, dass dann $\alpha = \beta = \beta + 2\varphi$ und somit $\varphi = 0$ und damit auch $v = 2c \cdot \sin \varphi = 0$ gelten muss. Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme $v \neq 0$, d.h. das Brehmediagramm der Galileitransformation ist falsch (muss es ja, da die Galileitransformation selbst falsch ist)!

Die Konstanz von c zwingt uns also zu einer Modifikation des Brehmediagramms der Galileitransformation und zwar so, dass die WL eines Lichtsignals durch den Ursprung für beide Systeme die Winkelhalbierende zwischen Ortsachse und Zeitachse ist. Das ist aber nur durch die Einführung einer zweiten Ortsachse $A_{x'}$ möglich!! Da WL_{Licht} die Winkelhalbierende von A_x und A_{ct} sowie gleichzeitig von $A_{x'}$ und $A_{ct'}$ sein muss, gilt:

$$2\varphi' + \gamma = 2\varphi + \gamma \implies \varphi' = \varphi \quad (3.1.2)$$

$$\boxed{\sphericalangle(A_x; A_{x'}) = \sphericalangle(A_{ct}; A_{ct'}) = 2\varphi} \quad (3.1.3)$$

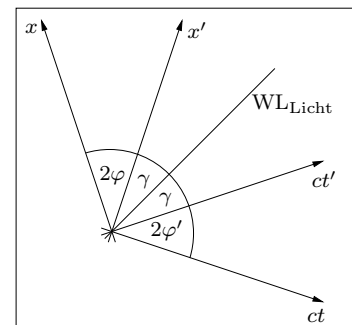


Abb.3.1.2 Neues Diagramm

Wir denken uns ein System S'', das vollkommen symmetrisch zu S und S' liegt. Sind x''_O und $x''_{O'}$ die Koordinaten von O und O' in S'', dann muss demnach

$$x''_O = -x''_{O'} \quad (3.1.4)$$

gelten. Differenzieren von (3.1.4) liefert:

$$v_{SS''} = -v_{S'S''} \quad (3.1.5)$$

Wegen $v_{O''S} = v_{S''S} = -v_{SS''}$ und $v_{O''S'} = v_{S''S'} = -v_{S'S''}$ folgt aus (3.1.5)

$$v_{O''S'} = -v_{O''S} \quad (3.1.6)$$

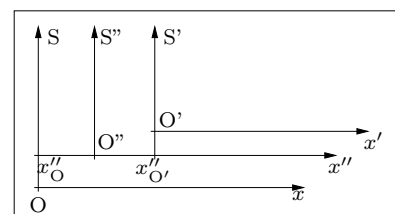


Abb.3.1.3

3 Relativistische Kinematik

Das Ereignis E: „O“ in S zur Zeit t am Ort x ($E(x|t)_S$) hat in S' die Koordinaten x' und t' ($E(x'|t')_{S'}$). Nach dem Relativitätsprinzip gilt in allen Inertialsystemen der gleiche Zusammenhang zwischen Weg, Zeit und Geschwindigkeit. Damit folgt aus (3.1.4) und (3.1.6):

$$v_{O''S} = \frac{x}{t} = -v_{O''S'} = -\frac{x'}{t'} = \frac{x}{t'} \implies t = t' \quad (3.1.7)$$

$$\left. \begin{array}{l} ct' = ct \\ |x'| = x \\ \overline{UE} = \overline{UE} \end{array} \right\} \implies \Delta UEA \cong \Delta UEA'$$

$$\implies \alpha = \beta \quad \text{und} \quad \gamma = \delta$$

$$(3.1.2) \implies \alpha + \beta = 2\varphi$$

$$\implies \alpha = \beta = \varphi \quad (3.1.8)$$

Abb. 3.1.4 entnimmt man:

$$\varphi + \gamma + \alpha + \beta + \delta + \varphi = 180^\circ$$

Mit (3.1.8) folgt daraus:

$$\varphi + \alpha + \gamma = 2\varphi + \gamma = 90^\circ \quad (3.1.9)$$

Abkürzungen:

$$\boxed{\begin{array}{l} W_x = \text{Winkelhalbierende von } A_x \text{ und } A_{x'} \\ W_{ct} = \text{Winkelhalbierende von } A_{ct} \text{ und } A_{ct'} \end{array}} \quad (3.1.10)$$

Aus (3.1.8) und (3.1.10) folgt $WL_{O''} = W_{ct}$ und damit aus (3.1.9):

$$\boxed{W_x \perp W_{ct} \quad ; \quad A_x \perp A_{ct'} \quad ; \quad A_{x'} \perp A_{ct}} \quad (3.1.11)$$

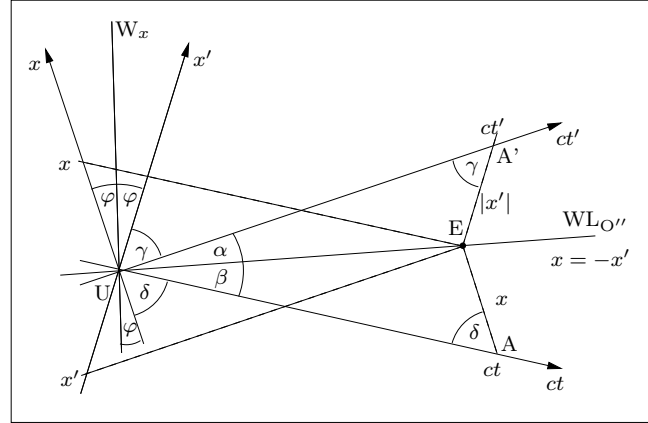


Abb.3.1.4

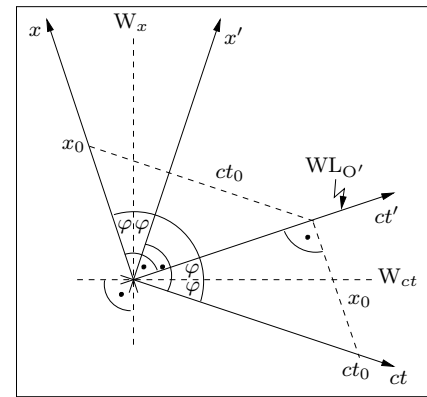


Abb.3.1.5

Abb. 3.1.5 entnimmt man:

$$v = v_{O'S} = v_{S'S} = \frac{x_0}{t_0} \quad ; \quad \frac{x_0}{ct_0} = \sin 2\varphi$$

$$\boxed{\begin{array}{l} v = c \cdot \sin 2\varphi \\ \beta = \frac{v}{c} = \sin 2\varphi \end{array}} \quad (3.1.12)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} WL_O = A_{ct} \\ WL_{O'} = A_{ct'} \end{array}} \quad (3.1.13)$$

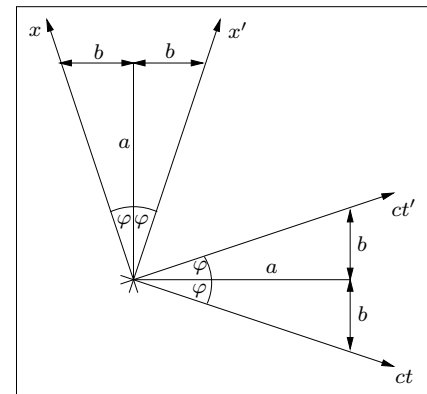


Abb.3.1.6

3 Relativistische Kinematik

Die Zeichnung des Brehmediagramms erfolgt aus Genauigkeitsgründen **nicht** mit dem Winkelmesser sondern über $b = a \tan \varphi$ mit einem möglichst großen a (Abb. 3.1.6):

$$(3.1.12) \implies \boxed{b = a \cdot \tan\left(\frac{\arcsin \beta}{2}\right)} \quad (3.1.14)$$

$\arcsin x$ ist die Umkehrfunktion von $\sin x$.

Beweise zur Übung:

$$\tan \varphi = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}} \quad (3.1.15)$$

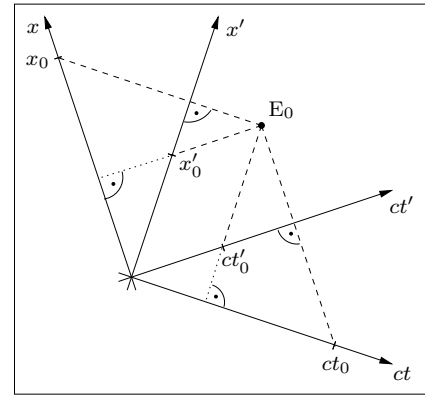


Abb.3.1.7 Brehmediagramm

Im Brehmediagramm steckt die gesamte spezielle Relativitätstheorie! Das Brehmediagramm ist das geometrische Modell der neuen Transformation zwischen S und S'. Die Koordinatenfindung im Brehmediagramm erfolgt parallel zu den Achsen des jeweiligen Systems (Abb. 3.1.7).

$$\boxed{\text{Im Brehmediagramm sind die Einheiten auf allen vier Achsen gleich!!}} \quad (3.1.16)$$

$$\boxed{\text{Eine Voraussetzung für die Verwendung des Brehmediagramms ist die Tatsache, dass sich die Ursprünge der beiden Systeme zur Zeit Null am selben Ort befinden!}} \quad (3.1.17)$$

(3.1.16) ist ein großer Vorteil gegenüber dem in der Literatur fast ausschließlich verwendeten **Minkowskidiagramm**. Im Minkowskidiagramm sind nämlich die Einheiten auf den Achsen **nicht** gleich! Ist e die Einheit auf den ungestrichenen Achsen (A_x bzw. A_{ct}), dann gilt für die Einheit auf den gestrichenen Achsen (ohne Beweis):

$$e' = e \cdot \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}} \quad (3.1.18)$$

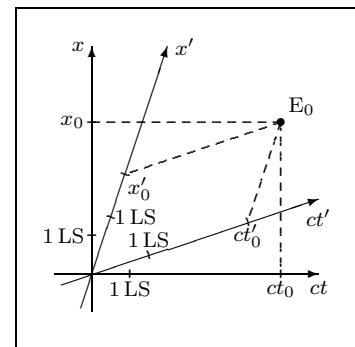


Abb.3.1.8 Minkowskidiagramm

Beispiel: $e = 1 \text{ cm} \hat{=} 1 \text{ LS}$ und $\beta = 0,6 \implies e' = e \cdot \sqrt{\frac{17}{8}} \approx 1,458 \text{ cm}$. Misst man im Diagramm für eine Koordinatendifferenz $\Delta x'$ z.B. 6 cm, dann ist in Wirklichkeit $\Delta x' = \frac{6 \text{ cm}}{e'} \approx 4,1 \text{ LS}$. Misst man dagegen für Δx 5 cm, dann ist auch $\Delta x = 5 \text{ LS}$.

$$5 \text{ cm} < 6 \text{ cm}, \text{ aber } 5 \text{ LS} > 4,1 \text{ LS}!!$$

Die im Beispiel gezeigten Schwierigkeiten mit dem Minkowskidiagramm treten bei Verwendung des Brehmediagramms nicht auf (z.B. sind Abituraufgaben mit dem Brehmediagramm einfacher!). Die innere Symmetrie des Brehmediagramms entspricht auch besser der tatsächlichen Gleichberechtigung der beiden Systeme S und S' (Relativitätsprinzip!)

ROBERT W. BREHME, Professor an der Wake Forest University (USA), veröffentlichte sein Diagramm, das er selbst **Lorentz-Diagramm** nennt, zuerst im **American Journal of Physics** 30/7 S.489, 1962 unter dem Titel **A Geometric Representation of Galilean and Lorentz Transformations**. Das Brehmediagramm findet man auch in dem Lehrbuch von R.W.BREHME

und F.W. SEARS: **Introduction to the Theory of Relativity, Addison-Wesley Publishing Company, 1968.**

Brehme verwendet eine von unserem Diagramm etwas abweichende Darstellung: die Koordinatenfindung geschieht durch Projektion **senkrecht** auf die Achsen! Brehme's Darstellung entspricht sogenannten **kovarianten**, unsere Darstellung **kontravarianten** Koordinaten. Beide Darstellungen sind einander äquivalent.

Eine Einführung in die spezielle Relativitätstheorie, die verschiedene Raum-Zeit-Diagramme, unter anderem auch das Brehmediagramm behandelt, ist ALBERT SHADOWITZ: **Special Relativity, Dover, 1968.**

Erste Konsequenz aus dem Brehmediagramm:

Wir betrachten zwei Ereignisse E_1 und E_2 , die in S gleichzeitig stattfinden. Abb. 3.1.9 entnimmt man, dass diese Ereignisse in S' **nicht** mehr gleichzeitig sind!!

Nicht nur der Ort, sondern auch die Zeit ist vom Bezugssystem abhängig!!

(3.1.19)

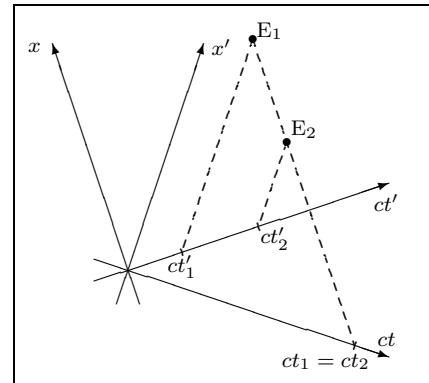


Abb.3.1.9

Zwei Körper gleicher Geschwindigkeit haben im Brehmediagramm (BD) parallele Weltlinien! Die Weltlinien von Lichtsignalen schließen mit den Winkelhalbierenden W_x und W_{ct} einen 45° -Winkel ein!

(3.1.20)

3.2 Die Zeitdilatation

Eine Uhr U' (ruhend in S') bewegt sich mit der Geschwindigkeit v an **zwei in S ruhenden Uhren U_1 und U_2** vorbei. Abb. 3.2.1 entnimmt man

$$c \cdot \Delta t' = c \cdot \Delta t \cdot \cos 2\varphi \tag{3.2.1}$$

Aus

$$\sin 2\varphi = \beta \tag{3.2.2}$$

folgt

$$\cos 2\varphi = \sqrt{1 - \beta^2} \tag{3.2.3}$$

und damit aus (3.2.1)

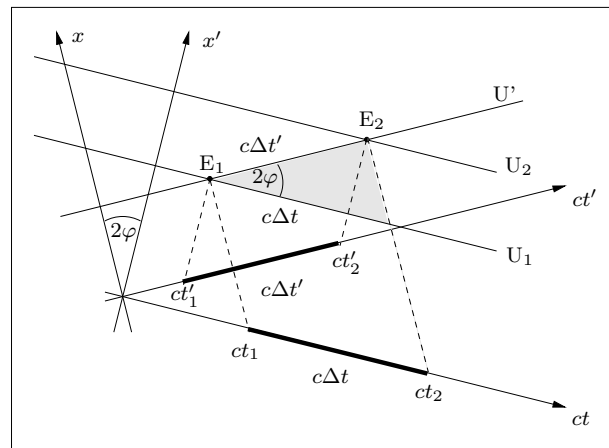


Abb.3.2.1 Zeitdilatation

$$\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \tag{3.2.4}$$

(Zeitdilatation)

3 Relativistische Kinematik

Bewegt sich **eine** Uhr U' mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ relativ zum Inertialsystem S , dann geht U' gegen die in S ruhenden Uhren um den Faktor $\sqrt{1 - \beta^2}$ langsamer.

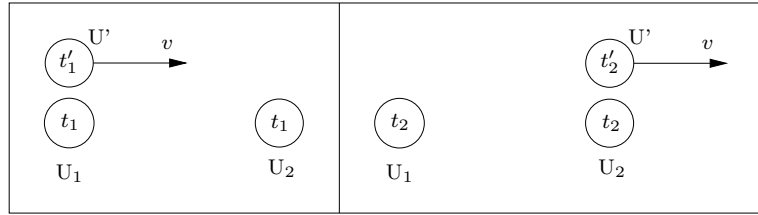


Abb.3.2.2 $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta t' = t_2' - t_1'$

Beispiel: $v = 0,6c \implies \Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - 0,6^2} = \underline{\underline{0,8 \cdot \Delta t}}$

Für $v \ll c$, d.h. für $\beta \ll 1$ erhält man folgende Näherungsformeln (lineare Näherung):

$$\sqrt{1 - \beta^2} \approx 1 - \frac{\beta^2}{2}, \quad \frac{1}{1 - \beta^2} \approx 1 + \beta^2, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx 1 + \frac{\beta^2}{2} \quad (3.2.5)$$

Ist β fast 1, d.h. für $\beta = 1 - \alpha$ mit $\alpha \ll 1$ erhält man

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{(1 - \beta)(1 + \beta)} \approx \sqrt{2(1 - \beta)} = \sqrt{2\alpha} \quad (3.2.6)$$

Beispiel:

β	α	$\sqrt{2\alpha}$	$\sqrt{1 - \beta^2}$ mit TR
0,9999	0,0001	0,0141421	0,0141417
$1 - 10^{-12}$	10^{-12}	$1,41 \cdot 10^{-6}$	0

Als Beispiel für eine Bewegung mit kleiner Geschwindigkeit betrachten wir ein Auto, das vom System der Straße aus gesehen eine Stunde lang ($\Delta t = 1\text{h}$) mit der Geschwindigkeit $v = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ fährt. Eine Atomuhr **im** Auto misst die Fahrzeit $\Delta t'$:

$$\beta = 10^{-7} \implies \sqrt{1 - \beta^2} \approx 1 - \frac{10^{-14}}{2}$$

Die Autouhr geht um

$$\tau = \Delta t - \Delta t' \approx \Delta t - \Delta t \cdot \left(1 - \frac{10^{-14}}{2}\right) = \frac{\Delta t}{2} \cdot 10^{-14} = \underline{\underline{1,8 \cdot 10^{-11} \text{s}}}$$

nach.

3.3 Eigenzeit und Zwillingsparadoxon

Eine Uhr U bewegt sich mit **beliebiger** (d.h. nicht notwendig konstanter) Geschwindigkeit v relativ zu einem **Inertialsystem** S . Die Zeit τ , die von U angezeigt wird, nennt man die **Eigenzeit** von U . t ist die Zeit in S am jeweiligen Ort von U .

In kleinen Zeitintervallen der Länge dt ist v annähernd konstant und es gilt

$$d\tau = dt \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \quad (3.3.1)$$

oder integriert

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \beta(t)^2} dt \quad (3.3.2)$$

Die Zeitdifferenz in S ist einfach

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad (3.3.3)$$

3 Relativistische Kinematik

Wegen

$$\sqrt{1 - \beta(t)^2} \leq 1 \quad (3.3.4)$$

ist

$$\Delta\tau \leq \int_{t_1}^{t_2} 1 dt = t_2 - t_1 = \Delta t \quad (3.3.5)$$

Bewegt sich eine Uhr U in einem Inertialsystem S und sind $E_1(x_1|t_1)_S$ und $E_2(x_2|t_2)_S$ zwei beliebige Ereignisse auf der Weltlinie von U , dann gilt für die Eigenzeit τ der Uhr

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 \leq \Delta t = t_2 - t_1$$

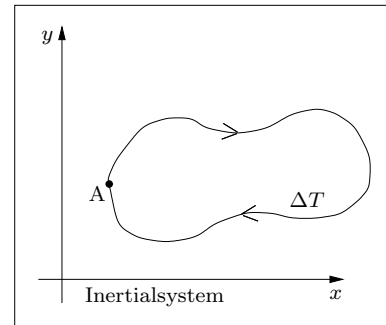


Abb.3.3.1

A sei ein fester Punkt in einem Inertialsystem. Für eine Rundreise von A nach A ist in irgend einem Zeitintervall $\beta \neq 0$ und aus (3.3.2) folgt dann $\Delta\tau < \Delta t$. Somit gilt auch

in der Relativitätstheorie der Grundsatz „Bewegung hält jung!“, zumindest wenn man sich mit sehr großen Geschwindigkeiten bewegt.

Der Zusammenhang $\Delta\tau < \Delta t$ wird in der Literatur oft als „Zwillingsparadoxon“ bezeichnet (Genaueres in den Aufgaben).

Als Beispiel betrachten wir eine gleichförmige Kreisbewegung mit dem Radius r und der Winkelgeschwindigkeit ω in einem Inertialsystem. Aus

$$v = \frac{2r\pi}{T} = \omega r = \text{konst.} \quad (3.3.6)$$

folgt mit $\Delta t = T$

$$\Delta\tau = \int_0^T \sqrt{1 - \beta^2} dt = T \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} \quad (3.3.7)$$

Speziell für die Bewegung der Erde um die Sonne gilt $v \approx 30 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ und damit

$$\Delta\tau = T \cdot \sqrt{1 - 10^{-8}} \approx T \cdot (1 - 5 \cdot 10^{-9})$$

Der Unterschied der im Inertialsystem gemessenen Umlaufdauer T und dem im Erdsystem gemessenen Jahr $\Delta\tau$ ist

$$\delta = T - \Delta\tau = 1 \text{ a} \cdot 5 \cdot 10^{-9} = \underline{\underline{0,158 \text{ s}}}$$

3.4 Die Lorentzkontraktion

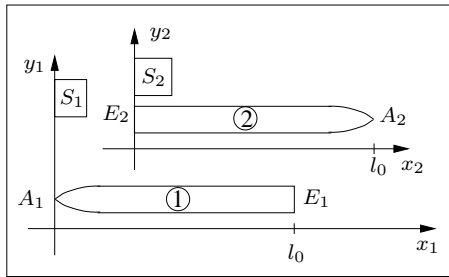


Abb.3.4.1 Zwei Raketen

Zwei Raketen haben in ihrem jeweiligen Ruhssystem die Länge l_0 . Die Länge l_1 von ② in S_1 erhält man durch **gleichzeitiges** Messen

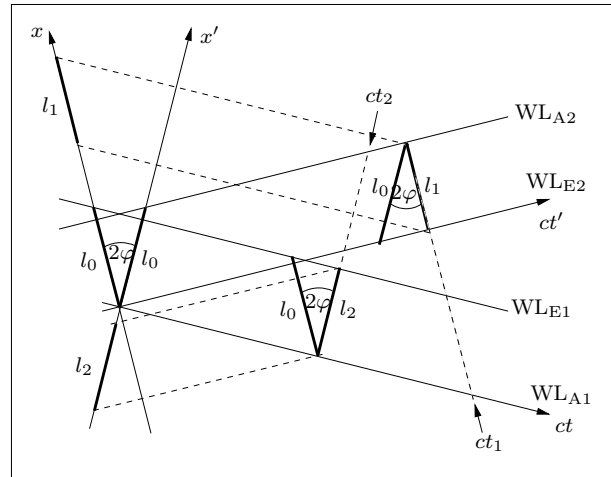


Abb.3.4.2 Lorentzkontraktion

der Koordinaten von A_2 und E_2 in S_1 . Analog erhält man die Länge l_2 von ① in S_2 durch **gleichzeitiges** Messen der Koordinaten von A_1 und E_1 in S_2 . Abb. 3.4.2 entnimmt man

$$l_1 = l_2 = l_0 \cos 2\varphi = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (3.4.1)$$

Bewegt sich ein Körper K der „Eigenlänge“ l_0 mit der Geschwindigkeit v relativ zu einem Inertialsystem S, dann hat K in S die Länge

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (3.4.2)$$

wenn parallel zu \vec{v} gemessen wird.

Ist \vec{v} parallel zur x -Achse, dann ist $v_y = 0$ und es gilt

$$l_y = l_{y0} \sqrt{1 - \frac{v_y^2}{c^2}} = l_0 \quad (3.4.3)$$

Senkrecht zur Bewegungsrichtung tritt keine Kontraktion auf! (3.4.4)

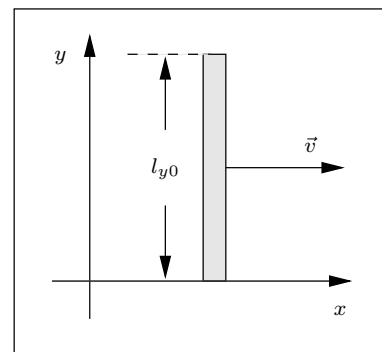


Abb.3.4.3

3.5 Der Dopplereffekt

Ein Sender S sendet im zeitlichen Abstand Δt_s (gemessen in seinem Ruhssystem) Lichtsignale zu einem Empfänger E, der sich mit der Geschwindigkeit v relativ zu S bewegt. Im Empfängersystem treffen die Lichtsignale im zeitlichen Abstand Δt_e bei E ein. Gleichung der Weltlinie von Signal ② in S:

$$\frac{x-0}{t-\Delta t_s} = c \implies \textcircled{2}: x = ct - c \cdot \Delta t_s \quad (3.5.1)$$

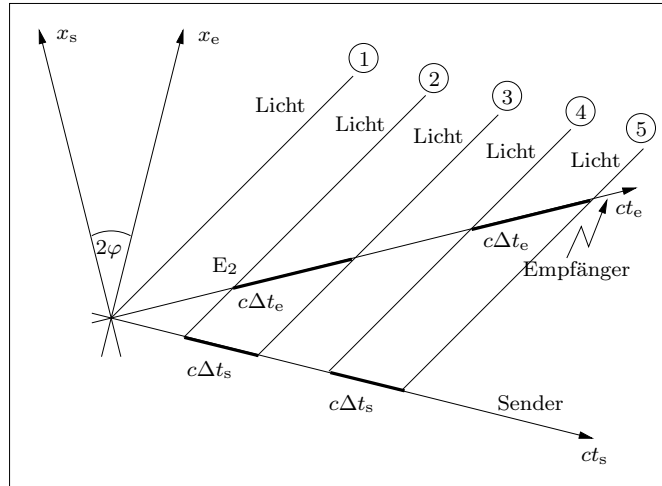


Abb.3.5.1 Mehrere Lichtsignale

Die Gleichung des Empfängers lautet

$$E: x = vt \quad (3.5.2)$$

Das Ereignis $E_2 = \textcircled{2}$ trifft E ist der Schnittpunkt der Weltlinien von E und ②:

$$ct - c \cdot \Delta t_s = vt \quad (3.5.3)$$

oder nach Division durch c

$$t - \Delta t_s = \beta t \quad (3.5.4)$$

Auflösen nach t ergibt für die S-Koordinate von E_2

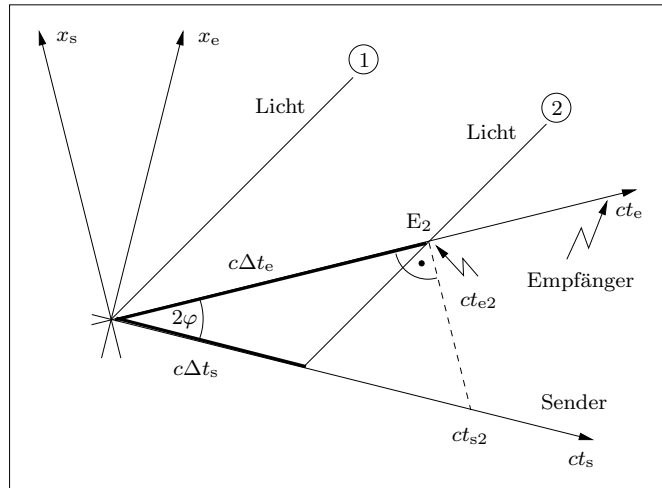


Abb.3.5.2 Entfernung von S und E

$$t = t_{s2} = \frac{\Delta t_s}{1 - \beta} \quad (3.5.5)$$

Abb. 3.5.2 entnimmt man für die E-Koordinate von E_2

$$\Delta t_e = t_{e2} = t_{s2} \cdot \cos 2\varphi = t_{s2} \sqrt{1 - \beta^2} = \Delta t_s \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} = \Delta t_s \cdot \sqrt{\frac{(1 - \beta)(1 + \beta)}{(1 - \beta)^2}} \quad (3.5.6)$$

oder endgültig für den Fall, dass sich S und E **voneinander entfernen**:

$$\Delta t_e = \Delta t_s \cdot \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (3.5.7)$$

3 Relativistische Kinematik

Ein Vergleich von Abb. 3.5.2 und Abb. 3.5.3 zeigt für die Annäherung von Sender und Empfänger

$$\Delta t_s = \Delta t_e \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad (3.5.8)$$

und damit

$$\Delta t_e = \Delta t_s \cdot \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (3.5.9)$$

Die Zusammenfassung von (3.5.7) und (3.5.9) liefert

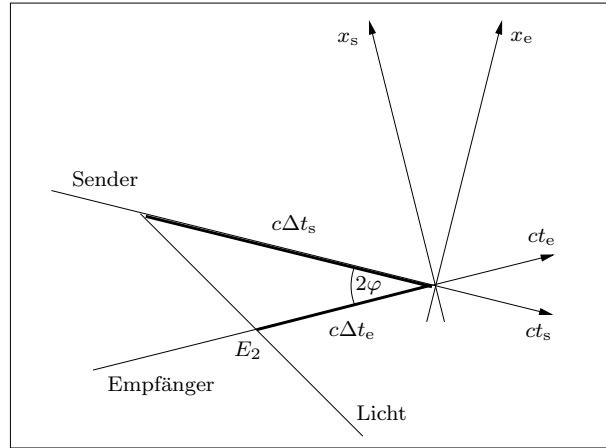


Abb.3.5.3 Annäherung von S und E

$$\Delta t_e = \Delta t_s \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \beta > 0 & \text{für Entfernung} \\ \beta < 0 & \text{für Annäherung} \end{cases} \quad (3.5.10)$$

((Dopplerformel))

Der Faktor

$$k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad (3.5.11)$$

heißt **Dopplerfaktor**.

$$\begin{cases} k > 1 & \text{für Entfernung} \\ k < 1 & \text{für Annäherung} \end{cases} \quad (3.5.12)$$

Die Auflösung von (3.5.11) nach β ergibt

$$\beta = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \quad (3.5.13)$$

Für die Frequenzen und Wellenlängen einer Welle, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet (elektromagnetische Welle oder Gravitationswelle) folgt aus der Dopplerformel mit $f = \frac{1}{\Delta t}$ und $\lambda = \frac{c}{f}$:

$$f_e = \frac{f_s}{k} = f_s \cdot \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (3.5.14)$$

und

$$\lambda_e = k \cdot \lambda_s = \lambda_s \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad (3.5.15)$$

Entfernung: $k > 1 \implies f_e < f_s$ und $\lambda_e > \lambda_s \implies$ Rotverschiebung!
Annäherung: $k < 1 \implies f_e > f_s$ und $\lambda_e < \lambda_s \implies$ Blauverschiebung!

Ein Sender S schickt eine Welle (Wellenlänge λ im System von S) auf einen Körper K, der sich mit der Geschwindigkeit v relativ zu S bewegt ($v > 0$ für Entfernung). Im System von K trifft die Welle mit $\bar{\lambda} = k \cdot \lambda$ ein und wird auch mit dieser Wellenlänge reflektiert.

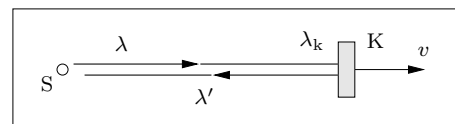


Abb.3.5.4 Reflexion

3 Relativistische Kinematik

Für die reflektierte Welle ist K der Sender und S bewegt sich mit v relativ zu K. Im System von S hat die reflektierte Welle dann die Wellenlänge $\lambda' = k \cdot \bar{\lambda}$, d.h.

$$\boxed{\lambda' = k^2 \cdot \lambda \quad \text{und} \quad f' = \frac{f}{k^2}} \quad (3.5.16)$$

((für Reflexion))

Die wichtigsten Anwendungen des Dopplereffektes sind Geschwindigkeitsmessungen in der Astronomie. So können nicht nur die Relativgeschwindigkeiten von Himmelskörpern zur Erde gemessen werden, sondern sogar deren Rotationsgeschwindigkeiten. Die Wellenlängenmessungen sind so genau, dass sogar feinste Geschwindigkeitsschwankungen von Sternen festgestellt werden können, die auf das Vorhandensein von Planeten um diese Sterne schließen lassen. Mit der wohl bekanntesten astronomischen Geschwindigkeitsmessung gelang 1929 EDWIN P. HUBBLE die Entdeckung der Ausdehnung des Weltalls durch die Rotverschiebung des Lichtes ferner Galaxien (siehe Astronomieskriptum).

Eine weitere, für Autofahrer unangenehme Anwendung des Dopplereffektes ist die Geschwindigkeitsmessung mit Radarstrahlen, die am fahrenden Auto reflektiert werden (siehe Aufgaben).

Wir betrachten noch die Näherung des Dopplerfaktors für kleine Geschwindigkeiten:

$$k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \sqrt{\frac{1-\beta^2}{(1-\beta)^2}} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} \quad (3.5.17)$$

Mit den linearen Näherungen

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1-x} \approx 1 + x \quad \text{für} \quad |x| \ll 1 \quad (3.5.18)$$

folgt aus (3.5.17)

$$k \approx \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) (1 + \beta) = 1 + \beta - \frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta^3}{2} \approx 1 + \beta \quad (3.5.19)$$

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \approx 1 + \beta \quad \text{für} \quad |\beta| \ll 1} \quad (3.5.20)$$

Beispiel:

$\beta = 0,001$:	Rechner	:	$k = 1,001\,000\,5$;	Näherung	:	$k = 1,001$
$\beta = 10^{-6}$:	Rechner	:	$k = 1,000\,001$;	Näherung	:	$k = 1,000\,001$
$\beta = 10^{-12}$:	Rechner	:	$k = 1$;	Näherung	:	$k = 1 + 10^{-12}$

Im dritten Fall ist die Näherung besser als der Taschenrechnerwert!

3.6 Die Lorentztransformation

Ein Inertialsystem S' bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit \vec{v} ($v = |\vec{v}|$, $\vec{v} \parallel x$ -Achse) relativ zu einem Inertialsystem S , die Ursprünge O und O' der beiden Systeme fallen zur Zeit $t = t' = 0$ zusammen. Wir suchen eine Transformationsformel zwischen den Koordinaten $(x|t)$ und $(x'|t')$ eines Ereignisses E . Abb. 3.6.1 entnimmt man

$$\overline{UA} = ct' \cdot \cos 2\varphi \quad (3.6.1)$$

$$\overline{AB} = ct' \cdot \sin 2\varphi \quad (3.6.2)$$

$$\overline{BE} = x' \text{ und } \overline{CE} = x \quad (3.6.3)$$

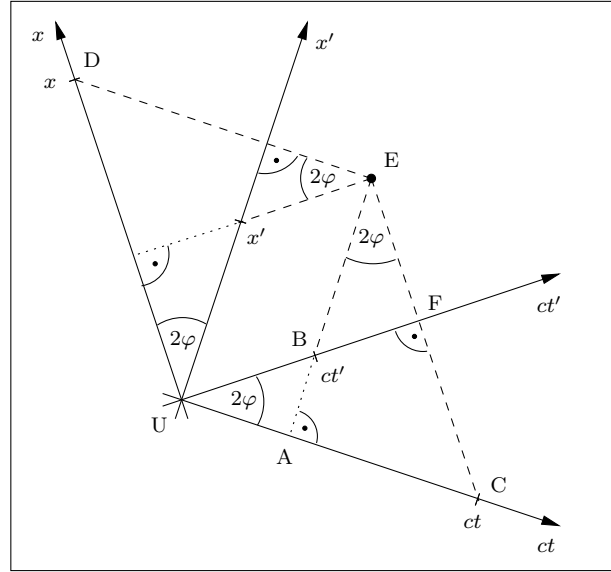


Abb.3.6.1 Herleitung der Lorentztransformation

Daraus folgt mit

$$\sin 2\varphi = \beta \quad \text{und} \quad \cos 2\varphi = \sqrt{1 - \beta^2} \quad (3.6.4)$$

$$ct = \overline{UC} = \frac{\overline{UF}}{\cos 2\varphi} = \frac{ct' + \overline{BE} \sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.6.5)$$

Nach Division durch c erhält man

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.6.6)$$

$$x = \overline{CE} = \frac{\overline{AE}}{\cos 2\varphi} = \frac{x' + ct' \sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.6.7)$$

$$ct' = \overline{UB} = \frac{\overline{UA}}{\cos 2\varphi} = \frac{ct - \overline{CE} \sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.6.8)$$

Nach Division durch c erhält man

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.6.9)$$

$$x' = \overline{BE} = \frac{\overline{FE}}{\cos 2\varphi} = \frac{x - ct \sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.6.10)$$

Zusammenfassend erhält man:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} & ; & \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} & ; & \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y &= y' & ; & \quad z = z' \end{aligned}} \quad (3.6.11)$$

(Lorentztransformation)

3 Relativistische Kinematik

Mit der Abkürzung

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.6.12)$$

lautet die Lorentztransformation in einer zwischen x und ct symmetrischen Darstellung:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma \cdot (x - \beta ct) & ; & & ct' &= \gamma \cdot (ct - \beta x) \\ x &= \gamma \cdot (x' + \beta ct') & ; & & ct &= \gamma \cdot (ct' + \beta x') \end{aligned}} \quad (3.6.13)$$

Wir betrachten die beiden Ereignisse $E_1(x_1|t_1)$ und $E_2(x_2|t_2)$. Für die Koordinatendifferenzen $\Delta x = x_2 - x_1$ und $\Delta t = t_2 - t_1$ gilt in S' :

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - \beta ct_2) - \gamma(x_1 - \beta ct_1) = \gamma[(x_2 - x_1) - \beta c(t_2 - t_1)] \quad (3.6.14)$$

$$c\Delta t' = ct_2' - ct_1' = \gamma(ct_2 - \beta x_2) - \gamma(ct_1 - \beta x_1) = \gamma[(ct_2 - ct_1) - \beta(x_2 - x_1)] \quad (3.6.15)$$

oder zusammengefaßt

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma \cdot (\Delta x - \beta c\Delta t) & ; & & c\Delta t' &= \gamma \cdot (c\Delta t - \beta \Delta x) \\ \Delta x &= \gamma \cdot (\Delta x' + \beta c\Delta t') & ; & & c\Delta t &= \gamma \cdot (c\Delta t' + \beta \Delta x') \end{aligned}} \quad (3.6.16)$$

Die Lorentztransformation gilt also auch für Koordinatendifferenzen!

3.7 Das Additionstheorem für Geschwindigkeiten

Ein Inertialsystem S' bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v parallel zur x -Achse relativ zu einem Inertialsystem S . Relativ zu S' bewegt sich ein Körper K mit der zunächst als **konstant** angenommenen Geschwindigkeit u' . Für die Geschwindigkeit u von K in S erhält man aus (3.6.16) und mit

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \quad (3.7.1)$$

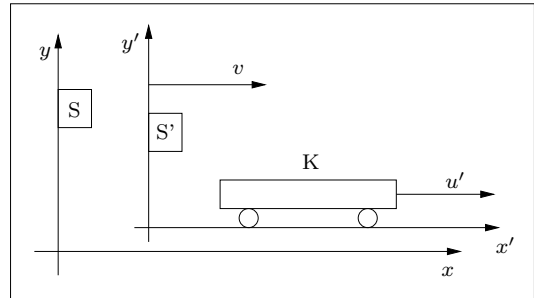


Abb.3.7.1 Geschwindigkeitsaddition

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\gamma(\Delta x' + v \Delta t')}{\gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x')} = \frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{\Delta x'}{\Delta t'}} = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \quad (3.7.2)$$

$$\boxed{u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}} \quad (3.7.3)$$

Auflösen nach u' ergibt

$$\boxed{u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}} \quad (3.7.4)$$

Ist u' nicht konstant, dann muss man von den Differenzenquotienten zu den Differentialquotienten übergehen. Mit der Kettenregel folgt

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt} = \frac{d}{dt'} (\gamma(x' + vt')) \cdot \frac{dt'}{dt} = \gamma(u' + v) \frac{dt'}{dt} \quad (3.7.5)$$

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{d}{dt'} \left(\gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \right) = \gamma \left(1 + \frac{v u'}{c^2} \right) \quad (3.7.6)$$

3 Relativistische Kinematik

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dt'}} = \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{v u'}{c^2}\right)} \quad (3.7.7)$$

Aus (3.7.5) und (3.7.7) folgt

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v u'}{c^2}} \quad (3.7.8)$$

wie in (3.7.3).

Allgemein lautet die **Einstein-Addition** für Geschwindigkeiten

$$v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (3.7.9)$$

Beispiele:

$$v \oplus c = \frac{v + c}{1 + \frac{v c}{c^2}} = c$$

$$c \oplus c = \frac{c + c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = c$$

Wir dehnen unser bisheriges Ergebnis auf zwei Dimensionen aus:

Ein Körper K bewegt sich relativ zu S' mit der Geschwindigkeit

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \end{pmatrix}, \quad (3.7.10)$$

S' bewegt sich relativ zu S mit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.7.11)$$

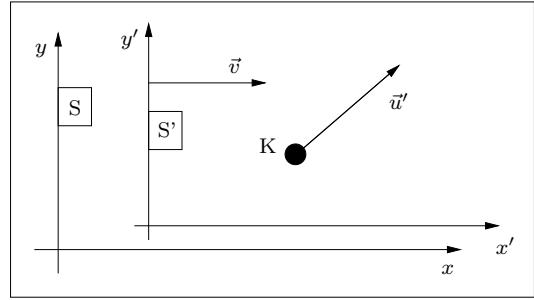


Abb.3.7.2 Zweidimensionale Bewegung

Wir betrachten die beiden Ereignisse $E_1(x_1|y_1|t_1)$ und $E_2(x_2|y_2|t_2)$ auf der Weltlinie von K. Für die Koordinatendifferenzen liefert die Lorentztransformation

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + v \Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.7.12)$$

$$\Delta y = \Delta y' \quad (3.7.13)$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.7.14)$$

Für die x -Koordinate von \vec{u} in S erhält man (wie in (3.7.3))

$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}} \quad (3.7.15)$$

Für die y -Koordinate von \vec{u} gilt

$$u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{\Delta t} = \frac{\Delta y' \sqrt{1 - \beta^2}}{\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x'} = \frac{u'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}} \quad (3.7.16)$$

oder zusammengefaßt

$$\vec{u} = \frac{1}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}} \cdot \begin{pmatrix} u'_x + v \\ u'_y \sqrt{1 - \beta^2} \end{pmatrix} \quad (3.7.17)$$

3.8 Die Transformation der Beschleunigung

Ein Inertialsystem S' bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v parallel zur x -Achse relativ zu einem Inertialsystem S . Relativ zu S' bewegt sich ein Körper K mit der Geschwindigkeit u' , auch parallel zu den x -Achsen. a und a' seien die x -Komponenten der Beschleunigung des Körpers K in S bzw. S' .

$$a' = \frac{du'}{dt'} = \frac{du'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{d}{dt} \left(\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}} \right) \cdot \frac{dt}{dt'} = a \cdot \frac{1-\beta^2}{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^2} \cdot \frac{dt}{dt'} \quad (3.8.1)$$

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{1 - \frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \implies \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad (3.8.2)$$

Aus (3.8.1) und (3.8.2) folgt

$$a' = a \cdot \frac{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^3} \quad (3.8.3)$$

Da sich S mit $-v$ relativ zu S' bewegt, erhält man die Umkehrformel aus (3.8.3) durch Austausch der gestrichenen mit den ungestrichenen Größen und Ersetzen von v durch $-v$ (Relativitätsprinzip!):

$$a = a' \cdot \frac{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^3} \quad (3.8.4)$$

Genauso hätte man auch die Umkehrformeln der Lorentztransformation und des Additionstheorems finden können, unsere direkte Herleitung ist aber eine weitere Bestätigung des Relativitätsprinzips.

Für eine Bewegung mit konstantem a in S gilt $u = u_0 + a \cdot t$. Aus (3.8.3) folgt dann, dass a' **nicht** konstant ist:

$$a' = a \cdot \frac{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \frac{(u_0+at)v}{c^2}\right)^3} \quad (3.8.5)$$

Ein Bezugssystem, in dem ein beschleunigter Körper K ruht, ist kein Inertialsystem. Zu jeder Zeit t gibt es aber ein Inertialsystem \bar{S} , in dem die Geschwindigkeit \bar{u} von K gleich Null ist, das sogenannte „momentane Ruhssystem“ von K . Die Beschleunigung \bar{a} von K im jeweiligen momentanen Ruhssystem nennt man die **Eigenbeschleunigung** von K . Eine Rakete mit konstanter Schubkraft zum Beispiel hat eine konstante Eigenbeschleunigung. Die Geschwindigkeit \bar{v} des momentanen Ruhsystems \bar{S} relativ zu einem Inertialsystem S ist gleich der Geschwindigkeit u von K relativ zu S . Mit

$$\bar{u} = 0 \text{ und } \bar{v} = u \quad (3.8.6)$$

folgt dann aus (3.8.4) ($u' \hat{=} \bar{u}$)

$$a = \bar{a} \cdot \frac{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 + \frac{0 \cdot v}{c^2}\right)^3} = \bar{a} \cdot (1-\beta^2)^{\frac{3}{2}} \quad (3.8.7)$$

Ein Körper K mit der Eigenbeschleunigung \bar{a} und der Geschwindigkeit u relativ zu S hat in S die Beschleunigung

$$a = \bar{a} \cdot \left(1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.8.8)$$

3 Relativistische Kinematik

Die Bewegungsgleichung für K bei bekanntem $\bar{a}(t)$ lautet wegen $a = \frac{du}{dt}$

$$\frac{du}{dt} = \bar{a}(t) \cdot \left(1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.8.9)$$

mit der Lösung

$$\int \frac{du}{\left(1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \bar{a}(t) dt \quad (3.8.10)$$

Das Integral der linken Seite ist elementar berechenbar (Beweis!):

$$\frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \int \bar{a}(t) dt =: f(t) \quad (3.8.11)$$

Auflösen nach u ergibt

$$u(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{1 + \frac{f(t)^2}{c^2}}} \quad (3.8.12)$$

Für eine Rakete mit konstanter Eigenbeschleunigung \bar{a} ist $f(t) = \bar{a} \cdot t + C$ und die Lösung lautet

$$u(t) = \frac{\bar{a}t + C}{\sqrt{1 + \frac{(\bar{a}t + C)^2}{c^2}}} \quad (3.8.13)$$

Die Integrationskonstante bestimmen wir für den Fall $u(0) = 0$ aus

$$u(0) = \frac{\bar{a} \cdot 0 + C}{\sqrt{1 + \frac{(\bar{a} \cdot 0 + C)^2}{c^2}}} = \frac{C}{\sqrt{1 + \frac{C^2}{c^2}}} = 0 \quad (3.8.14)$$

zu $C = 0$, d.h.

$$u(t) = \frac{\bar{a}t}{\sqrt{1 + \frac{\bar{a}^2 t^2}{c^2}}} \quad (3.8.15)$$

3.9 Das Linienelement

$E_1(x_1|t_1)$ und $E_2(x_2|t_2)$ sind zwei beliebige Ereignisse. Abb.3.9.1 entnimmt man mit $L = \overline{AB}$ und dem Pythagoras für die Koordinatendifferenzen $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta x' = x'_2 - x'_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$ und $\Delta t' = t'_2 - t'_1$

$$L^2 = c^2 \Delta t^2 + (\Delta x)^2 = c^2 (\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 \quad (3.9.1)$$

und damit nach Umstellung

$$\boxed{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2} \quad (3.9.2)$$

Die Größe

$$\boxed{\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2}} \quad (3.9.3)$$

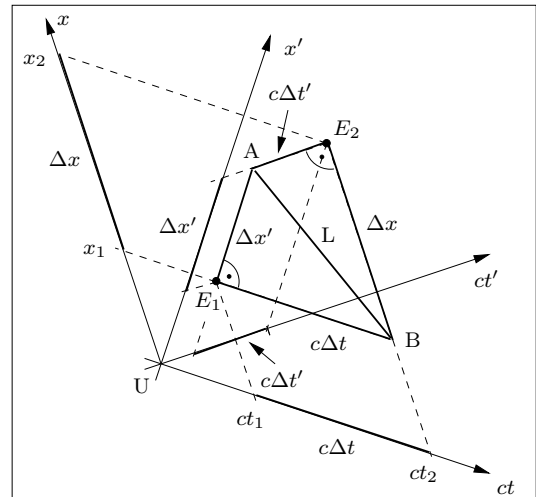


Abb.3.9.1 Linienelement

3 Relativistische Kinematik

das sogenannte **Linienelement**, ist somit eine Invariante unter der Lorentztransformation, d.h. Δs hat in allen Inertialsystemen den gleichen Wert. Ist die Gerade durch E_1 und E_2 die Weltlinie eines Körpers K , dann ist die Geschwindigkeit u von K im System S

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.9.4)$$

Für $|u| < c$ ist $\Delta x^2 = u^2 \Delta t^2 < c^2 \Delta t^2$, d.h. $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 > 0$ und Δs ist reell.

Die Eigenzeit $\Delta\tau$, in der sich K von x_1 nach x_2 bewegt, ist nach der Zeitdilatationsformel

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{\Delta x^2}{c^2 \Delta t^2}} = \sqrt{\Delta t^2 - \frac{\Delta x^2}{c^2}} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2} \quad (3.9.5)$$

Aus (3.9.3) und (3.9.5) folgt

$$\boxed{\Delta\tau = \frac{\Delta s}{c}} \quad (3.9.6)$$

Ist $|u| = c$, dann ist $\Delta\tau = \Delta s = 0$. Würde man mit Lichtgeschwindigkeit reisen, dann käme man in der Eigenzeit Null, d.h. praktisch augenblicklich, an jeden Ort des Universums. Wie wir später sehen werden, kann man aber keinen Körper mit einer Masse $m > 0$ auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigen.

Für $|u| > c$ ist $\Delta s^2 < 0$, d.h. Δs ist imaginär. Das ist ein Hinweis darauf, dass es in der Realität keine Überlichtgeschwindigkeiten gibt.

4 Relativistische Dynamik

4.1 Der relativistische Impuls

In Abb.4.1.1 ist das Zustandekommen von zwei Strömen mit identischen Teilchen (z.B. Elektronen) dargestellt. In der Zeit Δt treten

$$n = \frac{v \cdot \Delta t}{d} \quad (4.1.1)$$

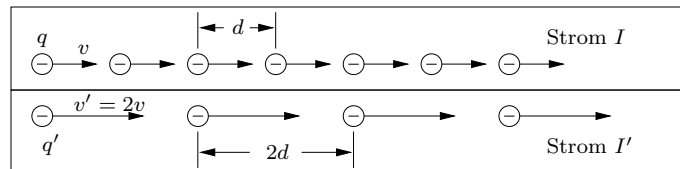


Abb.4.1.1 Ströme

Ladungen durch den Leiterquerschnitt. Damit ist die Stromstärke

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{n \cdot q}{\Delta t} = \frac{v \cdot \Delta t \cdot q}{d \cdot \Delta t} = \frac{v q}{d} \quad (4.1.2)$$

Analog erhält man

$$I' = \frac{v' q'}{d'} = \frac{2 v q'}{2 d} = \frac{v q'}{d} \quad (4.1.3)$$

Experimentell erhält man, dass das Magnetfeld der beiden Ströme gleich ist und damit auch $I = I'$ gilt:

$$I = \frac{v q}{d} = \frac{v q'}{d} = I' \quad (4.1.4)$$

Daraus folgt $q = q'$, d.h. **die Ladung ist geschwindigkeitsunabhängig!**

In der Praxis wird man mit einem Beschleuniger einen Strahl von Elektronen erzeugen und die Zahl n der Elektronen mit einem Zähler bestimmen. Nach Veränderung der Beschleunigungsspannung reguliert man n wieder auf den alten Wert ein und man hat für verschiedene Geschwindigkeiten das gleiche $\frac{q}{d}$.

Für nichtrelativistische Teilchen ($v \ll c$) auf einer Kreisbahn (Radius r) ist der Impuls $p = mv$ und die Zentripetalkraft

$$F_z = \frac{mv^2}{r} = \frac{p^2}{mr} \quad (4.1.5)$$

Versuche mit schnellen geladenen Teilchen (Massenspektrometer) ergeben, dass die Zentripetalkraft und damit auch der Impuls **geschwindigkeitsabhängige** Größen sind.

An die Impulsdefinition in der Relativitätstheorie stellt man zwei Forderungen:

① : **Impulserhaltung:** $\sum_{\nu} \vec{p}_{\nu} = \text{konst.}$

② : $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{p(v)}{mv} = 1$ (klassischer Impuls für kleines v)

In Anlehnung an die newtonsche Impulsdefinition $\vec{p} = m\vec{v}$ versuchen wir es mit der Definition

$$\vec{p} = f(\vec{v}) \cdot m \cdot \vec{v}, \quad (4.1.6)$$

wobei m die im Ruhssystem des Körpers gemessene Masse ist. In der älteren Literatur wurde m auch „**Ruhmasse**“ genannt. Die Masse m ist also per Definition eine vom Bezugssystem

4 Relativistische Dynamik

unabhängige Größe (eine sogenannte **Invariante**). Die Funktion f in (4.1.6) kann wegen der Isotropie des Raumes (es gibt keine ausgezeichnete Raumrichtung) nur vom Betrag v von \vec{v} abhängen, d.h.

$$\vec{p} = f(v) \cdot m \cdot \vec{v}. \quad (4.1.7)$$

Wegen der Forderung ② an die Impulsdefinition gilt

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(v)mv}{mv} = 1, \text{ d.h. } f(0) = 1 \quad (4.1.8)$$

Mit der Abkürzung

$$\mu(v) = m \cdot f(v) \quad (4.1.9)$$

erhält man

$$\vec{p} = \mu(v)\vec{v} \text{ mit } \mu(0) = m \quad (4.1.10)$$

Um erste Aussagen über $f(v)$ bzw. $\mu(v)$ zu erhalten, betrachten wir folgendes Gedankenexperiment:

Das Inertialsystem S' bewegt sich mit der Geschwindigkeit v parallel zur x -Achse eines weiteren Inertialsystems S . Wir betrachten einen zentralen Stoß zweier Teilchen, der in S' parallel zur y -Achse abläuft. In S' ist also die x -Komponente aller vier Geschwindigkeiten Null (siehe Abb.4.1.2):

$$u_{1x}' = u_{2x}' = \bar{u}_{1x}' = \bar{u}_{2x}' = 0 \quad (4.1.11)$$

Aus (3.7.17) folgt dann ($u_x = \frac{v+0}{1+0} = v$)

$$u_{1x} = u_{2x} = \bar{u}_{1x} = \bar{u}_{2x} = v \quad (4.1.12)$$

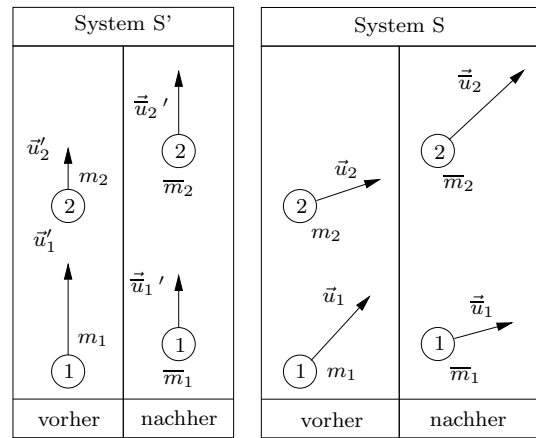


Abb.4.1.2 Impulserhaltung

Wir lassen sogar zu, dass sich die Massen der Teilchen während des Stoßes ändern, z.B. durch Materietransport von einem Teilchen auf das andere.

Mit $\mu_1 = m_1 \cdot f(u_1)$, $\mu_2 = m_2 \cdot f(u_2)$, $\bar{\mu}_1 = \bar{m}_1 \cdot f(\bar{u}_1)$ und $\bar{\mu}_2 = \bar{m}_2 \cdot f(\bar{u}_2)$ folgt aus dem Impulssatz für die x -Komponenten im System S

$$\mu_1 u_{1x} + \mu_2 u_{2x} = \bar{\mu}_1 \bar{u}_{1x} + \bar{\mu}_2 \bar{u}_{2x} \quad (4.1.13)$$

Mit (4.1.12) folgt aus (4.1.13)

$$\mu_1 v + \mu_2 v = \bar{\mu}_1 v + \bar{\mu}_2 v \quad (4.1.14)$$

und damit

$$\boxed{\mu_1 + \mu_2 = \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2} \quad (4.1.15)$$

(4.1.15) gilt für jede Relativgeschwindigkeit v zwischen S und S' , insbesondere auch für $v = 0$. In diesem Fall sind die gestrichelten Größen aber gleich den ungestrichelten ($\mu_\nu' = \mu_\nu$) und es gilt auch

$$\boxed{\mu_1' + \mu_2' = \bar{\mu}_1' + \bar{\mu}_2'} \quad (4.1.16)$$

In der älteren Literatur (leider auch im Abitur) wird $\mu(v)$ als „relativistische Masse“ oder als „dynamische Masse“ bezeichnet. Für uns ist μ nur eine Hilfsgröße, die wir bald nicht mehr benötigen. Mit (4.1.15) und (4.1.16) haben wir, zumindest für Kontaktwechselwirkungen, wie sie bei Stößen auftreten, den Satz von der **Erhaltung der dynamischen Masse** bewiesen:

$$\boxed{\text{In jedem Inertialsystem ist die gesamte dynamische Masse eines abgeschlossenen Systems konstant.}} \quad (4.1.17)$$

4 Relativistische Dynamik

In der Newtonschen Mechanik ist der Satz von der Massenerhaltung eine Trivialität, da dort schon die Massen der einzelnen Teilchen konstant sind. In der Relativitätstheorie beinhaltet der Satz von der Erhaltung der relativistischen Gesamtmasse eine tiefgehende Wahrheit, da ja die dynamischen Massen der einzelnen Teilchen geschwindigkeitsabhängig sind.

Die dynamische Gesamtmasse ist in jedem Inertialsystem eine Konstante, sie ist aber **keine** Invariante unter der Lorentztransformation wie z.B. das Linienelement oder die (invariante) Masse. Dieser Sachverhalt sei an einem Beispiel erläutert:

$$\begin{aligned} \text{S: } & \mu_1 + \mu_2 = 5 \text{ kg} + 4 \text{ kg} & , & \quad \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 = 3 \text{ kg} + 6 \text{ kg} & , & \quad \mu_{\text{ges}} = \bar{\mu}_{\text{ges}} = 9 \text{ kg} \\ \text{S': } & \mu_1' + \mu_2' = 8 \text{ kg} + 6 \text{ kg} & , & \quad \bar{\mu}_1' + \bar{\mu}_2' = 4 \text{ kg} + 10 \text{ kg} & , & \quad \mu_{\text{ges}}' = \bar{\mu}_{\text{ges}}' = 14 \text{ kg} \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt einen total unelastischen Stoß zweier Körper K_1 und K_2 , die die gleiche (invariante) Masse m besitzen. Im System S ruht K_2 vor dem Stoß und in S' ruht K_1 vor dem Stoß. Damit sind die beiden System vollkommen gleichberechtigt und aus Symmetriegründen (Relativitätsprinzip!) gilt

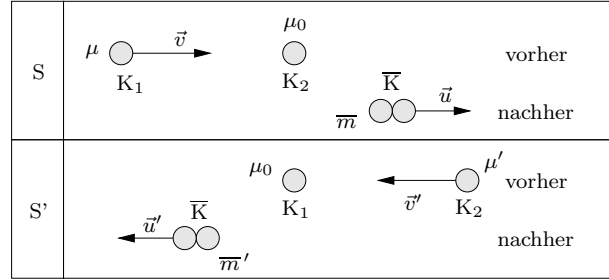


Abb.4.1.3 Herleitung der Massenformel

$$v' = -v, \quad u' = -u, \quad \mu_0 = m, \quad \mu' = \mu, \quad \bar{m}' = \bar{m} \quad \text{und} \quad \bar{\mu}' = \bar{\mu} \quad (4.1.18)$$

Aus dem Additionstheorem (3.7.4) und (4.1.18) folgt

$$-u = u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad (4.1.19)$$

Nach kurzer Umstellung folgt daraus die quadratische Gleichung

$$u^2 - 2 \frac{c^2}{v} u + \frac{c^4}{v^2} = \frac{c^4}{v^2} (1 - \beta^2) \quad (4.1.20)$$

mit $\beta = \frac{v}{c}$. Die Lösung dieser Gleichung ist

$$u = \frac{c^2}{v} \begin{matrix} (+) \\ (-) \end{matrix} \frac{c^2}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (4.1.21)$$

Das Pluszeichen in der Lösung muss ausgeschlossen werden, da $|u| < c$ sein muss. Also gilt

$$u = \frac{c^2}{v} \left(1 - \sqrt{1 - \beta^2}\right) \quad (4.1.22)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{v}{u} - 1 &= \frac{\beta^2}{1 - \sqrt{1 - \beta^2}} - 1 = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} - (1 - \beta^2)}{1 - \sqrt{1 - \beta^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \cdot (1 - \sqrt{1 - \beta^2})}{1 - \sqrt{1 - \beta^2}} = \sqrt{1 - \beta^2} \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Wegen der Erhaltung der dynamischen Masse gilt

$$\bar{\mu} = \mu + \mu_0 = \mu + m \quad (4.1.24)$$

Aus dem Impulssatz

$$\mu v = \bar{\mu} u = \mu u + m u \quad (4.1.25)$$

folgt mit (4.1.23)

$$\mu = \frac{m u}{v - u} = \frac{m}{\frac{v}{u} - 1} = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.1.26)$$

Bewegt sich ein Körper der Masse m mit der Geschwindigkeit v relativ zu einem Inertialsystem S , dann hat er in S die relativistische Masse

$$\mu = \mu(v) = \gamma m \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.1.27)$$

$$\lim_{v \rightarrow 0} \mu(v) = m \quad (4.1.28)$$

$$\lim_{v \rightarrow c} \mu(v) = \infty \quad (4.1.29)$$

(4.1.29) ist ein weiterer Hinweis darauf, dass ein Körper mit einer Masse $m \neq 0$ nicht auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden kann.

Auf experimentelle Bestätigungen der Formel (4.1.26) gehen wir am Ende des übernächsten Kapitels ein, wenn die relativistische Kraft und Energie besprochen wurde.

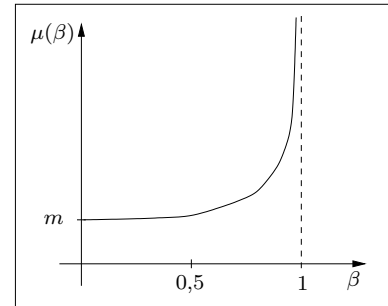


Abb.4.1.4 $\mu(\beta)$

Aus (4.1.27) und (4.1.10) folgt:

Ein Teilchen der Masse m , das sich relativ zu einem Inertialsystem S mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt, hat in S den Impuls:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{|\vec{v}|}{c} \quad (4.1.30)$$

4.2 Die relativistische Kraft

In der Newtonschen Mechanik lautet die Kraftdefinition für ein Teilchen der Masse m , das sich mit der Geschwindigkeit $u(t)$ bewegt:

$$\vec{F} = m \cdot \dot{\vec{u}} = \dot{\vec{p}} \quad (4.2.1)$$

In der Relativitätstheorie ist aber $m \cdot \dot{\vec{u}} \neq \dot{\vec{p}}$, da γ über \vec{u} von der Zeit abhängt:

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(m\gamma\vec{u}) = m\dot{\gamma}\vec{u} + m\gamma\dot{\vec{u}} \neq m\gamma\dot{\vec{u}} \quad (4.2.2)$$

Für die relativistische Kraft bieten sich unter anderem folgende Definitionen an:

$$\textcircled{1}: \quad \vec{F} = m \dot{\vec{u}} \quad (4.2.3)$$

$$\textcircled{2}: \quad \vec{F} = m\gamma \dot{\vec{u}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \quad (4.2.4)$$

$$\textcircled{3}: \quad \vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (4.2.5)$$

Weiter fordern wir, dass die Formel für die Kraft auf ein Teilchen der Ladung q (**Lorentzkraft**)

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (4.2.6)$$

auch in der Relativitätstheorie gilt. Diese Forderung ist vernünftig, da die Grundlage der Relativitätstheorie, die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, eine Folge der Maxwellgleichungen und

4 Relativistische Dynamik

somit der Elektrodynamik ist. Die Elektrodynamik soll also in einer relativistischen Theorie der Natur ihre Gültigkeit behalten.

Als Beispiel betrachten wir die Bewegung eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld E mit der Kraftdefinition (4.2.4):

$$F = e E = m \gamma \dot{u} = \frac{m \dot{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \text{konst.} \quad (4.2.7)$$

Mit $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ folgt

$$m \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = F dt \quad (4.2.8)$$

oder mit $u = \beta c$

$$m c \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = F dt \quad (4.2.9)$$

$$m c \int \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = F t + C \quad (4.2.10)$$

Das Integral entnimmt man einer mathematischen Formelsammlung (arcsin ist die Umkehrfunktion von sin).

$$m c \arcsin \beta = F t + C \quad (4.2.11)$$

Mit $\beta(0) = 0$ folgt $C = 0$ und damit

$$\arcsin \beta = \frac{F}{m c} \cdot t \quad (4.2.12)$$

$$\beta(t) = \sin \left(\frac{F}{m c} \cdot t \right) \quad (4.2.13)$$

Das Elektron würde nach der Zeit

$$t_0 = \frac{\pi m c}{2 F} = \frac{\pi m c}{2 e E} \quad (4.2.14)$$

die Lichtgeschwindigkeit erreichen, im Widerspruch zur Erfahrung! Für $E = 10^6 \frac{V}{m}$ z.B. wäre $t_0 = 2,7 \cdot 10^{-9}$ s. Das Ergebnis der Rechnung zeigt, dass (4.2.4) keine geeignete Kraftdefinition ist. Noch leichter sieht man, dass auch die Kraftdefinition (4.2.3) auf ein überlichtschnelles Elektron im homogenen elektrischen Feld führt, da es sich hierbei um eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung handelt.

Deshalb wird (4.2.5) mit $u = |\vec{u}|$ als Kraftdefinition verwendet:

$$\boxed{\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right)} \quad (4.2.15)$$

(relativistische Kraftdefinition)

Ohne Beweis sei mitgeteilt, dass mit (4.2.15) uneingeschränkt die Formel für die Lorentzkraft gilt:

$$\boxed{\vec{F} = q \cdot \left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right)} \quad (4.2.16)$$

Wir betrachten jetzt den Fall einer zur Geschwindigkeit parallelen Kraft:

$$\vec{F} \parallel \vec{u} \implies \vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt} (m \gamma \cdot \vec{u}) = m \dot{\gamma} \vec{u} + m \gamma \dot{\vec{u}} \parallel \vec{u} \implies \vec{a} = \dot{\vec{u}} \parallel \vec{F} \parallel \vec{u} \quad (4.2.17)$$

4 Relativistische Dynamik

Für eine eindimensionale Bewegung mit $\vec{F} \parallel \vec{u}$ gilt also auch $\vec{a} \parallel \vec{u}$ und damit

$$F = m\gamma \dot{u} + m\dot{\gamma} u \quad (4.2.18)$$

Mit

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{\beta \dot{\beta}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\beta a}{c(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.2.19)$$

folgt aus (4.2.18)

$$\begin{aligned} F &= m\gamma \dot{u} + m\dot{\gamma} u = m\gamma a + m\dot{\gamma} \beta c = \frac{m a}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{m \beta^2 a}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= m a \frac{1-\beta^2 + \beta^2}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} = m a \frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

oder zusammengefasst

$$\boxed{F = \frac{m a}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m\gamma a}{1-\beta^2}} \quad \text{mit } a = \dot{u} \quad (4.2.21)$$

(4.2.21) zeigt noch einmal deutlich, dass in der relativistischen Mechanik **nicht** $F = m a$ gilt!

Betrachten wir noch die Bewegung bei einer Kraft \vec{F} , die senkrecht auf der Teilchengeschwindigkeit \vec{u} steht. Die von \vec{F} hervorgerufene Änderung der kinetischen Energie des Teilchens ist dann

$$dW_{\text{kin}} = \vec{F} \cdot d\vec{x} = \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{u}}_0 dt = 0, \quad (4.2.22)$$

d.h. W_{kin} und damit auch $u = |\vec{u}|$ ist konstant (das können wir folgern, ohne die Formel für die kinetische Energie schon zu kennen). Mit konstantem u ist aber auch γ konstant, d.h. $\dot{\gamma} = 0$. Damit gilt

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \underbrace{\dot{\gamma}}_0 \vec{u} + m\gamma \dot{\vec{u}} = m\gamma \dot{\vec{u}} = m\gamma \vec{a} \quad (4.2.23)$$

Wir haben also bewiesen:

$$\boxed{\vec{F} \perp \vec{u} \implies \vec{F} = m\gamma \vec{a} = \frac{m \vec{a}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}} \quad (4.2.24)$$

Für $\vec{F} \perp \vec{u}$ haben wir also die gleichen Verhältnisse wie in der Newtonschen Mechanik, wenn statt der invarianten Masse m die relativistische Masse γm verwendet wird. Insbesondere beschreibt das Teilchen für $F = |\vec{F}| = \text{konst.}$ eine Kreisbahn. Die Formel für die Zentripetalbeschleunigung folgt direkt aus $\vec{F} = \gamma m \vec{a}$ und gilt somit auch relativistisch (mit γm statt m):

$$\boxed{F = \frac{\gamma m u^2}{r}} \quad (4.2.25)$$

Für die Bewegung von geladenen Teilchen im homogenen Magnetfeld gilt also wegen (4.2.16)

$$\boxed{\frac{\gamma m u^2}{r} = \frac{m u^2}{r \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = q u B} \quad (4.2.26)$$

Es sei angemerkt, dass unsere Kraftdefinition (4.2.15) noch nicht der Weisheit letzter Schluss ist (siehe Kapitel 4.4 über Vierervektoren).

Es stellt sich die Frage, ob die relativistische Masse $\mu = \gamma m$ auch eine Quelle der Gravitation ist. Diese Frage beantwortet die allgemeine Relativitätstheorie (ART), die von Einstein 1916 veröffentlicht wurde. Darin kommt zum Ausdruck, dass das von einem bewegten Körper erzeugte Gravitationsfeld von dessen Gesamtenergie und dessen Impuls abhängt. Die aufwändigen Rechnungen der ART ergeben aber für einen Spezialfall ein einfaches Ergebnis:

Bewegt sich eine Masse $m \ll M$ mit der Geschwindigkeit u auf einer exakten Kreisbahn um eine in einem Inertialsystem ruhende Masse M , dann muss im newtonschen Gravitationsgesetz nur m durch γm ersetzt werden. Das gilt nicht mehr, wenn m eine elliptische Bahn beschreibt (z.B. Periheldrehung des Merkurs). Für die Kreisbahn gilt also

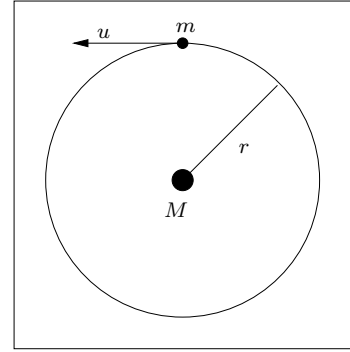


Abb.4.2.1 Kreisbahn

$$\frac{\gamma m u^2}{r} = \frac{G \gamma m M}{r^2} \quad (4.2.27)$$

Da sich γ herauskürzt, erhält man für die Kreisbahn die gleichen Ergebnisse wie in der newtonschen Physik.

Das exakte Ergebnis für die Gravitationskraft auf ein Teilchen auf einer Kreisbahn führt zu folgender Näherung:

Die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern mit den Massen m_1 und m_2 , die sich relativ zu einem Inertialsystem S mit den Geschwindigkeiten $v_1 = \beta_1 c$ und $v_2 = \beta_2 c$ bewegen, ist näherungsweise

$$F_G \approx G \frac{\gamma_1 m_1 \gamma_2 m_2}{r^2} = G \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2} \quad (4.2.28)$$

mit

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_i^2}}$$

4.3 Die Äquivalenz von Masse und Energie

Wir suchen eine Formel für die kinetische Energie eines Körpers der Masse m , der sich mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ relativ zu einem Inertialsystem S bewegt. Die kinetische Energie ist die Beschleunigungsarbeit, die wir mit (4.2.21) berechnen. Wird der Körper von $v(0) = 0$ bis $v(t_0) = v_0 = c \beta_0$ beschleunigt, dann muss die Arbeit

$$W_{\text{kin}} = \int_0^{x_0} F dx = \int_0^{x_0} \frac{m a}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int_0^{x_0} \frac{m c \dot{\beta}}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} dx \quad (4.3.1)$$

verrichtet werden. Dabei ist $x(0) = 0$ und $x(t_0) = x_0$. Mit der Substitution $dx = v dt = c \beta dt$ gilt

$$c \dot{\beta} dx = \dot{v} dx = \frac{dv}{dt} v dt = v dv = c^2 \beta d\beta \quad (4.3.2)$$

und aus (4.3.2) wird

$$W_{\text{kin}} = \int_0^{\beta_0} \frac{m c^2 \beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} d\beta = m c^2 \int_0^{\beta_0} \frac{\beta d\beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.3.3)$$

4 Relativistische Dynamik

Wie man leicht durch Differenzieren nachrechnet, ist $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ eine Stammfunktion von $\frac{\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Damit folgt

$$W_{\text{kin}} = m c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} \right) = \frac{m c^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} - m c^2 \quad (4.3.4)$$

Zusammenfassend erhält man also

Die kinetische Energie eines Körpers der Masse m , der sich mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ bewegt, ist

$$W_{\text{kin}} = \frac{m c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m c^2 = \gamma m c^2 - m c^2 = (\gamma - 1) m c^2 \quad (4.3.5)$$

Umstellen von (4.3.5) ergibt

$$\gamma m c^2 = m c^2 + W_{\text{kin}} \quad (4.3.6)$$

Diese Gleichung erinnert stark an etwas wie

$$\text{Gesamtenergie} = m c^2 + W_{\text{kin}}, \quad (4.3.7)$$

wenn man $m c^2$ als Energie des ruhenden Körpers (seine **Ruhenergie**) interpretiert. Ob es sinnvoll ist, einer ruhenden Masse m die Energie $m c^2$ zuzuordnen, muss das Experiment entscheiden, d.h. man muss die Umwandlung von Masse in andere Energieformen und umgekehrt beobachten können. Der beste Beweis für diese Äquivalenz von Masse und Energie ist die Energiegewinnung durch Kernspaltung und Kernfusion. Bei der Fusion verschmelzen zwei Kerne der Massen m_1 und m_2 zu einem Kern der Masse m_0 mit $m_0 < m_1 + m_2$. Die Energiedifferenz $\Delta W = (m_1 + m_2 - m_0) c^2$ wird dabei in kinetische Energie des neuen Kerns umgewandelt. Umgekehrt kann die kinetische Energie eines Teilchens direkt in neue Teilchen umgewandelt werden. Am eindrucksvollsten zeigen das Teilchenschauer, die von einem äußerst energiereichen kosmischen Teilchen erzeugt werden. Trifft so ein energiereiches Teilchen mit einem Atomkern in der oberen Atmosphäre zusammen, können mehrere Milliarden neuer Teilchen entstehen, die in verschiedenen Detektoren an der Erdoberfläche fast gleichzeitig nachgewiesen werden. Eine weitere Umwandlung von Ruhenergie in eine andere Energieform ist die Zerstrahlung eines Teilchens und seines Antiteilchens in eine elektromagnetische Welle.

Zusammenfassend halten wir fest:

Ein Körper der Masse m , der sich relativ zu einem Inertialsystem S mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ bewegt, hat in S die Energie

$$W = \gamma m c^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = W_0 + W_{\text{kin}} \quad (4.3.8)$$

mit der Ruhenergie

$$W_0 = m c^2$$

und der kinetischen Energie

$$W_{\text{kin}} = (\gamma - 1) m c^2$$

Um mit den Abituraufgaben kompatibel zu bleiben, noch die Formulierung mit der dynamischen Masse $\mu = \gamma m$:

Ein Körper der Masse m , der sich relativ zu einem Inertialsystem S mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ bewegt, hat in S die Energie

$$W = \mu c^2 \quad (4.3.9)$$

4 Relativistische Dynamik

(4.3.9) zeigt, dass μ bis auf den konstanten Faktor c^2 gleich der Gesamtenergie W ist und somit eine entbehrliche Größe darstellt.

Aus dem Gesetz der Erhaltung der dynamischen Masse für n Teilchen, die nur einer Kontaktwechselwirkung (Stoß, siehe (4.1.17)) oder überhaupt keiner Wechselwirkung unterliegen, folgt für ein solches System durch Multiplikation mit c^2 auch die Erhaltung der relativistischen Gesamtenergie:

$$W = \sum_{i=1}^n \mu_i c^2 = \sum_{i=1}^n \gamma_i m_i c^2 = \text{konst.} \quad (4.3.10)$$

Wir betrachten ein abgeschlossenes System von n Teilchen in einem Inertialsystem S , in dem der Schwerpunkt des Systems ruht (Schwerpunktsystem). Da das System der Teilchen als Ganzes ruht, ist die Masse des Systems

$$M = \frac{W}{c^2} = \sum_{i=1}^n \gamma_i m_i \quad (4.3.11)$$

Ein abgeschlossenes System von n Teilchen, die über Kraftfelder (\vec{F}_{mn} ist die Kraft von Teilchen m auf Teilchen n) miteinander in Wechselwirkung stehen (z.B. geladene Teilchen), besitzt eine von der Lage der Teilchen abhängige potentielle Energie W_{pot} , die auch einen Beitrag zur Gesamtenergie W in (4.3.11) leistet. Die Masse des Teilchensystems im Schwerpunktsystem ist also

$$M = \frac{W}{c^2} = \sum_{i=1}^n \gamma_i m_i + \frac{W_{\text{pot}}}{c^2} \quad (4.3.12)$$

In der Newtonschen Mechanik konnte der Nullpunkt der potentiellen Energie frei gewählt werden, da dort nur Energiedifferenzen physikalisch relevant waren. In der Relativitätstheorie hingegen ist die Gesamtmasse M des Teilchensystems und damit auch seine Gesamtenergie $W = M c^2$ eine eindeutig messbare Größe, zu der man keine willkürliche Konstante addieren darf. Die korrekte potentielle Energie erhält man aus der Überlegung, dass wechselwirkungsfreie Teilchen die potentielle Energie null haben und unsere Teilchen nur dann wechselwirkungsfrei sind ($F_{mn} = 0$), wenn sie unendlich weit voneinander entfernt sind. Für die potentielle Energie zweier Teilchen in der gegenseitigen Entfernung r muss also gelten:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} W_{\text{pot}} = 0 \quad (4.3.13)$$

Die bekannten Formeln für die potentielle Energie zwischen Punktladungen bzw. Punktmassen

$$W_{\text{elektrisch}} = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r}, \quad W_{\text{grav}} = -\frac{G \mu_1 \mu_2}{r} \quad (4.3.14)$$

erfüllen die Bedingung (4.3.13). Die relativistische Gesamtmasse eines Teilchens oder eines Systems von Teilchen ist nicht nur für dessen Trägheit, sondern auch für dessen Gravitationswirkung verantwortlich. Ein heißer Körper mit großen kinetischen Energien seiner Atome ist demnach in jeder Beziehung schwerer als der gleiche Körper bei einer niedrigeren Temperatur. Andererseits wird ein System aus zwei Massen mit anziehender Wechselwirkung leichter, wenn sich die beiden Massen (bei gleichbleibender Geschwindigkeit) annähern, da die potentielle Energie des Systems kleiner wird.

Die Gesamtenergie von zwei Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 , den Ladungen q_1 und q_2 , den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 und der gegenseitigen Entfernung r könnte man wie folgt ansetzen:

$$W = \mu_1 c^2 + \mu_2 c^2 + \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r} - \frac{G \mu_1 \mu_2}{r} \quad (4.3.15)$$

mit

$$\mu_1 = \frac{m_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \quad \text{und} \quad \mu_2 = \frac{m_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \quad (4.3.16)$$

(4.3.15) ist aber leider nur eine Näherung, da die korrekte Formulierung des Energiesatzes, des Impulssatzes und der Bewegungsgleichungen für ein System wechselwirkender Teilchen eine äußerst komplizierte Sache ist, der unter anderem folgende Schwierigkeiten im Wege stehen:

- Das Feld der Teilchen hat Energie und damit auch Masse und Impuls.
- Das Feld eines punktförmigen Teilchens ist nur in dessen Ruhesystem radialsymmetrisch, in anderen Systemen ist es wegen der Lorentzkontraktion in Bewegungsrichtung zusammengestaucht.
- Da die Lichtgeschwindigkeit die größtmögliche Signalgeschwindigkeit ist, „weiß“ das Feld eines bewegten Teilchens in der Entfernung r vom Teilchen erst nach der Zeit $\frac{r}{c}$, dass sich das Teilchen bewegt.
- Jede beschleunigte Ladung strahlt elektromagnetische Wellen, jede beschleunigte Masse Gravitationswellen ab, die wieder Masse, Energie und Impuls haben.
- Die Feldenergie von Punktteilchen (Ausdehnung null) ist unendlich.
- Das Gravitationsfeld ist besonders heikel zu beschreiben, da das Feld selbst Energie und damit Masse besitzt und somit selbst eine Quelle des Feldes ist.

Die Probleme mit der elektromagnetischen Wechselwirkung werden durch die **Quantenelektrodynamik** (QED) gelöst (FEYNMAN, SCHWINGER, TOMONAGA, 1948), die Gravitation makroskopischer Körper bekam EINSTEIN durch seine **allgemeine Relativitätstheorie** (ART) 1916 in den Griff. Eine Theorie der Gravitation, die auch in atomaren Dimensionen richtig ist (**Quantengravitation**) wird derzeit fieberhaft gesucht. Aussichtsreichster Kandidat ist die **Superstringtheorie**, die Elementarteilchen als schwingende Fäden (Strings) in einem höherdimensionalen Raum beschreibt.

Als Beispiel betrachten wir die Energie von zwei ruhenden, ungeladenen Punktmassen m im Abstand r . Aus der Näherungsformel (4.3.15) folgt

$$W = 2 m c^2 - \frac{G m^2}{r} \quad (4.3.17)$$

Dieser Gleichung entnimmt man die bemerkenswerte Tatsache, dass die Gesamtenergie dieses Systems null werden kann, und zwar für den Abstand

$$r_0 = \frac{G m}{2 c^2} \quad (4.3.18)$$

Ein reizvoller Gedanke ist, ob die Gesamtenergie unseres Universums null sein kann. Zur Abschätzung von Größenordnungen betrachten wir ein ganz einfaches Modell des Universums: Zwei Punktmassen m fliegen auseinander (Urknall). Durch die Gravitation werden sie abgebremst. Wenn sie gerade zur Ruhe kommen, können wir (4.3.18) anwenden.

Mit $m \approx 10^{55}$ kg erhält man dann für den maximalen Durchmesser des Universums mit der Gesamtenergie null:

$$r_0 = \frac{G m}{2 c^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 10^{55} \text{ kg}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 3,7 \cdot 10^{27} \text{ m} = 3,9 \cdot 10^{11} \text{ LJ} \quad (4.3.19)$$

Dieser Wert stimmt durchaus mit den Messwerten überein. Ein ganzes Universum zum Nulltarif!! Die Vergrößerung der dynamischen Masse von Elektronen mit zunehmender Geschwindigkeit wurde schon 1901, also vier Jahre vor Einsteins Veröffentlichung seiner speziellen Relativitätstheorie, von KAUFMANN experimentell gefunden und von BUCHERER einige Jahre später mit größerer Genauigkeit nachgewiesen. Die Geschwindigkeitsabhängigkeit der dynamischen Masse (4.1.27) wurde in den Folgejahren in einer Reihe von Präzisionsversuchen immer genauer bestätigt. An der Uni Zürich z.B. wurde die Formel mit Elektronen der Geschwindigkeit $v = 0,99 c$ auf 0,05 % genau bestätigt ¹.

¹V. Meyer et al. Helv. Phys. Acta **36** 981 (1963)

4.4 Vierervektoren

Die eleganteste Formulierung der Relativitätstheorie arbeitet mit sogenannten **Vierervektoren**, die sich gemäß der Lorentztransformation von einem Inertialsystem S in ein anderes Inertialsystem S' umrechnen lassen. Als Beispiel eines Vierervektors kennen wir schon die Zusammenfassung der Ortskoordinaten mit der Zeit zum Ereignis $(x | y | z | ct)$. Vierervektoren bezeichnet man mit hochgestellten Indizes:

$$X^1 = x, X^2 = y, X^3 = z, X^4 = ct \quad (4.4.1)$$

Nehmen wir der Einfachheit halber wieder eine Bewegung parallel zur x -Achse an, dann lautet die Lorentztransformation (3.6.13) (S' bewegt mit sich $v = \beta c$ relativ zu S, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$)

$$X^{1'} = \gamma(X^1 - \beta X^4), X^{2'} = X^2, X^{3'} = X^3, X^{4'} = \gamma(X^4 - \beta X^1) \quad (4.4.2)$$

Ein Vierervektor ist also eine Zusammenfassung von vier Größen $(A^1 | A^2 | A^3 | A^4)$ (System S), deren Werte in S' man mit der Lorentztransformation

$$A^{1'} = \gamma(A^1 - \beta A^4), A^{2'} = A^2, A^{3'} = A^3, A^{4'} = \gamma(A^4 - \beta A^1) \quad (4.4.3)$$

erhält. In (3.6.16) haben wir gesehen, dass die Lorentztransformation auch für Koordinatendifferenzen gilt, d.h.

$$dA^{1'} = \gamma(dA^1 - \beta dA^4), dA^{2'} = dA^2, dA^{3'} = dA^3, dA^{4'} = \gamma(dA^4 - \beta dA^1) \quad (4.4.4)$$

Division von (4.4.4) durch die invariante (in allen Inertialsystemen gleiche) Eigenzeit $d\tau$ zeigt, dass die Ableitung eines Vierervektors nach der Eigenzeit wieder ein Vierervektor ist:

$$A^\mu \text{ ist Vierervektor} \implies \frac{dA^\mu}{d\tau} \text{ ist Vierervektor} \quad (4.4.5)$$

Für ein Teilchen, das sich mit $u = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$ in S bewegt folgt aus der Zeitdilationsformel

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (4.4.6)$$

und seine Vierergeschwindigkeit ist

$$U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} = \frac{dX^\mu}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{dX^\mu}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (4.4.7)$$

$$U^1 = \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, U^2 = 0, U^3 = 0, U^4 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (4.4.8)$$

Multipliziert man die Vierergeschwindigkeit mit der invarianten Masse m , erhält man den Viererimpuls $P^\mu = m U^\mu$:

$$P^1 = \frac{m u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, P^2 = 0, P^3 = 0, P^4 = \frac{m c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (4.4.9)$$

Die räumlichen Koordinaten des Viererimpulses ($\mu = 1, 2, 3$) sind die Koordinaten des normalen relativistischen Impulses $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$, die „Zeitkoordinate“ des Viererimpulses ist

$$\frac{m c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{c} \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{W}{c} \quad (4.4.10)$$

4 Relativistische Dynamik

Damit ist

$$P^1 = p_x, P^2 = 0, P^3 = 0, P^4 = \frac{W}{c} \quad (4.4.11)$$

P^μ nennt man daher auch den Energie-Impuls-Vektor. Die Ableitung des Viererimpulses nach τ ist schließlich die Viererkraft F^μ :

$$F^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau} = \frac{dP^\mu}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{dP^\mu}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (4.4.12)$$

Die in Kapitel 4.2 definierte Kraft $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ hat die Koordinaten

$$F_x = F = \dot{p}_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{dP^1}{dt}, \quad F_y = \frac{dP^2}{dt} = 0, \quad F_z = \frac{dP^3}{dt} = 0 \quad (4.4.13)$$

d.h. die räumlichen Koordinaten von F^μ sind wegen (4.4.12) gleich den Koordinaten von \vec{F} geteilt durch $\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$. Für den zeitlichen Teil von F^μ folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} F^4 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{dP^4}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{mc \cdot (-\frac{2u}{c^2} \cdot \dot{u})}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{m \dot{u} u}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \stackrel{(4.2.21)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{F u}{c} \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

Andererseits folgt direkt aus (4.4.11) und (4.4.12)

$$F^4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{\dot{W}}{c} \quad (4.4.15)$$

d.h. F^4 ist bis auf einen Faktor gleich der von F verrichteten Leistung.

$$F^1 = \frac{F_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, F^2 = \frac{F_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, F^3 = \frac{F_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, F^4 = \frac{\dot{W}}{c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{F u}{c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (4.4.16)$$

Für eine Bewegung von S' relativ zu S mit $v = \beta c$ parallel zur x -Achse lässt sich jeder Vierervektor A^μ genauso wie X^μ in einem Brehmediagramm darstellen. Wie üblich ist $\sin 2\varphi = \beta$.

In Kapitel 3.9 haben wir das Linienelement ds mit

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 \quad (4.4.17)$$

als Invariante kennengelernt, d.h.

$$\Delta s^2 = (\Delta s')^2 \quad (4.4.18)$$

Direkt mit der Lorentztransformation (4.4.3) folgt für jeden Vierervektor A^μ

$$\begin{aligned} (A^1')^2 + (A^2')^2 + (A^3')^2 - (A^4')^2 &= \gamma^2 [(A^1 - \beta A^4)^2 - (A^4 - \beta A^1)^2] + (A^2)^2 + (A^3)^2 = \\ &= \frac{1}{1 - \beta^2} [(A^1)^2 - (A^4)^2] (1 - \beta^2) + (A^2)^2 + (A^3)^2 = \\ &= (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2 - (A^4)^2 \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

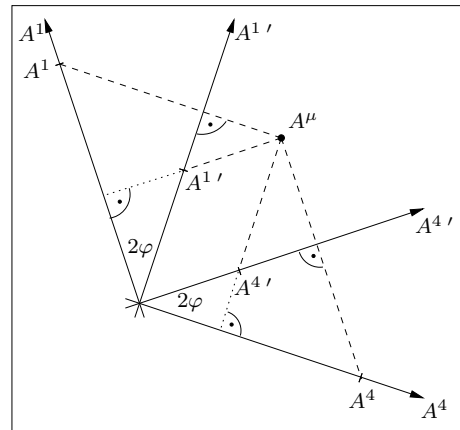


Abb.4.4.1 Brehmediagramm

Der Ausdruck $(A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2 - (A^4)^2$ ist also eine Invariante des Vierervektors A^μ , d.h. dieser Ausdruck hat in jedem Inertialsystem den gleichen Wert.

4.5 Energie-Impuls-Beziehungen

Betrachten wir ein Teilchen der Masse m mit dem Impuls $\vec{p} = (p | 0 | 0)$ im System S. Der Energie-Impuls-Vektor (Viererimpuls) des Teilchens ist dann $p^\mu = (p | 0 | 0 | \frac{W}{c})$. Die Invariante von p^μ , die **Energie-Impuls-Invariante**, lautet dann nach (4.4.19)

$$p^2 - \frac{W^2}{c^2} = p'^2 - \frac{W'^2}{c^2} \quad (4.5.1)$$

Wählen wir für das System S' das Ruhssystem des Teilchens, dann ist $p' = 0$ und $W' = W_0 = mc^2$, d.h.

$$p^2 - \frac{W^2}{c^2} = -\frac{W_0^2}{c^2} \quad (4.5.2)$$

Umgeformt erhält man die für Rechnungen äußerst praktische **Energie-Impuls-Relation**:

$$\boxed{W^2 = W_0^2 + p^2 c^2} \quad (4.5.3)$$

oder

$$\boxed{\gamma^2 m^2 c^4 = m^2 c^4 + p^2 c^2} \quad (4.5.4)$$

Die Umrechnung von Impuls und Energie aus S in ein System S', das sich mit $v = \beta c$ relativ zu S bewegt, geschieht mit der Lorentztransformation ($P^1 = p$, $P^4 = \frac{W}{c}$):

$$\boxed{\begin{aligned} p' &= \gamma \left(p - \beta \cdot \frac{W}{c} \right) \\ \frac{W'}{c} &= \gamma \left(\frac{W}{c} - \beta p \right) \end{aligned}} \quad (4.5.5)$$

Man muss hier aufpassen, dass man die Teilchengeschwindigkeit u (in S) nicht mit der Relativgeschwindigkeit v der Systeme verwechselt! Mit

$$p = \frac{m u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad \text{und} \quad W = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (4.5.6)$$

lautet (4.5.5) ausführlich

$$p' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(\frac{m u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{v}{c} \cdot \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \quad (4.5.7)$$

$$W' = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(\frac{m c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{v}{c} \cdot \frac{m u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \quad (4.5.8)$$

Wir betrachten jetzt ein System von n Teilchen, die bis auf Kontaktwechselwirkungen wechselwirkungsfrei sind (nur Stöße). Als Gesamtenergie und Gesamtimpuls definiert man die Summen der einzelnen Größen:

$$\vec{p}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i, \quad W_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n W_i \quad (4.5.9)$$

4 Relativistische Dynamik

Mit der Lorentztransformation (4.5.5) folgt für Gesamtimpuls und Gesamtenergie in S' (der Einfachheit halber wieder alle Teilchengeschwindigkeiten parallel zur x -Achse)

$$\begin{aligned} p'_{\text{ges}} &= \sum_{i=1}^n p'_i = \sum_{i=1}^n \left[\gamma \left(p_i - \frac{\beta}{c} \cdot W_i \right) \right] \stackrel{\text{Distributivg.}}{=} \\ &= \gamma \left(\sum_{i=1}^n p_i - \frac{\beta}{c} \cdot \sum_{i=1}^n W_i \right) = \gamma \left(p_{\text{ges}} - \beta \cdot \frac{W_{\text{ges}}}{c} \right) \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

und analog

$$\frac{W'_{\text{ges}}}{c} = \gamma \left(\frac{W_{\text{ges}}}{c} - \beta p_{\text{ges}} \right) \quad (4.5.11)$$

Die Lorentztransformation gilt also auch für den Gesamtimpuls p_{ges} und die Gesamtenergie W_{ges} eines Systems wechselwirkungsfreier Teilchen. Damit ist $\left(p_{\text{ges}} \mid 0 \mid 0 \mid \frac{W_{\text{ges}}}{c} \right)$ ein Vierervektor und

$$p_{\text{ges}}^2 - \frac{W_{\text{ges}}^2}{c^2} = p'^2_{\text{ges}} - \frac{W'^2_{\text{ges}}}{c^2} \quad (4.5.12)$$

ist eine Invariante. Das Schwerpunktsystem mehrerer Teilchen ist das System, in dem der Gesamtimpuls der Teilchen null ist. Ist S' also das Schwerpunktsystem der Teilchen, dann ist $p' = 0$ und aus (4.5.12) folgt die Energie-Impuls-Relation für ein System wechselwirkungsfreier Teilchen ($W'_{\text{ges}} = W_{\text{SP,ges}} =$ Gesamtenergie im Schwerpunktsystem)

$$\boxed{W_{\text{ges}}^2 = W_{\text{SP,ges}}^2 + p_{\text{ges}}^2 c^2} \quad (4.5.13)$$

Ein Vergleich von (4.5.13) mit (4.5.3) zeigt, dass sich ein System von Teilchen so verhält wie ein Teilchen, dessen Ruhmasse gleich der Gesamtmasse im Schwerpunktsystem ist.

Die Relativgeschwindigkeit des Schwerpunktsystems S' zu S erhält man mit der Lorentztransformation (4.5.10) und $p'_{\text{ges}} = 0$ zu

$$\boxed{v_{\text{SP}} = \beta c = \frac{p_{\text{ges}} c^2}{W_{\text{ges}}}} \quad (4.5.14)$$

Da Rechnungen im Schwerpunktsystem wegen $p'_{\text{ges}} = 0$ am einfachsten sind, behandelt man Stoßprobleme auf folgende Weise:

- Transformation der Größen vor dem Stoß mittels (4.5.14) und der Lorentztransformation oder dem Additionstheorem für Geschwindigkeiten aus dem Laborsystem S ins Schwerpunktsystem S' .
- Berechnung der Größen nach dem Stoß in S' (Energiesatz, Impulssatz).
- Transformation der Größen nach dem Stoß aus dem Schwerpunktsystem S' ins Laborsystem S .

5 Relativität und Elektrodynamik

5.1 Dopplereffekt mit beliebiger Signalgeschwindigkeit

Ein Sender (System S) sendet im zeitlichen Abstand Δt_s (gemessen in seinem Ruhssystem) Signale mit der Geschwindigkeit u zu einem Empfänger E, der sich mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ relativ zu S bewegt. Im Empfängersystem S' treffen die Signale im zeitlichen Abstand Δt_e bei E ein.

WL₂ in S:

$$x = ut - u \cdot \Delta t_s \quad (5.1.1)$$

$$E_2: \quad ut_2 - u \cdot \Delta t_s = vt_2 \quad (5.1.2)$$

$$E_2: \quad t_2 = \frac{u \cdot \Delta t_s}{u - v} \implies \Delta t_e = t'_2 = t_2 \cos 2\varphi = \frac{u \cdot \Delta t_s \sqrt{1 - \beta^2}}{u - v} \quad (5.1.3)$$

$$\boxed{\Delta t_e = \Delta t_s \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{u}}} \quad (5.1.4)$$

WL₂ in S':

$$x' = x'_1 + u'(t' - t'_1) = -\frac{\beta c \Delta t_s}{\sqrt{1 - \beta^2}} + u' \left(t' - \frac{\Delta t_s}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \quad (5.1.5)$$

$$E_2: \quad -\frac{\beta c \Delta t_s}{\sqrt{1 - \beta^2}} + u' \left(t'_2 - \frac{\Delta t_s}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = 0 \quad (5.1.6)$$

$$\Delta t_e = t'_2 = \frac{\beta c \Delta t_s}{u' \sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{\Delta t_s}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta t_s}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \left(1 + \frac{v}{u'} \right) \quad (5.1.7)$$

$$\boxed{\Delta t_e = \Delta t_s \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{u}} = \Delta t_s \cdot \frac{1 + \frac{v}{u'}}{\sqrt{1 - \beta^2}}} \quad (5.1.8)$$

Beispiel: Dopplereffekt beim Schall (u Schallgeschwindigkeit in ruhender Luft, Luft ruht in S):

$$\Delta t_e = \Delta t_s \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{u}} \approx \Delta t_s \cdot \frac{1}{1 - \frac{v}{u}} \quad (5.1.9)$$

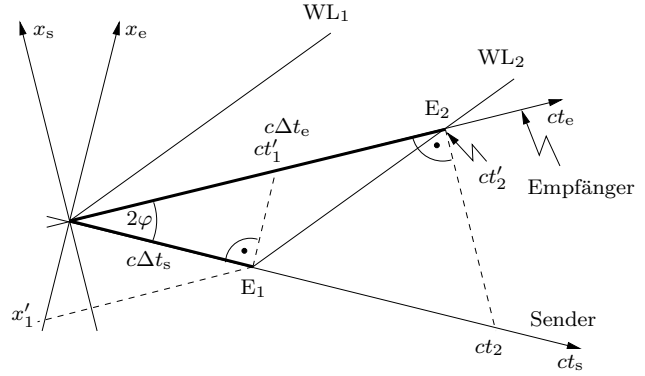


Abb.5.1.1

5.2 Transformation der Stromstärke

$$p^2 - \frac{W^2}{c^2} = p'^2 - \frac{W'^2}{c^2} \quad (5.2.1)$$

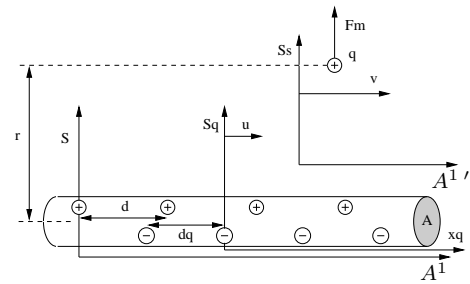


Abb.5.2.1 Strom

5.3 Die Lorentzkraft

$$p^2 - \frac{W^2}{c^2} = p'^2 - \frac{W'^2}{c^2} \quad (5.3.1)$$

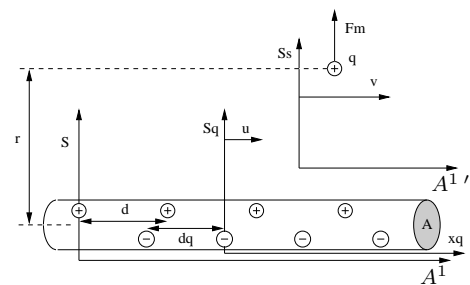


Abb.5.3.1 Strom

Inhaltsverzeichnis

1	Newton'sche Mechanik in verschiedenen Bezugssystemen	3
1.1	Bezugssysteme, Ereignisse, Weltlinien	3
1.2	Die Galileitransformation	4
1.3	Das Brehmediagramm der Galileitransformation	6
1.4	Zeit- und Längenmessung	8
1.4.1	Atomuhr	8
1.4.2	Laufzeitmessungen	8
1.4.3	Entfernungsmessung über die Laufzeitmessung von Signalen	8
1.4.4	Längenmessung bewegter Körper	9
2	Lichtausbreitung in verschiedenen Bezugssystemen	10
2.1	Zwei Modellvorstellungen der Lichtausbreitung	10
2.1.1	Äthertheorie des Lichtes	10
2.1.2	Korpuskulartheorie des Lichtes	10
2.2	Der Versuch von Michelson und Morley	11
2.3	Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit	12
3	Relativistische Kinematik	14
3.1	Das relativistische Brehmediagramm	14
3.2	Die Zeitdilatation	17
3.3	Eigenzeit und Zwillingsparadoxon	18
3.4	Die Lorentzkontraktion	20
3.5	Der Dopplereffekt	21
3.6	Die Lorentztransformation	24
3.7	Das Additionstheorem für Geschwindigkeiten	25
3.8	Die Transformation der Beschleunigung	27
3.9	Das Linienelement	28
4	Relativistische Dynamik	30
4.1	Der relativistische Impuls	30
4.2	Die relativistische Kraft	33
4.3	Die Äquivalenz von Masse und Energie	36
4.4	Vierervektoren	40
4.5	Energie-Impuls-Beziehungen	42
5	Relativität und Elektrodynamik	44
5.1	Dopplereffekt mit beliebiger Signalgeschwindigkeit	44
5.2	Transformation der Stromstärke	45
5.3	Die Lorentzkraft	45

Index

- Äther, 10
- absoluter Raum, 9
- Additionstheorem, 25
- allgemeine Relativitätstheorie, 38
- Antiteilchen, 36
- Atomuhren, 7
- Beschleunigung, 26
- Bezugssystem, 2
- Brehmediagramm, 15
- Brehmediagramm der Galileitransformation, 6
- Bucherer, 39
- Dimension, vierte, 2
- Dopplerfaktor, 21
- Dopplerformel, 21
- Eigenbeschleunigung, 26
- Eigenlänge, 19
- Eigenzeit, 17, 39
- Einstein-Addition, 25
- Energie
 - kinetische, 35
 - potentielle, 37
- Energie-Impuls-Relation, 41
- Energieerhaltung, 37
- Ereignis, 2
- Galilei-Transformation, 3
- Gesamtenergie
 - des Universums, 38
- Gravitation, 35, 38
- Homogenität, 9
- Impuls, 32
- Impulserhaltung, 29
- Inertialsystem, 4
- Invariante, 28, 30, 41
- Isotropie, 9
- Kaufmann, 39
- Kernfusion, 36
- Kernspaltung, 36
- Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, 12
- kontravariant, 16
- kovariant, 16
- Kraft, 32
- Laborsystem, 43
- Ladungserhaltung, 29
- Laufzeitmessungen, 7
- Licht
 - Äthertheorie, 9
 - Korpuskulartheorie, 9
- Lichtsignale, 16
- Linielement, 28
- Lorentzkontraktion, 19
- Lorentzkraft, 33
- Lorentztransformation, 23, 39
- Massenerhaltung, 31
- Massenformel, 32
- Michelson, 10
- Minkowskidiagramm, 15
- Quantenelektrodynamik, 38
- Quantengravitation, 38
- Raumzeit, 2
- Relativitätsprinzip, 12, 13
- Ruhenergie, 36
- Ruhmasse, 30
- Ruhsystem, momentanes, 26
- Schwerpunktsystem, 42
- Stoßprobleme, 42
- Superstringtheorie, 38
- Vierergeschwindigkeit, 39
- Viererimpuls, 40
- Viererkraft, 40
- Vierervektoren, 39
- Wechselwirkung
 - elektromagnetische, 5
 - schwache, 5
 - starke, 5
- Weltlinie, 2
- Weltpunkt, 2
- Zerstrahlung, 36